Д.т.н., проф. Е.Г. Жиляков, С.В. Туяков (БелГУ)

Zhilyakov E.G., Tuyakov S.V.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СУБПОЛОСНОГО ЯДРА

ABOUT CALCULATION OF EIGENFUNCTIONS OF A SUBBAND KERNEL

В статье рассмотрен способ вычисления собственных функции субполосного ядра

Key words approximation, eigenvalue, eigenfunction, subband kernel

1. Введение

В монографии [1] введено понятие субполосного ядра. В [1,2] обоснована его роль при решении следующих задач:

1) вычисление точных значений (частей) долей энергии исследуемой функции в заданном частотном интервале;

2) оптимальное частотное разделение исследуемой функции на аддитивные компоненты (оптимальная линейная частотная фильтрация);

3) построение оптимальных обратимых субполосных преобразований

Согласно [1] субполосное ядро представимо в виде:

$$A_r(t-\tau)=\int\limits_{\omega\in D_r} e^{-j\omega(t-\tau)}d\omega=\frac{\sin[\Omega_{r+1}(t-\tau)]-\sin[\Omega_r(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}, \quad (1)$$

где интервалы D_r определяют разбиение оси частот вида

$$D_r=[-\Omega_{r+1}, -\Omega_r) \cup [\Omega_r, \Omega_{r+1}), \Omega_0=0.$$

$$t, \tau\in[0, T]$$

Отметим, что субполосное ядро полностью определяется границами заданного частотного интервала, причем размеры области определения совпадают по обеим координатам с выбранной длительностью анализируемой функции (значение T).

Решение задач, в которых используется субполосное ядро, можно существенно упростить, если воспользоваться разложением ядра по собственным значениям.

Разложение субполосного ядра по собственным значениям имеет вид:

$$A_r(t-\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{kr}q_{kr}(t)q_{kr}(\tau) \qquad (2)$$

Здесь слагаемые правой части соотношения (2) удовлетворяют условиям:

$$\lambda_{kr}q_{kr}(t)=\int_0^T A_r(t-\tau)q_{kr}(\tau)d\tau, \qquad 0\le t\le T \qquad (3)$$

$\lambda_{1r}>\lambda_{2r}>...>0$

$q_{kr}(t)$ являются собственными функциями субполосного ядра, соответствующими собственным числам λ_{kr}.

Следует отметить, что собственные функции имеют самостоятельный интерес как базис для представления функций.

Основные свойства собственных функций и собственных чисел рассмотрены в [1]. Приведем некоторые свойства.

Имеет место следующее равенство:

$$\lambda_{kr}=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in D_r}|Q_{kr}(\omega)|^2 d\omega, \qquad (4)$$

где $Q_{kr}(\omega)$ – трансформанта Фурье соответствующей собственной функции.

Таким образом собственные числа численно равны сосредоточенным в выбранных частотных интервалах долям энергий соответствующих собственных функций.

Собственные числа находятся в диапазоне изменений:

$0<\lambda_{kr}\le 1, \ \forall k$

Также собственные числа удовлетворяют равенству:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{kr}=T(\Omega_{r+1}-\Omega_r)/\pi\,. \qquad (5)$$

Равенство (5) говорит о том, что сумма бесконечного количества положительных собственных чисел ядра вида (1) является конечной. Это означает, что с ростом индекса слагаемые в левой части равенства (5) неограниченно стремятся к нулю. Поэтому количество слагаемых можно выбирать конечным.

Очевидно, что тогда и для правой части представления (2) можно использовать аппроксимацию:

$$A_r(t-\tau)\approx\sum_{k=1}^{J_r}\lambda_{kr}q_{kr}(t)q_{kr}(\tau) \qquad (6)$$

В [1] дается следующая оценка для J_r:

$$J_r=2[T(\Omega_{r+1}-\Omega_r)/2\pi]+2 \tag{7}$$

где [ ] – операция определения ближайшего целого к их содержимому.

Любое субполосное ядро вида (1) после тригонометрических преобразований можно привести к следующему виду:

$$A_r(t-\tau)=2\frac{\sin\left[\frac{\Omega_{r+1}-\Omega_r}{2}(t-\tau)\right]}{\pi(t-\tau)}\cos\left[\frac{\Omega_{r+1}+\Omega_r}{2}(t-\tau)\right] \tag{8}$$

Обозначим через

$$\Delta\omega=(\Omega_{r+1}-\Omega_r)/2,\ \omega_r=(\Omega_{r+1}+\Omega_r)/2,$$

где $\Delta\omega$ задает полуширину и ω_r – центральную частоту r-го частотного интервала субполосного ядра $A_r(t-\tau)$.

Тогда соотношение (8) примет вид:

$$A_r(t-\tau)=2\frac{\sin[\Delta\omega(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}\cos[\omega_r(t-\tau)] \tag{9}$$

При фиксированном $\Delta\omega$ и переменном ω_r субполосное ядро зависит только от ω_r. Обозначим через

$$A_0(t-\tau)=\frac{\sin[\Delta\omega(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}. \tag{10}$$

Тогда соотношение (9) с учетом (10) примет вид:

$$A_r(t-\tau)=2\,A_0(t-\tau)\cos[\omega_r(t-\tau)] \tag{11}$$

Цель статьи: определить условия, при которых справедливы следующие аппроксимации собственных функций $q_{kr}(t)$ субполосного ядра $A_r(t-\tau)$ для любого частотного интервала:

$$q_{kr}(t)\approx\begin{bmatrix} Bq_{k0}(t)\cos[\omega_r(t-T/2)], \\ Dq_{k0}(t)\sin[\omega_r(t-T/2)] \end{bmatrix} \tag{12}$$

где $q_{k0}(t)$ – собственная функция ядра $A_0(t-\tau)$:

$$\mu_{k0}q_{k0}(t)=\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)d\tau, \qquad 0\le t\le T \tag{13}$$

B и *D* – константы, такие, что L^2 – норма $q_{kr}(t)$ равна единице. При этом аппроксимации (12) понимаются с точностью до знака.

2. Аппроксимация собственных функций

Положим

$$\psi_{\cos}(t) = \int_0^T A_r(t-\tau)\left[Bq_{k0}(\tau)\cos[\omega_r(\tau - T/2)]\right]d\tau \qquad (14)$$

Подставим в выражение (14) представление (11). В результате получим:

$$\psi_{\cos}(t) = 2\int_0^T A_0(t-\tau)\cos[\omega_r(t-\tau)]\left[Bq_{k0}(\tau)\cos[\omega_r(\tau - T/2)]\right]d\tau \qquad (15)$$

Сгруппируем два выражения $\cos[\omega_r(t\text{-}\tau)]$ и $\cos[\omega_r(\tau\text{-}T/2)]$ в последнем равенстве и преобразуем по формулам тригонометрии (переход от произведения к сумме):

$$\cos[\omega_r(t-\tau)]\cos[\omega_r(\tau - T/2)] = \frac{1}{2}\left[\cos[\omega_r(t+T/2) - 2\omega_r\tau] + \cos[\omega_r(t - T/2)]\right] \qquad (16)$$

В правой части тождества (16) выражение, содержащее τ по формулам сложения представим в виде:

$$\cos[\omega_r(t+T/2) - 2\omega_r\tau] = \cos[\omega_r(t+T/2)]\cos[2\omega_r\tau] + \sin[\omega_r(t+T/2)]\sin[2\omega_r\tau] \qquad (17)$$

С учетом (16) и (17) преобразуем соотношение (15):

$$\begin{aligned}\psi_{\cos}(t) &= B\cos[\omega_r(t-T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)d\tau + \\ &+ B\cos[\omega_r(t+T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)\cos[2\omega_r\tau]d\tau + \\ &+ B\sin[\omega_r(t+T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)\sin[2\omega_r\tau]d\tau\end{aligned} \qquad (18)$$

Отсюда следует, что аппроксимация (12) (верхнее выражение) справедлива, если два последних слагаемых равны нулю.

Необходимо оценить соответствующие интегралы:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)\cos[2\omega_r\tau]d\tau, \\ I_2 &= \int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)\sin[2\omega_r\tau]d\tau\end{aligned} \qquad (19)$$

Оценить интегралы (19) можно с помощью теории частотной фильтрации.

Удобно в интегралах (19) представить $A_0(t\text{-}\tau)$ в явном виде по формуле (10) и ввести функции

$$\varphi_{\cos}(\tau) = q_{k0}(\tau)\cos[2\omega_r\tau];$$
$$\varphi_{\sin}(\tau) = q_{k0}(\tau)\sin[2\omega_r\tau] \tag{20}$$

В результате получим:

$$I_1 = \int_0^T \frac{\sin[\Delta\omega(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}\varphi_{\cos}(\tau)d\tau,$$
$$I_2 = \int_0^T \frac{\sin[\Delta\omega(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)}\varphi_{\sin}(\tau)d\tau \tag{21}$$

Правая часть выражений (21) есть свертка функций ограниченной длительности и импульсной реакции идеального фильтра [3].

Доля энергии собственной функции $q_{k0}(\tau)$ в частотном интервале $\Delta\omega$ определяется на основе значения ее собственного числа μ_{k0}. Поэтому при $\mu_{k0}\approx 1$ функции (20) в частотной области будут характеризоваться центральной частотой $2\omega_r$ и шириной $2\Delta\omega$.

Тогда при условии

$$\omega_r > \Delta\omega \; (2\omega_r - \Delta\omega > \Delta\omega) \tag{22}$$

значения интегралов (19) будут близки к нулю.

Условие (22) гарантирует, что частотные интервалы идеального фильтра и функций (20) не пересекаются.

Значит при условиях

$$\begin{cases} \mu_{k0} \approx 1 \\ \omega_r > \Delta\omega \end{cases} \tag{23}$$

соотношение (18) примет вид:

$$\psi_{\cos}(t) \approx B\cos[\omega_r(t-T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)d\tau \tag{24}$$

Что в свою очередь с учетом (13) можно записать так:

$$\psi_{\cos}(t) \approx B\cos[\omega_r(t-T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)d\tau = B\mu_{k0}q_{k0}(t)\cos[\omega_r(t-T/2)] \tag{25}$$

Учитывая первое условие (23) соотношение (25) примет вид:

$$\psi_{\cos}(t) \approx Bq_{k0}(t)\cos[\omega_r(t-T/2)] \tag{26}$$

Правая часть приближенного равенства (26) совпадает с верхним выражением аппроксимации (12).

Окончательно получаем:

$$q_{kr}(t) = \psi_{\cos}(t) \approx Bq_{k0}(t)\cos[\omega_r(t - T/2)] \tag{27}$$

Необходимо отметить, что если

$\omega_r >> \Delta\omega$

то первое условие (23) можно ослабить.

Проверим вторую часть аппроксимации

$$\psi_{\sin}(t) = \int_0^T A_r(t-\tau)[Dq_{k0}(\tau)\sin[\omega_r(\tau - T/2)]]d\tau \tag{28}$$

Все рассуждения аналогичны, поэтому опустим часть преобразований.

$$\begin{aligned} \psi_{\sin}(t) = D\sin[\omega_r(t - T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)d\tau + \\ + D\sin[\omega_r(t + T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)\cos[2\omega_r\tau]d\tau - \\ - D\cos[\omega_r(t + T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)\sin[2\omega_r\tau]d\tau \end{aligned} \tag{29}$$

Аналогично нужно найти значения второго и третьего слагаемых в правой части соотношения (29). Для этого нужно оценить соответствующие интегралы, совпадающие с рассмотренными выше (19).

При условиях, рассмотренные выше, соотношение (29) примет вид:

$$\begin{aligned} \psi_{\sin}(t) \approx D\sin[\omega_r(t - T/2)]\int_0^T A_0(t-\tau)q_{k0}(\tau)d\tau = \\ = D\mu_{k0}q_{k0}(t)\sin[\omega_r(t - T/2)] \end{aligned} \tag{30}$$

При $\mu_{k0} \approx 1$ (30) примет вид:

$$\psi_{\sin}(t) \approx Dq_{k0}(t)\sin[\omega_r(t - T/2)] \tag{31}$$

Правая часть последнего приближенного равенства соответствует нижнему выражению аппроксимации (12).

Окончательно получаем:

$$q_{kr}(t) = \psi_{\sin}(t) \approx Dq_{k0}(t)\sin[\omega_r(t - T/2)] \tag{32}$$

3. Вычислительные эксперименты

С целью оценки погрешностей аппроксимаций вида (12) были проведены вычислительные эксперименты. Для их реализация необходимо производить дискретизацию области определения собственных функций и субполосного ядра. Тогда при замене интеграла в определении (3) квадратурной формулой вычисление собственных значений субполосного ядра можно свести к задаче вычисления собственных значений, получающихся в результате матриц.

Перепишем определение (3) , заменив индекс k на n:

$$\lambda_{nr} q_{nr}(t) = \int_0^T A_r(t-\tau) q_{nr}(\tau) d\tau, \qquad 0 \le t \le T \tag{33}$$

Используя квадратурную формулу прямоугольников, равенство (33) приведем к виду:

$$\lambda_{nr} q_{nr}(t_i) = \Delta \sum_{k=1}^{N} A_r(t_i - \tau_k) q_{nr}(\tau_k) \tag{34}$$

где Δ - интервал дискретизации.

Δ=T/(N-1);

t_i=(i-1)*Δ;

τ_k=(k-1)*Δ;

i, k =1,…,N

$$A_r(t_i - \tau_k) = 2\frac{\sin[(\Delta\omega)\Delta(i-k)]}{\pi\Delta(i-k)} \cos[\omega_r \Delta(i-k)] \tag{35}$$

Удобно в последнем равенстве произвести замену переменных:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\omega} &= \Delta\omega \cdot \Delta \\ \overline{\omega_r} &= \omega_r \cdot \Delta \end{aligned}, \tag{36}$$

где $\overline{\Delta\omega}$, $\overline{\omega_r}$ являются нормированными, соответственно, полушириной и центральной частотой r-го частотного интервала.

Подставив правую часть равенства (35) в соотношение (34) с учетом (36), получим:

$$\lambda_{nr} \overrightarrow{q_{nr}} = A_r \overrightarrow{q_{nr}},$$

Последнее соотношение является определением собственного вектора матрицы A_r:

$$A_r = \{a^r{}_{i,k}\}$$

$$\{a^r{}_{i,k}\} = 2\frac{\sin\left[\left(\overline{\Delta\omega}\right)(i-k)\right]}{\pi(i-k)}\cos\left[\overline{\omega_r}(i-k)\right], \qquad i,k = 1,\ldots,N$$

Матрица A_r с элементами $\{a^r{}_{i,k}\}$ в [1] предложено именовать субполосной матрицей. Соответственно матрица A_0 с элементами $\{a^0{}_{i,k}\}$ имеет вид:

$$A_0 = \{a^0{}_{i,k}\}$$

$$\{a^0{}_{i,k}\} = \frac{\sin\left[\left(\overline{\Delta\omega}\right)(i-k)\right]}{\pi(i-k)}, \qquad i,k = 1,\ldots,N$$

Для вычисления погрешности аппроксимаций использовалась величина среднеквадратического отклонения:

$$\delta_r{}^{cp}(\cos) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left(q_{nr}(m) - qq^{\cos}{}_{nr}(m)\right)^2};$$

$$\delta_r{}^{cp}(\sin) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left(q_{nr}(m) - qq^{\sin}{}_{nr}(m)\right)^2},$$

где q_{nr} – собственный вектор матрицы A_r, $qq^{\cos}{}_{nr}$ и $qq^{\sin}{}_{nr}$, соответственно, верхняя и нижняя части аппроксимации (12) собственного вектора q_{nr} матрицы A_r.

Далее приводятся результаты экспериментов.

Эксперимент 1. $N=129$, $\overline{\Delta\omega}=\pi/32$.

Таблица 1

Значения параметров и оценка погрешности

μ_{k0}	$\overline{\omega_r}$	δ_r^{cp} (cos)	δ_r^{cp} (sin)
0,99994	5π/32	0.0025	0.0027
0,99776		0.0044	0.0044
0,96213		0.0052	0.0053
0,73382		0.0058	0.0057
0,28723		0.0077	0.0076
0,04629		0.0113	0.0119
0,99994	7,39π/32	0.0012	0.0011
0,99776		0.0022	0.0021
0,96213		0.0029	0.0028
0,73382		0.0033	0.0034

0,28723		0.0050	0.0050
0,04629		0.0084	0.0082
0,99994	15π/32	3.1401e-004	2.8088e-004
0,99776		5.1123e-004	4.7090e-004
0,96213		5.8814e-004	5.4408e-004
0,73382		7.0686e-004	6.6251e-004
0,28723		0.0014	0.0014
0,04629		0.0032	0.0035
0,99994	23,71π/32	8.5813e-004	7.9301e-004
0,99776		0.0013	0.0013
0,96213		0.0014	0.0014
0,73382		0.0014	0.0015
0,28723		0.0023	0.0023
0,04629		0.0050	0.0045
0,99994	30π/32	0.0033	0.0040
0,99776		0.0088	0.0083
0,96213		0.0126	0.0130
0,73382		0.0149	0.0157
0,28723		0.0213	0.0217
0,04629		0.0287	0.0339

μ_{k0} – k-ое значение собственного числа собственного вектора q_{k0} матрицы A_0.

Эксперимент 2. $N=513$, $\overline{\Delta\omega}=\pi/128$.

Таблица 2

Значения параметров и оценка погрешности

μk0	$\overline{\omega_r}$	δrср (cos)	δrср (sin)
0,99994	7π/128	8.8744e-004	8.8896e-004
0,99761		0.0015	0.0015
0,96008		0.0019	0.0019
0,72478		0.0021	0.0021
0,27779		0.0029	0.0029
0,04382		0.0045	0.0045
0,99994	13,46π/128	4.5074e-004	4.4375e-004
0,99761		7.7918e-004	7.7642e-004
0,96008		9.6754e-004	9.6730e-004
0,72478		0.0011	0.0011
0,27779		0.0015	0.0016

0,04382		0.0024	0.0024
0,99994	64π/128	3.3280e-005	3.1837e-005
0,99761		5.4377e-005	5.2859e-005
0,96008		6.2060e-005	6.0482e-005
0,72478		7.8622e-005	7.7200e-005
0,27779		1.7664e-004	1.7721e-004
0,04382		4.1363e-004	4.2245e-004
0,99994	111π/128	3.5944e-004	3.6611e-004
0,99761		6.1594e-004	6.1921e-004
0,96008		7.4754e-004	7.4881e-004
0,72478		8.3520e-004	8.3180e-004
0,27779		0.0012	0.0012
0,04382		0.0018	0.0018
0,99994	120π/128	7.8120e-004	7.8609e-004
0,99761		0.0013	0.0014
0,96008		0.0017	0.0017
0,72478		0.0019	0.0019
0,27779		0.0026	0.0026
0,04382		0.0039	0.0040

4. Заключение

Таким образом, имеется простой способ вычисления собственных функций субполосных ядер $A_r(t-\tau)$ с фиксированным $\Delta\omega$ и переменной ω_r.

Литература

1. Жиляков Е.Г. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным.. Белгород, БелГУ, 2007. 160 с.

2. Жиляков Е.Г., Белов С.П. и Черноморец А.А. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений. – "Вопросы радиоэлектроники", сер. ЭВТ, 2010, вып. 1, с. 10-25.

3. Френкс Л. Теория сигналов. М., Сов. радио, 1974.

Статья поступила 12.10.2010