

УДК 550.83/84

В. М. ШИРОКОВ, В. М. МОСКОВКИН

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ ПЛЯЖА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ ИСТИРАНИЯ ПЛЯЖЕОБРАЗУЮЩЕГО МАТЕРИАЛА

Задача анализа устойчивости равновесных состояний береговых систем, в частности пляжей, актуальна в связи с интенсивным хозяйственным освоением береговой зоны морей и водохранилищ. Одним из факторов, приводящих к нарушению таких равновесных состояний, является чрезмерное искусственное изъятие пляжеобразующего материала из береговой зоны. Этому вопросу посвящена данная работа.

Динамика процесса пляжеформирования в условиях поступления материала с берегового уступа (клифа) и управляющего фактора описывается уравнением баланса пляжеобразующего материала [1—3]:

$$\frac{dW}{dt} = aHf(W) - \varphi(W) + u, \quad (1)$$

где  $W$  — объем материала пляжа на единицу длины береговой линии,  $m^2$ ;  $a$  — доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег ( $0 < a < 1$ );  $H$  — высота клифа,  $m$ ;

$f(W)$  — скорость отступления клифа,  $m/г$ ;  $\varphi(W)$  — интенсивность истирания материала при волновом воздействии,  $m^2/г$ ;

$u$  — интенсивность подсыпки ( $u > 0$ ) или изъятия ( $u < 0$ ) материала,  $m^2/г$ .

В качестве функции  $f(W)$  возьмем наиболее универсальную трехпараметрическую аппроксимационную функцию [3]:

$$f(W) = \frac{B(W + \varepsilon)}{(W + r)^2}, \quad (2)$$

где  $B, \varepsilon, r = \text{const} > 0$ .

Линейный закон истирания  $\varphi(W) = kW$  [1—4], который предполагает истирание материала равномерно во всем объеме пляжа, рассматривается обычно в качестве функции  $\varphi(W)$ .

В то же время для крупных пляжей истирание происходит в верхнем наиболее подвижном слое наносов (мощность порядка 1 м), и при достижении пляжем предельной ширины будет наблюдаться стабилизация процесса истирания материала на некотором максимальном постоянном уровне ( $c$ ). Предполагая, что при малых объемах ( $W$ ) пляжа истирание происходит по линейному закону, можно записать следующий наиболее универсальный нелинейный закон истирания пляжеобразующего материала:

$$\varphi(W) = \frac{cW}{\gamma + W}, \quad (3)$$

где  $c, \gamma = \text{const} > 0$ .

При анализе равновесных состояний пляжа, которые определяются из уравнения (1) при  $dW/dt = 0$ , возможны катастрофические ситуации

исчезновения пляжа при изменении параметров этого уравнения. Такие ситуации в основном будем связывать с управляющим фактором  $u$  при изъятии материала. При анализе устойчивости равновесных состояний пляжа и возникающих здесь катастрофических ситуациях будем использовать простейшие методы качественного анализа обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (1) и методологию, развитую в теории катастроф [5—7].

Проведем анализ стационарных точек уравнения (1) (в положительной области  $W \geq 0$ ), определяемых из уравнения

$$\frac{aHB(W + \varepsilon)}{(W + r)^2} - \frac{cW}{\gamma + W} + u = 0. \quad (4)$$

Наиболее простая ситуация возникает при  $r - 2\varepsilon < 0$ , когда функция  $z = \frac{aHB(W + \varepsilon)}{(W + r)^2}$  является монотонно-убывающей при  $W \geq 0$ .

Здесь единственная устойчивая стационарная точка ( $W_{ст}$ ) существует при  $0 \leq u < c$ , при  $u \geq c$  такая точка отсутствует и  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \infty$  (неограниченный рост пляжа, что теоретически возможно, если интенсивность подсыпки все время превышает максимальный уровень истирания пляжеобразующего материала). Наличие или отсутствие стационарной точки легко видеть при графическом рассмотрении уравнения (4).

При  $r - 2\varepsilon > 0$  локальный максимум функции  $z = \frac{aHB(W + \varepsilon)}{(W + r)^2}$ , равный  $z_{max} = \frac{aHB}{4(r - \varepsilon)}$  при  $W_{max} = r - 2\varepsilon$ , перемещается в положительную область, и здесь при  $0 \leq u < c$  существует, по крайней мере, одна устойчивая стационарная точка, при  $u \geq c$  такие точки отсутствуют ( $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \infty$ ).

При изъятии материала и  $r - 2\varepsilon < 0$  единственная устойчивая стационарная точка существует при  $0 < |u| \leq \frac{aHB\varepsilon}{r^2}$ . В противном случае ( $|u| > \frac{aHB\varepsilon}{r^2}$ ) в уравнении (1) всегда имеет место неравенство  $\frac{dW}{dt} < 0$ , что говорит об исчезновении пляжа. Полученный критерий возникновения катастрофической ситуации останется неизменным и при линейном законе истирания.

Наиболее сложные ситуации возникают при изъятии материала в условиях  $r - 2\varepsilon > 0$  и  $0 < |u| < \frac{aHB}{4(r - \varepsilon)}$  в отличие от случая  $|u| > \frac{aHB}{4(r - \varepsilon)}$ , когда происходит исчезновение пляжа (в области  $W \geq 0$  решения уравнения (4) не существует).

В этой ситуации для дальнейшего анализа будем использовать потенциальную функцию  $U(W)$ :  $\frac{dW}{dt} = F(W) = -\frac{dU(W)}{dW}$ , широко используемую в методах теории катастроф.

Потенциальная функция для нашего уравнения (1), с учетом функций (2), (3), имеет вид:

$$U(W) = -aHB \ln(W + r) - c\gamma \ln(\gamma + W) + \frac{(\varepsilon - r)aHB}{(W + r)} + W(c - u). \quad (5)$$

Пусть для уравнения (1) имеют место три стационарные точки (максимально возможное количество) или, что одно и то же, три корня алгебраического уравнения (4). Для этой ситуации (рис. 1) построим качественно функции  $F(W)$  и  $U(W)$ . Здесь средняя стационарная точка ( $W_{ст2}$ ) является неустойчивой и соответствует минимуму функции  $U(W)$ , остальные две стационарные точки — устойчивые и соответствуют минимумам потенциальной функции. Это легко показать следующим образом. Возьмем в окрестности точки  $W_{ст2}$  некоторую точку  $W > W_{ст2}$ . В этом случае  $F(W) = dW/dt > 0$  (см. рис. 1), т. е.  $W$  будет удаляться от точки  $W_{ст2}$ , то же самое будет иметь место и при  $W < W_{ст2}$ .

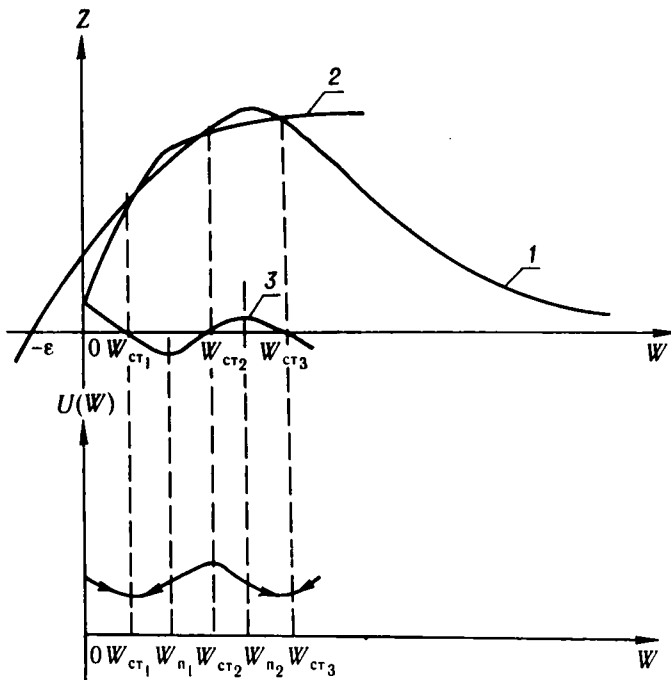


Рис. 1. Качественный характер поведения функций  $F(W)$  и  $U(W)$ :

$$1 - Z = aHB(W + \epsilon)/(W + r)^2; \quad 2 - Z = \frac{cW}{\gamma + W} + |u|; \quad 3 - Z = F(W)$$

Соответствующие направления движения в устойчивые стационарные состояния показаны на кривой, представляющей собой функцию  $U(W)$ . Эстремумы функции  $F(W)$  соответствуют перегибам ( $W_{п}$ ) функций  $U(W)$  и  $W(t)$ , а нули функции  $F(W)$  — экстремумам функции  $U(W)$  и стационарным точкам уравнения (1) (или нулям уравнения (4)). В зависимости от начального условия  $W(0) = W_0$  имеем шесть типов решений  $W(t)$  (рис. 2).

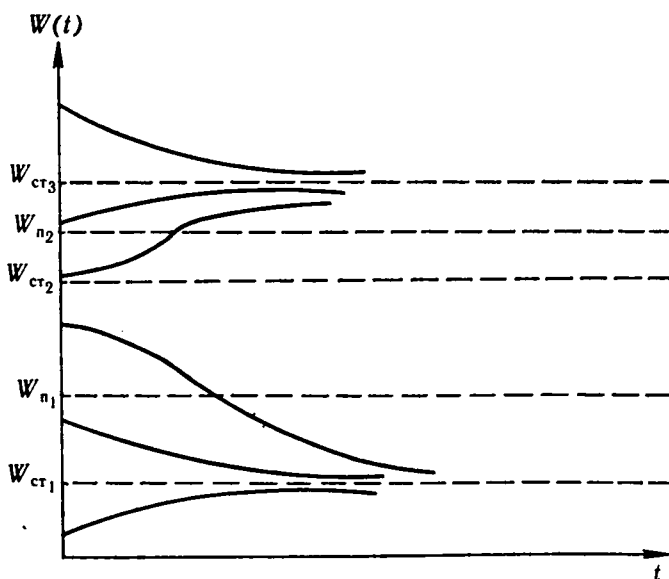


Рис. 2. Качественный характер поведения решений  $W(t)$  уравнения (1)

1.  $W_0 > W_{ст3}$ ,  $W(t)$  — монотонно-убывающая вогнутая функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст3}$ .

2.  $W_{п2} < W_0 < W_{ст3}$ ,  $W(t)$  — монотонно-возрастающая выпуклая функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст3}$ .

3.  $W_{ст2} < W_0 < W_{п2}$ ,  $W(t)$  — монотонно-возрастающая вогнуто-выпуклая (с перегибом) функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст3}$ .

4.  $W_{п1} < W_0 < W_{п2}$ ,  $W(t)$  — монотонно-убывающая выпукло-вогнутая (с перегибом) функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст1}$ .

5.  $W_{ст1} < W_0 < W_{п1}$ ,  $W(t)$  — монотонно-убывающая вогнутая функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст1}$ .

6.  $0 < W_0 < W_{ст1}$ ,  $W(t)$  — монотонно-возрастающая выпуклая функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст1}$ .

Таким образом, при наличии трех стационарных точек имеет место стремление к одной из устойчивых точек (при  $W_0 < W_{ст2}$   $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст1}$ ; при  $W_0 > W_{ст2}$   $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст3}$ ) и исчезновения пляжа не происходит. В случае сближения друг с другом точек  $W_{ст1}$  и  $W_{ст2}$  (при изменении параметров системы) левый минимум вырождается, что приводит к скачку устойчивого состояния системы из левого минимума потенциальной функции в правый. При вырождении правой стационарной точки получим скачок в левый минимум потенциальной функции. Условия вырождения минимумов потенциальной функции (условия касания кривых  $z = aHf(W)$  и  $z = \varphi(W) + |u|$ ) могут быть найдены из анализа соответствующего кубического уравнения, получаемого из уравнения (4).

Рассмотренные катастрофические ситуации при наличии трех стационарных (критических) точек могут быть сведены к канонической катастрофе «сборки» [5—7]. Физически это соответствует таким ситуациям, когда пляж из одного устойчивого состояния (с объемом материала  $W_{ст1}$ ) может скачкообразно переходить в другое устойчивое состояние (с объемом материала  $W_{ст3}$ ).

Для целей дальнейшего, более конкретного, анализа приведем уравнение (4) к кубическому:

$$-(c + u)W^3 + (A - cG - uD)W^2 + (E - cL - uM)W + N - uF = 0, \quad (6)$$

где  $A = aHB$ ;  $G = 2r$ ;  $D = 2r + \gamma$ ;  $E = aHB(\epsilon + \gamma)$ ;  $L = r^2$ ;  $M = r^2 + 2r\gamma$ ;  $N = aHB\epsilon\gamma$ ;  $F = r^2\gamma$ .

На основе этого уравнения с использованием стандартной фортрановской программы SUBC могут находиться корни этого уравнения, являющиеся экстремумами потенциальной функции (5). В качестве управляющих параметров возьмем  $u$ ,  $c$ . Уравнение (6) в пространстве переменных  $u$ ,  $c$ ,  $W$  описывает многообразие катастрофы (поверхность равновесия, на которой находятся все стационарные точки  $W_{ст}$ ). Выразив из уравнения (6) параметры  $u$  или  $c$  как функции остальных двух переменных, получим сечения многообразия катастрофы. Здесь приведем только одно сечение, которое будет использоваться при конкретных расчетах:

$$c = \frac{uW^3 + (uD - A)W^2 + (uM - E)W - N + uF}{-(W^3 + GW^2 + LW)}. \quad (7)$$

Бифуркационное множество  $\Psi(u, c) = 0$ , на котором происходит вырождение стационарных точек (внезапные скачки), получить в явном виде затруднительно. Его в принципе можно найти из условия приравнивания к нулю дискриминанта кубического уравнения (6). Относительно управляющего параметра  $u$  оно может быть записано в виде алгебраического уравнения шестой степени и для его построения необходимо определять действительные корни полинома шестой степени при различных параметрах  $c$ .

Приведем результаты численных экспериментов для условий прочных пород Новороссийского геологического района:  $a = 0,3$ ;  $B = 0,04$  м<sup>3</sup>/г;  $\epsilon = 0,0025$  м<sup>2</sup>;  $r = 1$  м<sup>2</sup>;  $c = 0,4$  м<sup>2</sup>/г;  $\gamma = 10$  м<sup>2</sup>. При  $50 \leq H \leq 100$  м, учитывая полученные приближенные критерии существования стационарных точек, можно видеть, что основные характерные изменения функций  $F(W)$  и  $U(W)$  наблюдаются при  $-0,3 < u < 0$ . Более точные оценки получим, решая кубическое уравнение (6) при различных параметрах  $u$  в этом интервале и двух значениях  $H$  (см. таблицу).

Положительные корни кубического уравнения (6) при различных  $u$  и  $H$

Устойчивые стационарные точки	$H=100$ м				$H=50$ м			
	$u=0$	$u=-0,1$	$u=-0,2$	$u=-0,3$	$u=-0,0025$	$u=-0,05$	$u=-0,075$	$u=-0,1$
$W_{ст1}$	5,910	3,571	2,005	—	2,890	2,343	1,838	1,337
$W_{ст2}$	—	0,103	0,291	—	0,047	0,109	0,094	0,330

Отсутствие положительных корней показано прочерком. Здесь первый корень ( $W_{ст1}$ ) соответствует минимуму потенциальной функции (устойчивая стационарная точка), второй — максимуму. С увеличением интенсивности изъятия материала отчетливо наблюдается сближение корней кубического уравнения или экстремумов потенциальной функции. При  $H = 100$  м их вырождение, соответствующее катастрофической ситуации, происходит в интервале управления:  $-0,3 < u < -0,2$  в окрестности единичного объема материала.

Учитывая, что максимум функции  $z = aHf(W) = \frac{aHB(W+\epsilon)}{(W+r)^2}$  равен 0,15, получим для  $H=50$  м следующий интервал изменения параметра  $u$ , при котором будет иметь место катастрофическая ситуация:  $-0,15 < u < -0,1$ . Таким образом, при  $H=50$  м и в этом интервале изменения параметра  $u$  будет происходить деградация устойчивого пляжа (в данном случае наблюдается скачок из ненулевого равновесного состояния в нулевое). Аналогичные результаты были получены нами и при линейном законе истирания  $\phi(W) = kW$ , когда коэффициент истираемости изменяется в интервале:  $0,05 < k < 0,1$  г<sup>-1</sup>.

Расчеты сечений (7) многообразия катастрофы при  $H = 50$  м (остальные параметры без изменения) и управлении  $u$ , изменяющемся от  $u = -0,025$  до  $u = -0,225$  с шагом  $\Delta u = 0,025$ , приведены на рис. 3. Ось  $W = 0$  является вертикальной асимптотой кривых  $c(W)$ , причем  $\lim_{W \rightarrow 0} c(W) = -\infty$ , поэтому все кривые  $c(W)$ , кроме кривой при  $u=0$ , имеют пикообразные максимумы в случае малых  $u$  и  $W$ . С увеличением интенсивности изъятия материала происходит сближение максимума и минимума, их вырождение происходит при  $c(W) < 0$ , т. е. в нефизической области. Для этих кривых ( $c(W) < 0$ ) отсутствуют положительные стационарные состояния (исчезновение пляжа). Катастрофическая ситуация возникает при  $u \approx -0,15$  м<sup>2</sup>/г (см. рис. 3), что немного уточняет ранее полученный интервал:  $-0,15 < u < -0,1$ . Отметим, что точки пересечения нисходящих ветвей кривых  $c(W)$  с прямой  $c = 0,4$  соответствуют устойчивым стационарным точкам ( $W_{ст1}$ ), показанным в таблице при  $H = 50$  м.

Таким образом, анализ кубического уравнения (6) для условий прочных пород Новороссийского геологического района выявил наличие только двух стационарных состояний и возможность их вырождения (катастрофа «складки»), в отличие от трех стационарных состояний (катастрофа «сборки»), обсуждавшихся при общетеоретическом рассмотрении задачи (см. рис. 2).

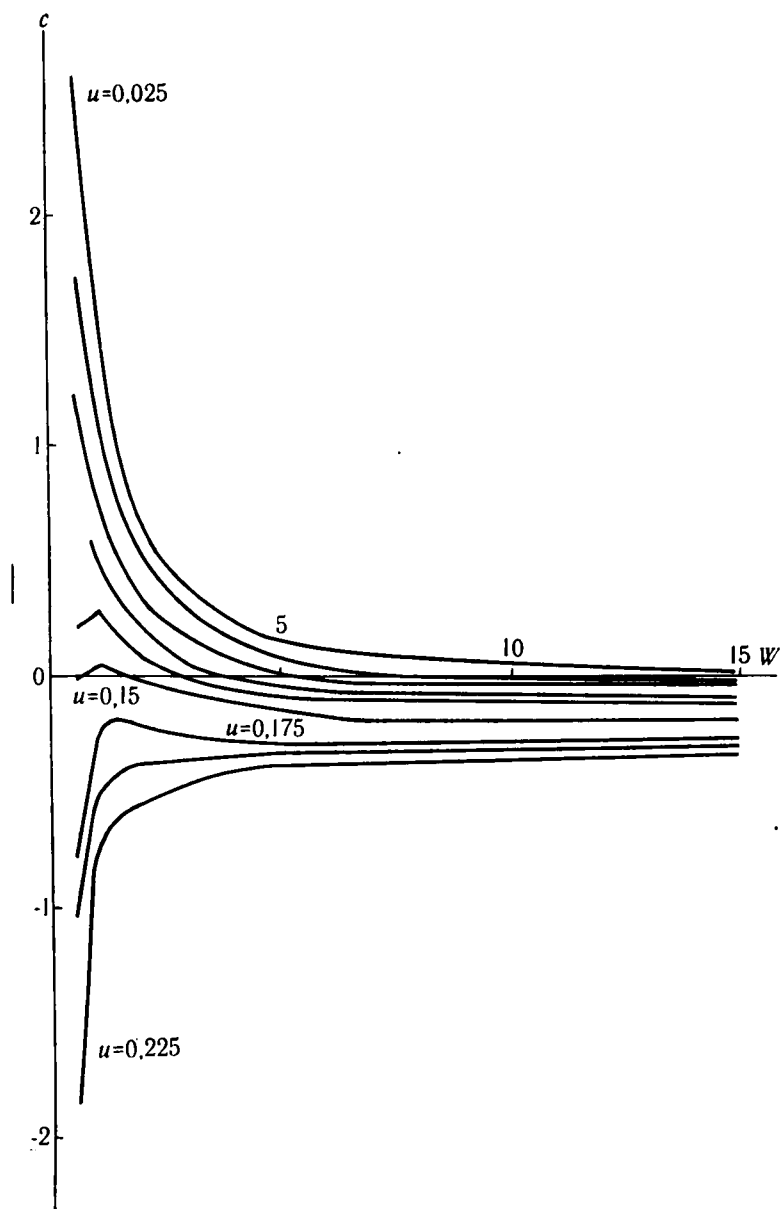


Рис. 3. Расчетные сечения  $c(W)$  (7) многообразия катастрофы (6) при различных значениях управляющего фактора ( $u$ ) для условий Новороссийского геологического района

### Список литературы

1. Московкин В. М., Есин Н. В. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 3.
2. Московкин В. М., Есин Н. В. // Водные ресурсы. 1986. № 4.
3. Есин Н. В., Дмитриев В. А., Московкин В. М. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 1.
4. Есин Н. В., Савин М. Т., Жиляев А. П. Абразивный процесс на морском берегу. Л., 1980.
5. Арнольд В. И. Теория катастроф. М., 1983.
6. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М., 1984.
7. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М., 1980.