

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
( **Н И У « Б е л Г У »** )

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК  
Кафедра теоретической и математической физики

## **ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛООБМЕНА НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ СФЕ- РИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ С ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДОЙ**

Дипломная работа студента  
очной формы обучения  
направления подготовки 03.03.02 Физика  
4 курса группы 07001210

Трубаева Алексея Андреевича

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Малай Н.В.

**БЕЛГОРОД - 2016**

## РЕФЕРАТ

Рассмотрено влияние движения среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности), слоя Кнудсена и излучения на теплообмен умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности. Получены выражения для полей температуры вне и внутри аэрозольной частицы до первого порядка малости по числу Рейнольдса, получено выражение для локального потока тепла, числа Нуссельта, а также проведен количественный анализ влияния движения среды, слоя Кнудсена и излучения на распределения температур вне и внутри частицы и теплообмена.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава I. Постановка задачи</b> .....	10
<b>Глава II. Метод сращиваемых асимптотических разложений</b> .....	15
<b>Глава III. Поля температур вне и внутри нагретой твердой умеренно крупной частицы сферической формы</b> .....	18
<b>Глава IV. Поток тепла на поверхность частицы. Анализ полученных результатов</b> .....	29
<b>Заключение</b> .....	31
<b>Список использованной литературы</b> .....	32

## ВВЕДЕНИЕ

**Тема исследования:** влияние на теплообмен умеренно крупной твердой аэрозольной частицы сферической формы макроскопического движения среды, слоя Кнудсена и излучения в газообразной среде при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

**Актуальность исследования:** при взаимодействии тел, у которых различные температуры, происходит обмен энергией, поэтому интенсивность движения частиц тела, имевшего меньшую температуру, увеличивается, а интенсивность движения частиц тела с более высокой температурой уменьшается. Вследствие такого взаимодействия одно из тел остывает, а другое тело нагревается. Поток энергии, который передается частицами тела с более высокой температурой частицам тела с более низкой температурой в литературе принято называть тепловым потоком. Отсюда следует, чтобы возник тепловой поток, т.е. возник процесс теплообмена между различными областями пространства, заполненного вещественной средой, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях, имели место разные температуры.

Значимость процесса теплообмена в производстве, природе и т.д. определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое в свою очередь само определяется условиями теплообмена. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, тепловые, магнитные и другие свойства тел. Именно этим и объясняется интенсивное развитие теории теплообмена и то исключительно важное значение, которое ей уделяется в энергетике, химической технологии, авиастроении, медицине, сельском хозяйстве и природе.

В различных областях химических технологий, гидрометеорологии, сельском хозяйстве, медицине, охраны окружающей среды, т.е. в современной науке и технике нашли очень широкое применение многофазные смеси. Наибольший ин-

терес из многофазных смесей представляют так называемые аэродисперсные системы. Аэродисперсные системы состоят из двух фаз, одна из которых есть частицы, а вторая – вязкая газообразная среда. Аэрозолями называют частицы, взвешенные в газообразной среде, а сами частицы – аэрозольными. Размер аэрозольных частиц может колебаться в очень широких пределах: от макроскопических ( $\sim 500 \text{ мкм}$ ) до молекулярных ( $\sim 10 \text{ нм}$ ) значений, и может варьировать также и концентрация частиц в аэродисперсной системе – от одной частицы до высококонцентрированных систем ( $> 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ).

Следует также отметить, что среднее расстояние между аэрозольными частицами, встречающихся в аэродисперсных системах, намного больше характерного размера аэрозольной частицы. Это означает, что в таких системах учет влияния аэрозоля на развитие теплообмена в аэродисперсной системе можно проводить, основываясь на знании законов теплообмена и динамики движения с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц. Без знания закономерностей такого теплообмена невозможно математическое моделирование эволюции аэродисперсных систем и решение такого важного вопроса как целенаправленное воздействие на аэрозоли. Поэтому изучение закономерностей теплообмена отдельных частиц с бесконечной окружающей вязкой газообразной средой является важной актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

В научной литературе аэрозольные частицы по размерам условно делятся на крупные, умеренно крупные и мелкие. Для классификации частиц по размерам применяют критерий Кнудсена [1]:

$$Kn = \frac{\lambda_{cp}}{R},$$

где  $\lambda_{cp}$  – средняя длина свободного пробега молекул вязкой газообразной среды;  $R$  – характерный размер частицы.

Если  $Kn \leq 0.01$ , то такие частицы называются крупными, при выполнении неравенства  $0.01 \leq Kn \leq 0.3$  – умеренно крупными и при  $Kn \gg 1$  – мелкими.

Кроме того, если на поверхности частиц происходит конденсация или испарение молекул вещества частиц, то такие аэрозольные частицы называются летучими. Нелетучими называются аэрозольные частицы, на поверхности которых фазовый переход не происходит.

В дипломной работе рассматривается теплоперенос умеренно крупной твердой аэрозольной частицы сферической формы.

Распределения полей температур вне ( $T_e$ ) и внутри ( $T_i$ ) умеренно крупной твердой аэрозольной частицы сферической формы, внутри которой действуют неоднородно распределенные в ее объеме внутренние источники тепла плотностью  $q_i(\mathbf{r})$ , описываются следующими уравнениями [2,3]:

$$\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \quad \lambda_i \Delta T_i = -q_i. \quad (1)$$

Здесь  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\lambda$  – теплопроводность,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{U}_e$  – массовая скорость; индексы « $e$ » и « $i$ » здесь и далее относятся к вязкой газообразной среде и частице, индексом « $s$ » - обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы равной  $T_s$ , а индексом « $\infty$ » - обозначены значения физических величин, характеризующие внешнюю газообразную среду вдали от аэрозольной частицы.

В научной литературе первое уравнение в выражении (1) называется конвективным уравнением переноса тепла. Оно описывает перенос энергии в газообразной среде за счет макроскопического движения самой среды левая часть этого уравнения и, если температура газообразной среды не постоянна вдоль ее объема, то наряду с указанным выше механизмом переноса энергии будет происходить перенос тепла также и посредством, так называемой теплопроводности - правая часть этого уравнения. Наличие левой части в уравнении конвективной теплопроводности делает его нелинейным, что приводит к большим математическим трудностям при нахождении его решений [4].

Таким образом, многие задачи по конвективному теплопереносу, с которыми сталкиваются сегодня теоретическая физика, а также инженеры и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение уравнений конвективной теплопроводности, можно указать, например, нелинейные уравнения движения самой вязкой газообразной среды, например, уравнение Навье-Стокса, что не позволяет получить точное распределение массовой скорости в окрестности аэрозольной частицы, переменные коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач мы вынуждены пользоваться различного рода приближениями, комбинируя аналитические и численные методы. Среди аналитических методов весьма мощными являются методы возмущений (так называемые асимптотические разложения) по большим или малым значениям параметра или координаты [4], который используется в данной дипломной работе.

В дипломной работе, используя метод сращиваемых асимптотических разложений, получено решение конвективного уравнения теплопереноса до первого порядка малости по числу Рейнольдса и тепловому числу Пекле.

**Объектом исследования** является изучение явления теплопереноса в вязкой газообразной среде.

**Предметом исследования:** влияние макроскопического движения среды, слоя Кнудсена и излучения на теплоперенос твердой умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы в газообразной среде при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

**Цель исследования** – получить выражения для полей температур вне и внутри умеренно крупной аэрозольной частицы, внутри которой действуют источники тепла с учетом влияния макроскопического движения среды, слоя Кнудсена и излучения.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие *задачи исследования*:

- ознакомление с историей развития теплообмена твердых частиц сферической формы;
- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных методом сращиваемых асимптотических разложений;
- получить выражения для полей температур вне и внутри умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы, внутри которой действуют источники тепла с учетом влияния макроскопического движения среды, слоя Кнудсена и излучения в газообразной среде при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности;
- провести качественный анализ влияния макроскопического движения среды, слоя Кнудсена и излучения на распределения температур вне и внутри умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы, а также локальный тепловой поток на аэрозольную частицу и теплообмен между частицей и газообразной средой.

***Научная новизна исследования и практическая значимость исследования.***

Проведено теоретическое описание влияния макроскопического движения газообразной среды (т.е. конвективных членов в уравнении теплопроводности), слоя Кнудсена и излучения на распределения температур вне и внутри твердой умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы в газообразной среде при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, а также локальный тепловой поток на аэрозольную частицу и теплообмен между частицей и газообразной средой.

Результаты выпускной квалификационной работы могут быть использованы при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц; при разработке методов



тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при оценке каналов просветления и т.д.

***Апробация исследования.*** Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались на Международной научно-практической и научно-методической конференции «***Современные проблемы математики и механики: теория и практика***» (г. Белгород, БУКЭиП, 2016) и по теме выпускной квалификационной работы опубликованы тезисы.

***Структура работы.***

Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы.

## ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем описывать процесс теплопереноса в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , связанный с центром масс движущейся частицы. В этом случае, наша задача сводится к анализу обтекания твердой умеренно крупной частицы сферической формы, внутри которой действуют неоднородно распределенные в ее объеме внутренние источники тепла плотностью  $q_i(\mathbf{r})$ , бесконечным плоскопараллельным потоком, со скоростью  $U_\infty$  ( $U_\infty \parallel OZ$ ). На большом расстоянии от аэрозольной частицы скорость потока равна  $U_\infty$  и температура  $T_\infty$  (см. Рис. 1.). Задача осесимметрична.

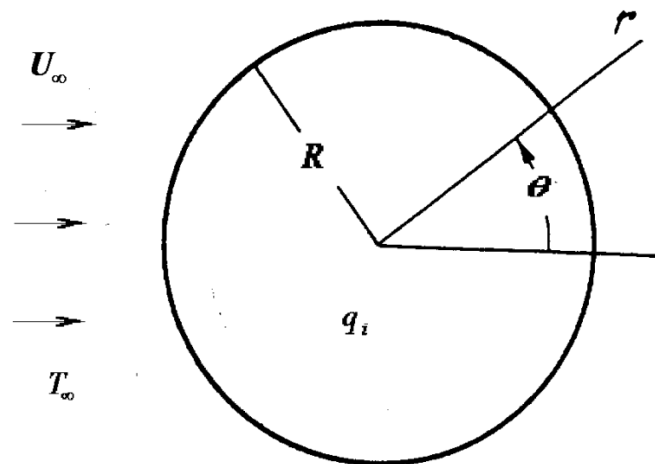


Рис. 1.

Таким образом, в дипломной работе рассматривается установившейся процесс теплообмена в потоке вязкой газообразной среды, обтекающей твердую нагретую умеренно крупную аэрозольную частицу сферической формы радиуса  $R$ . Внутри частицы действуют неравномерно распределенные в ее объеме источники тепла плотностью  $q_i(\mathbf{r})$ , за счет которых и происходит нагрев поверхности частицы.

Если скорость макроскопического движения вязкой газообразной среды мала по сравнению со скоростью звука в газе, то возникающие в результате макроскопического движения среды изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. При теоретическом описании теплопереноса будем также предполагать, что в силу малости времени тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица – газообразная среда протекает квазистационарно. Обтекание частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса и при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, т.е. выполняется следующее неравенство  $(T_s - T_\infty)/T_\infty \ll 1$ . При выполнении этого условия коэффициенты молекулярного переноса – теплопроводности, динамической и кинематической вязкости, а также плотности можно считать постоянными величинами, а сам газ рассматривать как несжимаемую сплошную среду.

Наличие источников тепла внутри твердой умеренно крупной аэрозольной частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности ( $T_s$ ) может отличаться от температуры окружающей газообразной среды вдали от нее ( $T_\infty$ ). Это означает, что нагрев поверхности частицы оказывает влияние на распределение полей температур вне и внутри частицы и в конечном итоге на процесс теплопереноса.

Внутренние источники тепла – это модельное представление, которое удобное для описания реальных процессов, сопровождающихся выделением тепла в объеме аэрозольной частицы. Так можно моделировать, например, нагрев поверхности аэрозольной частицы под действием химической реакции, радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д.

В дипломной работе мы не конкретизируем физическую природу плотности тепловых источников  $q_i(\mathbf{r})$ . Это позволяет рассмотреть процесс теплопереноса в общей постановке. Предполагается, что эта функция задана (ниже,

на примере поглощения электромагнитного излучения, покажем, как можно найти функцию  $q_i(\mathbf{r})$ .

Если, например, неоднородный нагрев обусловлен поглощением электромагнитного излучения, то  $q_i(x, y, z)$  определяется из решения электродинамической задачи (системы уравнений Максвелла). Причем, система уравнений Максвелла, позволяет рассчитать функцию  $q_i(\mathbf{r})$  в объеме частицы при заданных значениях длины волны и интенсивности подающего излучения, размеров частицы и комплексного показателя преломления вещества частицы [5,6,7]:

$$q_i(\mathbf{r}) = -\nabla I_0, \quad (2)$$

где  $I_0 = \frac{c}{4\pi} \text{Re}[E, H]$ ,  $E, H$  – векторы напряженности электрического и магнитного поля внутри частицы, которые описываются уравнениями Максвелла:

$$[\nabla, E] = -ikH, \quad [\nabla, H] = -im^2kE. \quad (3)$$

Здесь  $k = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число,  $\lambda_0$  – длина волны падающего излучения,  $m = n_1 + ik_1$  – комплексный показатель преломления вещества частицы,  $n_1, k_1$  – действительная и мнимая части комплексного показателя преломления вещества частицы.

В результате решения системы уравнений Максвелла, для функции  $q_i(r)$  получаем следующее выражение [5,8]:

$$q_i(r) = 2\pi k k_1 I_0 B(r), \quad (4)$$

где

$$B(r) = |E(r)|^2 / E_0^2 - \quad (5)$$

безразмерная функция, описывающая распределение электрического поля в объеме частицы,  $E_0$  – модуль напряженности электрического поля падающей волны, а функция  $B(r)$  рассчитывается на основе строгой электродинамической теории Ми [5].

Таким образом, в рамках сформулированных выше допущений в дипломной работе решалась следующая система уравнений теплопереноса, описывающая распределение полей температур вне ( $T_e$ ) и внутри частицы ( $T_i$ ):

$$\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \quad (6)$$

$$\lambda_i \Delta T_i = -q_i, \quad (7)$$

где  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\lambda$  – теплопроводность,  $\rho$  – плотность,  $q_i(\mathbf{r})$  плотностью тепловых источников, неоднородно распределенных в ее объеме,  $\mathbf{U}_e$  – массовая скорость газа.

Эта система уравнений решалась со следующими граничными условиями, записанные в сферической системе координат [1]:

$$r = R,$$

$$T_e - T_i = C_t K_n \frac{\partial T_e}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} + C_q^T K_n \lambda_e \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) + \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_\infty^4), \quad (9)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad U_r = U_\infty \cos \theta, \quad U_\theta = -U_\infty \sin \theta, \quad P_e = P_\infty, \quad T_e = T_\infty, \quad (10)$$

$$r \rightarrow 0, \quad T_i \neq \infty. \quad (11)$$

Здесь  $U_r$  и  $U_\theta$  – радиальная и касательная компоненты массовой скорости  $\mathbf{U}_e$ ;  $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ ,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $\sigma_1$  – интегральная степень черноты [5],  $y = r/R$ .

Граничное условие (8) отражает известный физический факт – наличие скачка температуры на поверхности частицы, связанное с существованием переходного слоя Кнудсена на границе раздела умеренно крупная твердая частица–газообразная среда ширины  $\lambda_{cp}$  – средней длины свободного пробега молекул среды, окружающей частицу [1]; для радиального потока тепла (граничное условие (9)) учитывается разрыв радиального потока тепла, обусловленный растеканием части потока в слое Кнудсена и пропорциональный соответственно коэффициенту  $C_q^T$  и излучение по закону Стефана-Больцмана, за счет наличия внутренних источников тепла плотностью  $q_i(\mathbf{r})$ . При коэффициентах аккомодации тангенциальной проекции импульса  $\alpha_\tau$  и энергии  $\alpha_E$  молекул равных единице (при этом, молекулы,

вылетающие с поверхности частицы, находятся в полном термодинамическом равновесии с веществом частицы, что имеет место в большинстве случаев) значения газокинетических коэффициентов, приведены в [1] и равны соответственно:  $C_t = 2.179$ ,  $C_q^T = 0.548$ .

На большом расстоянии от частицы, т. е. при  $r \rightarrow \infty$  справедливы граничные условия (10), а конечность физических величин, характеризующих частицу при  $r \rightarrow 0$ , учтено в (11).

Перейдем к безразмерным переменным в уравнениях (6) - (7) и граничных условиях (8) - (11), введя безразмерные координату, скорость и температуру следующим образом:  $y_k = x_k/R$ ,  $t = T/T_\infty$ ,  $V_e = U_e/U_\infty$ .

Чтобы получить решение конвективного уравнения теплопроводности, необходимо знать распределения массовой скорости в окрестности частицы и вдали от нее.

Заметим, что при  $Re = (\rho_e U_\infty R)/\mu_e \ll 1$  набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики следует искать в виде:

$$V_e = V_e^{(0)} + \varepsilon V_e^{(1)} + \dots, \quad P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)} + \dots \quad (\varepsilon = Re),$$

и предполагается, что поля массовой скорости и давления - стоксовские [2,9]:

$$V_e(y, \theta) = V_r(y, \theta) \mathbf{e}_r + V_\theta(y, \theta) \mathbf{e}_\theta, \quad (12)$$

$$P_e(y, \theta) = 1 + \cos\theta \frac{A_2}{y^2}, \quad V_r(y, \theta) = \cos\theta \left( 1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right), \quad V_\theta(y, \theta) = -\sin\theta \left( 1 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right).$$

## ГЛАВА II. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛОЖЕНИЙ

РАЗ-

Как отмечалось во Введении, исследование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных показали, что получить равномерно пригодные разложения в случаях, когда в некоторых областях изменения независимых переменных, они испытывают резкие изменения, обычными методами невозможно [4].

Один из известных методов, связанных с такой проблематикой, заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) с использованием исходных переменных и в построении растянутых разложений (называемых внутренними разложениями), описывающих эти резкие изменения и использующих увеличенные масштабы. При этом, внешние разложения становятся непригодными в областях резких изменений, в то время как пригодность внутренних разложений нарушается при выходе из этих областей. Чтобы связать эти разложения, используют так называемую процедуру сращивания. Следует отметить, что методу сращиваемых асимптотических разложений свойственна потеря граничных условий [4].

Сращивание представляет собой основную черту этого метода (метода сращиваемых асимптотических разложений) [4]. Возможность сращивания основана на существовании особой области, которая называется *области перекрытия*, в которой пригодны как внутреннее, так и внешнее разложения. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами и получить в конечном итоге нужные равномерно пригодные разложения. [4].

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений к нахождению решения конвективного уравнения теплопереноса.

Если перейти к безразмерным величинам, то наше конвективное уравнение теплопроводности (6) принимает следующий вид:

$$\varepsilon \frac{\text{Pr}_\infty}{t_e} \left( V_r^e \frac{\partial t_e}{\partial y} + \frac{V_\theta^e}{y} \frac{\partial t_e}{\partial \theta} \right) = \Delta t_e, \quad t_e = T_e/T_\infty, \quad (\varepsilon = Re). \quad (13)$$

Построим внутренние и внешние асимптотические разложения температуры  $t_e$ , представив их как:

$$t_e(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y, \theta), \quad (f_0(\varepsilon) = 1), \quad (14)$$

$$t_e^*(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi, \theta), \quad (15)$$

где  $\xi = \varepsilon y$  – так называемая "сжатая" радиальная координата [4].

При этом требуется (согласно методу [4]), чтобы выполнялось следующее условие:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \rightarrow 0, \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности продолжения асимптотических разложений того и другого в некоторую промежуточную область. Для этого требуется выполнения условия:

$$t_e(y \rightarrow \infty, \theta) = t_e^*(\xi \rightarrow 0, \theta). \quad (16)$$

Поскольку у нас замкнутая задача, то нам необходимо найти также распределение температуры и внутри частицы. Поэтому асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности частицы (8) – (9), следует искать в аналогичном виде, как для температуры  $t_e$ :

$$t_i(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y, \theta), \quad t_i = \frac{T_i}{T_\infty}. \quad (17)$$

Относительно функций  $f_n^*(\varepsilon)$  и  $f_n(\varepsilon)$  предполагается (согласно методу сращиваемых асимптотических разложений), что порядок их малости по малому параметру  $\varepsilon$  увеличивается с ростом  $n$ .

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для нахождения температуры  $t_e^*$ :

$$\frac{\text{Pr}}{t_e^*} \left( V_r^{e*} \frac{\partial t_e^*}{\partial \xi} + \frac{V_\theta^{e*}}{\xi} \frac{\partial t_e^*}{\partial \theta} \right) = \Delta^* t_e^*, \quad t_e^* \rightarrow 1 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty. \quad (18)$$

$$\text{и } V_e^*(\xi, \theta) = n_z + \varepsilon V_e^{(1)*}(\xi, \theta) + \dots, \quad P_e^*(\xi, \theta) \rightarrow P_{e\infty} \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty. \quad (19)$$



Здесь  $V_r^{e*} = V_r^{e*}(\xi, \theta)$ ,  $V_\theta^{e*} = V_\theta^{e*}(\xi, \theta)$ ;  $t_e^* = t_e^*(\xi, \theta)$ ;  $\text{Pr} = (\mu_e c_{pe})/\lambda_e$  – число Прандтля,  
 $\mathbf{n}_z$  – единичный вектор в направлении оси Oz.

### ГЛАВА III. ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР ВНЕ И ВНУТРИ НАГРЕТОЙ ТВЕРДОЙ УМЕРЕННО КРУПНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

При исследовании влияния макроскопического движения среды, слоя Кнудсена и излучения на теплообмен умеренно крупной нагретой твердой аэрозольной частицы сферической формы в газообразной среде при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности нам необходимо знать поля температур. При нахождении полей температур вне и внутри умеренно крупной твердой аэрозольной частицы сферической формы ограничимся поправками первого порядка малости по  $\varepsilon$ .

Для нахождения поля температуры внутри твердой умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы необходимо решить уравнение (20):

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \quad (20)$$

В сферической системе координат уравнение (20) имеет вид:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^2 \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_i}{\partial \theta} \right) = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \quad (21)$$

Общее решение уравнения (21) будет складываться из общего решения однородного уравнения соответствующего неоднородному уравнению и частного решения неоднородного уравнения, т.е.

$$t_i = t_i^{\text{общ}} = t_i^{\text{част}}. \quad (22)$$

Для их нахождения обезразмерим уравнение (21), имеем:

$$\Delta t_i = -\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty}. \quad (23)$$

Будем искать решение уравнения (23) методом разделения переменных по полиномам Лежандра [10,11]. Для этого разложим правую часть уравнения (23) по полиномам Лежандра:

$$\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) P_n(x), \quad x = \cos \theta. \quad (24)$$

Для нахождения неизвестной функции  $q_n(y)$  поступим следующим образом: умножив обе части выражения (24) на полином  $P_m(x) dx$  и проинтегрировав от -1 до +1, получаем

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} dx &= \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} P_m(x) q_n(y) P_n(x) dx, \\ - \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx, \end{aligned}$$

и далее воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра [10,11]

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}; & n = m \end{cases},$$

в результате получаем следующее выражение для функции  $q_n(y)$ :

$$q_n(y) = - \frac{2n+1}{2} \frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} = \int_{-1}^1 q_i P_n(x) dx. \quad (25)$$

Теперь перейдем к левой части уравнения (23). Будем искать его решение в виде:

$$t_i = t_n(y) P_n(x). \quad (26)$$

Подставляя (26) и (24) в уравнение (21) и, воспользовавшись свойством полиномов Лежандра (27)

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] = -(n+1) P_n(x), \quad (27)$$

получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения функции  $t_n(y)$ :

$$\frac{d^2 t_n(y)}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{dt_n(y)}{dy} - \frac{t_n(y)}{y^2} (n+1) = q_n(y). \quad (28)$$

Заметим, что общим решением обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка [10,11]

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где функции  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  определены и непрерывны на некотором интервале  $(a, b)$ , является функция

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \varphi_2(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1(x)f(x)}{W(x)} dx - \varphi_1(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_2(x)f(x)}{W(x)} dx,$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – функции, являющиеся решением соответствующего однородного уравнения, а  $W$  – определитель Вронского. Точка  $x_0 \in (a, b)$  и выбирается таким образом, чтобы соответствующие интегралы легко вычислялись.

Таким образом, общее решение уравнения (28) имеет следующий вид:

$$t_n(y) = B_n y^n + \frac{C_n}{y^{n+1}} + \frac{1}{y^{n+1}} \int_1^y \frac{q_n(y)y^2}{2n+1} y^n dy - y^n \int_1^y \frac{q_n(y)y^2}{2n+1} \frac{1}{y^{n+1}} dy, \quad (29)$$

где постоянные интегрирования  $B_n$  и  $C_n$  определяются из граничных условий.

Таким образом, мы нашли решение уравнения (21) и, следовательно, поле температуры внутри частицы, которое имеет следующий вид:

$$t_i(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( B_n y^n + \frac{C_n}{y^{n+1}} - \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{1}{y^{n+1}} \int_1^y \psi_n y^n dy - y^n \int_1^y \psi_n \frac{1}{y^{n+1}} dy \right] \right) P_n(x). \quad (30)$$

Заметим, что константу  $C_n$  можно найти из условия граничного условия (11) (конечности температуры) и тогда:

$$C_n = \int_1^0 \psi_n(y) dy, \quad \psi_n(y) = y^2 q_n(y). \quad (31)$$

Перейдем теперь к нахождению поля температуры вне неоднородно нагретой твердой умеренно крупной аэрозольной частицы. Для этого, как отмечалось выше, воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений [4].

Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (15). В данном случае, задаче, исходя из граничного условия (10) для температуры  $T_e$ , очевидно, удовлетворяет решение:

$$t_{e0}^* = 1. \quad (32)$$

После того, как получен нулевой член внешнего разложения, ищется нулевой член внутреннего разложения (14). Он удовлетворяет уравнению:

$$\Delta t_{e0} = 0. \quad (33)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид [10]:

$$t_{e0} = D_0 + \frac{\Gamma_0}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n y^n + \frac{\Gamma_n}{y^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \quad (34)$$

Здесь  $D_n, \Gamma_n$  - постоянные интегрирования,  $P_n$  - полином Лежандра. Постоянные интегрирования  $D_n, \Gamma_n$  определяются из условия сращивания, для которого, внешнее решение должно быть разложено в ряд по  $\xi$ . Затем значения констант устанавливаются из требования соответствия поведения членов полученного ряда при  $\xi \rightarrow 0$  и членов внутреннего разложения при  $y \rightarrow \infty$ . Для нулевых приближений сращивание тривиально, получаем  $y_0 = 1$ ,  $D_n = \Gamma_n = 0$  при,  $n \geq 1$ , следовательно, нулевой член внутреннего разложения имеет вид:

$$t_{e0} = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}. \quad (35)$$

Для дальнейшего решения нам необходимо знать распределение температуры внутри неравномерно нагретой сферы. Как это мы показали выше, до членов первого порядка малости по  $\varepsilon$ , с учетом (30) и (17) до первого порядка малости включительно мы можем записать:

$$t_i(y, \theta) = t_{i0} + \varepsilon t_{i1}, \quad (36)$$

$$\text{где } t_{i0}(y) = B_0 + \frac{1}{4\pi R \lambda_1 T_\infty y} \int_V q_i dV + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0 dy, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$t_{i1}(y) = B_1 + \cos\theta \left( B y + \frac{R J}{3 \lambda_1 T_\infty y^2} + \frac{1}{3} \left[ y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y y \psi_1 dy \right] \right),$$

$$J = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV, \quad \psi_n(y) = -\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} y^2 \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) P_n(x) dx \quad (n=0,1),$$

$\int_V q_i z dV$  – дипольный момент плотности тепловых источников,  $z = r \cos \theta$ .

Поскольку мы ограничиваемся до поправок первого порядка малости включительно, то необходимо линеаризовать и граничные условия на поверхности частицы. Для нулевого приближения имеем:

$$\begin{cases} t_{e0} - t_{i0} = C_t Kn \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} \\ \lambda_e \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} = \lambda_i \frac{\partial t_{i0}}{\partial y} + \sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 (t_{i0}^4 - 1) \end{cases}$$

Подставив сюда наши нулевые приближения, получаем:

$$1 + \Gamma_0 + B_0 - \frac{1}{4\pi\lambda_i T_\infty R} \int_V q_i dV = -C_t Kn \Gamma_0,$$

$$\lambda_e \Gamma_0 = \lambda_i \frac{1}{4\pi\lambda_i T_\infty R} \int_V q_i dV + \sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 \left[ \left( B_0 + \frac{1}{4\pi\lambda_i T_\infty R} \int_V q_i dV \right)^4 - 1 \right],$$

или, если ввести

$$t_{es}(y=1) = 1 + \Gamma_0,$$

$$t_{is}(y=1) = B_0 - \frac{1}{4\pi\lambda_i T_\infty R} \int_V q_i dV,$$

то, мы получаем следующую систему трансцендентных уравнений для нахождения постоянных интегрирования  $\Gamma_0, B_0$

$$\begin{cases} t_{es} - t_{is} = -C_t Kn (t_{es} - 1) \\ -\lambda_e (t_{es} - 1) = -\lambda_i \frac{1}{4\pi\lambda_i T_\infty R} \int_V q_i dV + \sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 (t_{is}^4 - 1) \end{cases}$$

Средняя относительная температура поверхности твердой умеренно крупной нагретой аэрозольной частицы сферической формы  $T_s = T_{es} / T_\infty$  определяется из следующей формулы

$$\frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi R \lambda_e T_\infty} \int_V q_i(r, \theta) dV - \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3}{\lambda_s} \left[ \left( \frac{T_s}{T_\infty} \right)^4 - 1 \right]. \quad (37)$$

Здесь интегрирование ведется по всему объему частицы.

В дальнейшем нам потребуется постоянная  $\Gamma_0$ , которая имеет следующий вид:

$$\Gamma_0 = \frac{T_s}{T_\infty} - 1. \quad (38)$$

Перейдем к нахождению первых приближений. Найдем сначала первое приближение для внешнего разложения. Из выражения (15) имеем,

$$t_e^*(\xi, \theta) = f_0^*(\varepsilon) t_{e0}^* + f_1^*(\varepsilon) t_{e1}^*(\xi, \theta). \quad (39)$$

Здесь  $f_0^* = 1$ ,  $t_{e0}^* = 1$ .

Для нахождения  $f_1^*(\varepsilon)$  поступим следующим образом. В решении для  $t_{e0}$  перейдем к внешней переменной  $\xi = \varepsilon y$ , тогда имеем:

$$t_{e0} = 1 + \varepsilon \frac{\Gamma_0}{\xi}, \quad (40)$$

и сравнивая это выражение с  $t_e^*(\xi, \theta) = 1 + f_1^*(\varepsilon) t_{e1}^*(\xi, \theta)$ . Видим, что  $f_1^*(\varepsilon) = \varepsilon$ , таким образом, первое приближение для внешнего разложения следует искать в виде

$$t_e^*(\xi, \theta) = 1 + \varepsilon \cdot t_{e1}^*(\xi, \theta). \quad (41)$$

Подставляя выражение (41) в уравнение (18), учитывая выражение (19) и, удерживая члены порядка  $\varepsilon$ , имеем следующее уравнение

$$\text{Pr} \left( x \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1-x^2}{\xi} \frac{\partial}{\partial x} \right) t_{e1}^* = \Delta^* t_{e1}^*, \quad (42)$$

где  $x = \cos \theta$ .

Введем новую переменную  $\xi^* = \text{Pr} \xi$ , тогда имеем:

$$\left( x \frac{\partial}{\partial \xi^*} + \frac{1-x^2}{\xi^*} \frac{\partial}{\partial x} \right) t_{e1}^* = \Delta^* t_{e1}^*. \quad (43)$$

С помощью замены  $t_{e1}^* = \Phi(\xi^*, x) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right)$  уравнение (43) сводится к уравнению Гельмгольца [10,11]. Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{e1}^*}{\partial \xi^*} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^*} \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right) + \frac{1}{2} x \Phi \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right), \\ \frac{\partial t_{e1}^*}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right) + \frac{1}{2} \xi^* \Phi \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right), \\ \frac{\partial^2 t_{e1}^*}{\partial \xi^{*2}} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^{*2}} \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right) + x \Phi \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right) + \frac{1}{4} \Phi \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right), \\ \frac{\partial^2 t_{e1}^*}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right) + \xi^* \Phi \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right) + \frac{1}{4} \Phi \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* x\right), \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^*} + \frac{1}{2} x \Phi \right) + \frac{1-x^2}{\xi^*} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \xi^* \Phi \right) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \xi^* \Phi + \frac{2}{\xi^*} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^*} + \frac{1}{2} x \Phi \right) + \\ + \frac{1-x^2}{\xi^{*2}} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \xi^* \Phi + \frac{1}{4} \Phi \right) - \frac{2x}{\xi^{*2}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \xi^* \Phi \right) & \end{aligned}$$

и после подстановки в уравнение (43), получаем:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{4} \Phi = 0. \quad (44)$$

Общее решение уравнения (44) имеет вид [10,11]:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\pi}{\xi^*}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n K_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi^*}{2} \right) P_n(x), \quad (45)$$

где  $K_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi^*}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\xi^*}} \exp\left(-\frac{\xi^*}{2}\right) \sum_{m=0}^n \frac{(m+n)!}{(n-m)! m! \xi^{*m}}$  - модифицированная функция Бесселя [10,11].

Следовательно, мы нашли общее решение уравнения (42):

$$t_{e1}^* = \exp\left\{ \frac{\text{Pr}}{2} x \xi \right\} \sqrt{\frac{\pi}{\text{Pr} \xi}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n K_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\text{Pr} \xi}{2} \right) P_n(x), \quad (46)$$



где  $K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\text{Pr } \xi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\text{Pr } \xi}} \exp\left\{-\frac{\text{Pr } \xi}{2}\right\} \sum_{m=0}^n \frac{(m+n)!}{(n-m)!m!(\text{Pr } \xi)^m}$ .

Произвольные постоянные интегрирования  $L_n$  должны быть определены в результате сращивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции (46) при  $\xi \rightarrow 0$  и функции (35) при  $y \rightarrow \infty$ . Имеем:

$$1 + \varepsilon \frac{\Gamma_0}{\xi} = 1 + \frac{\pi}{\text{Pr } \xi} \left(1 + \frac{\text{Pr } \xi}{2}(x-1) + \dots\right) \left(L_0 + L_1 \left[1 + \frac{2}{\text{Pr } \xi}\right] + \dots\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x).$$

Нетрудно установить, что  $L_0 = \frac{\text{Pr } \Gamma_0}{\pi}$ ,  $L_n = 0$  при  $n \geq 1$ . Следовательно:

$$t_{e1}^* = \frac{\Gamma_0}{\xi} \exp\left\{\frac{\text{Pr } \xi}{2}(x-1)\right\}. \quad (47)$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Из выражения (14) имеем:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + f_1(\varepsilon) t_{e1}(y, \theta). \quad (48)$$

Для нахождения явного вида  $f_1(\varepsilon)$  поступим аналогичным образом, как и в случае нахождения  $f_1^*(\varepsilon)$ . Из (47) видим, что  $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$ . Таким образом, имеем следующее двучленное внутреннее разложение:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta). \quad (49)$$

Подставляя (49) в уравнение (13) и оставляя члены  $\sim \varepsilon$ , получаем следующее уравнение для нахождения функции  $t_{e1}(y, \theta)$ :

$$\text{Pr } V_r^e \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} = \Delta t_{e1}. \quad (50)$$

Как мы отмечали во второй главе, для метода сращиваемых асимптотических разложений свойственно потеря граничных условий. Найдем граничное условие для функции  $t_{e1}(\infty, \theta)$ . Для этого срастим функцию  $t_e(y \rightarrow \infty, \theta)$  с функцией  $t_e^*(\xi \rightarrow 0, \theta)$ . Имеем:

$$t_{e1}(\infty, \theta) = \frac{\omega_0}{2}(x-1), \quad \omega_0 = \Gamma_0 \text{ Pr}. \quad (51)$$

С учетом выражения (51), общее решение для функции  $t_{e1}(y, \theta)$  ищем в виде:

$$t_{e1}(y, \theta) = \varphi(y) + \tau_e(y)\cos\theta, \quad (52)$$

где должны выполняться следующие условия:

$$\varphi(y) \rightarrow -\frac{\omega_0}{2}, \quad \tau_e(y) \rightarrow \frac{\omega_0}{2}, \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (53)$$

Для нахождения  $t_{e1}(y, \theta)$  из уравнения (50) видно, что нам необходимо знать распределение поле скорости в окрестности, неравномерно нагретой частицы. Подставляя в уравнение (50) стоксовское поле скоростей (12), имеем:

$$\Delta t_{e1} = -\frac{\omega_0}{y^2} \cos\theta \left( 1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right). \quad (54)$$

Решение его будем искать в виде (52). Для функции  $\varphi(y)$  имеем очевидное решение:

$$\varphi(y) = \frac{\omega_0}{2y}(1-y), \quad (55)$$

а для нахождения функции  $\tau_e(y)$  получаем следующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\tau_e}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d\tau_e}{dy} - \frac{2}{y^2} \tau_e = -\frac{\omega_0}{y^2} \left( 1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right), \quad (56)$$

и, поступая здесь, аналогично, как для нахождения функции  $t_n(y)$  (см. (28)) получаем:

$$\tau_e = Cy + \frac{\Gamma}{y^2} + \frac{1}{y^2} \int_{y_0}^y \frac{y}{3} \omega_0 \left( 1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right) dy - y \int_{y_0}^y \frac{\omega_0}{3y^2} \left( 1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right) dy. \quad (57)$$

Таким образом, имеем следующее выражение для температуры  $t_{e1}$ :

$$t_{e1} = \frac{\omega_0}{2y}(1-y) + \cos\theta \left\{ \frac{\Gamma}{y^2} + \omega_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{A_1}{4y^3} + \frac{A_2}{2y} \right) \right\}. \quad (58)$$

Постоянные интегрирования  $B_1$ ,  $\Gamma$ , входящие в выражение (58), определяются из граничных условий на поверхности частицы.

Линеаризованные граничные условия для первого приближения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} t_{e1} - t_{i1} = C_t \text{Kn} \frac{\partial t_{e1}}{\partial y} \\ \lambda_e \frac{\partial t_{e1}}{\partial y} = \lambda_i \frac{\partial t_{i1}}{\partial y} + C_q^t \text{Kn} \lambda_e \frac{\partial}{\sin \theta \partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial t_{e1}}{\partial \theta} \right) + 4\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 t_{i1} t_{i0}^3 \end{cases}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{i1}}{\partial y} &= \cos\theta \left( B - \frac{2RJ}{3\lambda_i T_\infty y^2} \right), \\ \frac{\partial t_{e1}}{\partial y} &= -\frac{\omega_0}{2y^2} + \cos\theta \left( -\frac{2\Gamma}{y^3} + \omega_0 \left[ \frac{3A_1}{4y^4} - \frac{A_2}{2y^2} \right] \right), \\ C_q^t \text{Kn} \lambda_e \frac{\partial}{\sin \theta \partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial t_{e1}}{\partial \theta} \right) &= -2C_q^t \text{Kn} \lambda_e \cos\theta \left( \frac{\Gamma}{y} + \omega_0 \left[ \frac{1}{2} - \frac{A_1}{4y^3} + \frac{A_2}{2y} \right] \right), \end{aligned}$$

и после их подстановки, получаем:

$$\begin{aligned} &\cos\theta \left( \Gamma + \omega_0 \left[ \frac{1}{2} - \frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{2} \right] \right) - \left( B_1 + \cos\theta \left[ B + \frac{RJ}{3\lambda_i T_\infty} \right] \right) = \\ &= C_t \text{Kn} \left\{ -\frac{\omega_0}{2} + \cos\theta \left( -2\Gamma + \omega_0 \left[ \frac{3A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right] \right) \right\} \\ \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \left\{ -\frac{\omega_0}{2} \cos\theta \left( -2\Gamma + \omega_0 \left[ \frac{3A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right] \right) \right\} &= \cos\theta \left( B - \frac{2RJ}{3\lambda_i T_\infty} \right) - \\ -2C_q^t \text{Kn} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \cos\theta \left( \Gamma + \omega_0 \left[ \frac{1}{2} - \frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{2} \right] \right) &+ \frac{4\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_i} \left( B_1 + \cos\theta \left[ B + \frac{RJ}{3\lambda_i T_\infty} \right] \right). \end{aligned}$$

Видим, что все наши постоянные интегрирования легко определяются:

$$\begin{aligned} \left( C_t \text{Kn} \frac{4\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_i} - 1 \right) B_1 &= 0, \\ B_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left( B + \frac{RJ}{3\lambda_1 T_\infty} \right) = \Gamma - \omega_0 \left[ \frac{1}{2} - \frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{2} \right] - C_t \text{Kn} \left\{ -2\Gamma + \omega_0 \left[ \frac{3A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right] \right\},$$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_1} \left( -2\Gamma + \omega_0 \left[ \frac{3A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right] \right) = \left( B + \frac{2RJ}{3\lambda_1 T_\infty} \right) - \frac{RJ}{\lambda_1 T_\infty} -$$

$$- 2C_q^t \text{Kn} \frac{\lambda_e}{\lambda_1} \left( \Gamma + \omega_0 \left[ \frac{1}{2} - \frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{2} \right] \right) + \frac{4\sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_1} \left( B + \frac{RJ}{3\lambda_1 T_\infty} \right).$$

В частности, для постоянной  $\Gamma$ , которая нам нужна в дальнейшем, имеем:

$$\Gamma = \frac{RJ}{\lambda_1 T_\infty \delta} - \frac{\omega_0}{\delta} \left( \frac{3A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right) \left( -\frac{\lambda_e}{\lambda_1} - C_t \text{Kn} \left[ 1 - \frac{4\sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_1} \right] \right) +$$

$$+ \left( \frac{1}{2} + \frac{A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right) \left( 1 - 2C_q^t \text{Kn} + \frac{4\sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_1} \right),$$

$$\delta = 1 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_1} + 2C_t \text{Kn} - 2C_q^t \text{Kn} \frac{\lambda_e}{\lambda_1} + \frac{4\sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_1} + \frac{8\sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_1} C_t \text{Kn}.$$

Постоянные интегрирования  $A_1, A_2$ , входящие в выражение (59), определяются из гидродинамической задачи. В частности, в случае стоксовского обтекания (условия прилипания на поверхности частицы) имеем:  $A_1 = \frac{1}{2}$ ,  $A_2 = -\frac{3}{2}$ .

## ГЛАВА IV. ПОТОК ТЕПЛА НА ПОВЕРХНОСТЬ ЧАСТИЦЫ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Резюмируя полученные выше результаты, запишем выражения для распределения температуры в потоке, обтекающем твердую умеренно крупную частицу сферической формы, внутри которой действуют неравномерно распределенные в ее объеме тепловые источники:

- вдали от частицы (внешнее асимптотическое разложение)

$$t_e^*(\xi, \theta) = 1 + \varepsilon \frac{\Gamma_0}{\xi} \exp\left\{\frac{\text{Pr}_\infty}{2} \xi(x-1)\right\}. \quad (60)$$

- вблизи частицы (внутреннее асимптотическое разложение) имеем

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y} + \varepsilon \left\{ \frac{\omega_0}{2y} (1-y) + \left[ \frac{\Gamma}{y^2} + \omega_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{A_1}{4y^3} + \frac{A_2}{2y} \right) \right] \cos\theta \right\}. \quad (61)$$

Здесь  $\Gamma_0 = t_{es} - 1$ ,  $\omega_0 = \Gamma_0 \text{Pr}$ . Постоянная  $\Gamma_0$  определяется из решения системы из двух трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} t_{es} - t_{is} = -C_t \text{Kn} (t_{es} - 1) \\ -\lambda_e (t_{es} - 1) = -\lambda_i \frac{1}{4\pi\lambda_i T_\infty R} \int_V q_i dV + \sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 (t_{is}^4 - 1), \end{cases}$$

в котором

$$t_{is}(y=1) = B_0 - \frac{1}{4\pi R \lambda_i T_\infty} \int_V q_i(r, \theta) dV,$$

а средняя относительная температура поверхности твердой умеренно крупной частицы  $T_s = T_{es} / T_\infty$  определяется из следующей формулы

$$\frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi R \lambda_e T_\infty} \int_V q_i(r, \theta) dV - \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3}{\lambda_s} \left[ \left( \frac{T_s}{T_\infty} \right)^4 - 1 \right],$$

и постоянная  $\Gamma$  равна:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{RJ}{\lambda_i T_\infty \delta} - \frac{\omega_0}{\delta} \left( \frac{3A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right) \left( -\frac{\lambda_e}{\lambda_i} - C_t \text{Kn} \left[ 1 - \frac{4\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_i} \right] \right) + \\ & + \left( \frac{1}{2} + \frac{A_1}{4} - \frac{A_2}{2} \right) \left( 1 - 2C_q^t \text{Kn} + \frac{4\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_i} \right), \end{aligned}$$

$$\delta = 1 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_1} + 2C_t \text{Kn} - 2C_q^t \text{Kn} \frac{\lambda_e}{\lambda_1} + \frac{4\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_1} + \frac{8\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3 t_{is}^3}{\lambda_1} C_t \text{Kn} .$$

Из приведенных выше формул видим, что величина поля температуры существенно зависит от постоянных интегрирования  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$ . На величину  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$  влияет не только распределение тепловых источников внутри частицы, но и слой Кнудсена, т.е. скачок температуры и растекание тепла в слое Кнудсена (газокинетические коэффициенты  $C_t$  и  $C_q^T$ ) и излучение.

Теплообмен частицы со средой обычно характеризуется числом Нуссельта  $Nu$ , которое определяется формулой [3]

$$Nu = - \int_{-1}^{+1} \frac{\partial t_e}{\partial y} \Big|_{y=1} dx, \quad (62)$$

и после интегрирования получаем

$$Nu = 2\Gamma_0 \left[ 1 + \varepsilon \frac{\text{Pr}_\infty}{2} \right]. \quad (63)$$

Локальный тепловой поток на частицу равен

$$j = - \frac{\partial t_e}{\partial y} \Big|_{y=1} = \Gamma_0 + \varepsilon \left\{ \frac{\omega_0}{2} + \frac{\cos\theta}{\delta} \left[ 2\Gamma - \omega_0 \left( \frac{3}{4} A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \right] \right\}. \quad (64)$$

Формулы (63) и (64), позволяют при известном распределении по объему частицы тепловых источников в первом приближении по числу  $\varepsilon$  найти теплообмен и локальный тепловой поток при малых относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом влияния макроскопического движения среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности), влияния слоя Кнудсена и излучения.

Из формул (63) и (64) видно, что величина теплообмена и локального теплового потока существенно зависят также от теплопроводности частицы и величины дипольного момента плотности тепловых источников  $\int_V q_i z dV$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено влияние макроскопического движения среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности), слоя Кнудсена и излучения на теплообмен умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности. Получены выражения для полей температуры вне и внутри аэрозольной частицы до первого порядка малости по числу Рейнольдса, получено выражение для локального потока тепла, числа Нуссельта, а также проведен количественный анализ влияния макроскопического движения среды, слоя Кнудсена и излучения на распределения температур вне и внутри частицы и теплообмена.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.И. Яламов, В.С. Галоян Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван.: Луйс. 1985. 207 с.
2. Л.Д, Ландау, Е.М. Лифшиц Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
3. О.Н. Брюханов, С.Н. Шевченко Теплообмен. М.: Ассоциация строительных вузов. 2005. 460 с.
4. М. Ван-Дайк Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.
5. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами М.: Мир. 1986. 660 с.
6. Волковицкий О.А., Седунов Ю.С., Семенов Л.П. Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Ленинград: Гидрометеиздат. 1982. 312 с.
7. Л.Д, Ландау, Е.М. Лифшиц Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 623 с
8. Береснев С.А., Кочнева Л.Б. Фактор асимметрии поглощения излучения и фотофорез аэрозолей// Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 2. С.134-141 с.
9. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса М.: Мир, 1960. 630
10. Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физ.-мат. лит-ра. 1961. 703 с.