MSC 11S40

О НУЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С L-ФУНКЦИЯМИ ГЕККЕ МНИМЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ, КОТОРЫЕ ЛЕЖАТ НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: demidovnext@yandex.ru

Получена новая нижняя оценка числа нулей на коротких промежутках для линейных комбинаций L–функциям Гекке мнимых квадратичных полей.

Пусть $N_0(T)$ — число нулей $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ на промежутке $(0, T\,]$.

В 1921 году Харди и Литтлвуд [1] доказали, что

$$N_0(T) \geq c_1\,T, \quad c_1 > 0 \text{ — абсолютная постоянная.}$$

В 1942 году А. Сельберг [2] получил правильную по порядку оценку $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq c_2\,T\log T, \quad c_2 > 0 \text{ — абсолютная постоянная.}$$

Для арифметических рядов Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению риманова типа, но не имеющих эйлерова произведения, правильных по порядку нижних оценок для числа их нулей на отрезках критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ пока не получено.

В 1980 году С.М. Воронин [3] доказал, что

$$N_0(T,f) > c_3 T \exp\left\{\frac{\sqrt{\log\log\log\log T}}{20}\right\},$$

где $N_0(T,f)$ — число нулей ρ функции Дэвенпорта–Хейльбронна $f(s)$ таких, что $\Re\rho = \frac{1}{2}$, $0 < \Im\rho \leq T$, $c_3 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1989 году А.А. Карацуба [4] с помощью нового метода оценок снизу числа нулей некоторых рядов Дирихле на отрезках критической прямой показал, что

$$N_0(T,f) \geq T\sqrt{\log T}\,(\log T)^{-\varepsilon},$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, $T > T_0(\varepsilon) > 1$.

В 1991 году А.А. Карацуба [5] поставил и решил своим методом 1989 года задачу о нижней оценке числа нулей линейных комбинаций L–функций Дирихле на отрезке критической прямой.

В 1996 году С.А. Гриценко рассмотрел вопрос о числе $N_0(T,f)$ нулей на отрезке $[0,T]$ функции

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j Z(t, F_j), \tag{1}$$

где a_j — произвольные вещественные числа, а $Z(t, F_j)$ — аналоги функции Харди, соответствующие функциям $F_j(s)$ из класса Сельберга степени 2 ($j = 1, \ldots, N$).

В [6] доказано, что при условии справедливости некоторых гипотез, являющихся гипотезами Сельберга и их слегка усиленными вариантами, справедлива оценка

$$N_0(T, f) \gg T \exp\{\sqrt{\log\log\log T}\}. \tag{2}$$

В 1997 году С.А. Гриценко [7] доказал неравенство (2) безусловно в случае, когда $F_1(s), \ldots, F_N(s)$ — L–функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля.

В 2010 году И.С. Резвякова [8] применила к последней задаче метод А.А. Карацубы [3] и получила оценку

$$N_0(T, f) \gg T(\log T)^{2/h(-D)} \exp\{-c\sqrt{\log\log T}\},$$

где $h(-D)$ — порядок группы классов идеалов, $c > 0$.

Мы рассмотрели задачу о нулях функции $f(t)$, определяемой равенством (1), лежащих на коротких промежутках. Основной результат изложен в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $T^{15/16+5\varepsilon} \leq H \leq T$. Пусть $F_1(s), \ldots, F_N(s)$ — L–функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля вида $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$, где p_0 — простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, а функция $f(t)$ определена равенством (1), в котором $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — произвольные вещественные числа. Пусть $N_0(T, f)$ — число нулей функции $f(t)$ на отрезке $[0, T]$.*

Тогда существует $c > 0$ такое, что

$$N_0(T + H, f) - N_0(T, f) \gg H(\log T)^{2/h(p_0)} \exp\{-c\sqrt{\log\log T}\},$$

где $h(p_0)$ — число классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$.

Литература

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeroes of Riemann's zeta–function on the critical line // Math. Z. – 1921. – 10. – P.283-317.

2. Selberg A. On the zeroes of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. – 1942. – V.10.

3. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – 44, №1. – С.63-91.

4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – 54, №2. – С.303-315.

5. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – 55, №.3. – С.483-514.

6. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Изв. РАН.Сер. матем. – 1996. – 60, №4. – С.3-42.

7. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с L-функций Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН.Сер. матем. – 1997. – 61, №1. – С.45-69.

8. Резвякова И.С. О нулях линейных комбинаций L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН.Сер. матем. – 2010. – 74, №6. – С.183-222.