СБОРНИКЪ
УПРАЖНЕНІЙ И ЗАДАЧЪ
ПО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ И ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНІЯМЪ

СОСТАВИЛА
ВѢРА ШИФФЪ.

Часть I.

Третье изданіе.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1902.

СБОРНИКЪ
УПРАЖНЕНІЙ И ЗАДАЧЪ
ПО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ И ИНТЕГРАЛЬНОМУ
ИСЧИСЛЕНІЯМЪ

СОСТАВИЛА
ВѢРА ШИФФЪ.

Часть I.

Третье изданіе.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1902.

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ ПЕРВОМУ ИЗДАНІЮ.

При составленіи этого сборника я имѣла въ виду доставить возможность учащимся напрактиковаться, какъ въ примѣненіи теоріи къ частнымъ примѣрамъ, такъ и въ рѣшеніи нѣсколько болѣе трудныхъ задачъ.

Весь сборникъ будетъ состоять изъ двухъ частей.

Такъ какъ наименованіе отдѣловъ, на которые предложены задачи въ нынѣ напечатанной первой части, находится въ прилагаемомъ при семъ оглавленіи, то я ограничусь указаніемъ содержанія 2-ой части, въ которую войдутъ упражненія и задачи на интегрированіе дифференціальныхъ уравненій и на приложенія анализа безконечно малыхъ въ геометріи.

При составленіи первой части этого сборника я пользовалась слѣдующими сочиненіями и журналами.

Коши. Алгебраическій анализъ.

К. Поссе. Дифференціальное исчисленіе. (Литографированный курсъ).

К. Поссе. Интегральное исчисленіе.

ПРЕДИСЛОВІЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНІЮ.

Въ виду того, что всѣ экземпляры перваго изданія разошлись, мнѣ пришлось вмѣсто печатанія 2-ой части этого сборника, приступить къ печатанію 2-го изданія первой части. Вторая же часть теперь печатается.

Считаю долгомъ выразить мою глубокую признательность за всѣ сдѣланныя мнѣ замѣчанія относительно порядка распредѣленія задачъ, редакціи заданій и рѣшеній.

При составленіи 2-го изданія этого сборника, я, кромѣ сочиненій, упомянутыхъ въ предисловіи къ первому изданію, пользовалась еще слѣдующими:

Ph. Gilbert. Cours d'Analyse infinitésimale.

E. Appell. Éléments d'Analyse mathématique.

Ch. Hermite. Cours d'Analyse.

J. Bertrand. Traité de calcul différentiel.

Johann Lieblein. Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis.

Вѣра Шиффъ.

1899 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

I. Примѣры на вычисленіе предѣловъ.

1) $$\lim\left[\frac{x^2-\sqrt{a^3 x}}{\sqrt{ax}-a}\right]_{x=a}=3a.$$

2) $$\lim\left[\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3}\right]_{x=a}=\frac{2}{3}.$$

3) $$\lim\left[\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}\right]_{x=2}=-\frac{1}{3}.$$

4) $$\lim\left[\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right]_{x=7}=-\frac{1}{56}.$$

5) $$\lim\left[\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}\right]_{x=3}=\frac{1}{4}.$$

6) $$\lim\left[\frac{1-6x^2+5x^4}{1-4x^2-5x^4}\right]_{x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{2}{3}.$$

7) $$\lim\left[\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}+(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a-x)^{\frac{1}{3}}-(a^3-x^3)^{\frac{1}{3}}}\right]_{x=a}=\frac{\sqrt[3]{2a}}{1-\sqrt[3]{3a^2}}.$$

8) $$\lim\left[\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(3x^3-a^2x)(x^3-a^3)^{\frac{3}{2}}}\right]_{x=a}=\frac{2\sqrt{2}}{3a^2\sqrt{3a}}.$$

9) $$\lim \left[\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + a - x}{(a - x)^{\frac{1}{2}} + (a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=a} = \frac{\sqrt{2a}}{1 + a\sqrt{3}}.$$

10) $$\lim \left[\frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}\right]_{x=0} = \sqrt{a}.$$

11) $$\lim \left[\sqrt{x + a} - \sqrt{x}\right]_{x=\infty} = 0.$$

12) $$\lim \left[\sqrt{x(x + a)} - x\right]_{x=\infty} = \frac{a}{2}.$$

13) $$\lim \left[\sqrt{(x + a)(x + b)} - x\right]_{x=\infty} = \frac{a + b}{2}.$$

14) $$\lim \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x}\right]_{x=+\infty} = -\frac{1}{6}.$$

15) $$\lim \left[\frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

16) $$\lim \left[\frac{(b + c\cos x + a\sin x)^m - (b + c\cos x)^m}{(b + c)^m a\sin x}\right]_{x=0} = \frac{m}{b + c}.$$

17) $$\lim \left(\frac{\cos^m x - 1}{\sin^2 \frac{x}{2}}\right)_{x=0} = -2m.$$

18) $$\lim \left(\frac{\sin x}{\sin px}\right)^n_{x=0} = \frac{1}{p^n}.$$

19) $$\lim \left[\frac{\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg}(a - x)}{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}\right]_{x=0} = \frac{1 + a^2}{\cos^2 a}.$$

20) $$\lim \left[\frac{\sin x}{\lg(1 - x)}\right]_{x=0} = -1.$$

21) $$\lim \left[\operatorname{cosec} x \cdot \lg(1 - x)\right]_{x=0} = -1.$$

22) $\lim\left[\frac{1-x}{1+x}\,\frac{\sin x}{\operatorname{arctg}\frac{x}{1+x^2}}\right]_{x=0}=1.$

23) $\lim\left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right]_{x=1}=\frac{2}{\pi}.$

24) $\lim\left(\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}\right)_{x=\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

25) $\lim\left[\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}\right]_{x=0}=\frac{1}{p}.$

26) $\lim\left[\frac{\cos ax-\cos an}{n^2-x^2}\right]_{x=n}=\frac{a\sin an}{2n}.$

27) $\lim\left[\frac{\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x-3}{\operatorname{tg}^2x-4\operatorname{tg}x+3}\right]_{x=\operatorname{arctg}3}=2.$

28) $\lim\left[\frac{\operatorname{cotg}x+\operatorname{cosec}x-1}{\operatorname{cotg}x-\operatorname{cosec}x+1}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=1.$

29) $\lim\left[\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3x}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}.$

30) $\lim\left[\frac{\lg(a+be^x)}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\right]_{x=\infty}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}.$

31) $\lim\left[\lg(a+be^x)\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_{x=\infty}=1.$

32) Зная, что

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]_{x=\infty}=e,$$

вычислить

$$\lim\left[\frac{\lg(1+y)}{y}\right]_{y=0}=1$$

и на основаніи этого показать, что

a) $$\lim \left(\frac{a^x-1}{x}\right)_{x=0} = \lg a,$$

b) $$\lim \left[\frac{(1+x)^\mu - 1}{x}\right]_{x=0} = \mu.$$

33) Доказать слѣдующія двѣ теоремы Коши:

1) $$\lim \left[f(x+1) - f(x)\right]_{x=\infty} = \lim \left[\frac{f(x)}{x}\right]_{x=\infty},$$

2) $$\lim \left[\frac{f(x+1)}{f(x)}\right]_{x=\infty} = \lim \left[f(x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty},$$

при условіи, что $f(x)$ конечна для всякаго конечнаго значенія x.

На основаніи этихъ теоремъ вычислить:

a) $$\lim \left(\frac{\sqrt[n]{1.2.3....n}}{n}\right)_{n=\infty},$$

b) $$\lim \left(ne^{-nx^2}\right)_{n=\infty},$$

c) $$\lim \left(\frac{\lg(1+nx)}{n}\right)_{n=\infty}.$$

34) Пользуясь теоремою

$$\lim \left[\varphi(x)^{\psi(x)}\right]_{x=\alpha} = \left[\lim \varphi(x)_{x=\alpha}\right]^{\lim \psi(x)_{x=\alpha}},$$

вычислить предѣлы слѣдующихъ выраженій:

a) $\lim \left[\cos\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)\right]^{\omega}_{\omega=\infty}$; b) $\lim \left[\cos\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)\right]^{\omega^2}_{\omega=\infty}$;

c) $\lim\left[1+\gamma\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)\right]^{\omega}_{\omega=\infty}$; d) $\lim\left[\cos\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)+\gamma\sin\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)\right]^{\omega}_{\omega=\infty}$;

e) $\lim\left(\cos x\right)^{\mathrm{cotg}\,x}_{x=0}$; f) $\lim\left\{\frac{\lg(1+ax)-\lg(1+bx)}{cx}\right\}_{x=0}$;

g) $\lim\left[\frac{\lg(1+a\sin x)-\lg(1+b\,\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{tg}\,x}\right]_{x=0}$;

h) $\lim\left[\frac{\lg(1+m\arcsin x)}{\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\right]_{x=0}$.

35) Предполагая, что $f(x)$ при $x=\infty$ имѣетъ конечный предѣлъ, доказать, что

$$\lim\left\{x\left[f(x)^{\frac{1}{x}}-1\right]\right\}_{x=\infty}=\log\left[\lim f(x)_{x=\infty}\right].$$

36) Предполагая, что $f(x)$ стремится къ конечному предѣлу при $x=\infty$, показать, что

$$\lim\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{x}_{x=\infty}=e^{\lim f(x)_{x=\infty}}.$$

37) $\lim\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right]_{n=\infty}=\frac{1}{2}$.

38) $\lim\left[\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2}\right]_{n=\infty}=\frac{1}{3}$.

39) $\lim\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2^n}\right]_{n=\infty}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}.$$

40) Найти

$$\lim\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{\alpha^4+\frac{1}{n}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sqrt{\alpha^{2n-2}+\frac{1}{n}}\right]_{n=\infty}.$$

41) Доказать, что

$$\lim\left[\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right]_{n=\infty}=\frac{\sin x}{x},$$

при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

42) Даны два положительныхъ числа a и b, полагая

$$a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\sqrt{a_1 b},$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_2 b_1},$$

. . . .

. . . .

Найти предѣлъ безконечнаго ряда

$$a,\ b,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ldots.$$

43) Доказать, что

$$\lim\left[\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2^2}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2^3}\right)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]_{n=\infty}=\frac{\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

II. Примѣры на вычисленіе производныхъ функцій отъ одной независимой перемѣнной.

1) $y = \frac{x}{a^2 + x^2}$.

2) $y = (2bx - 4a)\sqrt{a + bx}$.

3) $y = (2bx - 3a)\sqrt[3]{(a + bx)^2}$.

4) $y = \frac{2bx^2 - a}{x^3}\sqrt{a + bx^2}$.

5) $y = \frac{(8b^2x^2 + 8abx - a^2)(a^2 + 2bx)}{(ax + bx^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6) $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$.

7) $y = x^a b^{-x^2}$.

8) $y = x^m \lg x - \frac{x^m}{m}$.

9) $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lg \frac{\sqrt{2 + 2x^2} - x}{\sqrt{2 + 2x^2} + x} + \lg \left[x + \sqrt{1 + x^2}\right]$.

10) $y = \lg \frac{\sqrt{(x^2 + ax)^2 + bx} + x^2 + ax}{\sqrt{(x^2 + ax)^2 + bx} - (x^2 + ax)}$.

11) $y = \frac{4}{7} \sin^7 \frac{x}{2} - \frac{8}{9} \sin^9 \frac{x}{2}$.

12) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{3}}{x + 2}$.

13) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \lg \sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$.

+ ? 14) $y = 2 \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$.

? 15) $y = 3b^2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

16) $y = \frac{1}{\sqrt{a-1}} \lg \frac{x\sqrt{a-1}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-ax^2}}$.

17) $y = \frac{1}{\sqrt{a-1}} \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1+ax^2}}$.

? 18) $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \lg\sqrt{1-x^2}$.

19) $y = \lg\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\sin x}$.

20) $y = -x\sqrt{2} + \cos x + 2 \arccos\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2-\sin x}}$.

21) $y = (x+2a)\sqrt{x^2-a^2} + a^2 \lg\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$.

22) $y = \lg\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{x}$.

23) $y = -\cos x \operatorname{arc\,cotg}\sqrt{\cos x} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x}$.

24) $y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$.

? 25) $y = 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x$.

26) $y = 4(\sin x - 2\sin^3 x)\cos x$.

V 27) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

28) $y = \frac{m}{2} \lg (x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \lg \frac{x-a}{x+a}$.

29) $y = \frac{3}{4} \lg \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4} \lg \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$.

30) $y = \lg \left[a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right]$.

√ 31) $y = (a + bx)^{\frac{1}{x}}$.

32) $y = x\sqrt{a^2 + x^2} + \lg (x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

33) $y = a \arcsin \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a} - \sqrt{2ax - x^2}$.

√ 34) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

35) $y = x^2 + (\arcsin x - 2x\sqrt{1 - x^2}) \arcsin x$.

36) $y = \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x\right) \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \lg (1 + x^2)$.

37) $y = \frac{1}{1 + x^2} + \left(\frac{2x}{1 + x^2} + \operatorname{arc\,tg} x\right) \operatorname{arc\,tg} x$.

√ 38) $y = \lg \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \frac{\arcsin x}{x}$.

√ 39) $y = e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)$.

√ 40) $y = \left[x + k\sqrt{1 - x^2}\right] e^{k \arcsin x}$.

√ 41) $y = \frac{k + x}{\sqrt{1 + x^2}} e^{k \operatorname{arc\,tg} x}$.

√ 42) $y = x \cos \left[\lg x - \frac{\pi}{4}\right]$.

43) $$y = \lg \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c - \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}.$$

44) $$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

45) $$y = \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2a}\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{(a+b)\cos x}}.$$

46) $$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{\sqrt{2a}\cos\frac{x}{2} - \sqrt{(a-b)\cos x}}{\sqrt{2a}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{(a-b)\cos x}}.$$

47) $$y = \lg \frac{a + b\operatorname{tg} x}{a - b\operatorname{tg} x}.$$

48) $$y = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

49) $$y = e^x \left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}\right].$$

50) $$y = \lg \frac{\sqrt{a + be^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^x} + \sqrt{a}}.$$

51) $$y = (\lg x - 1)(x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}) + \lg \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

52) $$y = \frac{x \lg a - 1}{\lg^2 a} \cdot a^x.$$

53) $$y = \operatorname{arc\,sec} \frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

54) $y = \frac{2}{\sin^2 x \cos x} - \frac{3 \cos x}{\sin^2 x} + 3 \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

55) $y = x \sin x \left(\lg x - \frac{\pi}{4}\right)$.

56) Зная, чему равно отношенiе $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$,

вычислить сумму

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

57) Опред. $a_1, a_2, \ldots, a_m$ такимъ образомъ, чтобы

$$\{e^x [x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - a_3 x^{m-3} + \ldots]\}' = x^m e^x.$$

58) $y = \lg \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{a}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

59) Дано

$$y = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{2p \sin x}{m + n + (m - n)\cos x}$$

$$+ \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{2q \sin x}{m - n + (m + n)\cos x};$$

полагая

$$m^2 = a + b + c,\ n^2 = a - b + c,\ p^2 = \frac{1}{4}(m - n)^2 - 2c,$$

$$q^2 = \frac{1}{4}(m + n)^2 - 2c,$$

доказать, что

$$y' = \frac{1}{a + b \cos x + c \cos 2x}.$$

60) Принимая во вниманіе равенство

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

вывести выраженіе

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$$

$$= \frac{\frac{n+1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

61) Принимая во вниманіе равенство

$$\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\sin\left(x+\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \frac{\sin mx}{2^{m-1}},$$

вывести выраженіе слѣдующей суммы:

$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}\left(x+\frac{\pi}{m}\right) + \operatorname{cotg}\left(x+\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots$$

$$+ \operatorname{cotg}\left(x+\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = m\operatorname{cotg} mx.$$

62) Доказать, что, если

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$

то

$$\frac{dy}{\sqrt{y-y^3}} + \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}} = 0.$$

63) Доказать, что, если

$$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}},$$

то

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}+\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=0.$$

64) Доказать: 1) что функція $2 \operatorname{arc\,tg} x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ равна нулю при $x^2 < 1$ и $4 \operatorname{arc\,tg} x - \pi$ при $x^2 > 1$,

2) $2 \operatorname{arc\,tg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ равна $4 \operatorname{arc\,tg} x$ при $x^2 < 1$ и равна π при $x^2 > 1$.

(Задача эта сообщена мнѣ академикомъ Н. Я. Сонинымъ).

III. Примѣры на вычисленіе производныхъ функцій, перемѣнныя которыхъ выражены въ зависимости отъ одного параметра.

1) $y=\frac{1-t}{1+t}$, $x=\frac{2t}{1+t}$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

2) $y=\sin t - t\cos t$, $x=\cos t + t\sin t$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

3) $y=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $x=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

4) $y=\frac{a\sin t}{1+b\cos t}$, $x=\frac{c\cos t}{1+b\cos t}$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

5) $y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

6) $y=(a+r)\sin t - a\sin\frac{a+r}{a}t$,

$x=(a+r)\cos t - a\cos\frac{a+r}{a}t$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

7) $y = \frac{4(a-t)^3}{a^2 t^2}$, $x = \frac{3a-2t}{at}$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

8) $y = 2\sin t - \sin 2t$, $x = 2\cos t - \cos 2t$; опред. $\frac{dy}{dx}$.

IV. Производныя неявныхъ функцій.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ опредѣлить y'.

1) $a^{x-y} - x^y = 0$.

2) $a^x - e^{x-y} = 0$.

3) $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = C$.

4) $ay - e^{\sqrt{b-x}} = 0$.

5) $y^2 - 2ye^x + 2x \lg y = 0$.

6) $ye^{xn} = ax^m$.

7) $1 + xy - \lg\left[e^{xy} + e^{-xy}\right] = 0$.

8) $\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a} + \operatorname{arc}\sin\frac{y}{b} - a = 0$.

9) $y\sin x + x^2y^2 + a\cos y + b = 0$.

10) $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

11) $\operatorname{arc tg}\frac{x-a}{x+a} - \operatorname{arc tg}\frac{y-a}{y+a} = b$.

12) $x^2\lg y - y^2\lg x = 0$.

13) $y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0.$

14) $x = a \arc \sin \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$

15) $x - a \arc \cos \frac{a - y}{b} + \sqrt{b^2 - (a - y)^2} = 0.$

16) $y^3 - x^3 - y \arc \sin x = 0.$

17) $\frac{1}{2} \lg (x^2 + y^2) - \lg c = \arc \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

18) $\sqrt{x^2 + y^2} = c \arc \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

19) $e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx = 0.$

20) $a^{x^y} + \sqrt{\sec xy} = 0.$

V. Частныя производныя и полные дифференціалы функцій отъ многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ опредѣлить du:

1) $z^3 - 3xyz + 3a \lg (x^2 + y^2) = u.$

2) $u = xye^{x+2y}.$

3) $u = \lg \sin \frac{x}{y}.$

4) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \arc \operatorname{tg} \frac{x}{z} + \frac{z^2}{2}.$

5) $u = \arc \sec \frac{xy}{z}.$

6) $u = (y - \sqrt{y^2 - z^2})^x$.

7) $u = (x^n - 3e^y + a \lg z)^n$.

8) $u = \lg (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$;

доказать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}.$$

9) Доказать, что, если u однородная функція x, y, z m-аго измѣренія, то

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \frac{(m-1)^2}{z^2} \begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

VI. Провѣрить на слѣдующихъ примѣрахъ теорему Эйлера относительно однородныхъ функцій:

1) $u = (x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (x - y + z)^3 - (y + z - x)^3$.

2) $u = \frac{xyzt}{x + y + z + t}$.

3) $u = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$.

4) $u = \frac{x^2 y + y^2 z + z^2 x}{x + y + z}$.

5) $u = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$.

6) $u = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.

VII. Примѣры на дифференцированіе функцій, заданныхъ уравненіями:

1) $z^3 + 3x^2 z = axy$.

Вычислить dz.

2) $\frac{(x - mz)^2}{a^2} + \frac{(y - nz)^2}{b^2} = 1$.

Вычислить dz.

3) $\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{h} z\right)$.

Вычислить dz.

4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2)$.

Вычислить dz.

5) $x + y + z + u = a$,

$$\lg xyzu = b.$$

Вычислить dz и du.

6) $xy + zu = a$,

$$\frac{x+y}{z+u} = b.$$

Вычислить dz и du.

$$7)\ \begin{cases} x + y + z + u = a. \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2. \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3. \end{cases}$$

Вычислить $\frac{du}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$.

$$8)\ \begin{cases} \sin^2 x - \cos y \sin z = 0. \\ 2y - x \operatorname{tg} z = 0. \end{cases}$$

Опред. $\frac{dx}{dy}$ и $\frac{dz}{dy}$.

$$9)\ \begin{cases} z^2 + xy - a^2 = 0, \\ 3x^2 + 2yz - bx = 0. \end{cases}$$

Опред. $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$.

$$10)\ \begin{cases} ax + by + cz = m, \\ a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = n. \end{cases}$$

Опред. $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$.

11) $\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = a. \\ x^3 + y^3 + z^3 = b. \end{cases}$

Опред. $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$.

12) $\begin{cases} u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = c^2, \\ \lg(xy) + \frac{y}{x} = a^2, \\ \lg\left(\frac{z}{x}\right) + zx = b^2. \end{cases}$

Опред. $\frac{du}{dx}$.

13) $\begin{cases} uv - [\alpha(a-x) + \beta(b-y) + \gamma(c-z)] = 0, \\ (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 - v^2 = 0, \end{cases}$

u и v суть функціи x, y, z.

Доказать: 1) что

$$(a-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (b-y)\frac{\partial u}{\partial y} + (c-z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

2) что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2u}{v^2}.$$

14) z есть функція x и y, выраженная уравненіями:

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

Доказать, что при любомъ значеніи $\varphi(\alpha)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

15) z есть функція x и y, выраженная уравненіями

$$[z-\varphi(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),$$

$$[z-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)=\alpha x^2.$$

Доказать, что при любомъ значеніи $\varphi(\alpha)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

VIII. Производныя высшихъ порядковъ функцій отъ одной независимой перемѣнной.

1) $y=a^{b^x}$; доказать, что

$$y\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{dy}{dx}\left[\frac{d^ny}{dx^n}+n\lg b\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}(\lg b)^2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+(\lg b)^ny\right].$$

2) Если $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m}$,

то

$$(1+x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+(n^2-m^2)\frac{d^ny}{dx^n}=0.$$

3) Если

$$y=\sin(m\operatorname{arctg}x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

то

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+(2n^2+m^2)a_n+(n-1)(n-2)a_{n-2}=0.$$

4) $y=(ax+b)^m$; доказать, что

$$y^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}.$$

5) $y=\frac{1}{ax+b}$; доказать, что

$$y^{(n)}=(-1)^n 1.2.3\ldots n\frac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

6) $y=\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$; доказать, что

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n}{2^n}1.3.5\ldots(2n-1)\frac{a^n}{(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

7) $y=\frac{1}{1-x^2}$; доказать, что

$$y^{(n)}=\frac{1.2.3\ldots n}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^n}\right].$$

8) $y=\frac{\lg x}{x}$; доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots n}{x^{n+1}}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\lg x\right].$$

9) $y=e^{ax}\cos bx$; доказать, что

$$y^{(n)}=k^n e^{ax}\cos(b+n\varphi),$$

гдѣ

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

и

$$k = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Но $y^{(n)}$ можно написать еще слѣд. образомъ:

$$y^{(n)} = [(n)_0\, a^n - (n)_2\, a^{n-2}\, b^2 + (n)_4\, a^{n-4}\, b^4 - \ldots]\, e^{ax}\cos bx$$

$$-\{(n)_1\, a^{n-1}\, b - (n)_3\, a^{n-3}\, b^3 + \ldots\}\, e^{ax}\sin bx.$$

Предполагая

$$x = 0,\ \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi,$$

приравнивая полученныя для $y^{(n)}$ выраженія, доказать тождество

$$\frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi} = n_0 - (n)_2\operatorname{tg}^2\varphi + (n)_4\operatorname{tg}^4\varphi - \ldots$$

10) $y = e^{ax}\sin bx$; доказать, что

$$y^{(n)} = c^n\, e^{ax}\sin(bx + n\theta),$$

гдѣ

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},\ \ c = \sqrt{a^2+b^2}$$

или

$$y^{(n)} = [(n)_0\, a^n - (n)_2\, a^{n-2}\, b^2 + (n)_4\, a^{n-4}\, b^4 - \ldots]\, e^{ax}\sin bx$$

$$+[(n)_1\, a^{n-1}\, b - (n)_3\, a^{n-3}\, b^3 + \ldots]\, e^{ax}\cos bx.$$

Полагая $x = 0$ и приравнивая эти два выраженія для $y^{(n)}$, вывести тождество

$$\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta} = (n)_1\operatorname{tg}\theta - (n)_3\operatorname{tg}^3\theta + (n)_5\operatorname{tg}^5\theta - \ldots$$

11) Если $x = \sin\theta,\ y = \frac{\cos n\theta}{\cos\theta}$,

или

$$x = \sin\theta,\ y = \frac{\sin n\theta}{\cos\theta},$$

то

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (n^2 - 1)\,y = 0.$$

12) $y = x^3 \sin x$; доказать, что

$$y^{(n)} = x^3 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3n\,x^2 \sin\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+ 3n\,(n-1)\sin\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+ n\,\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\sin\left[x + (n-3)\frac{\pi}{2}\right].$$

13) $y = \frac{xe^x}{x^2 - 1}$; доказать, что

$$y^{(n)} = e^x\left[\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(n)} + n\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(n-1)}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(n-2)} + \dots + n\left(\frac{x}{x^2-1}\right)' + \frac{x}{x^2-1}\right].$$

14) Доказать, что, если

$$y = e^{2\sqrt{x}}\left(1 - 2\sqrt{x}\right),$$

или

$$y = e^{-\sqrt{x}}\left[\left(1 + \sqrt{x}\right)\cos\sqrt{3x} + \sqrt{3x}\sin\sqrt{3x}\right],$$

или

$$y = e^{-\sqrt{x}}\left\{\left(1 + \sqrt{x}\right)\sin\sqrt{3x} - \sqrt{3x}\cos\sqrt{3x}\right\},$$

то

$$x^{\frac{3}{2}} \frac{d^3 y}{dx^3} - y = 0.$$

15) Если $y = \sin mx$,

то

$$y^{(n)} = m^n \sin \left[mx + n \frac{\pi}{2} \right].$$

16) Если $y = e^{x \sin \alpha} \sin (x \cos \alpha)$,

то

$$y^{(n)} = e^{x \sin \alpha} \sin \left[x \cos \alpha - n\alpha + n \frac{\pi}{2} \right].$$

17) $y = \frac{(a + bx)^m}{(a' + b' x)^p}$,

тогда

$$y^{(n)} = A \left[1 - \frac{n}{1} \frac{pb'}{b(m + n - 1)} \frac{a + bx}{a' + b' x} \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2\, b^2} \frac{p(p+1)}{(m - n + 1)(m - n + 2)} \frac{(a + bx)^2}{(a' + b' x)^2} + \ldots . \right],$$

гдѣ

$$A = m(m-1)(m-2) \ldots . (m - n + 1)\, b^n \frac{(a + bx)^{m-n}}{(a' + b' x)^p}.$$

18) $y = \frac{1}{a^2 - b^2 x^2}$; доказать, что

при n четномъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3 \ldots . n}{2a(a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} b^n \left[(a + bx)^{n+1} + (a - bx)^{n+1} \right],$$

а при n нечетномъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\,3\ldots.n}{2a\,(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\, b^n\,[(a+bx)^{n+1}-(a-bx)^{n+1}].$$

19) Найти n-ую производную

$$y = \lg\frac{a+bx}{a-bx}.$$

20) Если $y = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}$,

то

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots.n}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{n+1}}\,\beta^n\, U,$$

гдѣ

$$U = (n+1)_1(\beta x)^{2n} - (n+1)_3(\beta x)^{2n-2}\alpha^2 + (n+1)_5(\beta x)^{2n-4}\alpha^4 - \ldots.$$

Затѣмъ, сдѣлавъ положеніе

$$\frac{\alpha}{\beta x} = \operatorname{tg}\omega,$$

доказать, что

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots.n}{\alpha^{n+2}}\,\beta^n \sin^{n+1}\omega \sin(n+1)\,\omega$$

и изъ сравненія этихъ двухъ выраженій для $y^{(n)}$ вывести, предполагая $n = m-1$, тождество

$$\frac{\sin m\omega}{\cos^m\omega} = (m)_1 \operatorname{tg}\omega - (m)_3 \operatorname{tg}^3\omega + (m)_5 \operatorname{tg}^5\omega - \ldots.$$

21) $y = \frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}$; доказать, что

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n\, 1.2.3\ldots.n}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{n+1}}\,\beta^{n-1}\, V,$$

гдѣ

$$V=(\beta x)^{n+1}-(n+1)_2(\beta x)^{n-1}\alpha^2+(n+1)_4(\beta x)^{n-3}\alpha^4-\dots.$$

и, сдѣлавъ положеніе

$$\frac{\alpha}{\beta x}=\operatorname{tg}\omega,$$

доказать, что

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n\,1.2.3\dots n}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2})^{n+1}}\,\beta^{n-1}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\beta x}\right];$$

изъ сравненія полученныхъ двухъ выраженій для $y^{(n)}$ вывести тождество

$$\frac{\cos n\omega}{\cos^n\omega}=m_0-(m)_2\operatorname{tg}^2\omega+(m)_4\operatorname{tg}^4\omega+\dots,$$

гдѣ

$$m=n+1 \text{ и } m_0=1.$$

22) $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{a}$;

доказать, что

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^{n-1}\,1.2.3\dots(n-1)\frac{\sin n\varphi}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

гдѣ

$$\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{a}{x}.$$

23) $y=(a+bx)^m\lg(a+bx)$;

доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots.(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n}\Big[\lg(a+bx)$$

$$+\frac{n}{1}\frac{1}{m-n+1} - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(m-n+1)(m-n+2)}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1.2}{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)} - \ldots.\Big]$$

и если $n = m$, тогда

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1.2.3\ldots.mb^m\Big[\lg(a+bx) + \frac{m}{1^2} - \frac{m(m-1)}{(1.2)^2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2).1.2}{(1.2.3)^2} - \ldots.\Big].$$

24) $y = (a-bx)^m \sin(a+bx)$; доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n m(m-1)\ldots.(m-n+1)b^n(a-bx)^{m-n}\Big\{\sin(a+bx)$$

$$-\frac{n}{1}\frac{a-bx}{m-n+1}\sin\left[a+bx+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(a-bx)^2}{(m-n+1)(m-n+2)}\sin\left(a+bx+2.\frac{\pi}{2}\right)+\ldots.\Big\}.$$

Если $n = m$ и $b = 1$,

тогда

$$y = (a-x)^m \sin(a+x)$$

и

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (-1)^m\, 1.2.3\ldots.m\Big[\sin(a+x)$$

$$-\frac{m}{1^2}(a-x)\sin\left(a+x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{m(m-1)}{(1.2)^2}(a-x)^2\sin\left(a+x+2\frac{\pi}{2}\right)-\ldots.\Big].$$

25) $y = x^m e^{ax} \sin mx$;

доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \Big[x^m \sin (mx + n\varphi)$$

$$+ \frac{n}{1} \frac{mx^{m-1} \sin [mx + (n-1)\varphi]}{(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} m(m-1) x^{m-2} \frac{\sin [mx + (n-2)\varphi]}{a^2 + m^2} + \ldots \Big],$$

гдѣ

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{m}{a}.$$

26) $y = e^{ax} X$, гдѣ X нѣкоторая функція x;

доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax} \left(\frac{d}{dx} + a\right)^n X \text{ символически.}$$

27) $y = e^{x \cos a} \cos (x \sin a)$;

доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x \cos a} \cos [x \sin a + na].$$

28) $y = \operatorname{arc\,tg} x$; доказать, что

$$y^{(n)} = 1.2.3 \ldots (n-1) \cos^n y \cos \left[ny + \frac{n-1}{2} \pi \right].$$

29) Доказать, что при $x = 0$

$$\frac{d^{2n+2}\cos(m\arcsin x)}{dx^{2n+2}} = (-1)^{n+1} m^2(m^2-4)(m^2-16)\ldots(m^2-4n^2).$$

30) $y = x^n (1-x)^n$

или

$$y = (-1)^n \left[x^{2n} - \frac{n}{1} x^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{2n-2} - \ldots\right].$$

Найти $y^{(n)}$ и доказать, что сумма квадратовъ биноміальныхъ коэффиціентовъ разложенія $(1+x)^n$, т. е.

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 + \ldots = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}.$$

31) Дано $y = (x-\alpha)^n (x-\beta)^n$;

доказать, что

$$y^{(n)} = 1.2.3\ldots n \sum_{p=0}^{p=n} (C_n^p)^2 (x-\alpha)^p (x-\beta)^{n-p},$$

гдѣ C_n^p суть биноміальные коэффиціенты.

Пользуясь этой формулою для случая $\alpha = 1$, $\beta = -1$ и непосредственно выведенной формулою для n-ой производной $(1-x^2)^n$, доказать, что сумма

$$(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots + (-1)^n (C_n^n)^2 = 0$$

при n нечетномъ и равна $(-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}$ при n четномъ.

32) $y = \frac{x - \operatorname{cotg} \alpha}{1 + x^2}$;

доказать, что

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\, 1\,.\,2 \ldots (n-1) \sin n\theta \sin^n\theta\, [\operatorname{cotg} n\theta - \operatorname{cotg} \alpha],$$

гдѣ

$$\theta = \operatorname{arc\,cotg} x.$$

33) $u = F\left(\frac{1}{x}\right)$;

доказать, что

$$\frac{d^n F\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \left[F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n}{1}(n-1)\, x F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)\, x^2 F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots .\right].$$

34) $y = e^{\frac{a}{x}}$;

доказать, что

$$\frac{d^n e^{\frac{a}{x}}}{dx^n} = \frac{(-1)^n e^{\frac{a}{x}}}{x^n} \left[\left(\frac{a}{x}\right)^n + \frac{n}{1}(n-1)\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + \ldots .\right].$$

35) Вывести, что

$$\frac{d^n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n\, 1.2 \ldots . (n-1)}{\sqrt{(1+x^2)^n}} \sin\left(n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\right)$$

и, полагая arc tg $x = \theta$ въ формулѣ

$$(-1)^n \frac{x^n}{1.2.3\ldots.(n-1)} \frac{d^n F\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(n)_1}{x} F\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n)_2}{x^2} F''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+ \frac{(n)_3}{1.2.x^3} F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots.,$$

получить

$$\sin^n \theta \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (n)_1 \sin\theta \cos\theta - (n)_2 \cos^2\theta \sin 2\theta$$

$$- (n)_3 \cos^3\theta \sin 3\theta + \ldots.$$

36) Доказать, что

$$\frac{d^n F(x^2)}{dx^n} = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} F^{(n-1)}(x^2)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} (2x)^{n-4} F^{(n-2)}(x^2)$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots.(n-5)}{1.2.3} (2x)^{n-6} F^{(n-3)}(x^2) + \ldots.$$

37) Доказать, что

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1} \frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{m} \Big[m x^{m-1} \sqrt{1-x^2}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} (\sqrt{1-x^2})^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} x^{m-5} (\sqrt{1-x^2})^5 + \ldots. \Big].$$

Полагая въ этой формулѣ $x = \cos u$, получаемъ

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1}\,\frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{m}\sin mu.$$

38) $y = e^{-x^2}$;

доказать, что

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-1)^n e^{-x^2}\left\{(2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2x)^{n-6} + \ldots\right\}.$$

39) Вычислить непосредственно

$$\frac{d^n \lg(1+x^2)}{dx^n}$$

и изъ сравненія полученнаго выраженія съ выраженіемъ

$$\frac{d^n \lg(1+x^2)}{dx^n}$$

изъ общей формулы для

$$\frac{d^n F(x^2)}{dx^n},$$

вывести, что

$$2\cos n\omega = (2\cos\omega)^n - \frac{n}{1}(2\cos\omega)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2\cos\omega)^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\omega)^{n-6} + \ldots.$$

40) Вычислить непосредственно

$$\frac{d^n \lg(1-x^2)}{dx^n}$$

и затѣмъ, пользуясь общей формулою для

$$\frac{d^n F(x^2)}{dx^n},$$

вывести, что

$$\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{(2x)^n} = 1 - \frac{n}{1}\,\frac{x^2-1}{4x^2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^2$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^3 + \dots.$$

41) Доказать, что

$$\frac{d^n F(\sqrt{x})}{dx^n} = \frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{1}\,\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}}$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}}$$

$$-\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\,\frac{F^{(n-3)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+3}} + \dots.$$

42) Доказать, что

$$\frac{d^n\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta\sqrt{x}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\dots n\beta^n}{(2\sqrt{x})^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^{n+1}}\left[1+\frac{n-1}{1}\,\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}}\right.$$

$$\left.+\frac{(n+1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}}\right)^2 + \dots\right].$$

43) Доказать, что

$$\frac{d^n F(e^x)}{dx^n} = E_1 \frac{e^x}{1} F'(e^x) + \frac{E_2}{1.2} e^{2x} F''(e^x) + \ldots .$$

$$+ \frac{E_k}{1.2\ldots.k} e^{kx} F^{(k)}(e^x) + \ldots .,$$

гдѣ

$$E_k = (k)_0 k^n - (k)_1 (k-1)^n + (k)_2 (k-2)^n - \ldots .$$

44) Доказать, что

$$\frac{d^n (a+e^x)^\mu}{dx^n} = (a+e^x)^\mu \left[(\mu)_1 E_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) + (\mu)_2 E_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots . \right]$$

и отсюда, полагая $a = 0$, вывести, что

$$(n)_0 n^n - (n)_1 (n-1)^n + (n)_2 (n-2)^n - \ldots . = 1.2.3\ldots.n.$$

45) $y = \arcsin x$;

доказать: a) что

$$\frac{d^{n+1} \arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{1.3.5\ \ldots(2n-1)}{2^n} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{n}{1} \frac{1}{2n-1} \frac{1-x}{1+x}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \ldots . \pm \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \right];$$

b) что

$$\frac{1}{1.2.3\ldots.n} \frac{d^{n+1} \arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{1}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left[x^n + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1}{2} x^{n-2}\right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \frac{1.3}{2.4} x^{n-4}$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} x^{n-6} + \ldots . \right].$$

Замѣняя въ этой формулѣ x черезъ ix, доказать, что

$$\frac{d^n \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1.2.\ldots.n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{2}\,x^{n-2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\,\frac{1.3}{2.4}\,x^{n-4} - \ldots\right].$$

46) Пользуясь формулою Лейбница, вычислить

$$\frac{d^n\,[(1-z)^n z^n]}{dz^n}$$

и, полагая

$$z = \sin^2 \frac{x}{2},$$

доказать тождество

$$\cos^n x - \frac{n(n-1)}{2.2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.4.4}\cos^{n-4} x \sin^4 x$$

$$+ \ldots = \cos^{2n}\frac{x}{2} - \left(\frac{n}{1}\right)^2 \cos^{2n-2}\frac{x}{2}\,\sin^2\frac{x}{2}$$

$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 \cos^{2n-4}\frac{x}{2}\,\sin^4\frac{x}{2} - \ldots$$

47) $y = x^m \lg x$; доказать послѣдовательнымъ дифференцированіемъ, что

$$\frac{1}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}\,\frac{d^n y}{dx^n} = x^{m-n}\lg x + \frac{x^{m-n}}{m-n+1}$$

$$+ \frac{x^{m-n}}{m-n+2} + \ldots + \frac{x^{m-n}}{m} \ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

На основаніи же формулы Лейбница доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^{m-n}\,[m(m-1)\ldots(m-n+1)\lg x + p_1 m(m-1)\ldots(m-n+2)$$

$$-p_2 m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+3) + 2p_3 m(m-1)\ldots(m-n+4)$$

$$-2\,.\,3p_4 m(m-1)\ldots(m-n+5) + \ldots\,]\,\ldots\ldots(\beta),$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots$ суть биноміальные коэффиціенты при разложеніи бинома $(1+x)^n$.

Пользуясь выраженіями (α) и (β) для

$$\frac{d^n\,[x^m \lg x]}{dx^n},$$

доказать, что при n цѣломъ и положительномъ справедливы слѣдующія тождества:

1) $$p_1 - \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{3}p_3 \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}p_n$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\,\ldots\ldots\ldots(1).$$

2) Если черезъ $F_r(n)$ обозначить сумму

$$\frac{n_r}{1} - \frac{n_{r+1}}{2} + \frac{n_{r+2}}{3} - \ldots,$$

въ которой n_r коэффиціентъ при x^r въ разложеніи $(1+x)^n$, то

$$F_r(n) = n_{r-1}\left\{\frac{1}{r} + \ldots + \frac{1}{n}\right\}.$$

3) Если черезъ $q_1, q_2, \ldots, q_r$ обозначить биноміальные коэффиціенты при разложеніи бинома $(1-x)^{-m+n-1}$, то доказать, что

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{2q_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{p_n}{nq_n} = \frac{1}{m-n+1}$$

$$+ \frac{1}{m-n+2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

48) Пользуясь свойствомъ, что всѣ производныя нечетнаго порядка четной функціи обращаются въ нуль при $x=0$, если только эта функція непрерывна въ смежности съ $x=0$, и замѣчая, что, начиная со второй, производныя

$$y = \frac{x}{e^x - 1}$$

одинаковы съ производными функціи

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2},$$

т. е. функціей четной, получаемъ

$$y_0^{2n} = (-1)^{n-1} B_{2n-1},$$

гдѣ

$$B_1,\ B_3, \ldots B_{2n-1}$$

суть Бернулліевы числа, т. е.

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42}, \ldots$$

49) Найти сумму ряда

$$1.2.3 \ldots px^p + 2.3 \ldots p(p+1)x^{p+1} + \ldots$$

при $x < 1$.

IX. Производныя высшихъ порядковъ отъ неявныхъ функцій:

1) Дано $y^3 + x^3 - 3\,axy = 0$.

Найти

$$\frac{d^2\,y}{dx^2}.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2\,y}{dx^2} = -\frac{2a^3\,xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

2) Дано $y^2 + bx^2 - 2ay + ax - b = 0$.

Найти

$$\frac{d^2\,y}{dx^2}.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2\,y}{dx^2} = -\frac{4b\,(y-a)^2 + (2bx + a)^2}{4\,(y-a)^3}.$$

3) $y + ye^{-x} - x = 0$.

Найти

$$\frac{d^2\,y}{dx^2}.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2\,y}{dx^2} = -\frac{y\,(e^x - 1) - 2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

4) Доказать, что y функція отъ x, заданная ур.

$$\arccos\left(\frac{y}{a}\right) = \lg\left(\frac{x}{b}\right)^n,$$

удовлетворяетъ ур.

$$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+2n^2\frac{d^ny}{dx^n}=0.$$

X. Частныя производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функціи отъ многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Провѣрить на слѣдующихъ примѣрахъ равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

1) $u=\dfrac{x+y}{\sin(x-y)}$.

2) $u=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

3) $u=\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$.

4) $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$.

5) $u=\cos\dfrac{x}{y}\arccos\dfrac{y}{x}$.

6) $u=x^3-3axy+y^3$;

доказать, что

$$d^3u=6\,(dx^3+dy^3).$$

7) $u=\sqrt{2xy+y^2}$;

доказать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{y^2(y-x)}{(2xy+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

8) $u = x \operatorname{tg} y + y \operatorname{tg} x$;

доказать, что

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \, \partial y} = \frac{2(\cos^2 x + 3 \sin^2 x)}{\cos^4 x}.$$

9) $u = \lg\,[(x+y)^2 (y+z)]$;

доказать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{(x+y)^2}.$$

10) Если u однородная функція n-аго измѣренія, то доказать, что

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n\,(n-1)\,u.$$

11) Провѣрить предъидущую теорему на слѣдующихъ примѣрахъ:

a) $u = (x+y)^2$; b) $u = \frac{xy}{x+y}$; c) $u = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

12) Если $u = x^3 z^4 + e^x y^2 z^3 + x^2 y^2 z^2$,

то доказать, что

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \, \partial y \partial z} = 6e^x yz^2 + 8yz.$$

13) Если $u = \lg\,[x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz]$,

то доказать, что

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

и что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}.$$

14) Если $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

то доказать, что

$$\frac{\partial^4 u}{dx^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+2\,\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\,\partial z^2}+2\,\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\,\partial x^2}+2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=0.$$

15) z есть функція x и y, выраженная ур.:

$$z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+F(\alpha),$$

$$0=x+y\varphi'(\alpha)+F'(\alpha);$$

доказать, что при любыхъ значеніяхъ $\varphi(\alpha)$ и $F(\alpha)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

16) Функція u перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$ задана ур.:

$$f(x, y, z, \ldots, t, u)=0.$$

Обозначая черезъ α и β двѣ какія нибудь изъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$, доказать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial\alpha} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{vmatrix}.$$

XI. Примѣры на замѣну перемѣнныхъ.

1) Дано

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$$

доказать, что, при $x=a\cos^3\omega$, $y=b\sin^3\omega$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\omega$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{3a^2}\sec^4\omega\operatorname{cosec}\omega.$$

2) Дано $x=\frac{1}{t}$;

доказать, что

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=t^3\frac{d^2y}{dt^2}.$$

3) Преобразовать уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(e^x+e^{-x})^2},$$

полагая

$$x=\lg\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Отвѣтъ.

$$(t-t^3)\frac{d^2y}{dt^2}+(1-3t^2)\frac{dy}{dt}=ty.$$

4) Преобразовать выраженіе

$$\frac{x^2+a^2}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x^2-a^2}{x^3}\frac{dy}{dx},$$

полагая

$$x = a\sqrt{e^t - 1}.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{4e^{-t}}{a^2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

5) Въ выраженіи

$$S = (a + bx)\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{dy}{dx}$$

принять за новую перемѣнную t, связанную съ x уравненіемъ

$$a + bx = kt^n$$

и опредѣлить n такъ, чтобы

$$S = t^m\frac{d^2y}{dt^2},$$

гдѣ

$$m = \frac{b - 2c}{b - c}.$$

6) Преобразовать уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\frac{dy}{dx} + 4\,\frac{n^2y}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = 0,$$

полагая

$$x = \lg\sqrt{\operatorname{tg} t}.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

7) Преобразовать уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1 + x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1 + x^2)^2} = 0,$$

полагая

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = 0$$

8) Вычислить

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

полагая

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{\left[a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

9) Преобразовать выраженіе

$$\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

полагая

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

10) Преобразовать уравненіе

$$z^2\frac{d^2 y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - 1 = (\lg z)^2\left[z^2\frac{d^2 y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz}\right],$$

полагая $z = e^{\sin x}$ и принимая за новое независимое перемѣнное x.

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} = 1.$$

11) Преобразовать уравненіе

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0,$$

полагая

$$x = \cos t.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

12) Преобразовать выраженіе

$$\frac{x + y \dfrac{dy}{dx}}{x \dfrac{dy}{dx} - y},$$

полагая

$$x = r \cos \theta, \ y = r \sin \theta$$

и считая θ новой независимой перемѣнной.

Отвѣтъ.

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}.$$

13) Преобразовать уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

принимая

$$x^2 = 4t.$$

Отвѣтъ.

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0.$$

14) Преобразовать уравненіе

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+1)\,x\frac{dy}{dx}-y=0,$$

полагая

$$t=\lg x.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^3y}{dx^3}+a\frac{dy}{dx}-y=0.$$

15) Преобразовать уравненіе

$$(x+y-6)\frac{dy}{dx}+x+y+6=0,$$

полагая

$$x=u+t,$$

$$y=u-t.$$

Отвѣтъ.

$$u\frac{du}{dt}+3=0.$$

16) Преобразовать уравненіе

$$\left[\frac{d^3y}{dx^3}+y\frac{dy}{dx}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left[3\frac{dy}{dx}+x^2\right]=0,$$

принимая за независимую перемѣнную y.

Отвѣтъ.

$$x'''+x^2x''^2-y\,x'^3=0.$$

17) Преобразовать уравненіе

$$(1-x)^3 \frac{dy}{dx} + 2a(1+x) = 0,$$

полагая

$$t = \frac{1+x}{1-x}.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{dy}{dt} + at = 0.$$

18) Преобразовать уравненіе

$$(1+x^2)\, x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left[1 - x^2 y \sqrt{1+x^2}\right] - x^3 y^2 = 0,$$

полагая

$$t = \sqrt{1+x^2}.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y \frac{dy}{dt} - y^2 = 0.$$

19) Преобразовать уравненіе

$$(1-x^2)^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 - 2x(1-x^2) \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

полагая

$$x = \sin t.$$

Отвѣтъ.

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 1 = 0.$$

20) Преобразовать уравненіе

$$(1-x^2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x(1-x^2) \frac{dy}{dx} + \frac{2a}{1-x}\, y = 0,$$

полагая

$$x = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

Отвѣтъ.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a\,(e^{2t} + 1)\,y = 0.$$

21) Доказать, что выраженіе

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

принимая за независимую перемѣнную s, при чемъ

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

преобразуется въ

$$\frac{d^2 y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2 x}{ds^2}\frac{dy}{ds}.$$

22) Если дано

$$xy\,\frac{d^2 y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^3 = 0,$$

то, принимая

$$x = e^t,$$

$$y = e^u,$$

получимъ

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + e^{u+t} = 0.$$

23) Если

$$x\,\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = 0,$$

то доказать, что при $x = ye^z$,

$$y\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{dz}{dy} = 0.$$

24) Доказать, что, если

$$x + y = t,$$

то

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{\left[\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 - 2\frac{dt}{dy} + 2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2 t}{dy^2}}.$$

25) Если $\operatorname{tg} y = x$,

то доказать, что

$$\frac{d^3 u}{dy^3} - 4\operatorname{tg} y\frac{d^2 u}{dy^2} + 2\operatorname{tg}^2 y\frac{du}{dy} = 0$$

преобразуется въ

$$(1 + x^2)^2\frac{d^3 u}{dx^3} + 2x(1 + x^2)\frac{d^2 u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx} = 0.$$

26) Если $y = \lg x$,

то доказать, что ур.

$$x^2\frac{d^2 u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + u = 0$$

преобразуется въ

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + u = 0.$$

27) Преобразовать уравненіе

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + A(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)\, y = 0,$$

принимая за новую перемѣнную

$$X = \frac{dy}{dx}$$

и за новую функцію

$$Y = x\frac{dy}{dx} - y$$

(преобразованіе Лежандра).

28) Если $f = f(r, p)$, при чемъ

$$r = au + \varphi(u - v),$$

$$p = u + \psi(u - v),$$

то доказать, что

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = a\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial p}.$$

29) Дано

$$x + y = X,\ y = XY,$$

доказать, что

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}.$$

30) Дано

$$x = e^{\theta+\beta} + e^{\theta-\beta},$$

$$y = e^{\theta+\beta} - e^{\theta-\beta};$$

доказать, что

$$4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right).$$

31) Дано

$$\frac{y-x}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}};$$

доказать, что, если

$$u=\lg\sqrt{x^2+y^2},$$

$$v=\operatorname{arc\,tg} z,$$

$$t=x+y+z,$$

то предложенное выраженіе преобразуется въ

$$e^{2u}\left[\cos^2 v\,\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial t}\right].$$

32) Если

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

то, полагая

$$x^2+y^2=r^2,$$

и принимая

$$z=f(r),$$

получимъ

$$\frac{d^2 z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}=0.$$

33) Если дано

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x},$$

то, полагая

$$x = r\cos t,$$

$$y = r\sin t,$$

получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial t}.$$

34) Если

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - e^z = 0,$$

то, полагая

$$u = x^2 + y^2,$$

$$v = x^2 - y^2,$$

$$\lg\frac{t}{2} = z,$$

получимъ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 - \frac{t^3}{16}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 1 = 0.$$

35) Если дано

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

то, принимая

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \lg t$$

и

$$z = f(t),$$

получимъ

$$t^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

36) Если дано

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

то, принимая

$$x^2 - y^2 = e^{2t}$$

и

$$z = f(t),$$

получимъ

$$e^{-2t} \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

37) Если дано

$$xy^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x^2 y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^3 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y^3 \frac{\partial z}{\partial x} - x^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

то, полагая

$$\sqrt{x^2 + y^2} = t$$

и принимая

$$z = f(t),$$

получимъ

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} = 0.$$

38) Преобразовать уравненіе

$$x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + yz \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

полагая

$$x = qt, \quad y = pt, \quad z = pq$$

и принимая p, q, t за новыя независимыя перемѣнныя.

Отвѣтъ.

$$p^2 \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + q^2 \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} + t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

39) Если дано

$$y^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right] - x^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}\right] = 0,$$

то, полагая

$$x = (t^2 + v^2)^2,$$

$$y = (t^2 - v^2)^2,$$

получимъ

$$v^3 \frac{\partial z}{\partial t} - t^3 \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

40) Дано

$$2x = r\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right),$$

$$2y = r\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right);$$

доказать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

41) Доказать, что, если

$$x = r \cos p,$$

$$y = r \sin p,$$

то, при любой перемѣнной t,

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = r^2 \frac{d^2 p}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{dp}{dt}.$$

42) Доказать, что, если

$$x = u,$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = v,$$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = w,$$

то уравненіе

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

43) Доказать, что, при

$$x + y = u,$$

$$\frac{y}{x} = v,$$

$$\frac{z}{x} = w,$$

уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

44) Если

$$x = r(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta),$$

$$y = r(\sec\theta - \operatorname{tg}\theta),$$

то доказать, что

$$4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2-\frac{\cos^2\theta}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2.$$

45) Дано

$$u=y+ax,$$

$$v=y-ax;$$

доказать, что въ этомъ случаѣ уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

46) Дано

$$u=x+y,$$

$$v=x-y,$$

$$w=xy-z;$$

доказать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}.$$

47) Дано

$$u=x,$$

$$v=\frac{y}{x};$$

доказать, что уравненіе

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{z}{u}.$$

48) Дано

$$u=x,$$

$$v=\frac{y-nz}{x-mz};$$

доказать, что уравненіе

$$(x-mz)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-nz)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

49) Дано

$$u=x,$$

$$v=x^2+y^2;$$

доказать, что уравненіе

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

50) Дано

$$u = x,$$

$$v = y - bz;$$

доказать, что уравненіе

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{a}.$$

51) Преобразовать уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

полагая

$$x = \alpha u + \beta t,\ \ y = \alpha_1 u + \beta_1 t$$

и принимая u и t за новыя независимыя перемѣнныя.

Отвѣтъ.

$$\frac{1}{(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}\right)^2\right].$$

52) Преобразовать уравненіе

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

полагая

$$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta.$$

Отвѣтъ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + z = 0.$$

53) Преобразовать уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0,$$

полагая

$$xy = u, \quad y = \frac{1}{v}$$

и принимая u и v за новыя независимыя перемѣнныя.

Отвѣтъ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2(v - v^3)\frac{\partial z}{\partial v} + u^2 v^2 z = 0.$$

54) Дано

$$u = px + qy - z,$$

гдѣ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

доказать, что уравненіе

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$$

преобразуется въ

$$q^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + 2pq \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} + p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = 0.$$

(Преобразованіе Лежандра).

55) Доказать, что, посредствомъ преобразованія Лежандра, уравненіе

$$r - t = \frac{4x}{p+q}(rt - s^2)$$

принимаетъ видъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=\frac{4}{p+q}\frac{\partial u}{\partial p}.$$

56) Доказать, что, при помощи преобразованія Лежандра, уравненіе

$$px+qy-z=xy$$

преобразуется въ

$$u=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}.$$

57) Доказать, что, сдѣлавъ надъ уравненіемъ

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=a^2$$

преобразованіе Лежандра, получимъ

$$(1+p^2+q^2)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}\right)^2\right\}=\frac{1}{a^2}.$$

58) Доказать, что, употребляя подстановку Лежандра, преобразуемъ уравненіе

$$Rr+Ss+Tt=0,$$

гдѣ R, S и T суть функціи только p и q, въ слѣдующее

$$R\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-S\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}+T\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=0.$$

59) Дано

$$u=\varphi(r),\, x^2+y^2+z^2=r^2;$$

доказать, что при этихъ условіяхъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

60) Если

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,$$

то уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

преобразуется въ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

61) Доказать, что, если

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\sin\theta\cos\varphi,$$

то уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

преобразуется въ

$$r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} = 0.$$

XII. Примѣры на исключеніе постоянныхъ и знаковъ функцій.

1) Дано

$$y = ax + \frac{m}{a};$$

доказать, что, исключивъ a, получимъ

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{dy}{dx} + m = 0.$$

2) Дано

$$x - y = ae^{-\frac{x}{x-y}};$$

доказать, что, исключивъ a, получимъ

$$yy' + x - 2y = 0.$$

3) Доказать, что, исключивъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ изъ выраженія

$$y = a_1\,x^n + a_2\,x^{n-1} + a_3\,x^{n-2} + \ldots + a_n\,x,$$

получимъ

$$y = x\,\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{d^3y}{dx^3} - \ldots \pm \frac{x^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^ny}{dx^n}.$$

4) Доказать, что, исключивъ a, b и c изъ выраженія

$$z = ax + by + c,$$

гдѣ y функція отъ x,

получимъ

$$\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^3 z}{dx^3}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

5) Дано

$$(a + mb)(x^2 - my^2) = mc^2;$$

доказать, что, исключивъ изъ этого выраженія m, получимъ

$$axy\,y'^2 + [bx^2 - ay^2 - c^2]\,y' - bxy^2 = 0.$$

6) Доказать, что, исключивъ a и b изъ уравненія

$$y^2 = a(b^2 - x^2),$$

получимъ

$$y\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

7) Дано уравненіе круга

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c;$$

доказать, что дифференціальное уравненіе всѣхъ круговъ будетъ

$$(1 + y'^2)\,y''' - 3y'\,y''^2 = 0.$$

8) Дано уравненіе коническихъ сѣченій

$$y = ax + b \pm (px^2 + 2qx + r)^{\frac{1}{2}};$$

доказать, что дифференціальное уравненіе всѣхъ коническихъ сѣченій будетъ

$$-40\,y'''^3 + 45\,y''\,y'''\,y^{\mathrm{IV}} - 9\,y''^2\,y^{\mathrm{V}} = 0.$$

9) Доказать, что дифференціальное уравненіе всѣхъ параболъ будетъ

$$5\,y'''^2 - 3\,y''\,y^{IV} = 0.$$

10) Доказать, что, если

$$y^2 + bx^2 = 0,$$

то

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

11) Если

$$y = a\sin x + b\cos x,$$

то

$$y'' + y = 0.$$

12) Дано

$$y = \sin\,(\lg x),$$

доказать, что, исключивъ знаки sin и lg, получимъ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

13) Дано

$$y = ae^{x} + be^{-x} + c\,\sin\,(x + m);$$

доказать, что, исключивъ a, b, c, e и знакъ sin, получимъ

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0.$$

14) Если

$$y = \frac{a}{\sqrt{x}} \cos\left[\frac{\sqrt{7}}{2} \lg x + b\right],$$

то доказать, что, исключивъ cos, получимъ

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

15) Дано

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2);$$

доказать, что, исключивъ φ, получимъ

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

16) Доказать, что, исключивъ φ изъ выраженія

$$z = \varphi\left(\frac{y^2 - x^2}{x}\right),$$

получимъ

$$2xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

17) Если

$$z = \frac{y^2}{2} + \varphi\left[\frac{1}{x} + \lg y\right],$$

то доказать, что, исключивъ φ, получимъ

$$y \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2.$$

18) Дано

$$z^2 - xy = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

доказать, что, исключивъ φ, получимъ

$$zx\frac{\partial z}{\partial x}+zy\frac{\partial z}{\partial y}-xy=0.$$

19) Дано

$$z=-\varphi(\alpha)-x\varphi'(\alpha)+\psi(\alpha)+x\psi'(\alpha),$$

при чемъ

$$\alpha=y-x;$$

доказать, что, исключивъ α и знаки φ и ψ, получимъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

20) Дано

$$z=\alpha x+\frac{y}{\alpha},$$

при чемъ

$$y+\alpha x=\varphi(\alpha);$$

доказать, что, исключивъ α, получимъ

$$z\left[\frac{\partial z}{\partial x}+1\right]\left[\frac{\partial z}{\partial y}+1\right]=x\left(\frac{\partial z}{\partial x}+1\right)^2+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)^2.$$

21) Дано

$$z=\varphi\left[x+f(y)\right];$$

доказать, что, исключивъ φ и f, получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

22) Дано

$$y = x\varphi(z) + \psi(z);$$

доказать, что, исключивъ φ и ψ, получимъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

23) $$z = \varphi(\alpha) - x\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) + x\psi'(\beta),$$

при чемъ

$$\alpha = y + x,$$

$$\beta = y - x;$$

доказать, что, исключивъ α, β, φ и ψ, получимъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

24) Дано

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right);$$

доказать, что, исключивъ f и φ, получимъ

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - n^2 z = 0.$$

25) Если

$$(x + y)(c + \lg x) = xe^{\frac{y}{x}},$$

то доказать, что

$$xy\frac{dy}{dx} - y^2 = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}.$$

26) Если

$$\lg z = \varphi(ay + bx) + \psi(ay - bx),$$

то доказать, что, исключивъ φ и ψ, получимъ

$$a^2 \left[z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] = b^2 \left[z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right].$$

27) Если

$$z = x\varphi(ax + by) + y\psi(ax + by),$$

то доказать, что, исключивъ φ и ψ, получимъ

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2ab \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

28) Если

$$u = e^{nx} F(x + y) + e^{-nx} f(x - y),$$

то доказать, что, исключивъ F и f, получимъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2n \frac{\partial u}{\partial y} + n^2 u.$$

29) Если

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

то доказать, что, исключивъ $f(z)$, получимъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

XIII. О возрастаніи и убываніи функцій.

1) Доказать, что при m положительномъ и $\lambda > 0$ уравненіе

$$x^m + mx + \lambda = 0$$

не имѣетъ положительныхъ корней.

Если m четное и $\lambda > m - 1$, то нѣтъ дѣйствительныхъ корней.

2) Доказать, что всѣ положительные корни уравненія

$$x - \operatorname{tg} x = 0$$

заключаются между $k\pi$ и $k\pi + \frac{\pi}{2}$, гдѣ k произвольное цѣлое число.

3) Доказать, что уравненіе

$$x + \cos x - a = 0,$$

или совсѣмъ не имѣетъ положительныхъ корней, или же имѣетъ только одинъ положительный корень.

4) Доказать, что уравненіе

$$4x + 2 \sin 2x - \pi = 0$$

имѣетъ единственный положительный корень, заключенный между

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ и } x = \frac{\pi}{4}.$$

5) Доказать, что уравненіе

$$xe^x - 2 = 0$$

имѣетъ только одинъ корень, заключенный между

$$x = 0 \text{ и } x = 1.$$

6) Доказать, что уравненіе

$$x - \cos x = 0$$

имѣетъ только одинъ корень, заключенный между

$$x = 0 \text{ и } x = \frac{\pi}{2}.$$

7) Принимая во вниманіе, что

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{dx^n} = \frac{Q_n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

гдѣ

$$Q_n = (-1)^n\, 1.2\ldots n\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{2}\,x^{n-2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\,x^{n-4} - \ldots\right\},$$

доказать, что всѣ корни уравненія $Q_n = 0$ вещественны.

8) Принимая во вниманіе, что

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-1)^n\; U_n\, e^{-x^2},$$

доказать, что всѣ корни уравненія

$$U_n = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} - \ldots = 0$$

вещественны.

9) Доказать, что функція

$$y = (x - 2)\, e^x + x + 2$$

остается положительною для всѣхъ положительныхъ значеній x и отрицательна при $x < 0$.

10) Доказать, что при x и c положительныхъ

$$y = 2 \lg \frac{x}{c+x} + \frac{c}{x} + \frac{c}{c+x}$$

убываетъ при возрастаніи x.

11) Доказать, что при x и c положительныхъ

$$y = \left(\frac{x}{c+x}\right)^{c+2x}$$

возрастаетъ при возрастаніи x.

12) Доказать, что уравненіе

$$3^x - 54x + 135 = 0$$

имѣетъ только два вещественныхъ корня

$$x = 3 \text{ и } x = 4.$$

13) Опредѣлить, сколько вещественныхъ корней имѣетъ уравненіе

$$\operatorname{arc\,tg} x - \frac{13x^3 + 3x}{3x^4 + 14x^2 + 3} = 0.$$

14) Доказать, что функція

$$y = x^2 (e^x - e^{-x})$$

остается положительною для всѣхъ положительныхъ значеній x и отрицательною для всѣхъ отрицательныхъ значеній x.

15) Дано

$$y = x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x - \frac{2}{3} \sin x;$$

доказать, что на всемъ промежуткѣ отъ $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$ $y < 0$, или

$$x < \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \sin x.$$

16) Доказать, что уравненіе

$$e^{x\sqrt{x^2-1}} - m\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0$$

при $m > 1$ имѣетъ единственный корень большій единицы, а при $m > 0$, но < 1 это уравненіе совсѣмъ не имѣетъ положительныхъ корней.

17) Доказать, что уравненіе

$$2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m} = 0$$

имѣетъ только одинъ положительный корень, заключенный между 0 и $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{m}$.

18) Дано уравненіе

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^4 x}-m=0.$$

Опредѣлить число его корней, заключенныхъ между 0 и π, при чемъ m положительное количество и α уголъ между 0 и π.

19) Если a и b два положительныхъ количества большія единицы и $a>b$, то доказать

1) что, при $\qquad a$ и $b<e$,

$$a^b-b^a>0,$$

2) при $\qquad a$ и $b>e$,

$$a^b-b^a<0.$$

Если-же e лежитъ между a и b, то можетъ имѣть мѣсто, или неравенство 1), или неравенство 2).

20) Даны три функціи $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имѣющія опредѣленныя производныя на всемъ промежуткѣ отъ $x=a$ до $x=b$; доказать, что на этомъ промежуткѣ существуетъ такое значеніе $x=x_1$, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство

$$\begin{vmatrix} f'(x_1) & \varphi'(x_1) & \psi'(x_1) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix}=0.$$

21) Если цѣлыя функціи $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ: 1) степень функціи $F(x)$ равна n, а степень $f(x)$ равна n или $n-1$, 2) всѣ корни каждаго изъ уравненій: a) $f(x)=0$, b) $F(x)=0$ вещественные и неравные между собой и 3) корни уравненія (a) перемежаются съ корнями уравненія (b), то всѣ корни уравненія

$$f'(x)\,F(x)-F'(x)\,f(x)=0$$

будутъ мнимые.

1 примѣръ. Полиномы Лежандра X_n и X_{n-1} удовлетворяютъ условіямъ теоремы, слѣдовательно всѣ корни уравненія

$$X'_{n-1}\,X_n-X'_n\,X_{n-1}=0$$

мнимые.

2 примѣръ. Если всѣ корни уравненія

$$F(x)=0,$$

гдѣ $F(x)$ обозначаетъ цѣлый полиномъ, вещественные и неравные между собой, то всѣ корни уравненія

$$F''(x)\,F(x)-F'^2(x)=0$$

мнимые.

(Задача эта и ея рѣшеніе сообщены мнѣ И. И. Ивановымъ).

XIV. Примѣры на разложенія функцій въ строки.

Пользуясь формулою Тайлора, разложить въ рядъ слѣдующія функціи:

1) Если

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5,$$

то

$$f(x+2) = -1 + 4x + 3x^2 + x^3.$$

2) Полагая

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

доказать, что

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^3}{6} - \ldots \quad (x^2 \leqq 1)$$

и, полагая въ этомъ разложеніи

$$x = -\sin^2 z,$$

вывести, что

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 z - \frac{1}{2}\,\frac{\sin^4 z}{4} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^6 z}{6} - \ldots$$

3) Полагая

$$f(x) = \operatorname{tg} x,$$

доказать, что

$$\operatorname{tg}(a+x) = \operatorname{tg} a + \frac{x}{1}\,\frac{1}{\cos^2 a} + \frac{2\operatorname{tg} a}{\cos^2 a}\,\frac{x^2}{1.2} + 2\,\frac{1+3\operatorname{tg}^2 a}{\cos^2 a}\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

4) Полагая

$$f(x) = (a + bx)^m,$$

доказать, что

$$[a + b(x + h)]^m = (a + bx)^m \left[1 + \frac{m}{1} \frac{bh}{a + bx} + \frac{m(m-1)}{1.2} \left(\frac{bh}{a + bx}\right)^2 + \ldots \right]$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} b^n h^n [a + b(x + \theta h)]^{m-n}.$$

5) Полагая

$$f(x) = \frac{a + x}{a - x},$$

доказать, что

$$\frac{a+x+h}{a-x-h} = \frac{a+x}{a-x} + 2a \left[\frac{h}{(a-x)^2} + \frac{h^2}{(a-x)^3} + \ldots + \frac{h^n}{(a-x-\theta h)^{n+1}}\right].$$

6) Дано

$$f(x) = e^{ax} \sin mx;$$

доказать, что

$$e^{a(x+h)} \sin m(x + h) = e^{ax} \left\{\sin mx + h(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \sin(mx + \varphi) + \frac{h^2}{1.2}(a^2 + m^2)^{\frac{2}{2}} \sin(mx + 2\varphi) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}(a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} \sin[m(x + \theta h) + n\varphi]\right\},$$

гдѣ

$$\varphi = \text{arc tg}\, \frac{m}{a}.$$

7) Дано

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x;$$

доказать, что

$$(\alpha)\ldots\ldots \operatorname{arc\,tg}(x+h) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{h}{1}\sin\varphi\,.\sin\varphi$$

$$-\frac{h^2}{1.2}\sin 2\varphi\,\sin^2\varphi + \frac{h^3}{3}\sin 3\varphi\,\sin^3\varphi - \frac{h^4}{4}\sin 4\varphi\,\sin^4\varphi + \ldots,$$

гдѣ

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$$

и

$$1 > x > -1.$$

Полагая въ формулѣ (α):

1) $$h = -\sqrt{1+x^2},$$

вывести, что

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{2} + \sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{4} + \ldots,$$

гдѣ

$$0 < \varphi < \pi;$$

2) $$h = -x$$

получить

$$\frac{\pi}{2} = \varphi + \sin\varphi\,\cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi\,\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos^3\varphi\,\sin 3\varphi}{3} + \ldots.$$

3)
$$h = -x - \frac{1}{x},$$

доказать, что

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{\sin 3\varphi}{3\cos^3\varphi} + \ldots.$$

8) Если

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2},$$

то доказать, что

$$\frac{1}{a^2-(x+h)^2} = \frac{1}{2a(a^2-x^2)}\Big[2a^2 + \frac{h}{a^2-x^2}\left[(a+x)^2-(a-x)^2\right]$$

$$+\left(\frac{h}{a^2-x^2}\right)^2\left[(a+x)^3-(a-x)^3\right]+\ldots$$

$$+\frac{h^n}{(a^2-\theta^2x^2)^n}\left[(a+\theta x)^{n+1}-(a-\theta x)^{n+1}\right]\Big].$$

9) Доказать, что

$$\sin mx = \sin x + \frac{m-1}{1}\,x\cos x - \frac{(m-1)^2}{1.2}\,x^2\sin x$$

$$-\frac{(m-1)^3}{1.2.3}\,x^3\cos x + \ldots.$$

10) Доказать, что

$$\cos mx = \cos x - (m-1)\,x\sin x - \frac{(m-1)^2}{1.2}\,x^2\cos x$$

$$+\frac{(m-1)^3}{1.2.3}\,x^3\sin x + \ldots.$$

11) Доказать, что при m и n цѣлыхъ, имѣемъ

$$\lim\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{mn}\right]_{n=\infty}=\lg m.$$

12) Найти

$$\frac{d^n x^n (\lg x)^n}{dx^n}.$$

13) Найти

$$\frac{d^n e^{cx^2}}{dx^n}.$$

14) Найти

$$\frac{d^n \cos x^2}{dx^n} \text{ и } \frac{d^n \sin x^2}{dx^n}.$$

XV. Пользуясь формулою Маклорена, доказать слѣдующія равенства:

1) Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots$$

$$+\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}x^n+\ldots.$$

Затѣмъ, подставляя въ этомъ равенствѣ $\sin^2 x$ вмѣсто x, вывести, что

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{1.3}{2.4}\sin^5 x$$

$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^7 x+\ldots.$$

2) Разложить $e^{ax}\cos bx$.

3) Примѣняя признакъ Раабе и пользуясь рядомъ Маклорена, доказать, что рядъ

$$\frac{1}{(\lg 2)^n}+\frac{1}{(\lg 3)^n}+\ldots\ldots+\frac{1}{(\lg x)^n}+\ldots\ldots$$

расходящiйся при всякомъ значенiи показателя n.

4) Доказать, что

$$\frac{\lg(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3+\ldots\ldots$$

для значенiя x въ промежуткѣ отъ -1 до 1.

5) Доказать, что

$$x\operatorname{arc}\operatorname{tg}x-\lg\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}-\frac{x^8}{7.8}+\ldots\ldots$$

при

$$-1<x<1,$$

при чемъ разложенiе это остается справедливымъ и для

$$x=-1 \text{ и } x=+1.$$

6) Доказать, что

$$(1)\ldots\sin(m\operatorname{arc}\sin x)=mx+\frac{m(1-m^2)}{1.2.3}x^3+\frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{1.2.3.4.5}x^5+\ldots\ldots$$

$$+\frac{m(1-m^2)(9-m^2)\ldots.[(2n-1)^2-m^2]}{1.2\ldots.(2n+1)}x^{2n+1}+\ldots\ldots$$

$$(-1<x<1).$$

Полагая

$$\arcsin x = u,$$

вывести, что

$$\sin mu = m \sin u + \frac{m(1-m^2)}{1.2.3} \sin^3 u + \frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 u + \ldots.$$

Затѣмъ изъ формулы (1) получить, что

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

7) Доказать, что

$$\cos(m \arccos x) = 1 - \frac{m^2 x^2}{1.2} - \frac{(4-m^2)m^2}{1.2.3.4} x^4$$

$$- \frac{(16-m^2)(4-m^2)m^2}{1.2.3.4.5.6} x^6 - \ldots$$

$$(-1 < x < 1)$$

и отсюда вывести, что

$$\cos mu = 1 - \frac{m^2 \cos^2 u}{1.2} - \frac{(4-m^2)m^2}{1.2.3.4} \cos^4 u - \ldots$$

8) Доказать, что $f'(a)=-1$ $f''(a)=2$ $f^n = n-1(-1)$

$$\lg \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \ldots$$

6

$\log\left(\frac{x}{x-1}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) +$

9) Доказать, что

$$(\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\,\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\,\frac{x^8}{4} + \ldots$$

$$+ \frac{2.4.6\ldots.(2n-2)}{3.5.7\ldots.(2n-1)}\,\frac{x^{2n}}{n} + \ldots.$$

$$(-1 < x < 1).$$

10) Доказать, что

$$e^{a.\arcsin x} = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a(a^2+1^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{a^2(a^2+2^2)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots.$$

На основанiи этого разложенiя и зная разложенiя $e^{a\arcsin x}$ по степенямъ $a.\arcsin x$, доказать, что

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \ldots.$$

и

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{2^2}{3.4}x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8 + \ldots.$$

11) Дано

$$y^3 - y + x = 0;$$

доказать, что

1) $y = x + x^3 + 3x^5 + \ldots.,$

2) $y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8}\ldots.,$

3) $y = -1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}\ldots.$

12) Дано

$$y^3 - xy - 1 = 0;$$

доказать, что для вещественнаго значенія y

$$y = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^4} + \ldots$$

XVI. Предѣльныя значенія функцій, принимающихъ неопредѣленный видъ.

1) $\lim \left[\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}\right]_{x=3} = \frac{8}{69}.$

2) $\lim \left[\frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}\right]_{x=1} = \frac{16}{9}.$

3) $\lim \left[\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}\right]_{x=1} = \frac{n(n+1)}{2}.$

4) $\lim \left[\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}\right]_{x=a} = -5a.$

5) $\lim \left[\frac{x^x - 1}{x^m + x^n \lg x - 1}\right]_{x=1} = \frac{1}{m+1}.$

6) $\lim \left[\frac{x^x - 1}{x \lg x}\right]_{x=0} = 1.$

7) $\lim \left[\frac{a^x - 1}{xa^x}\right]_{x=0} = \lg a.$

8) $\lim \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right)_{x=0}.$

9) $\lim\left[\frac{a^{\lg x}-x}{\lg x}\right]_{x=1}=\lg a-1.$

10) $\lim\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\right]_{x=0}=-\frac{e}{2}.$

11) $\lim\left[\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-x^2)^2}\right]_{x=1}=n^2.$

12) Принимая во вниманіе, что сумма ряда

$$x+4x^2+9x^3+\ldots+n^2x^n$$

$$=\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3},$$

вычислить сумму

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

13) $\lim\left[\frac{\lg x^p-\lg a^p}{\sin x-\sin a}\right]_{x=a}=\frac{p}{a}\,\frac{1}{\cos a}.$

14) $\lim\left(\frac{\lg\cos x}{\sin^2 x}\right)_{x=0}=-\frac{1}{2}.$

15) $\lim\left[\frac{\lg\sin x-\lg x}{1-\cos x}\right]_{x=0}=-\frac{1}{3}.$

16) $\lim\left[\frac{\sin 2x-2\sin x}{2e^x-x^2-2x-2}\right]_{x=0}=-3.$

17) $\lim\left[\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\right]_{x=0}=1.$

18) $\lim\left(\frac{xe^{\cos x}}{1-\sin x-\cos x}\right)_{x=0}=-e.$

19) $\lim \left[\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\right]_{x=0} = 0.$

20) $\lim \left(\frac{\arcsin (2-x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}\right)_{x=2} = 0.$

21) $\lim \left[\frac{\arccos (1-x)}{\sqrt{2x - x^2}}\right]_{x=0} = 1.$

22) $\lim \left(\frac{xe^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1}\right)_{x=0} = -1.$

23) $\lim \left[\frac{e^x - e^{-x}}{\lg (1+x)}\right]_{x=0} = 2.$

24) $\lim \left[\frac{1 - \cos x}{x \lg (1+x)}\right]_{x=0} = \frac{1}{2}.$

25) $\lim \left[\frac{e^{mx} - e^{ma}}{(x-a)^n}\right]_{x=a} = \infty.$

26) $\lim \left[\frac{e^{x + \sin x}}{x + \sin x}\right]_{x=\infty} = \infty.$

27) $\lim \left[\sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right]_{x=a} = \frac{4a}{\pi}.$

28) $\lim \left[\frac{x + \sin x}{x}\right]_{x=\infty}.$

29) $\lim \left[\frac{x + \sin x \cos x}{e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)}\right]_{x=\infty}.$

30) $\lim \left[\frac{\lg (1 + e^x)}{a + bx}\right]_{x=\infty} = \frac{1}{b}.$

31) $\lim \left[\frac{\lg (a+x)}{x}\right]_{x=\infty} = 0.$

32) $\lim\left(\frac{x^4}{e^x}\right)_{x=\infty}=0.$

33) $\lim\left[\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=3.$

34) $\lim\left(\frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg} x}\right)_{x=0}=\frac{1}{2}.$

35) $\lim\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x}\right]_{x=0}=\infty.$

36) $\lim\left[\frac{x}{\operatorname{cotg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=-1.$

37) $\lim\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\lg x}\right]_{x=1}=-\frac{1}{2}.$

38) $\lim\left[\operatorname{tg} x-\frac{1}{1-\sin x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=\infty.$

39) $\lim\left[\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right]_{x=0}=\frac{2}{3}.$

40) $\lim\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\lg(1+x)}{x^2}\right]_{x=0}=-\frac{1}{2}.$

41) $\lim\left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right]_{x=1}=\frac{2}{\pi}.$

42) $\lim\left[\arcsin\frac{x-a}{a}\operatorname{cotg}(x-a)\right]_{x=a}=\frac{1}{a}.$

43) $\lim\left[(1-\sin x)\operatorname{tg} x\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=0.$

44) $\lim\left[(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=1.$

45) $\lim\ \left[(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$

46) $\lim\ \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^x_{x=\infty} = 1.$

47) Принимая во вниманіе выраженіе

$$\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \ldots = \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)},$$

доказать, что

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

48) Принимая во вниманіе выраженіе

$$\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \frac{1}{5^2+x^2} + \ldots = \frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)},$$

доказать, что

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

49) $$\lim \left\{\frac{p_1 a_1^{\frac{1}{m}} + p_2 a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + p_n a_n^{\frac{1}{m}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right\}^m_{m=\infty}$$

$$= \sqrt[p_1+p_2+\ldots+p_n]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} \ldots a_n^{p_n}};$$

полагая

$$p_1 = p_2 \ldots = p_n = 1,$$

найдемъ, что

$$\lim \left[\frac{a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{m}}}{n}\right]^m_{m=\infty} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Полагая въ этой формулѣ

$$a_1 = 1\,,\ a_2 = 2\,,\ a_3 = 3\,, \ldots,\ a_n = n\,,$$

получимъ, что

$$\lim\left[\frac{1^{\frac{1}{m}} + 2^{\frac{1}{m}} + 3^{\frac{1}{m}} \ldots + n^{\frac{1}{m}}}{n}\right]^m_{m=\infty} = \sqrt[n]{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}.$$

Замѣняя-же

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n$$

соотвѣтственно членами прогрессіи

$$1,\ q,\ q^2, \ldots,\ q^{n-1},$$

получимъ

$$a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{m}} = 1 + q^{\frac{1}{m}} + q^{\frac{2}{m}} + \ldots + q^{\frac{n-1}{m}} = \frac{q^{\frac{n}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1}$$

и

$$a_1\, a_2 \ldots a_n = q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Слѣдовательно

$$\lim\left[\frac{q^{\frac{n}{m}} - 1}{n\left(q^{\frac{1}{m}} - 1\right)}\right]^m_{m=\infty} = \sqrt[n]{q^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \sqrt{q^{n-1}}.$$

50) Зная, что рядъ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходящійся, доказать расходимость ряда

$$\frac{1}{(\lg 2)^p} + \frac{1}{(\lg 3)^p} + \ldots + \frac{1}{(\lg n)^p} + \ldots$$

при $p > 0$.

XVII. Наибольшія и наименьшія значенія функцій отъ одной перемѣнной.

Опредѣлить наибольшія и наименьшія значенія слѣдующихъ функцій:

1) $y = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$.

2) $y = x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000$.

3) $y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$.

4) $y = \frac{1 - x}{(1 + x)^2}$.

5) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

6) Опредѣлить значеніе a, при которомъ сумма квадратовъ корней уравненія

$$x^2 - (a - 2)\, x - (a - 3) = 0$$

будетъ minimum.

7) При $a^2 > b^2$, опредѣлить minimum

$$y = \frac{4a^2 x^2 + b^2 (x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

8) Доказать, что, если a и b суть корни уравненія

$$y^2 - (\alpha + \beta) y + \alpha\beta + 1 = 0,$$

то α и β суть соотвѣтственные maximum и minimum выраженія

$$y = \frac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}.$$

9) Доказать, что при

$$p = -\frac{6}{5} \text{ и } p' = -\frac{22}{5}$$

выраженіе

$$y = \frac{x^2 + px - 3}{x^2 + p'x + 5}$$

будетъ maximum или minimum при

$$x = 2 \text{ и } x = 3.$$

10) $y = \dfrac{x}{\lg x}$.

11) $y = \dfrac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}$.

12) $y = \dfrac{e^x}{\sin(x - a)}$.

13) $y = \sin x \cos(a - x)$.

14) $y = \frac{x^2}{e^x}$.

✓15) $y = x^{1 - \lg x}$.

✓16) $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

✓17) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

✓18) $y = e^x - 2 \cos x + e^{-x}$.

19) $y = \frac{1 + 2x \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}$.

20) $y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$.

21) $y = \frac{x}{1 + x \operatorname{tg} x}$.

22) $y = \frac{a^x}{x}$.

23) $y = x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \lg (1 + x^2) + 1$.

24) $y = \frac{1}{\lg (x^2)}$.

25) $y = x^2 \lg (x^2)$.

26) $y = 1 + x^{\frac{2}{3}}$.

27) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

28) $y = \dfrac{x}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$.

29) $y = x\left[1 \pm \sqrt{x}\right]\sin x$.

30) $y = x\left[1 \pm \sqrt[4]{x}\right]$.

31) $y = 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.

32) Доказать, что

$$y = x \sin\frac{\pi}{x}$$

имѣетъ для значенiй

$$k\pi < \frac{\pi}{x} < k\pi + \frac{\pi}{2}$$

безчисленное множество maximum и minimum. (Здѣсь k произвольное цѣлое число).

33) $y^2 - x^2y + x - x^3 = 0$.

34) $y^2 + 2x^2y + 4x - 3 = 0$.

35) $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$.

36) $y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0$.

37) $x^3 + y^3 - a^2x = 0$.

38) $x^4 - 2a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^4 = 0$.

39) $y^4 - 4a^2xy + x^4 = 0.$

40) $y^2 - ay - \sin x = 0.$

41) Доказать, что циклоида

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = r(1 - \cos\varphi)$$

имѣетъ безчисленное множество наименьшихъ ординатъ $y = 0$, которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ

$$\varphi = 0,\ \varphi = 2\pi,\ \varphi = 4\pi, \ldots,\ \varphi = 2k\pi, \ldots$$

42) Доказать, что изъ всѣхъ треугольниковъ, у которыхъ сумма основанія и высоты есть величина постоянная, наибольшую площадь имѣетъ тотъ треугольникъ, у котораго основаніе равно высотѣ.

43) Доказать, что изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ данную гипотенузу, наибольшую площадь имѣетъ равнобедренный треугольникъ.

44) Доказать, что изъ всѣхъ цилиндровъ, вписанныхъ въ данный круговой конусъ, наиб. объемъ имѣетъ тотъ, высота котораго равна $\frac{1}{3}$ высоты конуса.

45) На данной прямой найти такую точку, сумма разстояній которой до двухъ данныхъ точекъ была бы наименьшая.

46) Опредѣлить радіусъ круга, при которомъ сегментъ, соотвѣтствующій дугѣ данной длины, былъ бы наиб.

47) Даны двѣ параллельныя прямыя AC, DB и линія AB, требуется черезъ точку C провести такъ прямую CE, чтобы сумма площадей $BXY + AXC$ была наименьшая, гдѣ X и Y лежатъ на прямыхъ AB и CE.

48) Опредѣлить такой радіусъ круга, чтобы секторъ, имѣющій данный периметръ $2a$, имѣлъ наибольшую площадь.

49) Доказать, что изъ всѣхъ круговыхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара, наименьшую боковую поверхность имѣетъ тотъ, у котораго разстояніе вершины отъ поверхности шара равно $r\sqrt{2}$, гдѣ r радіусъ шара.

50) Доказать, что изъ всѣхъ трапецій, имѣющихъ три данныя равныя стороны, наибольшую площадь имѣетъ равнобочная трапеція, у которой уголъ при основаніи равенъ $\frac{\pi}{3}$.

51) Доказать, что изъ всѣхъ четыреугольниковъ, имѣющихъ четыре данныя стороны, наибольшую площадь имѣетъ вписанный четыреугольникъ.

52) На сторонахъ AB и BC треугольника требуется опредѣлить такія двѣ точки D и E, чтобы линія ихъ соединяющая раздѣлила пополамъ треугольникъ и была наименьшая.

53) Пересѣчь тетраэдръ $ABCD$ плоскостью параллельною двумъ противолежащимъ ребрамъ AC и BD такимъ образомъ, чтобы сѣченіе $EFGH$ было minimum.

54) Изъ равнобочныхъ трапецій, у которыхъ основаніе $=a$ и у которыхъ общая длина двухъ несмежныхъ сторонъ BC и AD равна постоянной величинѣ c, опред. ту, у которой площадь была бы наибольшая.

Доказать, что для случая $a=c$, стороны BC, AB и AD равны радіусу круга, описаннаго около трапеціи и каждый изъ угловъ DAB, ABC содержитъ $120°$.

55) На горизонтальномъ столѣ AB помѣщенъ дискъ m освѣщенный лампой, основаніе которой находится на постоянномъ разстояніи $=a$ отъ центра диска. Опредѣлить высоту, на которую слѣдуетъ помѣстить лампу F, чтобы дискъ былъ наиболѣе освѣщенъ.

56) На оси параболы дана точка B, требуется между вершиною A параболы и этой точкой B провести такую хорду CD перпендикулярно къ оси параболы, чтобы конусъ, образованный вращеніемъ треугольника BCD около оси параболы, былъ наибольшій.

57) Двѣ касательныя, проведенныя къ кругу, образуютъ уголъ 2α. Спрашивается, какъ надо провести третью касательную, чтобы треугольникъ, составленный изъ этихъ трехъ касательныхъ, имѣлъ наим. площадь.

58) Требуется пересѣчь пирамиду параллельно основанію такимъ образомъ, чтобы призма, имѣющая верхнее осно-

ваніе въ полученномъ сѣченіи, а нижнее — въ основаніи пирамиды, имѣла наибольшій объемъ.

59) Двѣ точки движутся, выходя одновременно изъ концовъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, направляясь къ вершинѣ прямого угла съ постоянными скоростями v и v'; опредѣлить моментъ, въ который онѣ будутъ на ближайшемъ разстояніи другъ отъ друга.

60) На данной гипотенузѣ построить такой прямоугольный треугольникъ, чтобы произведеніе изъ *m-ой* степени одного изъ катетовъ на *n-ую* степень другого было max.

61) Найти наименьшую биссектриссу остраго угла прямоугольнаго треугольника, у котораго высота, соотвѣтствующая гипотенузѣ, имѣетъ постоянную длину.

62) Поверхность прямого кругового конуса касательна къ шару, концентричному съ основаніемъ конуса. Опредѣлить относит. размѣры обоихъ тѣлъ, когда отношеніе объемовъ ихъ будетъ max.

63) Дана сторона прямоугольнаго треугольника; построить этотъ треугольникъ такимъ образомъ, чтобы разность между другою стороною и прилежащимъ отрѣзкомъ гипотенузы, образованнымъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины прямого угла, была наибольшая.

64) Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковыя основанія и высоту, опредѣлить тотъ, у котораго сумма двухъ остальныхъ сторонъ наименьшая.

65) Провести прямую, параллельную данной прямой и пересѣкающую полукругъ такъ, чтобы трапецiя, образованная хордою, дiаметромъ и ординатами концовъ хорды, была наибольшая.

66) Изъ какой точки E гипотенузы прямоугольнаго треугольника ABC нужно опустить перпендикуляры ED и EF на стороны, чтобы вращенiемъ треугольника около одной изъ сторонъ AC, прямоугольникъ $EDFC$ описалъ цилиндръ наибольшаго объема?

67) Данъ кругъ 0 и прямая xy; требуется изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины въ точкѣ P, лежащей на этой прямой и основанiями хорду AB, параллельную прямой xy, опредѣлить тотъ, площадь котораго наибольшая.

68) Доказать, что изъ всѣхъ круговыхъ цилиндровъ, имѣющихъ данный объемъ, у того цилиндра будетъ наименьшая сумма боковой поверхности и одного изъ основанiй, у котораго высота равна радiусу основанiя.

69) Изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара наименьшiй объемъ будетъ у того, у котораго sin половины угла при вершинѣ равенъ $\frac{1}{3}$.

70) Доказать, что изъ всѣхъ конусовъ, имѣющихъ производящiя равной длины, наибольшiй объемъ имѣетъ тотъ, у котораго tg половины угла при вершинѣ равенъ $\sqrt{2}$.

71) Опредѣлить вписанный въ шаръ конусъ такъ, чтобы вся его поверхность была наибольшая.

72) Доказать, что изъ всѣхъ цилиндровъ, вписанныхъ въ шаръ, наибольшую боковую поверхность имѣетъ тотъ, у котораго высота $= r \sqrt{2}$, гдѣ r радіусъ шара.

73) Какой секторъ должно отнять отъ даннаго круга, чтобы изъ остатка можно было образовать кривую поверхность конуса, имѣющаго max. объема?

74) Доказать, что изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, равносторонній имѣетъ наибольшую площадь.

75) Вписать наибольшій прямоугольникъ въ данный сегментъ круга.

76) Вписать наибольшій прямоугольникъ въ данный секторъ круга.

77) Даны двѣ равныя стороны и одно изъ основаній равнобочной трапеціи; опредѣлить такимъ образомъ другое основаніе, чтобы площадь трапеціи была наибольшая.

78) Дана прямая и линія къ ней параллельная; найти на параллельной прямой такую точку, чтобы прямыя, проведенныя изъ этой точки къ концамъ данной прямой составляли между собой наиб. уголъ.

79) Доказать, что наибольшій эллипсъ, вписанный въ квадрантъ даннаго круга такимъ образомъ, что его малая ось совпадаетъ съ биссектриссою угла квадранта, имѣетъ площадь равную половинѣ площади наиб. эллипса, касающагося симметрично полукруга и его діаметра.

80) Въ листъ картона $ABCDE$, имѣющаго форму правильнаго пятиугольника вписываютъ другой правильный многоугольникъ $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$ подобный первому и подобно расположенный; изъ вершинъ A', B', C', D', E' проводятъ перпендикуляры на стороны перваго многоугольника и вырѣзываютъ четыреугольники; опредѣлить апоѳему новаго многоугольника при условіи, чтобы коробка, имѣющая дномъ этотъ многоугольникъ, а боками оставшіеся прямоугольники, имѣла наиб. объемъ.

81) Вписать въ лемнискату наиб. прямоугольникъ, сторона котораго была бы параллельна оси лемнискаты.

82) Стороны даннаго прямоугольника a и b; наиб. прямоугольникъ, который можно построить такъ, чтобы стороны его проходили черезъ вершины даннаго, будетъ квадратъ, каждая сторона котораго $= \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

83) Изъ прямоугольнаго куска папки, стороны котораго a и b, вырѣзаны при вершинахъ квадраты; опредѣлить такія стороны квадратовъ, при которыхъ изъ остатка можно сдѣлать коробку наибольшей вмѣстимости.

84) Доказать, что высота наибольшаго равносторонняго треугольника, который можетъ быть описанъ около даннаго треугольника со сторонами a, b и угломъ C между ними, равна

$$\left[a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi}{3} + C\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

85) Нормандское окно состоитъ изъ прямоугольника, завершеннаго полукругомъ. При данномъ периметрѣ требуется найти высоту и ширину окна, если количество свѣта предполагается наибольшимъ.

86) Въ треугольникѣ даны уголъ и противолежащая ему сторона; доказать, что площадь его будетъ maximum, если вершина даннаго угла находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ вершинъ двухъ другихъ угловъ.

87) Найти наименьшій треугольникъ, который можетъ быть описанъ около даннаго эллипса, имѣя сторону параллельную большой оси и другія двѣ стороны равныя.

88) Наименьшая касательная къ эллипсу, заключающаяся между его продолженными осями, раздѣляется въ точкѣ прикосновенія на двѣ части, которыя равны соотвѣтствующимъ полуосямъ.

89) Два корабля плывутъ съ постоянными скоростями u и v по прямымъ линіямъ, взаимно наклоненнымъ подъ угломъ θ; доказать, что если a и b ихъ одновременныя разстоянія отъ точки пересѣченія путей, то наименьшее разстояніе кораблей будетъ

$$\frac{(av - bu)\sin\theta}{(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

90) Найти наименьшій эллипсъ, который можно описать около данной трапеціи.

91) Точка S взята на продолженной оси прямой правильной шестигранной призмы $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$; черезъ

эту точку и черезъ стороны равносторонняго треугольника ACE, полученнаго соединенiемъ попарно вершинъ верхняго основанiя, проводятъ три плоскости, которыя выдѣляютъ изъ призмы три тетраэдра: $BACK$, $DCEH$, $FEAL$. Тетраэдры эти могутъ быть замѣнены однимъ тетраэдромъ $SACE$, помѣщеннымъ на верху призмы. Требуется опредѣлить такую высоту для точки S, при которой поверхность декаэдра была бы наименьшая. (Ячейка пчелинаго улья).

92) Изъ всѣхъ вазъ одинаковой вмѣстимости и имѣющихъ форму усѣченнаго конуса, въ которомъ производящая составляетъ съ основанiемъ уголъ α, найти ту, у которой полная поверхность была бы наименьшая.

93) Данъ одинъ изъ угловъ прямоугольнаго сферическаго треугольника; опредѣлить стороны, заключающiя этотъ уголъ, такимъ образомъ, чтобы ихъ разность была наибольшая.

94) Найти наименьшее положительное значенiе α подъ условiемъ, чтобы при $x \geqq 0$ постоянно было

$$e^{-\alpha x} \leqq \frac{1}{1+x^2}.$$

(Эта задача и ея рѣшенiе сообщены мнѣ Н. Я. Сонинымъ).

XVIII. Наибольшiя и наименьшiя значенiя функцiй со многими перемѣнными.

Найти наибольшiя и наименьшiя значенiя слѣдующихъ функцiй:

1) $z = xy(x + y - 1)$.

2) $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27.$

3) $z = x^2 - xy + y^2 - 3y.$

4) $z = x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 - 8x + 8y.$

5) $z = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x.$

6) $z = x^4 + y^4 - ax^2 y - axy^2 + c^2x^2 + c^2y^2.$

7) $f(x, y) = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^3.$

8) $f(x, y) = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4.$

9) $f(x, y) = y^4 - 2(\alpha + \beta) xy^2 + 4\alpha\beta x^2.$

10) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y).$

11) $u = ax^2 - bxy + xz + yz.$

12) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}.$

13) $z = \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha \cos(y - \beta).$

14) $z = x^3 y^2 (6 - x - y).$

15) $z = e^{-x^2 - y^2} (ax^2 + by^2).$

16) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y).$

17) $z = xe^{y + x \sin y}.$

18) $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0.$

19) Въ данный кругъ вписать наибольшій треугольникъ.

20) Опредѣлить изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ данный периметръ, тотъ, площадь котораго наиб.

21) Внутри даннаго треугольника ABC опредѣлить такую точку 0, сумма квадратовъ разстояній которой отъ трехъ вершинъ треугольника была бы наименьшая.

22) Изъ всѣхъ треугольниковъ даннаго периметра найти такой, который вращеніемъ около стороны произвелъ бы наибольшій двойной конусъ.

23) Въ данный шаръ вписать прямоугольный параллелепипедъ, объемъ котораго былъ бы max.

24) Въ данный шаръ вписать прямоугольный параллелепипедъ, поверхность котораго была бы max.

25) Опредѣлить изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ даннаго объема тотъ, у котораго поверхность наименьшая.

26) Изъ всѣхъ прямыхъ эллиптическихъ цилиндровъ, которые могутъ быть вписаны въ шаръ, опредѣлить тотъ, у котораго объемъ max.

27) Эллиптическій параболоидъ пересѣченъ плоскостью, перпендикулярною къ его оси; найти наибольшій прямоугольный параллелепипедъ, который можетъ быть вписанъ въ отдѣленную сѣкущей плоскостью часть параболоида.

28) Опред. max. или min. прямой OC, замыкающей многоугольникъ, стороны котораго OA, AB и BC вращаются всевозможными способами около точекъ O, A, B, C, какъ около шарнировъ.

29) Въ данный треугольникъ помѣстить кругъ даннаго радіуса такимъ образомъ, чтобы площадь треугольника, полярнаго къ данному треугольнику по отношенію къ этому кругу, была наим.

30) Доказать, что изъ всѣхъ сферическихъ треугольниковъ, имѣющихъ данную площадь, наименьшій периметръ имѣетъ равносторонній треугольникъ.

31) Если

$$x + y + z = 3c,$$

то

$$f(x)f(y)f(z) = u$$

будетъ имѣть max., если

$$f''(c) < \frac{[f'(c)]^2}{f(c)},$$

и min., если

$$f''(c) > \frac{[f'(c)]^2}{f(c)}.$$

32) Опредѣлить max.

$$U = xyzt \ldots . u$$

при условіи, что

$$x + y + z + t + \ldots . + u = a,$$

при чемъ

$$x,\ y,\ z, \ldots, t,\ u$$

положительные.

33) Опред. max. выраженія

$$u = ax + by + cz$$

при условіи

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

при чемъ x, y, z положительные.

34) Найти min.

$$u = x + y + z$$

при условіи

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1,$$

при чемъ x, y, z положительные.

35) Найти min.

$$u = x^p\, y^q\, z^r$$

при условіи

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1,$$

при чемъ x, y, z положительные.

36) Найти max. или min.

$$u = xy^2 z^3$$

при условіи

$$x + my^2 + nz^3 = a$$

и при положительныхъ x, y, z.

37) Найти max. или min.

$$u = \cos x \cos y \cos z,$$

при чемъ

$$x + y + z = \pi.$$

38) Поверхность

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$

пересѣчена плоскостью

$$lx + my + nz = 0.$$

Опред. наиб. и наим. разстоянie центра поверхности до периметра сѣченiя.

39) Найти площадь сѣченiя, образованнаго въ однополомъ гиперболоидѣ плоскостью, проходящей черезъ его центръ.

40) Опредѣлить площадь эллипса, уравненie котораго

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 + 1 = 0.$$

41) Вычислить объемъ эллипсоида, уравненie котораго

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = c.$$

42) Въ плоскости треугольника найти такую точку, чтобы сумма ея разстоянiй до трехъ вершинъ треугольника была min.; при чемъ данный треуг. таковъ, что ни одинъ изъ его угловъ не содержитъ болѣе 120°.

43) Пятиугольникъ состоитъ изъ прямоугольника, завершеннаго равнобедреннымъ треугольникомъ. 1) При данномъ периметрѣ этой фигуры опредѣлить стороны такъ, чтобы площадь была наибольшая. 2) При данной площади фигуры опредѣлить стороны такъ, чтобы периметръ былъ наименьшій.

44) Тѣло состоитъ изъ цилиндра, завершеннаго конусомъ. 1) При данной полной поверхности всего тѣла опредѣлить его измѣренія такъ, чтобы объемъ былъ наибольшій. 2) При данномъ объемѣ всего тѣла опредѣлить его измѣренія такъ, чтобы полная его поверхность была наименьшая.

45) Площадь треугольника уменьшена загородками при вершинахъ; каждая загородка круговая и имѣетъ центръ въ ближайшей вершинѣ; показать, какъ оставить возможно большую площадь при данной длинѣ трехъ загородокъ.

46) Опредѣлить кратчайшее разстояніе двухъ прямыхъ въ пространствѣ, уравненія которыхъ:

$$\left.\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = cz + r \\ y = dz + s \end{array}\right\}$$

47) Въ плоскости дана прямая CD и двѣ точки A и B по обѣимъ сторонамъ этой прямой. Тѣло движется по прямой линіи отъ A съ постоянною скоростью u до пересѣченія съ CD въ точкѣ P, а потомъ отъ P до B съ постоянной скоростью v. Опредѣлить путь APB, по которому тѣло пройдетъ отъ A до B въ кратчайшее время.

48) Лучъ свѣта падаетъ на грань треугольной призмы; опредѣлить уголъ паденія такимъ образомъ, чтобы уголъ между лучемъ падающимъ и выходящимъ былъ наименьшій.

49) Найти max.

$$V_n^{(a,\,b)} = \frac{x_1\,x_2\,x_3\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)},$$

гдѣ a и b данныя положительныя числа; x_1, $x_2, \ldots, x_n$ перемѣнныя, не получающія отрицательныхъ значеній. (Задача Гюйгенса).

XIX. Интегрированіе функцій.

1) $\int \frac{x^{n-1}}{a + bx^n}\, dx.$

2) $\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\, dx.$

3) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x-3x^2}}.$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}.$

7) $\int \frac{(2x+3)\, dx}{x^2+2ax+3a^2}.$

8) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}.$

9) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

12) $\int \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right) dx.$

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$

14) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2\, dx}{2x\sqrt{x}}.$

15) $\int \frac{x\,dx}{a^2b^2+x^4}.$

16) $\int \frac{x\,dx}{a^2b^2-x^4}.$

17) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^4b^4-x^6}}.$

18) $\int \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{(ab)^{2m}+x^n}}.$

19) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx.$

26) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2ax-a^2}}.$

20) $\int \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{x\sqrt{x-1}}.$

27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+2ax-x^2}}.$

21) $\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}.$

28) $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}}.$

22) $\int \frac{dx}{x^2+x-1}.$

29) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}}.$

23) $\int \frac{dx}{3x^2+2x+1}.$

30) $\int \frac{nx^2-p}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x+x^2}}.$

31) $\int \left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}\right)^2 dx.$

25) $\frac{dx}{\sqrt{1+2cx-c^2x^2}}.$

32) $\int \sqrt{x}\,(x^2+px+q)\,dx.$

33) $\int \left(3x^3+\frac{1}{2x^3}-7\sqrt[3]{x+1}+\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}\right) dx.$

34) $\int \frac{(x-2)\,dx}{(x^2-2x+1)^2}.$

39) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)}.$

35) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}.$

40) $\int \frac{dx}{x^2+9x+20}.$

36) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}.$

41) $\int \frac{dx}{x^2-3}.$

37) $\int \frac{3b+6cx}{5(a^2+bx+cx^2)}\,dx.$

42) $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-x^4-6}.$

38) $\int \frac{3x\,dx}{(2+3x^2)^3}.$

43) $\int \frac{dx}{1-2x+2x^2}.$

44) $\dfrac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

45) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

46) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

47) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3+4x^2)\sqrt{4-3x^2}}$.

48) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4-3x^2)(3+4x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

49) $\displaystyle\int \frac{(2x^2-3x-1)\,dx}{x^3-2x^2-x+2}$.

50) $\displaystyle\int \frac{(x^2+x-1)\,dx}{x^3-x^2-x+1}$.

51) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-3x^2+4x-2}$.

52) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-7x^2+12}$.

53) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}$.

54) $\displaystyle\int \frac{(x^3-2x+1)\,dx}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}$.

55) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}\,dx$.

56) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$.

57) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$.

58) $\displaystyle\int \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}\,dx$.

59) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$.

60) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

61) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)^2}$.

62) $\displaystyle\int \frac{(5x^2-7x)\,dx}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}$.

63) $\displaystyle\int \frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}\,dx$.

64) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$.

65) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x+2)^3}$.

66) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+(a+b)x^2+ab}$.

67) $\displaystyle\int \frac{2(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1}$.

68) $\displaystyle\int \frac{16(x^2+4)}{(4x^2+4x+17)^2}\,dx$.

69) $\displaystyle\int \frac{(x^5+1)\,dx}{x^6+x^4}$.

70) $\displaystyle\int \frac{15x^5+5x^4+58x^3+x^2+37x-16}{x^6+4x^4-x^2-4}\,dx$.

71) $\int \frac{(x^2+6x-1)\,dx}{(x-1)^3(x+3)^3}$. 72) $\int \frac{x^3\,dx}{x^6-2x^5+x^4+x^2-2x+1}$.

73) $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6+1}$.

Отдѣлить алгебраическую часть въ слѣдующихъ интегралахъ:

74) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$. 76) $\int \frac{(x^2+x+1)\,dx}{x^5-2x^4+x^3}$.

75) $\int \frac{(2-x-2x^2)\,dx}{(x+1)^2(x+2)^3}$. 77) $\int \frac{x^4-4x^3-7x^2-2x}{(x^3+x+1)^2}\,dx$.

78) $\int \frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^5+6x^4+9x^3}\,dx$.

Вычислить интегралы:

79) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$. 82) $\int \frac{x^5\,dx}{(a^2-x^2)^2}$.

80) $\int \frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n}$. 83) $\int \frac{x^3\,dx}{(a+cx^2)^4}$.

81) $\int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)^3}$. 84) $\int \frac{x^5\,dx}{(1+x^2)^3}$.

85) $\int \frac{(1-x^2)\,dx}{x(1+x^2+x^4)}$.

86) Доказать, что

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\lg\left[1-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+x^2\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}}+C,$$

гдѣ k обозначаетъ цѣлое число отъ 1 до n включительно.

87) Доказать, что

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n+1}} = \frac{\lg(1+x)}{2n+1}$$

$$-\frac{1}{2n+1}\sum \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\lg\left\{1-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}+x^2\right\}$$

$$+\frac{2}{2n+1}\sum \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}}+C.$$

88) $\int \frac{xdx}{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}}$.

89) $\int \frac{x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt{x}}\,dx$.

90) $\int \frac{x-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[4]{1+x}}\,dx$.

91) $\int \frac{x^3(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}+1}\,dx$.

92) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

93) $\int x^3\sqrt{1+x}\,dx$.

94) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x-1}}$.

95) $\int \frac{x^5\,dx}{(1+x^2)^3}$.

96) $\int x^2(a+bx)^{\frac{1}{3}}\,dx$.

97) $\int x^5(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx$.

98) $\int \frac{dx}{x(1+x)^{\frac{3}{4}}}$.

99) $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$.

100) $\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

101) $\int \frac{dx}{x^5(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

102) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

103) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4+5x^2}}$.

104) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{3+2x^2}}$.

105) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$.

106) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

107) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}.$

108) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$

109) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}.$

110) $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+2ax+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+2ax+2bx^2+2ax^3+x^4}}.$

111) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^3-1)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}.$

112) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

113) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

114) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

115) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+x^4}}.$

116) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

117) $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

118) $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

119) $\displaystyle\int \frac{(x^4-1)\,dx}{x^2\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

120) $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}.$

121) $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}.$

122) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}}.$

123) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^{2n})\left[(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}-x^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$

124) $\displaystyle\int \frac{e^{kx}\,dx}{\sqrt{a+be^{kx}}}.$

125) $\displaystyle\int x^n \lg x\,dx.$

126) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

127) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\lg x)^n}.$

128) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx.$

129) $\displaystyle\int x^3e^x\,dx.$

130) $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}$.

131) $\int x^3 (\lg x)^2\,dx$.

132) $\int \frac{e^x\,dx}{x^4}$.

133) $\int e^x \frac{1+x\lg x}{x}\,dx$.

134) $\int \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2}\,dx$.

135) $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$.

136) $\int \frac{e^x[x^3+x+1]}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

137) $\int \frac{x^4\,dx}{2(\lg x)^2}$.

138) $\int \frac{e^x[2-x^2]\,dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

139) $\int \frac{x\,e^x\,dx}{(e^x-1)^3}$.

140) $\int e^{\sqrt{x}}\,x dx$.

141) $\int (x+a\lg x)^2\,dx$.

142) $\int \frac{dx}{(a+be^{kx})^2}$.

143) $\int \frac{\lg x\,dx}{(a+bx)^2}$.

144) $\int \frac{\lg(a+b^2x^2)\,dx}{x^2}$.

145) $\int \frac{\lg x\,dx}{\sqrt{(a+cx^2)^3}}$.

146) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \lg \frac{a+bx}{a-bx}\,dx$.

147) $\int \frac{e^{a \operatorname{arc\,tg} x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

148) $\int \frac{e^{a \operatorname{arc\,tg} x}\,x dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

149) $\int \sin^2\varphi\,d\varphi$.

150) $\int \cos^2\varphi\,d\varphi$.

151) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$.

152) $\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}$.

153) $\int \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi}$.

154) $\int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$.

155) $\int \cos^4\theta\,d\theta$.

156) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

157) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

158) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

159) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$

160) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$

161) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$

162) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$

163) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}.$

164) $\int \frac{1 + \cos x}{(x + \sin x)^3} \, dx.$

165) $\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}.$

166) $\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{a + b \operatorname{tg}^2 x}.$

167) $\int \frac{\cos (\lg x) \, dx}{x}.$

168) $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}.$

169) $\int \sqrt{\sin \theta} \cos^3 \theta d\theta.$

170) $\int \frac{\sin^3 \theta}{\sqrt{\cos \theta}} \, d\theta.$

171) $\int \frac{\cos^3 \theta}{\sin^{3} \theta} \, d\theta.$

172) $\int \frac{\sin^3 \theta}{\cos^5 \theta} \, d\theta.$

173) $\int \frac{\sin^{\frac{1}{2}} \theta}{\cos^{\frac{5}{2}} \theta} \, d\theta.$

174) $\int \frac{d\theta}{\sin^{\frac{1}{2}} \theta \cos^{\frac{7}{2}} \theta}.$

175) $\int \frac{d\theta}{\operatorname{tg}^3 \theta}.$

176) $\int \frac{dx}{\cos x (5 + 3 \cos x)}.$

177) $\int \frac{dx}{\sin^2 x (a + b \cos x)}.$

178) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (a + b \cos x)}.$

179) $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \, dx.$

180) $\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}.$

181) $\int \frac{dx}{(a + b \sin x)^2}.$

182) $\int \sin 4x \cos^2 x \, dx.$

183) $\int e^{-x} \cos^2 x \, dx.$

184) $\int \cos^3 \theta \sin 2 \theta \, d\theta.$

185) $\int e^{-x} \cos^3 x \, dx.$

186) $\int e^{x} (\cos x + \sin x) dx.$

187) $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$.

189) $\int \frac{dx}{a + b \sin x + c \cos x}$.

188) $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}$.

190) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x}\, dx$.

191) $\int \cos 2x \,.\, \sqrt{3 + \sin 2x}\; dx$.

192) $\int \frac{\sin 3x}{\cos 4x}\, dx$.

193) $\int \frac{dx}{\sin (x + a) \sin (x + b) \sin (x + c)}$.

194) $\int \frac{x^2\, dx}{(x \sin x + \cos x)^2}$.

195) $\frac{x^2\, dx}{(\sin x - x \cos x)^2}$.

196) $\int \frac{bx^2\, dx}{[a (x \sin x + \cos x) + b (\sin x - x \cos x)]^2}$.

197) $\int \frac{(\sin x - \cos x)\, dx}{(\sin x + \cos x) \sqrt{\sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x}}$.

198) $\int \frac{a dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2}$.

199) Доказать, что интегралъ

$$\int \frac{b - x}{b + x} \frac{dx}{\sqrt{x (x + a) (x + c)}}$$

при $b^2 = ac$ выражается безъ помощи эллиптическихъ интеграловъ.

XX. Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ посредствомъ неопредѣленныхъ интеграловъ.

1) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-a\cos x)\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$.

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\omega\cos\omega)^{2n}\,d\omega}{[\cos^{2n+1}\omega+\sin^{2n+1}\omega]^2}$.

5) $\int\limits_0^1 x^{a-1}\lg x dx$.

3) $\int\limits_1^\infty \frac{(x^2-2)\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

6) $\int\limits_0^1 x^{a-1}(\lg x)^n\,dx$.

Предполагая, что $a>0$, вычислить интегралы:

7) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,dx$.

12) $\int\limits_0^\infty xe^{-ax}\sin bx\,dx$.

8) $\int\limits_0^\infty x^n\,e^{-ax}\,dx$.

13) $\int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

9) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$.

14) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-ax}\cos bx\,dx$.

10) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$.

15) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-ax}\sin bx\,dx$.

11) $\int\limits_0^\infty xe^{-ax}\cos bx\,dx$.

16) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}\,dx$.

17) Доказать, что

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+X+\sqrt{1+X^2}} = a,$$

если $X = f(x)$ есть нечетная функцiя и на этомъ основанiи вычислить:

1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^3 x+\sqrt{1+\sin^6 x}}$

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x+\cos x}$.

18) Доказать, что

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}-1} - \int_0^{\infty} \frac{e^x\, dx}{e^{4x}-1} = \frac{\pi}{8} - \frac{\lg 2}{2}.$$

19) Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{[(1+x^2)(1+mx^2)]^{\frac{1}{2}}} = F\left[(1-m)^{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right] *).$$

---

*) $F(k, \varphi)$ Лежандрово обозначенiе эллиптическаго интеграла перваго рода, именно

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

20) $\int_0^\infty e^{-x^4}\,dx$ выразить черезъ эллиптическій интегралъ и доказать, что квадратъ этого интеграла равенъ

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4} F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$$

21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b} \cos(a-b)x\,dx$.

22) Доказать, что интегралъ

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt[3]{u^2(u-1)^2(u-x)^2}}$$

есть алгебраическая функція отъ x.

23) $\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx$ (гдѣ n цѣлое положительное число).

24) Разсматривая опредѣленный интегралъ, какъ предѣлъ суммы, вычислить:

α) $$\int_a^b c^x\,dx.$$

β) $$\int_a^b \sin x\,dx.$$

γ) Доказать, что

$$\int_0^\pi \cos^3 x dx = 0.$$

δ) Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx.$$

25) Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \lg (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx = \pi \lg \alpha^2,$$

при $\alpha^2 > 1$ и равенъ нулю при $\alpha^2 < 1$.

26) Вычислить предѣлъ суммы

$$\frac{n}{n^2} + \frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \ldots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2}$$

при $n = \infty$.

27) Вычислить предѣлъ суммы

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

при $n = \infty$.

28) Посредствомъ замѣны перемѣнныхъ вычислить слѣдующіе интегралы:

α) $$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

β) $$\int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{b^2}{4x^2}}\,dx.$$

γ) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^3},$$

разсматривая интегралъ этотъ, какъ частный случай

$$\int_0^{2\pi} f\,(a\cos x + b\sin x)\,dx.$$

29) Доказать сходимость слѣдующихъ интеграловъ:

1) $\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cos x\,dx$; 2) $\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx$; 3) $\int_0^{\infty} \cos x^2\,dx$;

4) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$; 5) $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x\,dx}{\alpha^2 + x^2}$; 6) $\int_1^{\infty} x^{-\frac{5}{4}} \lg x\,dx$;

7) $$\int_0^{\pi} \lg \sin \alpha x\,dx,$$

гдѣ $0 < \alpha < 1$;

8) $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x};$$

9) $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\mu}}\,dx$$

при $0 < \mu < 2$;

$$10) \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\, dx$$

при $0 < \mu < 1$.

11) Доказать, что

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\, dx$$

(при $a > 0$) будетъ абсолютно сходящимся только при $\mu > 1$.

30) Доказать, что интегралы:

$$\alpha) \int_0^\infty \frac{x dx}{a^2 + x^2}; \quad \beta) \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx; \quad \gamma) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

не имѣютъ конечныхъ предѣловъ.

31) Вычислить

$$\int_0^\pi \lg\,(2 - 2\cos x)\, dx.$$

32) Доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{tg} x\, dx = 0.$$

33) Доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \lg (\sin x)\, dx = \lg 2 - 1.$$

34) Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \theta \lg \sin \theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} \lg \frac{1}{2}.$$

35) Вычислить

$$\int_0^1 \frac{\lg (1 + x)}{1 + x^2}\, dx.$$

36) Доказать, что при p положительномъ и < 1

$$\int_0^1 (x^p + x^{-p}) \lg (1 + x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{p \sin p\pi} - \frac{1}{p^2} \ldots\ldots (1)$$

и

$$\int_0^1 (x^p + x^{-p}) \lg (1 - x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{p} \operatorname{cotg} p\pi - \frac{1}{p^2} \ldots (2).$$

37) Вычислить

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha dx}{1 - 2x \cos a + x^2}.$$

38) Найти n-ую производную выраженія

$$\frac{e^x - F(x)}{x^{n+1}},$$

гдѣ

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}.$$

39) Вычислить сумму ряда

$$\frac{2}{3.5} + \frac{2.4}{3.5.7} + \frac{2.4.6}{3.5.7.9} + \ldots.$$

40) Опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

когда a стремится къ b, при чемъ a и b суть два смежныхъ корня уравненія $F(x) = 0$ и функція $F(x)$ остается положительною въ этомъ промежуткѣ.

41) Доказать тождество

$$\frac{2.4.6\ldots.2n}{3.5.7\ldots.(2n+1)}\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots.2n}x^n\right]$$

$$= 1 + \frac{n_1}{3}(x-1) + \frac{n_2}{5}(x-1)^2 + \ldots + \frac{1}{2n+1}(x-1)^n,$$

въ которомъ $n_1, n_2, \ldots$ суть биноміальные коэффиціенты.

42) Обозначая

$$\frac{1 + 2x\cos\alpha + x^2}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

черезъ z, доказать, что

$$\int_0^1 (\lg x)^{2n} \lg z \frac{dx}{x} = 4.1.2\ldots.(2n)\left\{\frac{\cos\alpha}{1^{2n+2}} + \frac{\cos 3\alpha}{3^{2n+2}} + \ldots\right\}.$$

43) Полагая

$$X = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

доказать, что

$$Y = \int_0^\infty (e^{-x} - X)\, x^{a-1}\, dx$$

будетъ конечнымъ и опредѣленнымъ только при a отрицательномъ и заключенномъ между $1-n$ и $-n$.

Предполагая эти условія выполненными, доказать, что

$$Y = \Gamma(a).$$

44) Найти

$$\lim\,(\gamma)_{\varepsilon=1} = \lim \left\{ \int_0^\pi \frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}\, d\theta \right\}_{\varepsilon=1}.$$

45) Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, U_m\, U_n\, dx,$$

гдѣ

$$e^{-x^2}\, U_n = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

XXI. Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ посредствомъ рядовъ.

1) $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 2) $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{ax}}{x}\, dx$.

3) $\int_a^x \lg \frac{1}{1-x} \frac{dx}{x}$. 4) $\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{x}\, dx$.

5) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x}\, dx$.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x} \cos(a \sin x)\, dx$

и изъ этого интеграла получить, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

7) Доказать, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} + \ldots = 1.$$

8) Доказать, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \ldots = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}} - 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

XXII. Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ посредствомъ дифференцированія и интегрированія подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла.

1) $u = \int_0^\pi \frac{\lg[1 + \sin\alpha \cos x]}{\cos x}\, dx.$

2) $u=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin mx}{x}\,dx.$

На основаніи этого доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\,dx=\pm\frac{\pi}{2},$$

смотря по тому, будетъ ли $m>$ или <0 и вычислить

$$v=\int_0^\infty \frac{\cos sx \sin rx}{x}\,dx.$$

3) $u=\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} rx}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 4) $u=\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{1-\cos \alpha x}{x}\,dx.$

5) $u=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} rx}{x(1+x^2)}\,dx.$

6) Доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1+\cos x)\,\frac{dx}{\cos x}=\frac{\pi^2}{8}.$$

7) Доказать, что

$$\int_0^a \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx+\int_0^1 \frac{\lg(1+ax)}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\lg 2\,.\operatorname{arc\,tg} a+\frac{\pi}{8}\lg(1+a^2).$$

8) Доказать, что

$$\int_1^a \frac{\lg x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\lg[(1+ax)(a+x)]}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\lg(1+a^2)$$

и отсюда получить, что

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\lg 2.$$

9) $u = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin^2 bx}{x^2}\,dx$ при $a > 0$.

10) Если

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{-tux}\,du}{(1+u^2)^{n+1}},$$

то доказать, что

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2n\frac{dy}{dx} + xyt^2 = t.$$

11) Доказать, что интегралы

$$(1)\ P(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \text{ и } (2)\ \theta(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t+x}\,dt,$$

гдѣ $x > 0$, удовлетворяютъ одному и тому же дифференціальному уравненію

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{x}.$$

12) Доказать, что, если $F(x)$ полиномъ ниже n-ой степени, то

$$\int_a^b \frac{F(x)}{(x-c)^n}\,dx = \frac{2}{1.2.\ldots.(n-1)}\,\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}\left[F(c)\lg\frac{a-c}{b-c}\right],$$

если только c не заключается между a и b.

13) Доказать, что, если

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,\ y_1=\int_{x_0}^{x} xy\,dx,\ y_2=\int_{x_0}^{x} xy_1\,dx,\ldots,\ y_n=\int_{x_0}^{x} xy_{n-1}\,dx,$$

то

$$y_n=\frac{1}{2.4.6.\ldots.2n}\int_{x_0}^{x}(x^2-z^2)^n f(z)\,dz.$$

14) Доказать, что при $a>0$

$$u=\int_0^1 \frac{x^a\,[1+x-2x^{a+1}]}{1-x^2}\,dx=\lg 2.$$

15) Предполагая $n>1$, доказать, что, если

$$y=\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^{n-1}\,e^{xz}\,dz,$$

то

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

16) Вычислить

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \frac{a + b \sin\theta}{a - b \sin\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta},$$

зная, что онъ равенъ

$$2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2 \sin^2\theta}.$$

17) Зная, что

$$\int_0^1 \frac{\alpha\beta\, dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha},$$

вычислить

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b \sin\theta}{a} \frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

18) Зная, что

$$\int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a},$$

вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a_1 z} - e^{-a_2 z}}{z}\, dz.$$

19) Вычислить

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx\, dx.$$

20) Зная, что

$$2\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,d\alpha = \frac{1}{1+x^2},$$

вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx.$$

21) Зная, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a},$$

вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}\,dx$$

при $a < 1$.

22) Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\frac{\sin bx\,dx}{1-2a\cos bx+a^2}$$

при $a < 1$.

XXIII. Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ посредствомъ интегрированія по контуру.

1) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx.$ 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos y + y\sin y}{a^2+y^2}\,dy.$

3) $\int_0^\infty \frac{\cos y}{a^2+y^2}\,dy.$ 4) $\int_0^\infty \frac{y\sin y}{a^2+y^2}\,dy.$

5) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}.$

6) Доказать, что Эйлерова постоянная C, опредѣляемая интеграломъ

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x},$$

равна

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2}-\cos x\right)\frac{dx}{x}.$$

7) $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy.$ 9) $\int_0^\infty \sin x^2\,dx.$

8) $\int_0^\infty \cos x^2\,dx.$ 10) $\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx.$

11) $\int_0^\infty \frac{x\cos mx}{x^2+a^2}\,dx.$

12) Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\cos x-e^{-x}}{x}\,dx=0.$$

13) Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x^2) + \sin(x^2) - 1}{x^2}\, dx = 0.$$

14) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$.

15) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^4}\, dx$.

16) $$\int_0^{2\pi} \left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^n \cos \frac{n - 2k}{2}\, t\, dt$$

$$= 2\pi . \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

ОТВѢТЫ И РѢШЕНІЯ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

I.

14) $$\delta = \lim\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right]_{x=+\infty}$$

$$=\lim\left\{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right\}_{x=+\infty}$$

$$=\lim\left[x(1+u)^{\frac{1}{3}}-x(1+v)^{\frac{1}{2}}\right]_{x=+\infty},$$

гдѣ

$$u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3},\quad v=\frac{1}{x}.$$

Такъ какъ, для очень большихъ значеній x, u и v меньше единицы, то мы получаемъ, по формулѣ бинома Ньютона,

$$(1+u)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u+\ldots.$$

$$(1+v)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}v+\ldots,$$

или

$$(1+u)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3x}+\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x^3}+\ldots.$$

$$(1+v)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2x}+\frac{A'}{x^2}+\frac{B'}{x^3}+\ldots.$$

и

$$\delta = \lim\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{A - A'}{x} + \frac{B - B'}{x^2} + \dots\right]_{x=+\infty}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

При $x = -\infty$, получаемъ

$$\delta = \lim\left[x\left\{\sqrt[3]{1+u} + \sqrt{1+v}\right\}\right]_{x=-\infty} = -\infty.$$

20) $\lim\left[\frac{\sin x}{\lg(1-x)}\right]_{x=0}$

$$= \lim\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{x=0} \cdot \lim\left[\frac{x}{\lg(1-x)}\right]_{x=0} = -1.$$

21) $\lim\left[\operatorname{cosec} x \lg(1-x)\right]_{x=0}$

$$= \lim\left(\frac{x}{\sin x}\right)_{x=0} \cdot \lim\left(\frac{\lg(1-x)}{x}\right)_{x=0} = -1.$$

22) $\lim\left[\frac{1-x}{1+x}\,\frac{\sin x}{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+x^2}}\right]_{x=0}$

$$= \lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} \cdot \lim\left(\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+x^2}}\right)_{x=0} \cdot \lim\left(1+x^2\right)_{x=0} = 1.$$

23) $\lim\left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right]_{x=1}$

$$= \lim\left[\frac{(1-x)\,2\sin\frac{\pi x}{4}\cos\frac{\pi x}{4}}{\left(\cos\frac{\pi x}{4} - \sin\frac{\pi x}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{4} + \sin\frac{\pi x}{4}\right)}\right]_{x=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim\left[\frac{\frac{4}{\pi}(1-x)\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi x}{4}\right)}\right]_{x=1} = \frac{2}{\pi}.$$

31) $\lim\left[\lg(a+be^x)\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_{x=\infty}$

$$=\lim\left\{\left[x+\lg\left(\frac{a}{e^x}+b\right)\right]\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}_{x=\infty}$$

$$=\lim\left[x\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_{x=\infty}=1.$$

32) Изъ формулы

$$\lim\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}_{x=\infty}=e \quad \text{при } x=\frac{1}{y}$$

имѣемъ

$$(1)\ \lim\left\{1+y\right\}^{\frac{1}{y}}_{y=0}=e,$$

или

$$(2)\ \lim\left[\frac{\lg(1+y)}{y}\right]_{y=0}=1.$$

a) Полагая

$$y=a^x-1\ (a>0),$$

получимъ

$$\lim\left(\frac{\lg a^x}{a^x-1}\right)_{x=0}=\lim\left(\frac{x\lg a}{a^x-1}\right)_{x=0}=1,$$

откуда

$$\lim\left(\frac{a^x-1}{x}\right)_{x=0}=\lg a.$$

b) Полагая

$$y=(1+x)^\mu-1,$$

получаемъ

$$\lim\left[\frac{\lg(1+x)^\mu}{(1+x)^\mu-1}\right]_{x=0}=1,$$

или

$$\lim\left(\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\lg(1+x)}\right)_{x=0}=\mu$$

и такъ какъ

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\lg(1+x)}\cdot\frac{\lg(1+x)}{x},$$

то, на основаніи равенства (2), имѣемъ

$$\lim\left[\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}\right]_{x=0}=\mu.$$

33) **Если съ возрастаніемъ x разность**

$$f(x+1)-f(x)$$

стремится къ извѣстному предѣлу k, при чемъ при всякомъ конечномъ значеніи x функція $f(x)$ остается конечною, то и $\frac{f(x)}{x}$ стремится къ тому же предѣлу.

Доказательство. Предположимъ, что количество k имѣетъ конечное значеніе и что ε есть произвольно малое число. По условію съ возрастаніемъ x разность

$$f(x+1)-f(x)$$

стремится къ предѣлу k; всегда можно взять столь большое число h, чтобы при x, равномъ или большемъ h, разность эта заключалась бы между предѣлами $k-\varepsilon$ и $k+\varepsilon$.

Выбравъ такое число h, обозначимъ черезъ n какое нибудь цѣлое число; тогда каждое изъ количествъ

$$f(h+1)-f(h),$$

$$f(h+2)-f(h+1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f[h+n]-f[h+(n-1)],$$

а потому и ихъ средне-ариѳметическое, т. е.

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n},$$

будетъ заключаться между $k-\varepsilon$ и $k+\varepsilon$.

Слѣдовательно

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha,$$

гдѣ α количество между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$.

Полагая $h+n=x$, получимъ

$$(1)\ \frac{f(x)-f(h)}{n}=k+\alpha,$$

или

$$f(x)=f(h)+(x-h)(k+\alpha),$$

откуда

$$(2)\ \frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+\left(1-\frac{h}{x}\right)(k+\alpha).$$

Для того, чтобы x стремилось къ ∞, достаточно неопредѣленно увеличивать n, не измѣняя значенія h.

Итакъ при $x = \infty$ и h постоянномъ изъ равенства (2) получаемъ

$$\lim\left[\frac{f(x)}{x}\right]_{x=\infty} = k + \lim \alpha,$$

гдѣ α постоянно заключено между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$; слѣдовательно

$$\lim\left[\frac{f(x)}{x}\right]_{x=\infty} = k = \lim\left[f(x+1) - f(x)\right]_{x=\infty}.$$

Предположимъ теперь, что

$$\lim\left[f(x+1) - f(x)\right]_{x=\infty} = \infty.$$

Обозначая черезъ H произвольно большое число, мы можемъ выбрать столь большое значенiе для h, что при x, равномъ или большемъ h, разность

$$f(x+1) - f(x),$$

будетъ постоянно больше H.

Пользуясь вышеприведенными разсужденiями, мы докажемъ, что

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n} > H.$$

Полагая

$$h + n = x,$$

получимъ

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(h)}{x} + H\left(1 - \frac{h}{x}\right)$$

и при безграничномъ возрастаніи x, при чемъ h остается конечнымъ, находимъ

$$\lim\left[\frac{f(x)}{x}\right]_{x=\infty}=\infty.$$

Итакъ

$$\lim\left[\frac{f(x)}{x}\right]_{x=\infty}$$

будетъ одинаковъ съ

$$\lim\left[f(x+1)-f(x)\right]_{x=\infty}.$$

Вышеприведенная теорема Коши не имѣетъ мѣста напримѣръ для

$$f(x)=\operatorname{tg}\pi x,$$

въ чемъ легко убѣдиться, такъ какъ въ данномъ случаѣ, при

$$x=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\infty.$$

2) Эта теорема очень легко приводится къ первой, отыскивая предѣлъ, къ которому стремится $\frac{\lg f(x)}{x}$ и затѣмъ, переходя отъ lg къ числамъ.

a) Полагая

$$\varphi(n)=\frac{1.2.3\ldots.n}{n^n},$$

имѣемъ

$$\frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots.n}}{n}=\sqrt[n]{\varphi(n)},$$

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Слѣдовательно, на основаніи второй теоремы Коши, мы получаемъ, что

$$\lim \sqrt[n]{\varphi_n} = \lim \left[\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right]_{n=\infty} = \lim \left[\frac{\left[1-\frac{1}{n+1}\right]^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}\right]_{n=\infty} = \frac{1}{e}.$$

b) По первой теоремѣ Коши мы имѣемъ, что

$$\lim\left[e^{(n+1)x^2} - e^{nx^2}\right]_{n=\infty} = \lim\left[e^{nx^2}\left(e^{x^2}-1\right)\right]_{n=\infty} = \infty.$$

Слѣдовательно $\left[\frac{e^{nx^2}}{n}\right]_{n=\infty}$ также равно ∞ и

$$\lim\left[\frac{n}{e^{nx^2}}\right]_{n=\infty} = \lim\left[ne^{-nx^2}\right]_{n=\infty} = 0.$$

c) $\lim\left\{\lg\left[1+(n+1)x\right] - \lg(1+nx)\right\}$

$$= \lim\left\{\lg\frac{\frac{1}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{\frac{1}{n}+x}\right\}_{n=\infty} = 0.$$

Слѣдовательно и

$$\lim\left[\frac{\lg(1+nx)}{n}\right]_{n=\infty} = 0.$$

34) a) $\lim\left[\cos\frac{\alpha}{\omega}\right]^{\omega}_{\omega=\infty} = \lim\left[1-\sin^2\frac{\alpha}{\omega}\right]^{\frac{\omega}{2}}_{\omega=\infty};$

обозначая $\sin^2\frac{\alpha}{\omega}$ черезъ $\frac{1}{\tau}$, получаемъ

$$\lim\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}_{\omega=\infty}=\lim\left[\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{\omega}{2}\sin^2\frac{\alpha}{\omega}}_{\omega=\infty}$$

$$=\lim\left[\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{1}{2}\left(\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}\right)\sin\frac{\alpha}{\omega}}_{\omega=\infty}=e^{-\lim\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{\omega}}{\frac{\alpha}{\omega}}\right)\alpha\sin\frac{\alpha}{\omega}\right]_{\omega=\infty}}=1.$$

b) Тѣмъ же пріемомъ получаемъ

$$\lim\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega^2}_{\omega=\infty}=e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

c) Полагая $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{\tau}$, находимъ, что

$$\lim\left(1+\gamma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}_{\omega=\infty}=\lim\left[\left(1+\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\tau\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}\sec\frac{\alpha}{\omega}}\right]_{\omega=\infty}$$

$$=e^{\gamma\lim\left(\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}\sec\frac{\alpha}{\omega}\right)_{\omega=\infty}}=e^{\alpha\gamma}.$$

d) $\lim\left[\cos\frac{\alpha}{\omega}+\gamma\sin\frac{\alpha}{\omega}\right]^{\omega}_{\omega=\infty}$

$$=\lim\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}_{\omega=\infty}\lim\left[1+\gamma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\omega}\right]^{\omega}_{\omega=\infty}=e^{\gamma\alpha},$$

такъ какъ по вышедоказанному $\lim\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}_{\omega=\infty}=1$.

e) $\lim\left(\cos x\right)^{\operatorname{cotg} x}_{x=0}=\lim\left\{(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{\cos x}{\sin x}}_{x=\infty}$,

полагая $\sin^2 x=\frac{1}{\tau}$, получаемъ, что

$$\lim\left(\cos x\right)^{\operatorname{cotg} x}_{x=0}=\left[\lim\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}_{\tau=\infty}\right]^{\frac{1}{2}\lim(\sin x\cos x)_{x=0}}$$

$$=e^{-\frac{1}{4}\lim(\sin 2x)_{x=0}}=1.$$

f) $$\lim\left[\frac{\lg\frac{1+ax}{1+bx}}{cx}\right]_{x=0}$$

$$=\lim\left\{\lg\left[\left(1+\frac{(a-b)x}{1+bx}\right)^{\frac{1+bx}{(a-b)x}}\right]^{\frac{a-b}{c(1+bx)}}\right\}_{x=0}=\frac{a-b}{c}.$$

g) Искомый предѣлъ равенъ

$$\lim\left\{\lg\left[\left(1+\frac{(a\cos x-b)\sin x}{\cos x+b\sin x}\right)^{\frac{\cos x+b\sin x}{(a\cos x-b)\sin x}}\right]^{\frac{(a\cos x-b)\cos x}{\cos x+b\sin x}}\right\}_{x=0}$$

$$=a-b.$$

h) $$\lim\left[\frac{\lg(1+m\arcsin x)}{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\right]_{x=0}$$

$$=\lim\left[\lg\left[1+m\arcsin x\right]^{\frac{1}{m\arcsin x}}\right]^{m}_{x=0}=m.$$

35) Полагая

$$y=x\left[f(x)^{\frac{1}{x}}-1\right],$$

получаемъ

$$f(x)=\left[1+\frac{y}{x}\right]^{x}$$

и

$$\lim f(x) = e^{\lim y},$$

т. е.

$$\lim y = \lg \left[\lim f(x)\right]_{x=\infty}.$$

36) Какъ извѣстно

$$\lim \left[1 + \frac{a}{x}\right]^{x}_{x=\infty} = e^{a};$$

полагая

$$x = y f(x),$$

гдѣ y новая независимая перемѣнная и замѣчая, что при

$$x = \infty,\ y = \infty,$$

получаемъ

$$\lim \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{x}_{x=\infty} = \lim \left[1 + \frac{1}{y}\right]^{y\,f(x)}_{\substack{y=\infty \\ x=\infty}}$$

$$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{f(x)}_{\substack{y=\infty \\ x=\infty}} = e^{\lim f(x)}.$$

39) Извѣстно, что

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2},$$

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2^3}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

и мы получаемъ

$$\frac{1}{2^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{\operatorname{tg}x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3} + \ldots.$$

$$+ \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

Но такъ какъ

$$\lim\left(\frac{1}{2^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{x},$$

то

$$\lim\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right\}_{n=\infty}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg}x}.$$

Задачу эту можно рѣшать еще слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ

$$\operatorname{cotg}x - 2\operatorname{cotg}2x = \operatorname{tg}x,$$

то

$$\cot\frac{x}{2}-2\cot x=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\cot\frac{x}{2^2}-2\cot\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cot\frac{x}{2^n}-2\cot\frac{x}{2^{n-1}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

и мы получаемъ, что

$$\lim\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right\}_{n=\infty}$$

$$=\left\{\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x\right\}_{n=\infty}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}.$$

40) Замѣчая, что для всякаго положительнаго числа c

$$\sqrt{c+\frac{1}{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}},$$

находимъ, что искомый предѣлъ будетъ больше $\frac{n}{\sqrt{n}}$, т. е. больше $\sqrt{n}$ и поэтому при безграничномъ возрастанiи n онъ равенъ ∞.

41) Такъ какъ

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\cos\frac{x}{2^2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}},$$

то искомый предѣлъ равенъ

$$\lim\left(\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right)_{n=\infty}=\frac{\sin x}{x}.$$

42) Предполагаемъ во первыхъ, что $a<b$.

Тогда, полагая

$$a=b\cos\alpha,$$

гдѣ

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

получаемъ

$$a_1=b\cos^2\frac{\alpha}{2},\quad b_1=b\cos\frac{\alpha}{2},\quad a_1=b_1\cos\frac{\alpha}{2}$$

и слѣдовательно

$$b_2=b_1\cos\frac{\alpha}{4},$$

. . . .

. . . .

$$b_n=b_{n-1}\cos\frac{\alpha}{2^n}=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n},$$

т. е.

$$b_n=\frac{b\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Далѣе

$$a_n = b_n \cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что a_n и b_n при безграничномъ возрастаніи n стремятся къ общему предѣлу

$$\frac{b \sin\alpha}{\alpha}.$$

Предполагая $a > b$, полагаемъ $a = b\,Ch\,\alpha$, гдѣ

$$Ch\,\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}, \quad Sh\,\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2},$$

при чемъ α положительно.

Подобно предъидущему находимъ, что

$$b_n = \frac{b\,Sh\,\alpha}{2^n\,Sh\,\frac{\alpha}{2^n}}, \quad a_n = b_n\,Ch\,\frac{\alpha}{2^n}$$

и общій предѣлъ для a_n и b_n при безграничномъ возрастаніи n будетъ

$$\frac{b\,Sh\,\alpha}{\alpha}.$$

43) lim искомаго выраженія равенъ

$$\lim\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}}\right)_{n=\infty} = \frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

II.

1) $y' = \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2}$.

4) $y' = \frac{3a^2}{x^4\sqrt{a + bx^2}}$.

2) $y' = \frac{3b^2 x}{\sqrt{a + bx}}$.

5) $y' = \frac{3a^4}{2(ax + bx^2)^{\frac{5}{2}}}$.

3) $y' = \frac{10b^2 x}{3\sqrt[3]{a + bx}}$.

6) $y' = e^x x^3$.

7) $y' = x^{a-1} b^{-x^2}(a - 2x^2 \lg b)$.

8) $y' = mx^{m-1} \lg x$.

9) $y' = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2 + x^2}$.

13) $y' = \frac{2a x^2}{x^4 - a^4}$.

10) $y' = \frac{3x + a}{\sqrt{(x^2 + ax)^2 + bx}}$.

14) $y' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \cos x}$.

11) $y' = \frac{1}{2} \sin^5 \frac{x}{2} \sin 2x$.

15) $y' = 4x \sqrt{\frac{x}{b - x}}$.

12) $y' = \frac{\sqrt{3}}{2(x^2 + x + 1)}$.

16) $y' = \frac{1}{(1 - ax^2)\sqrt{1 - x^2}}$.

17) $y' = \pm \sqrt{\frac{a + 1}{a - 1}} \frac{1}{(1 + ax^2)\sqrt{1 - x^2}}$.

18) $y' = \frac{\arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

19) $y' = 2\sqrt{2 \sec x \operatorname{cosec} 2x}$.

20) $y' = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2} - \sin x}$.

21) $y' = 2x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

22) $y' = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3}$.

23) $y' = \sin x \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{\cos x}$.

24) $y' = n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left[1 + \lg\frac{x}{n}\right]$.

25) $y' = 3\cos x \cos 2x$.

26) $y' = 4\cos 4x$.

27) $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$.

28) $y' = \frac{mx+n}{x^2-a^2}$.

29) $y' = \frac{x^2-3x}{x^4-1}$.

30) $y' = \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

31) $y' = \frac{(a+bx)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[\frac{bx}{a+bx} - \lg(a+bx)\right]$.

32) $y' = \frac{1+2x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

33) $y' = \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

34) $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

35) $y' = \frac{4x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

36) $y' = \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$.

37) $y' = \frac{4 \operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}$.

38) $y' = \frac{\arcsin x}{x^2}$.

39) $y' = (a^2 + b^2)\, e^{ax} \cos bx.$

45) $y' = \dfrac{\sqrt{a(a+b)}\cos\frac{x}{2}}{(a + b\cos x)\sqrt{\cos x}}.$

40) $y' = (1 + k^2)\, e^{k \arc \sin x}.$

46) $y' = \dfrac{\sqrt{a(a-b)}\sin\frac{x}{2}}{(a + b\cos x)\sqrt{\cos x}}.$

41) $y' = \dfrac{1 + k^2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, e^{k \operatorname{arc\,tg} x}.$

47) $y' = \dfrac{2ab}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x}.$

42) $y' = \sqrt{2}\cos(\lg x).$

48) $y' = \dfrac{3}{\cos^2 3x}.$

43) $y' = \dfrac{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{a + b\cos x + c\sin x}.$

49) $y' = e^x\left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{x^4}\right).$

44) $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{2(a + b\cos x + c\sin x)}.$

50) $y' = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + be^x}}.$

51) $y' = \arcsin x \lg x - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$

52) $y' = xa^x.$

53) $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}.$

54) $y' = \dfrac{2}{\sin^3 x \cos^2 x}.$

55) $y' = (\sin x + x\cos x)\left(\lg x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin x.$

56) Произведя дѣленіе, получимъ

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n,$$

слѣдовательно,

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1},$$

или

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1-(1+n)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

57) Изъ условія задачи имѣемъ, что

$$e^x\,[x^m - a_1\,x^{m-1} + a_2\,x^{m-2} - \ldots \pm a_m + mx^{m-1}$$

$$-(m-1)\,a_1\,x^{m-2} + (m-2)\,a_2\,x^{m-3} - \ldots] = x^m\,e^x.$$

Итакъ

$$m - a_1 = 0;\ \ a_2 - m(m-1) = 0;\ \ a_3 = m(m-1)(m-2)$$

и т. д.

58) $$y' = \frac{a\cos x\, e^{-\frac{a}{\sin x}}}{2\,[1-e^{-\frac{a}{\sin x}}]^{\frac{1}{2}}\,[1-(1-e^{-\frac{a}{\sin x}})^{\frac{1}{2}}]\sin^2 x}.$$

64) $$y = 2\operatorname{arc\,tg} x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2},$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2} - 2\,\frac{1-x^2}{\pm(1-x^2)(1+x^2)}.$$

Такъ какъ производная arc sin должна быть положи тельною, то при $x^2 < 1$ мы получаемъ

$$y' = 0,$$

т. е. $y = C$ для любого значенія x^2 меньшаго единицы.

При $x = 0$,

$$y = 0.$$

Итакъ, для всѣхъ значенiй x^2 меньшихъ единицы, мы имѣемъ, что

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1 + x^2}$$

равно нулю.

Когда $x^2 > 1$, то на основанiи тѣхъ же разсужденiй получаемъ

$$y' = \frac{4}{1 + x^2},$$

откуда

$$y = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

для всѣхъ значенiй x^2 большихъ единицы, а такъ какъ при $x = \infty$,

$$y = \pi,$$

то слѣдовательно

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1 + x^2} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \pi$$

для всѣхъ значенiй $x^2 > 1$.

Вторая задача рѣшается на основанiи подобныхъ же разсужденiй.

III.

1) $\frac{dy}{dx} = -1.$

2) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t.$

3) $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} 3t.$

4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{a(b + \cos t)}{c \sin t}.$

5) $\frac{dy}{dx} = 1.$

6) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{2a + r}{2a}\, t.$

7) $\frac{dy}{dx} = \frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2 t}$

8) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{3}{2}\, t.$

IV.

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \lg a - y}{x \lg ax}.$

2) $\frac{dy}{dx} = 1 - \lg a.$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\, \frac{C}{\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}.$

4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2\sqrt{b - x}}.$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{m - nx}{x}\, y.$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{(ye^x - \lg y)\, y}{y^2 - ye^x + x}.$

7) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$

8) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2}}.$

9) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cos x + 2xy^2}{\sin x - a \sin y + 2x^2 y}.$

10) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

13) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2 - c^2}{x^2 + y^2 + c^2}\, \frac{x}{y}.$

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 + y^2}{a^2 + x^2}.$

14) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}.$

12) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x^2 \lg y}{x^2 - 2y^2 \lg x}\, \frac{y}{x}.$

15) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - (a - y)^2}}{y}.$

16) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sqrt{1-x^2}+y}{(3y^2-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$. 17) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{y-x}$.

18) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+cy}{y\sqrt{x^2+y^2}-cx}$. 19) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

20) $\frac{dy}{dx} = \frac{2yx^{y-1}\lg a - y \operatorname{tg} xy}{x \operatorname{tg} xy - 2x^y \lg a \lg x}$.

V.

1) $du = 3z^2\,dz - 3xyz\left(\frac{dz}{z}+\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}\right)+\frac{6a}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$.

2) $du = e^{x+2y}\,[y(1+x)\,dx+(2y+1)\,xdy]$.

3) $du = \frac{ydx-xdy}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}$.

4) $du = \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{zdx-xdz}{x^2+z^2}+zdz$.

5) $du = \frac{zydx+xzdy-xydz}{xy\sqrt{x^2y^2-z^2}}$.

6) $$du=(y-\sqrt{y^2-z^2})^{x-1}\Big[(y-\sqrt{y^2-z^2})^{x-1}\lg(y-\sqrt{y^2-z^2})\,dx - x\,\frac{(y-\sqrt{y^2-z^2})\,dy+zdz}{\sqrt{y^2-z^2}}\Big].$$

7) $du = n(x^n-3e^y+a\lg z)^{n-1}\left[nx^{n-1}\,dx-3e^y\,dy+\frac{a}{z}\,dz\right]$.

9) Вслѣдствіе однородности функціи u, мы имѣемъ, что

$$mu = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$(m-1) \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},$$

$$(m-1) \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$

$$(m-1) \frac{\partial u}{\partial z} = x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Если мы въ выраженіи

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

умножимъ строки соотвѣтственно на x, y, z, то получимъ

$$H = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ z \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & z \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ (m-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} & (m-1)\dfrac{\partial u}{\partial y} & (m-1)\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m-1}{z} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m-1}{z^2\, xy} \begin{vmatrix} x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & z\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & z\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ x\dfrac{\partial u}{\partial x} & y\dfrac{\partial u}{\partial y} & z\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m-1}{z^2\, xy} \begin{vmatrix} x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & (m-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (m-1)\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ x\dfrac{\partial u}{\partial x} & y\dfrac{\partial u}{\partial y} & mu \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(m-1)^2}{z^2} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{m}{m-1}u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(m-1)^2}{z^2} \begin{vmatrix} \dfrac{mu}{m-1} & \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

VII.

1) $$dz = \frac{ay - 6xz}{3(x^2 + z^2)} dx + \frac{ax}{3(x^2 + z^2)} dy.$$

2) $$dz = \frac{(x - mz) b^2 dx + a^2 (y - nz) dy}{a^2 n (y - nz) + b^2 m (x - mz)}.$$

3) $$dz = \frac{h}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

4) $$dz = \frac{(a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2)(xdx + ydy)}{z[a^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2]}.$$

5) $$dz = -\frac{(u - x)}{(u - z)} \frac{z}{x} dx - \frac{(u - y)}{(u - z)} \frac{z}{y} dy,$$

$$du = -\frac{(z - x)}{(z - u)} \frac{u}{x} dx - \frac{(z - y)}{(z - u)} \frac{u}{y} dy.$$

6) $$dz = \frac{by + z}{b(z - u)} dx + \frac{bx + z}{b(z - u)} dy,$$

$$du = -\frac{by + u}{b(z - u)} dx - \frac{bx + z}{b(z - u)} dy.$$

7) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{(u-x)(z-x)}{(u-y)(z-y)},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{(u-x)(y-x)}{(u-z)(y-z)},$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{(z-x)(y-x)}{(z-u)(y-u)}.$$

8) $$\frac{dx}{dy}=-\frac{x\sin y\sin z-2\cos y\cos^2 z}{2x\sin x\cos x+\cos y\sin z\cos^2 z},$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{(4\sin x\cos x+\sin y\sin z\operatorname{tg} z)\cos^2 z}{2x\sin x\cos x+\cos y\sin z\cos^2 z}.$$

9) $$\frac{dy}{dx}=\frac{6xz-bz-y^2}{xy-2z^2},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{bx-6x^2+2zy}{2(xy-2z^2)}.$$

10) $$\frac{dy}{dx}=\frac{a(ax-cz)}{b(cz-by)},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{a(by-ax)}{c(cz-by)}.$$

11) $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sin z-z^2\sin x}{z^2\sin y-y^2\sin z},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{y^2\sin x-x^2\sin y}{z^2\sin y-y^2\sin z}.$$

12) $$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left[\frac{y^2}{x}\,\frac{x-y}{x+y}+\frac{z^2}{x}\,\frac{xz-1}{xz+1}-x\right].$$

VIII.

2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\left[(x+\sqrt{1+x^2})^m-(x+\sqrt{1+x^2})^{-m}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{mx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(x+\sqrt{1+x^2})^m-(x+\sqrt{1+x^2})^{-m}\right]$$

$$+\frac{m^2}{1+x^2}y=-\frac{x}{1+x^2}y'+\frac{m^2}{1+x^2}y,$$

или

$$(1+x^2)\,y''+xy'-m^2y=0;$$

взявъ n-ую производную отъ этого выраженія по формулѣ Лейбница, получимъ

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}+ny^{(n)}-m^2y^{(n)}=0,$$

т. е.

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+(n^2-m^2)y^{(n)}=0.$$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{m\cos(m \operatorname{arc\,tg} x)}{1+x^2}$,

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=-\frac{m^2y}{1+x^2},$$

или

$$(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2(x+x^3)\frac{dy}{dx}+m^2y=0.$$

Взявъ n-ую производную отъ этого выраженія по формулѣ Лейбница и полагая затѣмъ $x=0$, получимъ

$$1.2.3\ldots.(n+2)\,a_{n+2}+(2n^2+m^2).1.2.3\ldots.na_n$$

$$+n(n-1)(n-2)(n-1).1.2\ldots.(n-2)a_{n-2}=0,$$

или

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+(2n^2+m^2)a_n+(n-1)(n-2)a_{n-2}=0.$$

7) $y=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1+x)}$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}.1.2.3\ldots.n\left[\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^n}\right].$$

Подобнымъ же образомъ можно вычислить n-ую производную функцiи

$$\frac{x}{x^2 - a^2}$$

и слѣдовательно

$$\lg(x^2 - a^2).$$

11) $x = \sin\theta,\ y\cos\theta = \cos n\theta$ (2).

Дифференцируя по θ два раза выраженiе (2) и пользуясь формулою Лейбница, получаемъ

$$(3)\quad \frac{d^2y}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{dy}{d\theta}\sin\theta - y\cos\theta + n^2\cos n\theta = 0,$$

но, такъ какъ

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\cos\theta,\ \frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\cos^2\theta - \frac{dy}{dx}\sin\theta\cos\theta,$$

то, слѣдовательно

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (n^2 - 1)\,y = 0.$$

17) $y = \frac{(a+bx)^m}{(a'+b'x)^p} = (a+bx)^m(a'+b'x)^{-p} = uv,$

гдѣ

$$u = (a+bx)^m,\ v = (a'+b'x)^{-p},$$

$$\frac{du}{dx} = mb\,(a+bx)^{m-1},$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = m(m-1)b^2(a+bx)^{m-2},$$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = m(m-1)(m-2)b^3(a+bx)^{m-3},$$

. . . .

$$\frac{d^n u}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n};$$

$$\frac{dv}{dx} = -pb'(a'+b'x)^{-p-1},$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = p(p+1)b'^2(a'+b'x)^{-p-2},$$

. . . .

$$\frac{d^n v}{dx^n} = (-1)^n p(p+1)\ldots(p+n-1)(a'+b'x)^{-p-n}.$$

Слѣдовательно по формулѣ Лейбница мы получаемъ

$$\frac{d^n uv}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{(a'+b'x)^p} m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n}$$

$$-\frac{n}{1}\frac{pb'}{(a'+b'x)^{p+1}} m(m-1)\ldots(m-n+2)b^{n-1}(a+bx)^{m-n+1}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{p(p+1)b'^2}{(a'+b'x)^{p+2}} m(m-1)\ldots(m-n+3)b^{n-2}(a+bx)^{m-n+2}+\ldots$$

. . . .

Полагая

$$A = m(m-1)\ldots(m-n+1)b^n\frac{(a+bx)^{m-n}}{(a'+b'x)^p},$$

получимъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A - \frac{n}{1} \frac{pb'}{a' + b' x} \frac{A (a + bx)}{b (m - n + 1)}$$

$$+ \frac{n (n-1)}{1.2} \frac{p (p+1) b'^2}{(a' + b' x)^2} \frac{A (a + bx)^2}{b^2 (m - n + 1) (m - n + 2)} - \ldots,$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A \left[1 - \frac{n}{1} \frac{p\, b'}{b (m - n + 1)} \frac{a + bx}{a' + b' x} \right.$$

$$\left. + \frac{n (n-1)}{1.2 b^2} \frac{p (p+1)}{(m - n + 1) (m - n + 2)} \frac{(a + bx)^2}{(a' + b' x)^2} - \ldots \right].$$

$$18) \quad y = \frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a - bx} + \frac{1}{a + bx} \right],$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{2a} b^n \left[\frac{1}{(a - bx)^{n+1}} - (-1)^{n+1} \frac{1}{(a + bx)^{n+1}} \right];$$

при n четномъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{2a (a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} b^n \left[(a + bx)^{n+1} + (a - bx)^{n+1} \right],$$

а при n нечетномъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{2a (a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} b^n \left[(a + bx)^{n+1} - (a - bx)^{n+1} \right].$$

$$20) \quad y = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha \sqrt{-1}} \left(\frac{1}{\beta x - \alpha \sqrt{-1}} - \frac{1}{\beta x + \alpha \sqrt{-1}} \right).$$

Полагая теперь

$$(n+1)_1 (\beta x)^n - (n+1)_3 (\beta x)^{n-2} \alpha^2 + (n+1)_5 (\beta x)^{n-4} \alpha^4 - \ldots = U,$$

получимъ

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots.n.\beta^n}{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{n+1}} U.$$

Можно сдѣлать еще слѣдующее положеніе

$$\frac{\alpha}{\beta x} = \operatorname{tg} \omega.$$

Тогда

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{cotg} \omega; \quad dx = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{d\omega}{\sin^2 \omega},$$

или

$$d\omega = -\frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \omega \, dx.$$

Далѣе

$$y = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha^2 \operatorname{cotg}^2 \omega} = \frac{\sin^2 \omega}{\alpha^2},$$

$$y' = \frac{2}{\alpha^2} \sin \omega \cos \omega \frac{d\omega}{dx} = -\frac{2\beta}{\alpha^3} \sin^3 \omega \cos \omega$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha^3} \sin^2 \omega \sin 2\omega,$$

$$y'' = \frac{\beta}{\alpha^3} (2 \sin \omega \cos \omega \sin 2\omega + 2 \sin^2 \omega \cos 2\omega) \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \omega$$

$$= \frac{2\beta^2}{\alpha^4} \sin^3 \omega \sin 3\omega$$

и вообще

$$(\alpha) \quad y^{(n)} = \frac{(-1)^n 1.2.3\ldots.n\beta^n}{\alpha^{n+2}} \sin^{n+1} \omega \sin (n+1) \omega.$$

Въ точности этой формулы мы убѣждаемся, предположивъ ея справедливость для n-ой производной и доказавъ, что она справедлива и для $n+1$-ой производной. Дѣйствительно, изъ выраженія (α) дифференцируя получимъ

$$y^{(n+1)} = (-1)^n \frac{1.2.3.\ldots n\beta^n}{\alpha^{n+2}} \Big[(n+1)\sin^n\omega\sin(n+1)\omega\cos\omega$$

$$+ (n+1)\sin^{n+1}\omega\cos(n+1)\omega\Big]\frac{d\omega}{dx}$$

$$= \frac{(-1)^n\, 1.2.3.\ldots n\beta^n (n+1)\sin^n\omega}{\alpha^{n+2}} \Big[\sin(n+1)\omega\cos\omega$$

$$+ \sin\omega\cos(n+1)\omega\Big]\left(-\frac{\beta}{\alpha}\sin^2\omega\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\, 1.2.3\ldots(n+1)\beta^{n+1}}{\alpha^{n+3}}\sin^{n+2}\omega\sin(n+2)\omega,$$

что и требовалось доказать.

Итакъ

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{(-1)^n\, 1.2.3.\ldots n\beta^n}{\alpha^{n+2}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}\right)^{n+1}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta x}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n\, 1.2.3.\ldots n\beta^n}{\alpha\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)^{n+1}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Раньше мы имѣли, что

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{(-1)^n\, 1.2.3.\ldots n\beta^n}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{n+1}}\Big[(n+1)_1(\beta x)^n - (n+1)_3(\beta x)^{n-2}\alpha^2$$

$$+ (n+1)_5\,\alpha^4(\beta x)^{n-4} - \ldots\Big].$$

Изъ сравненія этихъ двухъ выраженій для $y^{(n)}$ получаемъ

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}{\beta x}\right)^{n+1}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta x}\right]$$

$$=(n+1)_1\frac{\alpha}{\beta x}-(n+1)_3\left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^3+(n+1)_5\left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)_5-\ldots.$$

или, полагая $n=m-1$, получаемъ

$$\frac{\sin m\omega}{\cos^m\omega}=(m)_1\operatorname{tg}\omega-(m)_3\operatorname{tg}^3\omega+(m)_5\operatorname{tg}^5\omega-\ldots.$$

21) $y=\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}$;

полагая

$$(\beta x)^{n+1}-(n+1)_2\alpha^2(\beta x)^{n-1}+(n+1)_4(\beta x)^{n-3}\alpha^4-\ldots.=V,$$

получаемъ

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n\,1.2.3\ldots.n\beta^{n-1}}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{n+1}}V,$$

или же, предполагая

$$\omega=\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta x}$$

и исходя изъ равенства

$$\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\alpha^2+\alpha^2\operatorname{cotg}^2\omega}=\frac{1}{\alpha\beta}\cos\omega\sin\omega,$$

получимъ, что

$$y^{(n)}=\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\,1.2.3\ldots.n\beta^{n-1}}{\alpha^{n+1}}\sin^{n+1}\omega\cos(n+1)\omega,$$

или

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n 1.2.3 \ldots n\beta^{n-1}}{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2})^{n+1}} \cos\left[(n+1) \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Приравнивая полученныя для $y^{(n)}$ выраженія, находимъ

$$\frac{(-1)^n 1.2.3 \ldots n\beta^{n-1}}{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{n+1}} \Big[(\beta x)^{n+1} - (n+1)_2 \alpha^2 (\beta x)^{n-1}$$

$$+ (n+1)_4 (\beta x)^{n-3} \alpha^4 - \ldots \Big] = \frac{(-1)^n 1.2.3 \ldots n\beta^{n-1}}{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2})^{n+1}} \cos[(n+1)\omega],$$

или

$$\frac{\cos m\omega}{\cos^m \omega} = m_0 - (m)_2 \operatorname{tg}^2\omega + (m)_4 \operatorname{tg}^4 \omega - \ldots,$$

полагая

$$n = m - 1, \quad \text{и} \quad 1 = m_0.$$

22) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{a^2 + x^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\dfrac{1}{x + a\sqrt{-1}} - \dfrac{1}{x - a\sqrt{-1}}\right];$

слѣдовательно

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2.3 \ldots (n-1)}{2\sqrt{-1}} \left[\frac{(x - a\sqrt{-1})^n - (x + a\sqrt{-1})^n}{(x^2 + a^2)^n}\right],$$

или, полагая

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

получаемъ

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{(-1)^n\,1.2.3\ldots.(n-1)}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)^n-(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n}{(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n\,1.2.3\ldots.(n-1)}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{-2\sqrt{-1}\sin n\varphi}{\sqrt{(x^2+a^2)^n}}\right]$$

$$=(-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots.(n-1)\,\frac{\sin n\varphi}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

26) $y=e^{ax}X$, гдѣ X нѣкоторая функція x.

Полагая $u=X$, $v=e^{ax}$, по теоремѣ Лейбница получаемъ

$$\frac{d^n y}{dx^n}=e^{ax}\left[\frac{d^n X}{dx^n}+na\,\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\,a^2\,\frac{d^{n-2}X}{dx^2}+\ldots.\right].$$

Символически это можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{d^n y}{dx^n}=e^{ax}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n+na\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\,a^2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}+\ldots.\right]X,$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n}=e^{ax}\left(\frac{d}{dx}+a\right)^n X.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\left(\frac{d}{dx}+a\right)^n X=e^{-ax}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(e^{ax}X\right).$$

27) $y'=e^{x\cos a}\,[\cos a\cos(x\sin a)-\sin a\sin(x\sin a)]$

$$=e^{x\cos a}\cos(x\sin a+a),$$

$$y'' = e^{x\cos a}\cos(x\sin a + 2a)$$

и т. д.

$$y^{(n)} = e^{x\cos a}\cos(x\sin a + na).$$

Подобнымъ же образомъ, если

$$y = e^x \cos x,$$

то

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}\, e^x \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right).$$

28) $y = \operatorname{arc\,tg} x$,

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \cos^2 y,$$

$$y'' = -2\sin y\cos y \,.\, \cos^2 y = -\cos^2 y\sin 2y$$

$$= \cos^2 y\cos\left[2y + \frac{\pi}{2}\right].$$

Предполагая справедливымъ, что

$$y^{(n)} = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(n-1)\cos^n y\cos\left(ny + \frac{n-1}{2}\pi\right),$$

докажемъ, что

$$y^{(n+1)} = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,n\cos^{n+1} y\cos\left[(n+1)\,y + \frac{n}{2}\pi\right].$$

Дѣйствительно, дифференцируя выраженіе для $y^{(n)}$, мы имѣемъ

$$y^{(n+1)} = 1.2.3....(n-1)\left[-n\sin y\cos^{n+1}y\cos\left(ny+\frac{n-1}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.-n\cos^{n+2}y\sin\left(ny+\frac{n-1}{2}\pi\right)\right]$$

$$= -1.2.3....n\cos^{n+1}y\left[\cos\left(ny+\frac{n-1}{2}\pi\right)\sin y\right.$$

$$\left.+\cos y\sin\left(ny+\frac{n-1}{2}\pi\right)\right]$$

$$= -1.2.3....n\cos^{n+1}y\sin\left[y+ny+\frac{n-1}{2}\pi\right]$$

$$= 1.2.3....n\cos^{n+1}y\cos\left[(n+1)y+\frac{n}{2}\pi\right].$$

29) Принимая за arc $\sin x$ ту дугу, которая обращается въ нуль при $x = 0$, имѣемъ:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{m\sin m\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{mx\sin(m\arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - m^2\frac{\cos(m\arcsin x)}{1-x^2},$$

т. е. мы получаемъ

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + m^2u = 0.$$

Дифференцируя это равенство p разъ, находимъ

$$(1-x^2)\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} - 2px\frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} - p(p-1)\frac{d^pu}{dx^p} + x\frac{d^{p+1}u}{dx^{p+2}}$$

$$-p\frac{d^pu}{dx^p} + m^2\frac{d^pu}{dx^p} = 0.$$

При $x=0$ получаемъ

$$\left(\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}}\right)_0 = (p^2-m^2)\left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0.$$

Но, такъ какъ при $x=0$,

$$u=1,\quad \frac{du}{dx}=0,$$

то мы замѣчаемъ, что всѣ производныя нечетнаго порядка равны нулю и что

$$\left(\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}}\right)_0 = (-1)^{n+1}m^2(m^2-4)(m^2-16)\ldots.(m^2-4n^2).$$

30) Полагая

$$u=(1-x)^n,\ v=x^n,$$

по формулѣ Лейбница получаемъ

$$(1)\ \frac{d^n y}{dx^n} = 1.2.3\ldots.n\left\{(1-x)^n-\left(\frac{n}{1}\right)^2 x(1-x)^{n-1}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 x^2(1-x)^{n-2}-\ldots.\right\}.$$

По формулѣ же Ньютона мы имѣемъ

$$y=x^n(1-x)^n=(-1)^n\left[x^{2n}-\frac{n}{1}x^{2n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{2n-2}-\ldots.\right],$$

слѣдовательно

$$(2)\ \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n\Big[2n(2n-1)\ldots.(n+1)x^n$$

$$-\frac{n}{1}(2n-1)(2n-2)\ldots.nx^{n-1}+\ldots.\Big].$$

Сравнивая выраженія (1) и (2) для $\frac{d^n y}{dx^n}$ и приравнивая коэффиціенты при x^n, получаемъ

$$1.2.3\ldots.n\,(-1)^n\left\{1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2+\ldots.\right\}$$

$$=(-1)^n\,2n\,(2n-1)\,(2n-2)\ldots.(n+1),$$

или

$$1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left(\frac{n\,(n-1)}{1.2}\right)^2+\ldots.=\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots.2n}{1.2.3\ldots.n}.$$

т. е. получаемъ извѣстную формулу для выраженія суммы квадратовъ биноміальныхъ коэффиціентовъ.

31) Обозначая $(x-\alpha)^n$ черезъ u, $(x-\beta)^n$ черезъ v, имѣемъ, по формулѣ Лейбница, что

$$y^{(n)}=u^{(n)}\,v+C^1_n\,u^{(n-1)}\,v'+C^2_n\,u^{(n-2)}\,v''+\ldots.+uv^{(n)},$$

при чемъ

$$u^{(n-p)}=n\,(n-1)\ldots.(p+1)\,(x-\alpha)^p,$$

$$v^{(p)}=n\,(n-1)\ldots.(n-p+1)\,(x-\beta)^{n-p}$$

и значитъ

$$C_n^p\,u^{(n-p)}\,v^{(p)}=1\,.\,2\ldots.p\,.\,(p+1)\ldots.n\,(C^p_n)^2\,(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^{n-p},$$

откуда

$$y^{(n)}=1\,.\,2\ldots.n\sum_{p=0}^{p=n}(C^p_n)^2\,(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^{n-p}.$$

Полагая же

$$\alpha = 1,\ \beta = -1,$$

получимъ

$$(1)\ y^{(n)} = 1.2\ldots.n \sum_{p=0}^{p=n} (C^p_n)^2 (x-1)^p (x+1)^{n-p}.$$

Но, съ другой стороны

$$y^{(n)} = [(x^2-1)^n]^{(n)} = \left[x^{2n} - 2nx^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} x^{2n-2} - \ldots\right]^{(n)}.$$

Приравнивая теперь въ выраженіи $y^{(n)}$ коэффиціенты при x^n, получаемъ

$$2n(2n-1)\ldots.(n+1) = 1.2\ldots.n\left[1 + (C^1_n)^2 + (C^2_n)^2 + \ldots. + (C^n_n)^2\right],$$

откуда

$$1 + (C^1_n)^2 + (C^2_n)^2 + \ldots. + (C^n_n)^2 = \frac{2n(2n-1)\ldots.(n+1)}{1.2\ldots.n} = C^n_{2n}.$$

Далѣе, такъ какъ выраженіе $(1-x^2)^n$ содержитъ только четныя степени x, то при n нечетномъ, $y^{(n)}$ не имѣетъ члена свободнаго отъ x, при n четномъ членомъ свободнымъ отъ x, будетъ n-ая производная выраженія

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\ C_n^{\frac{n}{2}}\ x^n.$$

Въ суммѣ (1) членъ, несодержащій x, будетъ

$$(2)\ 1.2\ldots.n\left[1 - (C^1_n)^2 + (C^2_n)^2 - \ldots. + (-1)^n (C^n_n)^2\right].$$

Итакъ, при n нечетномъ, сумма

$$1-(C^1_n)^2+(C^2_n)^2-\ldots+(-1)^n (C^n_n)^2$$

равна нулю, а при n четномъ она равна

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\, C_n^{\frac{n}{2}}.$$

32) Положимъ

$$\operatorname{cotg}\alpha = a,$$

тогда

$$y=\frac{x-a}{1+x^2}=\frac{x-a}{(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})}=\frac{1}{2}\left[\frac{1-a\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}+\frac{1+a\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}}\right]$$

и

$$\frac{1}{1.2....(n-1)}\frac{d^{n-1}\left(\frac{x-a}{1+x^2}\right)}{dx^{n-1}}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\left\{\frac{1-a\sqrt{-1}}{(x+\sqrt{-1})^n}+\frac{1+a\sqrt{-1}}{(x-\sqrt{-1})^n}\right\},$$

или

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}\,1.2....(n-1)}{2}\left\{\frac{(x-\sqrt{-1})^n(1-a\sqrt{-1})+(1+a\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})^n}{(1+x^2)^n}\right\};$$

полагая

$$x=\operatorname{cotg}\theta,$$

находимъ

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=(-1)^{n-1}\,1.2....(n-1).\sin n\theta.\sin^n\theta\left\{\operatorname{cotg} n\theta-\operatorname{cotg}\alpha\right\}.$$

33) Найти n-ую производную

$$F\left(\frac{1}{x}\right)=u.$$

Мы получаемъ, что

$$u'=-\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$u''=\frac{1}{x^4}F''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}F'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$u'''=-\left[\frac{1}{x^6}F'''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{6}{x^5}F''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{6}{x^4}F'\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$u^{\mathrm{IV}}=\frac{1}{x^8}F^{\mathrm{IV}}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{12}{x^7}F'''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{36}{x^6}F''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{24}{x^5}F'\left(\frac{1}{x}\right)$$

и мы можемъ на основанiи выраженiй u', u'', u''' и u^{IV} предположить, что

$$(a)\quad u^{(n)}=(-1)^n\left[\frac{1}{x^{2n}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1)(n)_1}{x^{2n-1}}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n)_2}{x^{2n-2}}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n)_3}{x^{2n-3}}F^{(n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)+\dots\right],$$

гдѣ $(n)_1$, $(n)_2$, ... суть биномiальные коэффицiенты.

Для того, чтобы формула (a) была доказана, мы предполагаемъ ее справедливой для $u^{(n)}$, составляемъ $u^{(n+1)}$, тогда мы получаемъ

$$u^{(n+1)} = (-1)^n(-1)\left[\frac{1}{x^{2n+2}}F^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2n}{x^{2n+1}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$+\frac{(n-1)(n)_1}{x^{2n+1}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(2n-1)(n-1)(n)_1}{x^{2n}}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n)_2}{x^{2n}}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(2n-2)(n-1)(n-2)(n)_2}{x^{2n-1}}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)(n)_3}{x^{2n-1}}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{x^{2n+2}}F^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{x^{2n+1}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{x^{2n}}\cdot\frac{(n+1)n}{1.2}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots\right],$$

т. е. мы замѣчаемъ, что выраженіе для $u^{(n+1)}$ отличается отъ $u^{(n)}$ только тѣмъ, что n замѣнено черезъ $n+1$, а такъ какъ для $n=1, 2, 3, 4$ формула (a) справедлива, то она теперь доказана и для любого значенія n.

35) $$\frac{d\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right]}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} = -\frac{\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{d^2\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right]}{dx^2} = \frac{2\frac{1}{x^3}}{\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2+1\right]^2} = \frac{2\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{\sin\left[2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right]}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^n\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1.2.\ldots.(n-1)}{(\sqrt{1+x^2})^n} \sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right).$$

Примѣняя же общую формулу для

$$\frac{d^n F\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n},$$

мы получаемъ

$$\frac{(-1)^n x^n}{1.2.\ldots.(n-1)} \frac{d^n\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(n)_1}{x} F'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n)_2}{x^2} F''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+ \frac{(n)_3}{1.2.x^3} F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots.$$

Полагая

$$\frac{1}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

получаемъ

$$\sin^n\theta \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (n)_1 \cos\theta \sin\theta - (n)_2 \cos^2\theta \sin 2\theta$$

$$+ (n)_3 \cos^3\theta \sin 3\theta - \ldots.$$

36) Мы имѣемъ

$$\frac{dF(x^2)}{dx} = 2x\, F'(x^2),$$

$$\frac{d^2 F(x^2)}{dx^2} = (2x)^2 F''(x^2) + 2F'(x^2),$$

$$\frac{d^3 F(x^2)}{dx^3} = (2x)^3 F'''(x^2) + 6.2x\, F''(x^2),$$

$$\frac{d^4 F(x^2)}{dx^4} = (2x)^4 F^{\mathrm{IV}}(x^2) + 12.(2x)^2 F'''(x^2) + 12F''(x^2),$$

$$\frac{d^5 F(x^2)}{dx^5} = (2x)^5 F^{\mathrm{V}}(x^2) + 20(2x)^3 F^{\mathrm{IV}}(x^2) + 60.2x\, F'''(x^2)$$

и мы подмѣчаемъ, что

$$(\alpha)\ \frac{d^n F(x^2)}{dx^n} = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} F^{(n-1)}(x^2)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} F^{(n-2)}(x^2)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2x)^{n-6} F^{(n-3)}(x^2) + \ldots.$$

Для того, чтобы убѣдиться въ справедливости этой формулы, мы вычислимъ

$$\frac{d^{n+1} F(x^2)}{dx^{n+1}}.$$

Получаемъ

$$\frac{d^{n+1} F(x^2)}{dx^{n+1}} = (2x)^{n+1} F^{(n+1)}(x^2) + [2n\,(2x)^{n-1}$$

$$+ 2n(n-1)(2x)^{n-2} x]\, F^{(n)}(x^2)$$

$$+ \Big[n(n-1)\,2.(2n-2)(2x)^{n-3}$$

$$+ \frac{2x.n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}\Big] F^{(n-1)}(x^2) + \ldots.$$

$$= (2x)^{n+1} F^{(n+1)}(x^2) + (n+1)\,n\,(2x)^{n-1} F^{(n)}(x^2)$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}(2x)^{n-3} F^{(n-1)}(x^2) + \ldots,$$

т. е. мы замѣчаемъ, что $\frac{d^{n+1} F(x^2)}{dx^n}$ отличается отъ $\frac{d^n F(x^2)}{dx^n}$ только замѣною n черезъ $n+1$, а, такъ какъ въ случаѣ $n=1, 2, 3$, мы убѣдились въ справедливости формулы (α), слѣдовательно она и вообще справедлива.

37) Примѣняя къ предложенному выраженію общую формулу для $\frac{d^{m-1} F(x^2)}{dx^{m-1}}$, получаемъ

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}$$

$$=(-1)^{m-1}\Big[(2x)^{m-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big(m-\frac{3}{2}\Big)\ldots\Big(\frac{3}{2}\Big)$$

$$-(m-1)(m-2)(2x)^{m-3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big(m-\frac{3}{2}\Big)\ldots\Big(\frac{5}{2}\Big)+\ldots\Big]$$

$$=(-1)^{m-1}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\Big[mx^{m-1}\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\sqrt{1-x^2})^3 x^{m-3}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}x^{m-5}(\sqrt{1-x^2})^5-\ldots\Big].$$

Полагая теперь $x=\cos u$, получаемъ

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\Big[m\cos^{m-1}u\sin u$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}u\sin^3 u+\ldots\Big]$$

$$=(-1)^{m-1}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\sin mu.$$

39) $\frac{d \lg(1+x^2)}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} = 2 \sin\omega \cos\omega,$

полагая

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{x}.$$

Дифференцируя получаемъ

$$\frac{d^2 \lg(1+x^2)}{dx^2} = 2\,(\cos^2\omega - \sin^2\omega)\,(-\sin^2\omega)$$

$$= (-1)\,.\,2\cos 2\omega \sin^2\omega,$$

$$\frac{d^3 \lg(1+x^2)}{dx^3} = (-1)^2\,.\,2\,.\,2\,\cos 3\omega \sin^3\omega$$

и т. д.

$$\frac{d^n \lg(1+x^2)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\; 2\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\cos n\omega \sin^n\omega.$$

По общей же формулѣ мы имѣемъ, что

$$\frac{d^n \lg(1+x^2)}{dx^n} = (2x)^n\,(-1)^{n-1}\; 1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\,(1+x^2)^{-n}$$

$$+ (2x)^{n-2}\,(-1)^{n-2}\; 1.2\ldots(n-2).n\,(n-1)\,(1+x^2)^{-n+1}$$

$$+ (2x)^{n-4}(-1)^{n-3}\; 1.2\ldots(n-3)\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(1+x^2)^{-n+2} + \ldots$$

$$= (-1)^{n-1}\;\frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x^2)^n}\,(2x)^n\left[1 - \frac{n}{4x^2}\,(1+x^2)\right.$$

$$\left. + \frac{n\,(n-3)}{1.2}\left(\frac{1+x^2}{4x^2}\right)^2 - \ldots\right].$$

Изъ сравненія выраженій для $\frac{d^n \lg(1+x^2)}{dx^n}$, находимъ

$$2\cos n\omega = (2\cos\omega)^n - \frac{n}{1}(2\cos\omega)^{n-2} + \frac{n\,(n-3)}{1.2}(2\cos\omega)^{n-4} - \ldots$$

40) Дифференцируя мы получаемъ

$$\frac{d \lg(1-x^2)}{dx} = \frac{-2x}{1-x^2},$$

$$\frac{d^2 \lg(1-x^2)}{dx^2} = -\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(1-x^2)^2} = -\left[(1-x)^{-2}+(1+x)^{-2}\right],$$

$$\frac{d^3 \lg(1-x^2)}{dx^3} = (-1)(-2)\left[(x-1)^{-3}+(x+1)^{-3}\right],$$

откуда

$$\frac{d^n \lg(1-x^2)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, 1.2....(n-1)\left[(x-1)^{-n}+(x+1)^{-n}\right].$$

По общей же формулѣ для $\frac{d^n F(x^2)}{dx^n}$ мы получаемъ, что

$$\frac{d^n \lg(1-x^2)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, 1.2....(n-1)\,(2x)^n\,(x^2-1)^{-n}$$

$$+(-1)^{n-2}\, 1.2....(n-2)\,(n-1)\,n\,(2x)^{n-2}\,(x^2-1)^{-n+1}$$

$$+(-1)^{n-3}\, 1.2....(n-3)\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\,(2x)^{n-4}(x^2-1)^{-n+2}+....$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\, 1.2....(n-1)\,(2x)^n}{(x^2-1)^n}\left[1-\frac{n}{1}\,\frac{x^2-1}{4x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^2-....\right].$$

Слѣдовательно

$$\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{(2x)^n} = 1-\frac{n}{1}\,\frac{x^2-1}{4x^2}+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^2-....$$

41) Дифференцируя $F(\sqrt{x})$, мы получаемъ, что

$$\frac{dF(\sqrt{x})}{dx} = \frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}; \quad \frac{d^2F(\sqrt{x})}{dx^2} = \frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2} - 2\,\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3};$$

$$\frac{d^3F(\sqrt{x})}{dx^3} = \frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3} - 2.3.\,\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4} + 12\,\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5};$$

$$\frac{d^4F(\sqrt{x})}{dx^4} = \frac{F^{\mathrm{IV}}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4} - 12\,\frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5} + 60\,\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^6} - 120\,\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^7}$$

и мы можемъ предположить, что

$$(\alpha) \qquad \frac{d^nF(\sqrt{x})}{dx^n} = \frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{1}\,\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}}$$

$$- \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\,\frac{F^{(n-3)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+3}} + \ldots.$$

Для того, чтобы убѣдиться въ справедливости этой формулы, мы, пользуясь выраженіемъ (α), составляемъ $n+1$-ую производную $F(\sqrt{x})$, тогда получаемъ

$$\frac{d^{n+1}F(\sqrt{x})}{dx^{n+1}} = \frac{F^{(n+1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}} - (n+1)n\,\frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}}$$

$$+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2}\,\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+3}} - \ldots.$$

и замѣчаемъ, что, если формула (α) справедлива для какого нибудь значенія n, то она будетъ справедливою и для значенія $n+1$, а такъ какъ формула эта справедлива для $n=3$, то, слѣдовательно, она справедлива вообще для всякаго значенія n.

43) Дифференцируя послѣдовательно $F(e^x)$, получаемъ

$$\frac{d\,F(e^x)}{dx}=e^x F'(e^x),\quad \frac{d^2 F(e^x)}{dx^2}=e^x F'(e^x)+e^{2x} F''(e^x),$$

$$\frac{d^3 F(e^x)}{dx^3}=e^x F'(e^x)+3e^{2x} F''(e^x)+e^{3x} F'''(e^x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и мы можемъ предположить, что

$$\frac{d^n F(e^x)}{dx^n}=C_1 e^x F'(e^x)+C_2 e^{2x} F''(e^x)+C_3 e^{3x} F'''(e^x)+\ldots,$$

при чемъ коэффиціенты C_1, C_2, C_3 и т. д. не зависятъ, ни отъ x, ни отъ $F(e^x)$. Для того, чтобы ихъ опредѣлить, предположимъ

$$F(e^x)=(1-t+te^x)^n,$$

тогда

$$(\alpha)\quad \frac{d^n(1-t+te^x)^n}{dx^n}=C_1 n e^x (1-t+te^x)^{n-1}\,t$$

$$+C_2\, e^{2x}\, n\,(n-1)\,(1-t+te^x)^{n-2}\,t^2$$

$$+n\,(n-1)\,(n-2)\,C_3\, e^{3x}\, t^3\,[1-t+te^x]^{n-3}+\ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Съ другой же стороны

$$(1-t+te^x)^n=(1-t)^n+(n)_1\,(1-t)^{n-1}\,e^x\,t$$

$$+(n)_2\,(1-t)^{n-2}\,e^{2x}\,t^2+\ldots.$$

и значитъ

$$(\beta)\quad \frac{d^n\,[1-t+te^x]^n}{dx^n}=(n)_1\,1^n\,(1-t)^{n-1}e^x\,t$$

$$+(n)_2\,2^n\,(1-t)^{n-2}\,e^{2x}\,t^2+\ldots.$$

Предполагая теперь для простоты $x=0$, мы изъ сравненія выраженій (α) и (β), получаемъ

$$n\,C_1\,t+n\,(n-1)\,C_2t^2+n\,(n-1)\,(n-2)\,C_3\,t^3+\ldots.$$

$$=(n)_1\,1^n\,(1-t)^{n-1}\,t+(n)_2\,2^n\,(1-t)^{n-2}\,t^2+\ldots,$$

откуда

$$C_1=1;\; n\,(n-1)\,C_2=-n\,(n-1)\,1^n+\frac{n\,(n-1)}{1.2}.2^n$$

т. е.

$$C_2=\frac{(2^n-2.1^n)}{1.2};\quad C_3=\frac{[3^n-3.2^n+3.1^n]}{1.2.3}$$

и вообще

$$C_k=\frac{k^n-(k)_1\,(k-1)^n+(k)_2\,(k-2)^n-\ldots}{1.2.3\ldots n}.$$

Если мы теперь для сокращенія обозначимъ

$$(k)_0\,k^n-(k)_1\,(k-1)^n+(k)_2\,(k-2)^n-\ldots.$$

черезъ E_k, то получимъ общую формулу для n-ой производной $F(e^x)$ слѣдующаго вида

$$\frac{d^n\,F(e^x)}{dx^n}=E_1\,e^x\,F'(e^x)+\frac{E_2}{1.2}\,e^{2x}\,F''(e^x)+\frac{E_3}{1.2.3}\,e^{3x}\,F'''(e^x)+\ldots$$

44) Такъ какъ

$$(\alpha)\quad \frac{d^n (a+e^x)^\mu}{dx^n} = (a+e^x)^\mu \left[(\mu)_1 E_1 \frac{e^x}{a+e^x}\right.$$

$$\left. + (\mu)_2 E_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots \right],$$

то, полагая въ этой формулѣ $a = 1$, $\mu = -1$, получаемъ

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{1+e^x}\right)}{dx^n} = \frac{1}{1+e^x}\left[-\frac{e^x}{1+e^x} + (2^n - 2\,.\,1^n)\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2\right.$$

$$\left. -(3^n - 3\,.\,2^n + 3\,.\,1^n)\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2 + \ldots \right].$$

Полагая въ формулѣ (α) $a = 0$, получаемъ

$$\mu^n = \frac{\mu}{1} E_1 + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} E_2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} E_3 + \ldots$$

Приравнивая теперь коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ μ, получаемъ

$$E_1 - \frac{1}{2} E_2 + \frac{1}{3} E_3 - \ldots = 0,$$

. . . .

$$\frac{E_n}{1.2.3\ldots n} = 1,$$

т. е.

$$(n)_0 n^n - (n)_1 (n-1)^n + (n)_2 (n-2)^n - \ldots = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n.$$

45) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}},$

Примѣняя къ этому выраженію формулу Лейбница, получаемъ, что

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,\frac{(1-x)^{-n}}{\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \frac{n}{1}\,\frac{1}{2n-1}\,\frac{1-x}{1+x}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \ldots \pm \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right].$$

46) Положимъ

$$(1)\qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

тогда

$$\frac{d^{n+1}\arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n y}{dx^n};$$

Дифференцируя выраженіе (1), послѣдовательно получаемъ

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}},$$

такъ что мы можемъ предположить, что

$$(3)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

гдѣ P_n полиномъ n-ой степени четный или нечетный одновременно съ n, въ которомъ коэффиціентъ при x^n будетъ $1.2.3\ldots.n$.

Для вычисленія остальныхъ коэффиціентовъ многочлена P_n, мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ: изъ уравненій (1) и (2) имѣемъ

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

Дифференцируя это равенство n разъ по формулѣ Лейбница, получаемъ

$$(1-x^2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-(2n+1)\,x\,\frac{d^ny}{dx^n}-n^2\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=0.$$

Замѣняя же

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}},\quad \frac{d^ny}{dx^n}\quad \text{и}\quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

соотвѣтствующими значеніями, находимъ

$$\frac{P_{n+1}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}-(2n+1)\,x\,\frac{P_n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}-n^2.\frac{P_{n-1}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}=0,$$

или

$$(4)\qquad P_{n+1}-(2n+1)\,xP_n-n^2\,(1-x^2)\,P_{n-1}=0.$$

Дифференцируя уравненіе (3), получаемъ

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{\frac{dP_n}{dx}(1-x^2)+x\,(2n+1)\,P_n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{P_{n+1}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

т. е.

$$\frac{dP_n}{dx} = \frac{P_{n+1} - (2n+1)\,x\,P_n}{1-x^2},$$

или, принимая во вниманіе соотношеніе (4), находимъ

$$(5)\quad \frac{dP_n}{dx} = n^2 P_{n-1}.$$

Отсюда получаемъ

$$\frac{d^2 P_n}{dx^2} = n^2 \frac{dP_{n-1}}{dx},$$

или же, на основаніи равенства (5), въ которомъ n замѣняемъ черезъ $n-1$, находимъ

$$(6)\quad \frac{d^2 P}{dx^2} = n^2 (n-1)^2 P_{n-2}.$$

Теперь исключаемъ изъ уравненій (4), (5) и (6) P_{n-1} и P_{n-2}, тогда получаемъ

$$(7)\quad (1-x^2)\frac{d^2 P_n}{dx^2} + (2n-1)\,x\,\frac{dP_n}{dx} - n^2 P_n = 0.$$

Положимъ

$$P_n = A_0 x^n + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-4} + \ldots.$$

Подставляя въ уравненіе (7) это выраженіе для P_n, получаемъ тождество

$$(1-x^2)\Big[n(n-1)A_0 x^{n-2} + (n-2)(n-3)A_1 x^{n-4} + (n-4)(n-5)A_2 x^{n-6} + \ldots\Big]$$
$$+ (2n-1)\,x\Big[n A_0 x^{n-1} + (n-2)A_1 x^{n-3} + (n-4)A_2 x^{n-5} + \ldots\Big]$$
$$- n^2\Big[A_0 x^n + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-4} + \ldots\Big] = 0.$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x, находимъ

$$A_1 = \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{A_0}{2},$$

$$A_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}A_0,$$

. . . .

Слѣдовательно, получаемъ

$$\frac{1}{1.2.3\ldots.n}\frac{d^{n+1}\arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{1}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\Big[x^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2}x^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4}x^{n-4}+\ldots.\Big].$$

47) Если въ формулѣ Лейбница

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}u''v^{(n-2)} + \ldots. + u^{(n)}v$$

замѣнимъ u черезъ $(1-z)^n$ и v черезъ z^n, то получимъ

$$\frac{d^n[(1-z)^n z^n]}{dz^n} = 1.2.3\ldots.n\Big[(1-z)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2(1-z)^{n-1}z$$

$$+\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2(1-z)^{n-2}z^2 - \ldots.\Big];$$

изъ этой формулы слѣдуетъ

$$\frac{d(z-z^2)}{dz} = 1-2z,$$

$$\frac{d^2(z-z^2)^2}{dz^2} = 2 \,.\, 1 \left[(1-2z)^2 - \frac{2.1}{1.1}(z-z^2)\right],$$

$$\frac{d^3(z-z^2)^3}{dz^3} = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \left[(1-2z)^3 - \frac{3.2}{1.1}(1-2z)(z-z^2)\right],$$

$$\frac{d^4(z-z^2)^4}{dz^4} = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \left[(1-2z)^4 - \frac{4.3}{1.1}(1-2z)^2(z-z^2)\right.$$

$$\left. + \frac{4.3.2.1}{2.2}(z-z^2)^2\right]$$

и по аналогіи

$$\frac{d^n(z-z^2)^n}{dz^n} = n(n-1)\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \left[(1-2z)^n - \frac{n(n-1)}{1.1}(1-2z)^{n-2}(z-z^2)\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.1.2.2}(1-2z)^{n-4}(z-z^2)^2 - \ldots\right],$$

но, такъ какъ

$$d^n\left(\frac{(1-z)^n z^n}{dz^n}\right) = d^n\left(\frac{(z-z^2)^n}{dz^n}\right),$$

то

$$(1-2z)^n - n(n-1)(1-2z)^{n-2}(z-z^2)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2}(1-2z)^{n-4}(z-z^2)^2 - \ldots$$

$$= (1-z)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2(1-z)^{n-1}z + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2(1-z)^{n-2}z^2 - \ldots$$

Если теперь положимъ

$$z = \sin^2\frac{x}{2},$$

то

$$1 - z = \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$1 - 2z = \cos x,$$

$$z - z^2 = \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 x}{2.2}.$$

Слѣдовательно

$$\cos^n x - \frac{n(n-1)}{2.2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.4.4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \ldots$$

$$= \cos^{2n} \frac{x}{2} - \left(\frac{n}{1}\right)^2 \cos^{2n-2} \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 \cos^{2n-4} \frac{x}{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \ldots,$$

т. е. тождество доказано.

48) $y = \frac{x}{e^x - 1}$,

или

$$x = (e^x - 1)\, y,$$

откуда

$$(1) \quad 1 = e^x\, y + (e^x - 1)\, y',$$

$$(2) \quad 0 = e^x\, y + 2e^x\, y' + (e^x - 1)\, y'',$$

$$0 = e^x\, y + 3e^x\, y' + 3e^x\, y'' + (e^x - 1)\, y''',$$

. . . .

$$0 = e^x\, y + (n)_1\, e^x\, y' + (n)_2\, e^x\, y'' + \ldots + (e^x - 1)\, y^{(n)}.$$

При $x = 0$ первое уравненіе обращается въ тождество и изъ (2) находимъ y'_0.

Замѣтимъ далѣе, что, начиная со второй, производныя функціи $\frac{x}{e^x-1}$ будутъ одинаковы съ производными функціи $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$, которая функція четная и у которой, слѣдовательно, всѣ производныя нечетнаго порядка обращаются въ нуль при $x=0$.

Итакъ, въ нашемъ примѣрѣ мы имѣемъ

$$y_0''', \; y_0^{\mathrm{V}}, \ldots y_0^{(2n-1)} \text{ суть нули.}$$

Послѣ этихъ сокращеній мы замѣчаемъ, что два смежныхъ уравненій, напр. второе и третье, должны быть тождественными.

Такимъ образомъ предъидущія уравненія раздѣляются на двѣ системы, опредѣляющія тѣ же неизвѣстныя.

Два первыхъ уравненія при $x=0$ даютъ

$$y_0=1 \text{ и } y_0'=-\frac{1}{2}.$$

Послѣдующія уравненія раздѣляются на слѣдующія двѣ системы

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}&=(3)_2\,y_0'',\\
\frac{3}{2}&=(5)_2\,y_0''+(5)_4\,y_0^{\mathrm{IV}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{2n-3}{2}&=(2n-1)_2\,y_0''+(2n-1)_4\,y_0^{\mathrm{IV}}+\ldots+(2n-1)_{2n-2}\,y_0^{(2n-2)}
\end{aligned}\right.$$

и

$$
(4)\quad\left|\begin{aligned}
1 &= (4)_2\, y_0'',\\
2 &= (6)_2\, y_0'' + (6)_4\, y_0^{IV},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
n-1 &= (2n)_2\, y_0'' + (2n)_4\, y_0^{IV} + \dots + (2n)_{2n-2}\, y_0^{(2n-2)}.
\end{aligned}\right.
$$

Если положимъ

$$y_0^{(2n)} = (-1)^{n-1} B_{2n-1},$$

то полученныя при этомъ обозначенiи числа B_1, B_3, ... суть Бернуллiевы числа, и значенiя ихъ будутъ

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = \frac{1}{30},\ B_9 = \frac{5}{66}, \dots .$$

49) Предложенный рядъ сходящiйся при $x < 1$.

Беремъ сначала $p = 1$ и обозначаемъ сумму ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots .$$

черезъ xy, тогда

$$y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots,$$

но

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots .$$

есть производная отъ

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots . = \frac{1}{1-x}$$

при $x < 1$.

Итакъ

$$y=\left(\frac{1}{1-x}\right)'.$$

Взявъ p послѣдовательныхъ производныхъ отъ $\frac{1}{1-x}$, получаемъ:

$$1.2+2.3x+3.4x^2+\ldots.=\left(\frac{1}{1-x}\right)''.$$

. . . .

$$1.2.3\ldots.p+2.3\ldots.(p+1)\,x+\ldots.$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)}.$$

Помножая теперь обѣ части этого равенства на x^p, находимъ, что

$$1.2.3\ldots.px^p+2.3\ldots.(p+1)\,x^{p+1}+\ldots.=\frac{1.2\ldots.px^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

X.

16) Изъ уравненія

$$f(x, y, z, \ldots\ldots t, u)=0$$

имѣемъ

$$(1)\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}=0; \quad (2)\ \frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta}=0;$$

$$(3)\ \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0.$$

Изъ уравненія (3), принимая во вниманіе уравненія (1) и (2), получаемъ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^3 \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial u}\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial\beta}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial\alpha}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial\beta} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{vmatrix} + \frac{\partial f}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial\alpha} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{vmatrix}.$$

XI.

27) Изъ соотношеній

$$(1)\quad X = \frac{dy}{dx} = \varphi(x), \qquad Y = x\frac{dy}{dx} - y = \psi(x)$$

мы получаемъ, что

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{xy''}{y''} = x,$$

при чемъ мы все время предполагаемъ y'' не равной нулю тождественно.

Отсюда видно, что, если линія не была прямою на плоскости xy, то она, посредствомъ соотношеній (1) преобразовывается на плоскости XY въ линію, которая также не будетъ прямою и между двумя этими кривыми существуютъ слѣдующія взаимныя соотношенія:

Если

$$X = \frac{dy}{dx}, \quad Y = x\frac{dy}{dx} - y;$$

то (2)

$$x = \frac{dY}{dX}, \quad y = X\frac{dY}{dX} - Y.$$

Легко замѣтить, что ур. (2) выражаютъ, что кривыя $y = f(x)$ и $Y = F(X)$ суть взаимныя поляры по отношенію къ параболѣ

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

Дѣйствительно, ур. поляры точки (x, y) будетъ

$$(3) \quad xX - y - Y = 0,$$

гдѣ X и Y суть перемѣнныя координаты.

Изъ ур. (3) мы получаемъ

$$(4) \quad \frac{dY}{dX} = x \quad \text{и} \quad (5) \quad \frac{dy}{dx} = X.$$

Такъ что, рѣшая ур. (3), (4) и (5) по отношенію къ X и Y, получаемъ

$$X = \frac{dy}{dx}, \quad Y = x\frac{dy}{dx} - y.$$

Двумъ касающимся кривымъ на плоскости xy соотвѣтствуютъ двѣ касающіяся кривыя на плоскости XY.

Преобразованіе (1), (которое есть преобразованіе Лежандра для случая двухъ перемѣнныхъ x и y) есть представитель на плоскости преобразованій называемыхъ Софусомъ Ли «касательными преобразованіями»*).

Обозначая послѣдовательныя производныя $Y(X)$, соотвѣтственно черезъ Y', Y'', Y''', находимъ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dX}{dx} = \frac{1}{\frac{d^2 Y}{dX^2}} = \frac{1}{Y''},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{\frac{d^3 Y}{dX^3}\,\frac{dX}{dx}}{\left(\frac{d^2 Y}{dX^2}\right)^2} = -\frac{\frac{d^3 Y}{dX^3}}{\left(\frac{d^2 Y}{dY^2}\right)^3} = -\frac{Y'''}{Y''^3}$$

и предложенное выраженіе преобразуется въ слѣдующее

$$Y''' = A(Y')\,Y''^2 + [B(Y')\,X + C(Y')\,(XY' - Y)]\,Y''^3.$$

XIII.

1) $x^m + mx + \lambda = f(x)$,

$$mx^{m-1} + m = f'(x) = m\,(x^{m-1} + 1).$$

---

*) Sophus Lie. «Geometrie der Berührungstransformationen». Kap. 1, S. 24 u. Kap. 2, S. 56.

$f'(x)$ всегда > 0, слѣдовательно $f(x)$ все время возрастаетъ съ возрастаніемъ x; при $x = 0$, $f(0) = \lambda > 0$, итакъ $f(x)$ не имѣетъ вещественныхъ положительныхъ корней.

Если m четное и $\lambda > m - 1$, то нѣтъ дѣйствительныхъ корней.

3) $x + \cos x - a = f(x)$,

$$1 - \sin x = f'(x).$$

$f'(x)$ всегда положительна, а такъ какъ, при $x = 0$, $f(0) = 1 - a$, то, если $a < 1$, $f(x)$ совсѣмъ не имѣетъ положительныхъ вещественныхъ корней, если-же $a \geqslant 1$, то $f(x)$ имѣетъ одинъ положительный корень.

4) $4x + 2 \sin 2x - \pi = f(x)$.

Такъ какъ производная этой функціи всегда положительна, и такъ какъ

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) < 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

то, слѣдовательно, $f(x)$ имѣетъ единственный положительный корень, заключенный между

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ и } x = \frac{\pi}{4}.$$

5) Такъ какъ предложенное выраженіе имѣетъ производную положительную для всѣхъ положительныхъ значеній x,

и при $x=0$ — отрицательно, а при $x=1$ положительно, то, слѣдовательно, одинъ корень уравненія $xe^x-2=0$ лежитъ между 0 и 1.

6)
$$y=x-\cos x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y'=1+\sin x,$$

$y'>0$ для всѣхъ значеній x между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно, при измѣненіи x отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, y — возрастаетъ, но при $x=0$, $y<0$. Слѣдовательно, одинъ корень уравненія (1) лежитъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

7) Уравненіе $Q_n=0$ имѣетъ всѣ корни вещественные. Дѣйствительно, функція $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ обращается въ нуль при $x=-\infty$ и при $x=+\infty$, для всѣхъ же остальныхъ значеній x функція эта остается конечною и непрерывною; ея производная $\frac{Q_1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ обращается въ нуль при $x=0$. Далѣе, выраженіе $\frac{Q_1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ обращается въ нуль при $x=-\infty$, $x=0$, $x=+\infty$ и остается конечнымъ и непрерывнымъ, слѣдовательно производная этого выраженія должна обращаться въ нуль по крайней мѣрѣ для двухъ значеній $x=\beta$ и $x=\gamma$, при чемъ β лежитъ между $-\infty$ и 0, а γ между 0 и $+\infty$.

Производная эта будетъ $\frac{Q_2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$; слѣдовательно уравненіе $Q_2=0$, которое 2-ой степени, имѣетъ два вещественныхъ корня β и γ. Продолжая далѣе тѣ же разсужденія, докажемъ вещественность всѣхъ n корней уравненія $Q_n = 0$.

8) Это очень просто слѣдуетъ изъ теоремы Ролля. Дѣйствительно, функція $y = e^{-x^2}$ обращается въ нуль при $x = -\infty$ и $x = +\infty$, между этими же предѣлами она непрерывная функція x, слѣдовательно ея производная должна по крайней мѣрѣ одинъ разъ обратиться въ нуль, когда x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$. Значеніе x, обращающее эту производную въ нуль, есть $x = 0$, т. е. $U_1 = 0$ при $x = 0$. Мы замѣчаемъ, что производная обращается въ нуль при $x = -\infty$, $x = 0$ и $x = +\infty$, между этими предѣлами она непрерывная функція отъ x, слѣдовательно ея производная, т. е. $e^{-x^2} U_2$, должна, по крайней мѣрѣ для двухъ значеній x: β и γ обращаться въ нуль, при чемъ β заключается между $-\infty$ и 0, а γ между 0 и $+\infty$; β и γ, слѣдовательно, суть корни уравненія $U_2 = 0$, которое второй степени. Тѣмъ же способомъ доказали бы, что функція $e^{-x^2} U_2$, обращающаяся въ нуль при $x = -\infty$, $x = \beta$, $x = \gamma$ и $x = +\infty$, имѣетъ производную $e^{-x^2} U_3$, у которой три корня δ, ε, ξ, должны быть таковы, что δ лежитъ между $-\infty$ и β, ε между β и γ и ξ между γ и $+\infty$. Уравненіе $U_3 = 0$ третьей степени и имѣетъ слѣдовательно всѣ корни вещественные.

Совершенно тѣмъ же способомъ доказывается, что и всѣ корни уравненія $U_n = 0$ вещественны.

9) $y' = e^x (x - 1) + 1$,

$y'' = e^x \, x > 0$ для всѣхъ положительныхъ значеній x и такъ какъ при $x = 0$, $y' = 0$, то y' возрастаетъ и y остается положительнымъ для всѣхъ положительныхъ значеній x.

10) $y' = \frac{-2c^2}{x^2(c+x)} < 0$ при x и c положительныхъ, слѣдовательно y убываетъ при возрастаніи x и возрастаетъ при убываніи x.

11) $$y' = e^{(c+2x)\lg\frac{x}{c+x}}\left\{2\lg\frac{x}{c+x} + (c+2x)\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{c+x}\right]\right\}$$

$$= \left(\frac{x}{c+x}\right)^{c+2x}\left[2\lg\frac{x}{c+x} + \frac{c(c+2x)}{x(c+x)}\right].$$

Такъ какъ $y' = 0$ при $x = \infty$, то при x и c положительныхъ $y' > 0$; слѣдовательно y возрастаетъ съ возрастаніемъ x. (Смотри № 10).

12) $f(x) = 3^x - 54x + 135$,

$$f'(x) = 3^x \lg 3 - 54.$$

Логариѳмъ взятъ при основаніи e, тогда $\lg 3 < 2$ и $f'(x)$ навѣрно < 0 при $3^x < \frac{54}{2}$, т. е. при $x \leqslant 3$.

Слѣдовательно $f(x)$ убываетъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $x = 3$. При $x = 4$, $f'(x) > 0$, слѣдовательно $f(x)$ возрастаетъ отъ $x = 4$ до $x = +\infty$.

Итакъ, $f(x)$ не имѣетъ корней, ни между значеніями $x = -\infty$ и 3, ни между значеніями $x = 4$ и $x = +\infty$, а такъ какъ $f(x) = 0$ при $x = 3$ и $x = 4$, и при томъ на промежуткѣ отъ $x = 3$ до $x = 4$ производная обращается въ нуль только одинъ разъ, то слѣдовательно $f(x)$ имѣетъ только два корня $x = 3$ и $x = 4$.

13) Точки пересѣченія кривой

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{13x^3 + 3x}{3x^4 + 14x^2 + 3} \dots\dots\dots (\alpha)$$

съ осью x будутъ искомыми корнями предложеннаго уравненія.

Такъ какъ уравненіе (α) не измѣняется при замѣнѣ x на $-x$ и y на $-y$, и такъ какъ при $x = 0$, $y = 0$, то значитъ каждому положительному значенію координаты точки пересѣченія кривой (α) съ осью x, будетъ соотвѣтствовать равное ему отрицательное значеніе.

При $x = +\infty$, $y = \frac{\pi}{2}$. Для того, чтобы судить объ измѣненіяхъ y, опредѣляемъ $\frac{dy}{dx}$.

Получаемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{16x^4(3x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(1 + x^2)(3x^4 + 14x + 3)^2},$$

откуда видно, что $\frac{dy}{dx}$ будетъ положительною для значеній x большихъ единицы; а такъ какъ, при $x = 0$, $y = 0$, то мы заключаемъ, что, для всѣхъ значеній $x < 1$, y будетъ отрицательнымъ и, для всѣхъ значеній x отъ 1 до $+\infty$,

y будетъ положительнымъ. Итакъ, существуетъ положительный корень, заключенный между $+1$ и $+\infty$.

Полагая $x = 1$, получаемъ

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} < 0.$$

При $x = \sqrt{3}$,

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{7\sqrt{3}}{12} > 0.$$

Слѣдовательно положительный корень x_0 правой части ур. (α) лежитъ между 1 и $\sqrt{3}$. Итакъ предложенное въ задачѣ уравненіе имѣетъ три вещественныхъ корня $0, +x_0$ и $-x_0$.

14) $y' = z + x^2 (e^x + e^{-x})$, гдѣ черезъ z обозначено выраженіе $2x(e^x - e^{-x})$;

$$z' = 2\,[u + x\,(e^x + e^{-x})],$$

гдѣ

$$u = e^x - e^{-x};$$

$$u' = e^x + e^{-x} \text{ положительна для всѣхъ значеній } x.$$

Слѣдовательно $z > 0$ и $y' > 0$. Но такъ какъ, при $x = 0$, $y = 0$, то значитъ $y > 0$ для всѣхъ положительныхъ значеній x.

Полагая теперь x отрицательнымъ, получимъ

$$y = x^2\,(e^{-x} - e^x),$$

и такъ какъ

$$(e^{-x} - e^{x})' = -e^{-x} - e^{x} < 0,$$

то, слѣдовательно, для всѣхъ отрицательныхъ значеній x, y будетъ отрицательнымъ.

15) Это слѣдуетъ изъ того, что $\frac{dy}{dx}$ всегда < 0; y непрерывно убываетъ при измѣненіи x отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, и такъ какъ, при $x = 0$, $y = 0$, то, слѣдовательно, на всемъ промежуткѣ отъ $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$, y отрицателенъ, т. е.

$$x < \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \sin x.$$

16) Разсмотримъ функцію

$$(1) \quad y = \frac{e^{x\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

При

$$x = 1, \qquad y = 1;$$

$$x = +\infty, \qquad y = +\infty.$$

Далѣе, изъ уравненія (1) имѣемъ

$$\lg y = x\sqrt{x^2 - 1} - \lg\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right],$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x^2 - 1},$$

$\frac{dy}{dx}$ всегда положительна; слѣдовательно, когда x измѣняется отъ $+1$ до $+\infty$, y постоянно возрастаетъ отъ 1 до $+\infty$. Итакъ, уравненіе (1) можетъ имѣть корень и при томъ одинъ, если только $m > 1$; если же m меньше единицы, то уравненіе не имѣетъ корня.

17) $y = 2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m}$, $\frac{dy}{dx} \geqslant 0$, слѣдовательно y все время возрастаетъ; при $x = 0$, $y < 0$, при $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{m}$, $y > 0$. Итакъ, y имѣетъ одинъ положительный корень, лежащій между 0 и $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{m}$.

18) Разсмотримъ выраженіе

$$(1) \quad y = \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^4 x}.$$

Мы имѣемъ, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos(x-\alpha)[\operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}(x-\alpha)]}{\sin^5 x}.$$

Опредѣлимъ теперь корни уравненія

$$\operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}(x-\alpha) = 0,$$

т. е.

$$(2) \quad \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Получаемъ

$$\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

При $\operatorname{tg} \alpha > \frac{3}{4}$, $\frac{dy}{dx}$ положительна для значеній x, заключенныхъ между 0 и π; итакъ, въ этомъ случаѣ y безпрерывно возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$ при измѣненіи x отъ 0 до π и уравненіе (1) имѣетъ корень и при томъ одинъ. Предположимъ теперь, что $\operatorname{tg} \alpha < \frac{3}{4}$, и обозначимъ черезъ

$\operatorname{tg} x'$ и $\operatorname{tg} x''$ корни уравненія (2), которые будутъ дѣйствительными и положительными. Когда x измѣняется отъ 0 до x', y возрастаетъ отъ $-\infty$ до нѣкотораго maximum'а y_1; затѣмъ y убываетъ до нѣкотораго minimum'а $y_2 > 0$, котораго онъ достигаетъ при $x = x''$; наконецъ, когда x измѣняется отъ x'' до π, то y возрастаетъ отъ y_2 до $+\infty$.

Итакъ, если m меньше y_2, то уравненіе (1) имѣетъ единственный корень между 0 и π; при m заключенномъ между y_2 и y_1 уравненіе (1) имѣетъ три корня и если $m > y_1$, то только одинъ.

19) Если разсмотримъ выраженіе $u = x^{\frac{1}{x}}$, то

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}(1 - \lg x)$$

и u возрастаетъ, пока $x < e$, и начинаетъ убывать, когда $x > e$.

Слѣдовательно, при $a > b$, мы имѣемъ

$$a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}} \text{ при } a \text{ и } b < e,$$

$$a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}} \text{ при } a \text{ и } b > e,$$

т. е. неравенства (1) и (2) доказаны.

Далѣе, если $a > e$, $b < e$, то

$$a^{\frac{1}{a}} \text{ можетъ быть, или больше, или меньше } b^{\frac{1}{b}}.$$

20) Если мы составимъ выраженіе

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} = T(x),$$

то $T(x)$ обращается въ нуль при $x = a$ и при $x = b$, слѣдовательно, по теоремѣ Ролля, $T'(x_1) = 0$, гдѣ x_1 значеніе, заключенное между $x = a$ и $x = b$, т. е.

$$\begin{vmatrix} f'(x_1) & \varphi'(x_1) & \psi'(x_1) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} = 0.$$

21) Пусть

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$$

будутъ всѣ корни уравненія (b) и пусть

$$x_1 < x_2 \ldots < x_n.$$

Имѣемъ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = A + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{f(x_k)}{F'(x_k)} \frac{1}{x - x_k},$$

гдѣ A число постоянное отличное отъ нуля, если степень функціи $f(x)$ равна n и равное нулю, если степень эта равна $n - 1$. Беря производныя отъ обѣихъ частей предыдущаго равенства, находимъ слѣдующее равенство

$$\text{c)} \quad \frac{f'(x) F(x) - F'(x) f(x)}{[F(x)]^2} = -\sum_{k=1}^{k=n} \frac{f(x_k)}{F'(x_k)} \frac{1}{(x - x_k)^2}.$$

Легко доказать, что всѣ числа

$$\text{d)} \quad \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}, \quad \frac{f(x_2)}{F'(x_2)}, \ldots \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}$$

одного знака. Въ самомъ дѣлѣ, беря два смежныхъ изъ нихъ

$$\frac{f(x_k)}{F'(x_k)} \text{ и } \frac{f(x_{k+1})}{F'(x_{k+1})}$$

и замѣчая, что на основанiи послѣдняго условiя теоремы $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ числа разныхъ знаковъ, и что на основанiи теоремы Ролля $F'(x_k)$ и $F'(x_{k+1})$ числа также разныхъ знаковъ, мы замѣчаемъ, что число $\frac{f(x_{k+1})}{F'(x_{k+1})}$ одного знака съ числомъ $\frac{f(x_k)}{F'(x_k)}$.

Слѣдовательно, всѣ числа (d) имѣютъ одинаковый знакъ съ числомъ $\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}$, а потому правая часть равенства (c) ни для какихъ конечныхъ вещественныхъ значенiй x въ 0 не обращается. Принимая же во вниманiе, что ни одинъ изъ корней уравненiя (b) не обращаетъ въ 0 функцiи

$$f'(x)\,F(x) - F'(x)\,f(x),$$

мы приходимъ къ заключенiю, что высказанное нами предложенiе доказано вполнѣ.

XIV.

9) $\sin mx = \sin[x + (m-1)x]$ и раскладываемъ по степенямъ $(m-1)x$.

10) $\cos mx = \cos[x + (m-1)x]$.

11) По формулѣ Тэйлора имѣемъ

$$\lg(n+1)-\lg n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2(n+\theta)^2},$$

гдѣ $0<\theta<1$.

Замѣняя въ этомъ равенствѣ n послѣдовательно черезъ

$$n+1,\ n+2,\ldots n+nm-1,\ldots,\ nm$$

находимъ

$$\lg(n+1)-\lg n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2(n+\theta)^2},$$

$$\lg(n+2)-\lg(n+1)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1+\theta_1)^2},$$

. . . .

. . . .

$$\lg(n+(n-1)+1)-\lg(n+(n-2)+1)=\frac{1}{2n-1}$$

$$-\frac{1}{2(2n-1+\theta_{n-1})^2},$$

. . . .

$$\lg 3n-\lg(3n-1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{2(3n-1+\theta_{2n-1})^2},$$

. . . .

$$\lg(mn+1)-\lg mn=\frac{1}{mn}-\frac{1}{2(mn+\theta_{(m-1)n})^2},$$

гдѣ $\theta_1,\ \theta_2,\ldots\theta_{(m-1)n}$ суть правильныя дроби.

Складывая почленно полученныя выраженія, имѣемъ

$$\lg(mn+1) - \lg n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$+ \frac{1}{2n+1} + \ldots + \frac{1}{mn-1} + \frac{1}{mn} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+\theta)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1+\theta_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(mn+\theta_{(m-1)n})^2}\right],$$

или

$$\lim\left[\lg\frac{mn+1}{n}\right]_{n=\infty} = \lg m = \lim\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{mn}\right]_{n=\infty},$$

такъ какъ

$$\frac{1}{(n+\theta)^2} + \frac{1}{(n+1+\theta_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(mn+\theta_{(m-1)n})^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(mn)^2} < \frac{mn}{n^2},$$

а

$$\lim\left(\frac{mn}{n^2}\right)_{n=\infty} = 0.$$

12) Разсмотримъ

$$(1) \quad x^{n+\alpha} = x^n e^{\alpha \lg x} = x^n \left[1 + \alpha \lg x + \frac{\alpha^2 (\lg x)^2}{1.2} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^n (\lg x)^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots\right].$$

При этомъ разложеніи мы получаемъ, что коэффиціентъ при α^n равенъ

$$\frac{x^n (\lg x)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Поэтому, очевидно, что при разложеніи

$$\frac{d^n\, x^{n+\alpha}}{dx^n}$$

коэффиціентомъ при α^n будетъ

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n\, x^n\,(\lg x)^n}{dx^n}.$$

Но

$$(2)\qquad \frac{d^n\, x^{n+\alpha}}{dx^n} = x^\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n),$$

при чемъ послѣднее выраженіе равно произведенію ряда

$$x^\alpha = e^{\alpha \lg x} = 1 + \alpha \lg x + \frac{\alpha^2}{1.2}(\lg x)^2 + \frac{\alpha^3}{1.2.3}(\lg x)^3 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}(\lg x)^n + \ldots$$

на многочленъ

$$(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)\ldots(\alpha+n) = \alpha^n + S_1\,\alpha^{n-1}$$

$$+ S_2\,\alpha^{n-2} + \ldots + S_n,$$

гдѣ S_p есть сумма произведеній изъ n натуральныхъ чиселъ взятыхъ по p. Легко замѣтить, что коэффиціентъ при α^n въ выраженіи (2) будетъ

$$1 + S_1 \lg x + \frac{S_2}{1.2}(\lg x)^2 + \frac{S_3}{1.2.3}(\lg x)^3 + \ldots$$

$$+ \frac{S_n}{1.2\ldots n}(\lg x)^n,$$

который и выражаетъ

$$\frac{d^n x^n (\lg x)^n}{dx^n}.$$

13) На основаніи ряда Тэйлора мы имѣемъ

$$e^{c(x+h)^2} = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots$$

$$= e^{cx^2} . e^{2cxh} . e^{ch^2},$$

гдѣ $y = e^{cx^2}$, но

$$e^{2cxh} = 1 + 2chx + \frac{(2cx)^2}{1.2} h^2 + \ldots,$$

$$e^{ch^2} = 1 + ch^2 + \frac{c^2}{1.2} h^4 + \ldots$$

Перемножая почленно эти два равенства, получаемъ, что коэффиціентомъ при h^n будетъ

$$\frac{1}{1.2\ldots.n}\Big[c^n (2x)^n + n(n-1)\, c^{n-1} (2x)^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} c^{n-2} (2x)^{n-4} + \ldots\Big],$$

откуда получаемъ, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n e^{cx^2}}{dx^n} = e^{cx^2}\Big[c^n (2x)^n + n(n-1)\, c^{n-1} (2x)^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} c^{n-2} (2x)^{n-4} + \ldots\Big].$$

14) Такъ какъ

$$\cos x^2 + i \sin x^2 = e^{ix^2},$$

то

$$(1)\quad \frac{d^n \cos x^2}{dx^n} + i\frac{d^n \sin x^2}{dx^n} = e^{ix^2}\Big[i^n (2x)^n + i^{n-1}\, n(n-1)\,(2x)^{n-2}$$

$$+ i^{n-2}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\,(2x)^{n-4} + \ldots\Big].$$

Принимая во вниманіе, что

$$i^p = e^{ip\frac{\pi}{2}},$$

мы можемъ вторую часть равенства (1) переписать слѣдующимъ образомъ

$$(2x)^n\, e^{i\left(x^2+\frac{n\pi}{2}\right)} + n\,(n-1)\,(2x)^{n-2}\, e^{i\left(x^2+\frac{n-1}{2}\pi\right)} + \ldots,$$

откуда получаемъ, что

$$\frac{d^n \cos x^2}{dx^n} = (2x)^n \cos\left(x^2 + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+ n\,(n-1)\,(2x)^{n-2}\,\cos\left[x^2 + \frac{n-1}{2}\pi\right]$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\,(2x)^{n-4}\,\cos\left[x^2 + \frac{n-2}{2}\pi\right] + \ldots$$

и

$$\frac{d^n \sin x^2}{dx^n} = (2x)^n \sin\left(x^2 + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+ n\,(n-1)\,(2x)^{n-2}\,\sin\left(x^2 + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\,(2x)^{n-4}\,\sin\left(x^2 + \frac{n-2}{2}\pi\right) + \ldots$$

XV.

2) Полагая

$$a = r\cos\varphi,\quad b = r\sin\varphi,$$

получаемъ

$$e^{ax}\cos bx = 1 + rx\cos\varphi + \frac{r^2x^2}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{r^3x^3}{1.2.3}\cos 3\varphi + \ldots.$$

$$+ \frac{r^nx^n}{1.2.3\ldots.n}\, e^{\theta ax}\cos\left[\theta bx + n\varphi\right].$$

Легко замѣтить, что

$$\lim\left[\frac{r^nx^n}{1.2\ldots.n}\, e^{\theta ax}\cos(\theta bx + n\varphi)\right]_{n=\infty} = 0.$$

3) Признакъ Раабе состоитъ, какъ извѣстно, въ слѣдующемъ: рядъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. + u_x + \ldots.,$$

члены котораго всѣ положительны, будетъ расходящимся, если при

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{1}{1+\alpha}$$

$\lim (x\alpha)_{x=\infty}$ меньше единицы.

Для даннаго примѣра имѣемъ

$$\left[\frac{\lg x}{\lg(1+x)}\right]^n = \frac{1}{1+\alpha},$$

откуда

$$1+\alpha=\left[\frac{\lg(1+x)}{\lg x}\right]^n=\left[\frac{\lg x+\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lg x}\right]^n$$

$$=\left[1+\frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lg x}\right]^n.$$

Обозначая $\frac{1}{x}$ черезъ y, мы, по теоремѣ Маклорена, имѣемъ

$$\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lg(1+y)=\theta y,$$

останавливаясь на второмъ членѣ разложенія.

Итакъ,

$$1+\alpha=\left(1+\frac{\frac{1}{x}\theta}{\lg x}\right)^n=1+\frac{n\theta}{x\lg x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\theta^2}{x^2(\lg x)^2}+\ldots,$$

откуда

$$\alpha x=\frac{n\theta}{\lg x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\theta^2}{x(\lg x)^2}+\ldots.$$

и

$$\lim(\alpha x)_{x=\infty}=0,$$

т. е. предложенный рядъ расходящійся при всякомъ значеніи показателя n.

4) Какъ извѣстно

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots,$$

такъ какъ оба эти ряда для значенiй x, удовлетворяющихъ неравенству $-1<x<1$, абсолютно сходящiеся, то, примѣняя къ нему теорему объ умноженiи рядовъ, получаемъ

$$\frac{\lg(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3+\ldots$$

6) $y=\sin(m \operatorname{arc}\sin x)$;

легко доказать, что

$$(1-x^2)\,y''-xy'+m^2\,y=0.$$

Взявъ n-ую производную этого выраженiя по формулѣ Лейбница, получаемъ

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-x\,(2n+1)\,y^{(n+1)}-(n^2-m^2)\,y^{(n)}=0.$$

Полагая въ этомъ выраженiи $x=0$ и обозначая соотвѣтствующiя этому значенiю x выраженiя $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ черезъ $y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(n)}$, находимъ

$$y_0^{(n+2)}-(n^2-m^2)\,y_0^{(n)}=0,$$

откуда, такъ какъ

$$y_0=0 \text{ и } y_0'=m,$$

то

$$y_0''=0,$$

$$y_0''' = (1 - m^2)\, m,$$

$$y_0^{IV} = 0,\ y_0^{V} = (9 - m^2)(1 - m^2)\, m,$$

и т. д.

и

$$y^{(2n+1)} = m(1 - m^2)(9 - m^2)\ldots\ldots[(2n-1)^2 - m^2].$$

Слѣдовательно, на основаніи формулы Маклорена, мы получаемъ

$$\sin(m \arcsin x) = mx + \frac{m(1-m^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{1.2.3.4.5}x^5 + \ldots$$

$$+ \frac{m(1-m^2)(9-m^2)\ldots\ldots[(2n-1)^2 - m^2]}{1.2\ldots(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots$$

При $\arcsin x = u$ получимъ

$$\sin mu = m \sin u + \frac{m(1-m^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 u + \ldots$$

Полагая, что m стремится къ нулю, мы можемъ $\sin(m \arcsin x)$ принять равнымъ $m \arcsin x$, тогда получаемъ

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

7) $y = \cos(m \arccos x)$;

слѣдовательно

$$(1 - x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0.$$

Взявъ n-ую производную отъ этого выраженія по формулѣ Лейбница, получаемъ

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}-(n^2-m^2)\,y^{(n)}=0.$$

При $x=0$ имѣемъ

$$y_0^{(n+2)}=(n^2-m^2)\,y_0^{(n)};$$

такъ какъ

$$y_0=1,\ y_0'=0,$$

то

$$y_0''=-m^2,$$

$$y_0'''=0,$$

$$y_0^{\mathrm{IV}}=-(4-m^2)\,m^2$$

и т. д.

Слѣдовательно

$$\cos(m\arccos x)=1-\frac{m^2x^2}{1.2}-\frac{(4-m^2)\,m^2}{1.2.3.4}x^4-\frac{(16-m^2)(4-m^2)m^2}{1.2.3.4.5.6}x^6-\ldots$$

Полагая $\arccos x=u$, получимъ

$$\cos mu=1-\frac{m^2\cos^2 u}{1.2}-\frac{(4-m^2)\,m^2}{1.2.3.4}\cos^4 u-\frac{(16-m^2)(4-m^2)m^2}{1.2.3.4.5.6}\cos^6 u-\ldots$$

8) $\lg\dfrac{x}{x-1}=\lg\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right).$

9) $y=(\arcsin x)^2;$

слѣдовательно

$$(1-x^2)\,y''-xy'-2=0.$$

Дифференцируя n разъ это выраженіе по формулѣ Лейбница, получаемъ

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$$

При $x=0$ имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$y_0=0,\ y_0'=0,\ y_0''=2,$$

$$y_0'''=0,\ y_0^{\mathrm{IV}}=4.\ 2,\ y_0^{\mathrm{V}}=0,$$

$$y_0^{\mathrm{VI}}=4^2.2^2.2,\ldots.$$

$$y_0^{(2n)}=(2n-2)^2y_0^{(2n-2)}=(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots.6^2.4^2.2^2.2.$$

Слѣдовательно

$$(\arcsin x)^2=\frac{x^2}{1}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{2}+\frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4}+\ldots.$$

$$+\frac{2\ 4.6\ldots.(2n-2)}{3.5.7\ldots.(2n-1)}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots.$$

10) $\dfrac{dy}{dx}=ae^{a\arcsin x}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

гдѣ $y=e^{a\arcsin x}$

и мы получаемъ, что

$$(1)\quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0.$$

Примѣняя къ ур. (1) формулу Лейбница, получаемъ

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-(2n+1)\,x\,\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-(n^2+a^2)\frac{d^n y}{dx^n}=0,$$

откуда, при $x=0$, находимъ

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_0=(n^2+a^2)\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0.$$

Такъ какъ $y_0=1$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=a,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=a^2,$$

то мы получаемъ

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=(1+a^2)\,a,$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0=(4+a^2)\,a^2,$$

. . . .

. . . .

Слѣдовательно

$$e^{a\arcsin x}=1+ax+\frac{a^2x^2}{1.2}+\frac{a(a^2+1)}{1.2.3}x^3+a^2\frac{(a^2+2^2)}{1.2.3.4}x^4$$

$$+\frac{a(a^2+1)(a^2+3^2)}{1.2.3.4.5}x^5+\ldots.$$

Съ другой стороны мы знаемъ, что

$$e^{a\arcsin x}=1+a\arcsin x+\frac{a^2}{1.2}(\arcsin x)^2+\ldots.$$

Приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ у a, получаемъ

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \ldots.$$

и

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{2^2}{3.4}x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8 + \ldots.$$

11) Дано

$$y^3 - y + x = 0,$$

откуда

$$(3y^2 - 1)y' + 1 = 0,$$

$$6yy'^2 + (3y^2 - 1)y'' = 0,$$

$$6y'^3 + 18yy'y'' + (3y^2 - 1)y''' = 0,$$

$$36y'^2y'' + 18yy''^2 + 24yy'y''' + (3y^2 - 1)y^{IV} = 0.$$

При $x = 0$ имѣемъ

1) $x = 0$, $y = 0$; 2) $x = 0$, $y = 1$; 3) $x = 0$, $y = -1$.

Итакъ получаемъ слѣдующія три разложенія:

1) $y = x + x^3 + 3x^5 + \ldots.$

2) $y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} - \ldots.$

3) $y = -1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \ldots.$

XVI.

8) Къ данному примѣру правило l'Hospital'я не примѣнимо, потому что

$$\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{1}\right)_{x=0} = \frac{0}{0}$$

и при повтореніи примѣненія этого правила мы всегда будемъ получать $\frac{0}{0}$. Полагая же $x = \frac{1}{y}$, получимъ ∞ или 0, смотря потому, будетъ ли x стремиться къ нулю возрастая отъ отрицательныхъ значеній или убывая отъ положительныхъ.

28) Въ данномъ случаѣ

$$\lim\left[\frac{x+\sin x}{x}\right]_{x=\infty} = \lim\left[1+\frac{\sin x}{x}\right]_{x=\infty} = 1$$

и для даннаго примѣра нельзя примѣнять правило l'Hospital'я, такъ какъ мы получили бы, что

$$\lim\left[\frac{x+\sin x}{x}\right]_{x=\infty} = \lim\left[\frac{1+\cos x}{1}\right]_{x=\infty}$$

неопредѣленность, такъ какъ $\cos x$ при $x = \infty$ можетъ принимать всѣ значенія отъ -1 до $+1$ *).

---

*) См. O. Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Seite 83.

29) $A = \lim \left[\frac{x + \sin x \cos x}{e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)}\right]_{x=\infty} = \lim \left(e^{-\sin x}\right)_{x=\infty}$

будетъ принимать всѣ значенія отъ e до e^{-1}.

Къ этому примѣру правило l'Hospital'я непримѣнимо, такъ какъ

$$\left[e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)\right]' = e^{\sin x}\left[x + \sin x \cos x + 2\cos x\right] \cos x$$

при измѣненіи x до ∞ безчисленное число разъ обращается въ нуль и если бы мы написали, что

$$A = \lim \left[\frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{e^{\sin x}(x + \sin x \cos x + 2\cos x)\cos x}\right]_{x=\infty}$$

$$= \lim \left[\frac{e^{-\sin x}\, 2\cos x}{x + \sin x \cos x + 2\cos x}\right]_{x=\infty} = 0,$$

то этотъ результатъ былъ бы не вѣренъ.

49) $y = \left[\frac{p_1 a_1^{\frac{1}{m}} + p_2 a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + p_n a_n^{\frac{1}{m}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right]^m,$

$$\lim \lg y = \lim \left[\lg \left[\frac{p_1 a_1^{\frac{1}{m}} + p_2 a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + p_n a_n^{\frac{1}{m}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right] : \frac{1}{m}\right]_{m=\infty}$$

$$= \frac{\lg\left[a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} \ldots a_n^{p_n}\right]}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}.$$

50) Это слѣдуетъ изъ того, что

$$\lim \left[\frac{1}{(\lg n)^p} : \frac{1}{n}\right]_{n=\infty} = \infty.$$

XVII.

1) max. y при $x = 3$,

min. y при $x = 5$.

2) При $x = 6$ и $x = -3$, y min., а при $x = -6$ и $x = 3$ max.

3) $x = 1$, y min. При $x = 0$ нѣтъ ни max., ни min.

4) $x = 3$ соотвѣтствуетъ min. y,

при $x = -1$ — max. y.

5) $x = +\sqrt{2}$, y min.

$x = -\sqrt{2}$, y max.

6) Въ данномъ случаѣ вопросъ сводится къ опредѣленію min. $x_1^2 + x_2^2$, при чемъ намъ извѣстно, что $x_1 + x_2 = a - 2$, $x_1 x_2 = 3 - a$; мы получимъ, что min. будетъ при $a = 1$.

7) $x = 0$ соотвѣтствуетъ min. y, а $x = \pm 1$ — max.

8) $y = a + \frac{2x + b - a}{x^2 + 1}$.

Значенія x_1 и x_2, соотвѣтствующія max. и min. y, суть корни уравненія

$$x^2 - (a - b)\,x - 1 = 0.$$

Итакъ

$$\alpha = a + \frac{2x_1 + b - a}{x_1^2 + 1},$$

$$\beta = a + \frac{2x_2 + b - a}{x_2^2 + 1},$$

откуда, принимая во вниманіе, что въ данномъ случаѣ

$$x_1 x_2 = -1 \text{ и } x_1 + x_2 = a - b,$$

получаемъ, что

$$\alpha + \beta = a + b;$$

$$\alpha\beta = ab - 1.$$

10) При $x = e$, y min.

11) При $\sin x = 0$, y max.;

при $\sin mx = 0$, y min.;

при $m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} mx$, y max. или min., смотря по тому, будетъ ли m^2 меньше или больше единицы.

12) При $x = a + \frac{\pi}{4}$, y min.;

при $x = a + \frac{5}{4}\pi$., y max.

13) При $x = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}$, y max.;

при $x = \frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}$, y min.

14) При $x = 0$, y min.;

при $x = 2$, y max.

15) При $x = \sqrt{e}$, y max.

16) При $x = 1$, y max.

Производная до разрыва при $x = 0$ одного знака, а послѣ разрыва другого, но, такъ какъ $e^{\frac{1}{x}}$ будетъ, или нуль, или ∞ въ зависимости отъ того, приближается ли x къ нулю съ положительной или съ отрицательной стороны, то, для этого значенія x, y не имѣетъ ни max., ни min.

17) $y' = e^{\frac{1}{x}\lg x}\left[-\frac{1}{x^2}\lg x + \frac{1}{x^2}\right]$.

При $x = e$, y max.

18) При $x = 0$, y min.

19) При $x = 0$, y min.,

а при $x = \pm 1$, y max.

20) При $x = \frac{\pi}{8}$, y max.

21) y max. при $x = \cos x$.

22) y min. при $x = \frac{1}{\lg a}$.

23) При $x = 0$, y min.

24) $y = \frac{1}{\lg(x^2)} = \frac{1}{2\lg x}$.

Когда $0 < x < 1$, то y отрицателенъ и убываетъ съ возрастаніемъ x, при

$$\lim x = +0,\ \lim y = -0,$$

$$\lim x = 1 - 0,\ \lim y = -\infty,$$

такъ что верхней границей y будетъ 0, а нижней $-\infty$.

25) $y = x^2 \lg(x^2)$, или, полагая $x^2 = z$, $y = z \lg z$.

Слѣдовательно, при $z = \frac{1}{e}$, y min.

26) $y = 1 + x^{\frac{2}{3}}$; $y' = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$.

При $x = 0$, y min., такъ какъ производная до разрыва отрицательна, а послѣ разрыва положительна.

27) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; $y' = e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}$.

При $x = 0$, y min., такъ какъ до обращенія въ нуль производная < 0, а послѣ обращенія въ нуль > 0.

28) $y' = \dfrac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1 - e^{\frac{1}{x}})^2}$; $\quad y'_{x=-\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon(e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1) + 1}{\varepsilon(e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1)^2}$.

Предѣлъ этого выраженія равенъ 1; слѣдовательно, когда x стремится къ нулю, возрастая отъ отрицательныхъ значеній, то y' стремится къ $+1$, когда же x стремится къ нулю, убывая отъ положительныхъ значеній, то

$$y'_{x=\varepsilon} = \frac{\varepsilon - (1 + \varepsilon)e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon(1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}})^2};$$

въ этомъ случаѣ, при приближеніи x къ нулю, y' все время остается отрицательною. Разсматривая здѣсь нуль, какъ предѣлъ отрицательныхъ величинъ, получимъ, что, при $x = 0$, y max.

29) $y' = (1 \pm \sqrt{x})(\sin x + x\cos x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{x}\sin x$.

Такъ какъ, при $x < 0$, y становится мнимымъ, то наименьшее значеніе y будетъ при $x = 0$, потому что при $x = 0 + \varepsilon$, $y' > 0$.

30) $y' = 1 + \sqrt[4]{x} \pm \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}}$; при $x = 0 + \varepsilon$, $y' > 0$,

и такъ какъ, при $x < 0$, y становится мнимымъ, то значитъ наименьшее значенiе y будетъ при $x = 0$.

31) $y' = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$; при приближенiи x къ -0, y стремится къ ∞, а при приближенiи x къ $+0$, y стремится къ 1, и такъ какъ производная остается всегда положительною, то $x = +0$ соотвѣтствуетъ наименьшему значенiю y.

33) При $x = -1$, max. $y = 1$.

34) При $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$ max.

35) При $x = \frac{am}{\sqrt{1-m^2}}$, $y = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$ есть max., а при

$$x = \frac{-am}{\sqrt{1-m^2}},\quad y = \frac{-a}{\sqrt{1-m^2}} \text{ есть min.}$$

36) При $x = -2$, $y = -1$ будетъ max., а при $x = 0$, $y = \sqrt[3]{3}$ есть min.

37) При $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{2}}}$ max.,

а при

$$x = -\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y = -a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ min.}$$

38) При $x = 0$, $y = 2a\sqrt{2}$ min., $y = -2a\sqrt{2}$ max., а при $x = \pm a$, $y = -3a$ min., а $y = +3a$ max.

39) При $x = a\sqrt[5]{3}$, $y = a\sqrt[5]{27}$ max., а при $x = -a\sqrt[5]{3}$, $y = -a\sqrt[5]{27}$ min.

40) При $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ max., $y = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ min.

41) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$.

При $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, $\varphi = 4\pi, \ldots$, $\varphi = 2k\pi$, имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2\pi r \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 4\pi r \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \ldots . x = 2k\pi r \\ \ldots . y = 0 \end{array}\right\}.$$

Далѣе замѣчаемъ, что $\frac{dy}{dx} = -\infty$ для значенiй

$\varphi = \lim(-\varepsilon) = 0$, $\varphi = \lim(2\pi - \varepsilon) = 2\pi$, $\varphi = \lim(4\pi - \varepsilon) = 4\pi$

и т. д и

$$\frac{dy}{dx} = +\infty$$

для значенiй

$\varphi = \lim(+\varepsilon) = 0$, $\varphi = \lim(2\pi + \varepsilon) = 2\pi$, $\varphi = \lim(4\pi + \varepsilon) = 4\pi$

и т. д. Слѣдовательно

$$\varphi = 0,\ \varphi = 2\pi, \ldots,\ \varphi = 2k\pi$$

будутъ соотвѣтствовать min. y.

Итакъ, $y = 0$ и будутъ наименьшiе ординаты циклоиды.

45) Вопросъ сводится къ опредѣленiю min.

$s = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (d - x)^2}$. (Чертежъ I).

46) При $x = \frac{l}{\pi}$, гдѣ l данная длина дуги, x радіусъ круга.

47) Вопросъ приводится къ опредѣленію min. функціи

$$s = \frac{xy \sin \alpha + (d - x)\, a \sin \alpha}{2},$$

который получается при $x = \frac{d(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}$. (Чертежъ II).

48) При $r = \frac{a}{2}$, гдѣ r радіусъ круга.

52) При $x = \sqrt{\frac{ca}{2}}$, гдѣ $c = AB$, $a = BC$, будетъ min. (См. чертежъ III).

53) Min. $EFHG$ будетъ при $Bg = gC$ и $DF = FC$, т. е. сѣкущая плоскость должна равно отстоять отъ реберъ AC и BD. (Чертежъ IV).

54) Площадь трапеціи $S = (a + x)\sqrt{c^2 - x^2}$

и max. S будетъ при

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8c^2}}{4}.$$

При $a = c$,

$$x = \frac{-a + 3a}{4} = \frac{a}{2},$$

слѣдовательно

$DC = 2a$, и $\angle DCB = \frac{\pi}{3}$, а $\angle DAB$ и $\angle ABC = \frac{2}{3}\pi$.

55) Высота равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

56) При $x = \frac{AB}{2}$, гдѣ x разстояніе искомой хорды отъ вершины параболы.

57) Искомый треугольникъ, имѣющій наименьшую площадь, — равнобедренный.

58) Высота искомой призмы равна $\frac{1}{3}$ высоты пирамиды.

59) Min. будетъ при $t = \frac{v_1 b + av}{v^2 + v_1^2}$, гдѣ a и b катеты даннаго треугольника.

60) Принимая длину гипотенузы равной 1, и, обозначая одинъ изъ катетовъ черезъ x, получаемъ, что max. будетъ при $x^2 = \frac{m}{m+n}$. Такъ что, если мы на данной гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ, опишемъ полуокружность и изъ точки, раздѣляющей діаметръ въ отношеніи m къ n, возставимъ перпендикуляръ, то онъ пересѣчетъ полуокружность въ вершинѣ искомаго треугольника.

61) Min. биссектриссы $= \frac{3\sqrt{3}}{4} h$, гдѣ h высота треугольника, соотвѣтствующая гипотенузѣ.

62) Вопросъ приводится къ опредѣленію max. выраженія

$$\cos^2 \alpha \sin \alpha,$$

гдѣ 2α уголъ при вершинѣ конуса.

63) Вопросъ приводится къ опредѣленію max. выраженія

$$a \operatorname{cotg} \varphi\,(1 - \cos\varphi),$$

гдѣ φ острый уголъ, противолежащій данному катету.

64) Вопросъ приводится къ опредѣленію min. выраженія

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y},\ \text{при чемъ } \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \frac{b}{h},$$

гдѣ b и h суть данныя основаніе и высота треугольника.

65) Max. при $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$, гдѣ x разстояніе центра круга до искомой прямой.

66) Вопросъ приводится къ опредѣленію max. выраженія

$$x^2\,(a - x),$$

гдѣ черезъ x и a обозначены соотвѣтственно ED и BC.

67) Вопросъ приводится къ опредѣленію max. выраженія

$$(h \pm x)\sqrt{R^2 - x^2},$$

гдѣ черезъ x обозначено разстояніе центра до искомой хорды, а черезъ h разстояніе данной точки отъ діаметра параллельнаго данной прямой.

71) Вопросъ приводится къ опредѣленію max. функціи

$$\sin 2\alpha \cos\alpha\,(1 + \sin\alpha),$$

гдѣ 2α уголъ при вершинѣ конуса.

73) Вопросъ приводится къ опредѣленію max. функціи

$$\left(r - \frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{4\pi r x - x^2},$$

гдѣ x дуга сектора, r радіусъ круга.

75) Нужно опредѣлить max. функціи

$$x\sqrt{r^2 - (a + x)^2},$$

гдѣ x сторона прямоугольника, r радіусъ круга, a разстояніе центра круга до хорды сегмента.

76) Вопросъ сводится къ опредѣленію max. функціи

$$\sin\beta \sin(\alpha - \beta). \qquad \text{(Черт. V).}$$

77) См. задачу № 55.

78) Наибольшій уголъ равенъ

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{4bh}{4h^2 - b^2},$$

гдѣ h разстояніе между данной прямой и ей параллельной, b длина данной прямой.

79) (Чертежъ VI). $OA = r$ радіусу круга.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравненіе эллипса; слѣдовательно, для точки касанія имѣетъ мѣсто тождество

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1\,.$$

Такъ какъ

$$OK = \frac{b^2}{y_1} = r - b,$$

то

$$y_1 = \frac{b^2}{r-b};$$

$$KG = OK = r - b;$$

слѣдовательно

$$x_1 = \frac{a^2}{r-b}$$

и мы получаемъ

$$a^2 + b^2 = (r-b)^2,$$

или

$$a^2 + 2br = r^2.$$

Max. $u = \pi ab$ получается при

$$a = \frac{r}{\sqrt{3}} \text{ и } b = \frac{r}{3},$$

т. е. площадь искомаго эллипса будетъ

$$\frac{\pi r^2}{3\sqrt{3}}.$$

Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда эллипсъ касается симметрично полукруга и его діаметра. Тогда, по условію задачи: 1) малая ось эллипса пройдетъ черезъ центръ круга O и точка касанія діаметра съ эллипсомъ будетъ въ вершинѣ эллипса; 2) подкасательная OQ будетъ общая для круга и для эллипса.

Поэтому, принимая за начало координатъ точку O, направленіе OS за ось x-овъ, а направленіе OH за ось y-овъ, получимъ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

уравненіе круга,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

уравненіе эллипса.

Принимая во вниманіе, что

$$OQ = \frac{r^2}{y_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

откуда

$$y_1 = \frac{br^2}{a^2}$$

и что эллипсъ касается полукруга въ точкѣ E, получаемъ

$$x_1{}^2 = \frac{r^2(a^4 - b^2 r^2)}{a^4};$$

слѣдовательно площадь этого эллипса равна

$$\frac{\pi a^2}{r}\sqrt{r^2 - a^2} = U$$

и max. U будетъ $= \frac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}$.

80) Max. будетъ, когда апоѳема новаго пятиугольника равна $\frac{2}{3}$ апоѳемы даннаго.

81) (Чертежъ VII).

Мы отдѣльно разсмотримъ два случая: 1) когда вершины вписаннаго прямоугольника равноудалены отъ точки O и 2) когда онѣ неравноудалены.

Въ первомъ случаѣ мы будемъ разсматривать прямоугольникъ $SPS'P'$, во второмъ же прямоугольникъ $PQQ'P'$.

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

уравненіе лемнискаты.

Обозначая черезъ α_1 и α_2 углы, соотвѣтствующіе вершинамъ P и S, получаемъ

$$\cos 2\alpha_1 = \cos 2\alpha_2;$$

$$PP_1 = 2PK = 2a \sin \theta . \sqrt{\cos 2\theta},$$

$$PS = 2OK = 2a \cos \theta . \sqrt{\cos 2\theta}.$$

Площадь искомаго многоугольника

$$U = 4a^2 \sin 2\theta \sin \theta \cos \theta = a^2 \sin 4\theta.$$

Max. U будетъ при $\theta = 22°30'$.

Во второмъ же случаѣ площадь прямоугольника

$$PQQ'P' = 2\,(OK - OL)\,PK = r_1^2 \sin 2\alpha - r_2^2 \sin 2\beta,$$

гдѣ

$$\angle POX = \alpha,\ \angle QOX = \beta.$$

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ вопросъ приводится къ опредѣленію max. функціи

$$\frac{a^2}{2}\,[\sin 4\alpha - \sin 4\beta],$$

при чемъ α и β удовлетворяютъ равенству

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 1.$$

83) Max. будетъ, когда сторона квадрата

$$= \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

85) Радіусъ полукруга долженъ равняться высотѣ прямоугольника.

87) Высота искомаго треугольника равна $3b$, гдѣ b малая полуось эллипса.

90) Пусть будутъ $2a$ и $2a'$ параллельныя стороны трапеціи, $2y$ и $2y_1$ два сопряженныхъ діаметра эллипса, составляющихъ между собою уголъ θ, при чемъ первый изъ этихъ діаметровъ проведенъ черезъ средины сторонъ $2a$ и $2a'$.

Такъ какъ площадь искомаго эллипса $S = \pi y y_1 \sin\theta$, то вопросъ приводится къ опредѣленію min. функціи

$$u = \frac{c^2 + e^2 z^2 + z\,(4a^2 + 2ec)}{\sqrt{z}},$$

гдѣ

$$z = \frac{y^2}{y_1^2}; \quad e = \frac{a'^2 - a^2}{c}$$

и c есть отрѣзокъ діаметра $2y$, заключенный между параллельными сторонами трапеціи.

91) (См. чертежъ VIII).

Образованное такимъ образомъ тѣло ограничено въ своей верхней части шестиугольникомъ, составленнымъ изъ трехъ ромбовъ $SAKC$, $SCHE$, $SELA$.

Докажемъ, что четыреугольникъ $SAKC$ есть ромбъ. Точка O проекція точки S на плоскость верхняго основанія призмы и $OA = OC$, слѣдовательно $SA = SC$ и $AK = KC$. Далѣе, въ треугольникахъ SOI и KIB имѣемъ: $OI = IB$, $\angle KIB = \angle SIO$ и такъ какъ треугольники эти прямоугольны, то $SI = KI$. Но $AI \perp OB$ и $AI \perp SO$, слѣдовательно, AI перпендикулярна ко всей плоскости SOI и значитъ и къ SI, т. е. AC перпендикулярна къ SK и въ точкѣ пересѣченія дѣлится пополамъ. Такимъ же точно образомъ убѣждаемся и въ томъ, что $SCHE$ и $SELA$ суть ромбы.

Объемъ полученнаго декаэдра независимо отъ положенія точки S на оси призмы всегда равенъ объему призмы, такъ какъ прибавленная пирамида $SACE$ состоитъ изъ трехъ пирамидъ $SOAC$, $SOCE$, $SOEA$, которыя соотвѣтственно равны выдѣленнымъ пирамидамъ. Обозначимъ черезъ h высоту призмы и черезъ x разстояніе точки S до верхняго основанія призмы. Тогда мы имѣемъ, что $AI = AB\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, или, принимая для простоты $\frac{AB}{2}$ равнымъ единицѣ длины, получаемъ $AI = \sqrt{3}$; $OI = OB - BI = 2 - 1 = 1$. $SO \perp OI$, слѣдовательно $SI = \sqrt{x^2 + 1}$.

Поверхность всего тѣла состоитъ изъ шести равныхъ трапецій $A'KAB'$ и шести равныхъ треугольниковъ SAK. Площадь трапеціи

$$A'AKB' = \frac{AA' + B'K}{2}\,AB = 2h - KB.$$

Разсматривая прямоугольные треугольники SOI и KBI и принимая во вниманіе, что $KI = SI$, получаемъ

$$KB = \sqrt{SI^2 - OI^2},$$

а такъ какъ $OI = IB$, то $KB = OS = x$.

Итакъ площадь трапеціи $A'AKB'$ равна $2h - x$.

Площадь треугольника

$$SAK = SI\,.\,AI = \sqrt{1 + x^2}\,\sqrt{3}.$$

Итакъ поверхность всего тѣла

$$P = 6\left[2h - x + \sqrt{3 + 3x^2}\right].$$

Min. поверхности будетъ при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ячейка пчелинаго улья есть подобный декаэдръ съ минимальной поверхностью. Шестиугольникъ есть входъ въ ячейку; медъ расположенъ внутри. Пчелы начинаютъ съ того, что строятъ параллелограммы, затѣмъ стороны трапецій. Представимъ себѣ плоскость наполненную шестиугольниками и построимъ на каждомъ изъ нихъ ячейку пчелинаго улья, тогда вершины будутъ расположены въ плоскости параллельной первой. Если мы теперь помѣстимъ эту фигуру на другую подобную же, такимъ образомъ, чтобы вершины одной одѣлись на вершину другой, то мы получимъ то, что называется ярусомъ. Улей состоитъ изъ нѣсколькихъ такихъ противолежащихъ рядовъ, расположенныхъ такимъ образомъ, чтобы двѣ пчелы могли одновременно пройти черезъ два смежныхъ яруса.

Итакъ: 1) наклоненіе трехъ ромбовъ, которые образуютъ внутренность ячейки таково, что поверхность minima; 2) равносторонній треугольникъ, квадратъ и правильный шестиугольникъ суть единственные правильные многоугольники, которые взятые въ отдѣльности могутъ наполнить плоскость не оставляя пустыхъ промежутковъ и изъ этихъ трехъ фигуръ, шестиугольникъ при одной и той же площади имѣетъ наименьшій контуръ. Такимъ образомъ получается двойная экономія воска.

Геометрическая постройка ячейки замѣченная Папусомъ, геометромъ IV вѣка по Р. Хр., была подробно изучена сначала Филиппомъ Мералди въ 1712 г., затѣмъ Реомюромъ, который предложилъ эту задачу Самюелу Кенигу и Маклорену. Маклоренъ первый далъ точное рѣшеніе.

92) Вопросъ приводится къ опредѣленію min. функціи

$$U = 2x^2 \cos\frac{\alpha}{2} - (x - y \operatorname{cotg}\alpha)^2$$

при условіи, что

$$x^3 - (x - y \operatorname{cotg}\alpha)^3 = a^3 = \frac{3v}{\pi \operatorname{tg}\alpha},$$

гдѣ x есть радіусъ меньшаго основанія, y высота усѣченнаго конуса, v данный объемъ. Слѣдовательно нужно опредѣлить min.

$$U = 2x^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - (x^3 - a^3)^{\frac{2}{3}}.$$

93) Требуется опредѣлить max. функціи

$$U = \operatorname{tg}(\varphi - \theta),$$

гдѣ φ и θ суть стороны, заключающія данный уголъ. Такъ какъ треугольникъ прямоугольный, то, предполагая, что φ лежитъ противъ прямого угла, получаемъ

$$\cos\varphi = \cos\theta \cos a,\ \cos A = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\theta},$$

или

$$\operatorname{tg}\theta = \cos A \operatorname{tg}\varphi$$

и нужно опредѣлить max. выраженія

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi \cos A}.$$

94) Предложенное неравенство замѣняется такимъ

$$e^{\alpha x} \geqslant 1 + x^2,$$

или, логариѳмируя,

$$\alpha x \geqslant \lg (1 + x^2).$$

Полагая

$$f(x) = \alpha x - \lg (1 + x^2)$$

имѣемъ

$$f'(x) = \alpha - \frac{2x}{1 + x^2}, \quad f''(x) = 2\,\frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2}.$$

Функція $f''(x)$ имѣетъ единственный положительный корень $x = 1$, и, переходя черезъ нуль, мѣняетъ знакъ съ — на +.

Поэтому при $x > 0$ функція $f'(x)$ имѣетъ единственный minimum

$$f'(1) = \alpha - 1.$$

Если $\alpha \geqslant 1$, то $f(x)$ будетъ положительною возрастающею функціей. При $\alpha < 1$ minimum $f'(x)$ будетъ отрицательный, и такъ какъ

$$f'(0) = f'(\infty) = \alpha > 0,$$

то $f'(x)$ два раза переходитъ черезъ нуль: при $x < 1$, мѣняя знакъ съ + на —, и при $x > 1$, мѣняя знакъ съ — на +. Первый корень доставляетъ (положительный) maximum $f(x)$, корень же $x > 1$ даетъ minimum $f(x)$; по условію этотъ minimum не долженъ быть отрицательнымъ; обозначимъ его β^2. Итакъ, будемъ имѣть

$$\alpha = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \alpha x - \lg(1+x^2) = \beta^2.$$

Разсматривая x и β^2 какъ функціи α, будемъ имѣть

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha} = x + \left(\alpha - \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{dx}{d\alpha} = x > 0.$$

Поэтому β^2 возрастаетъ вмѣстѣ съ α и искомое наименьшее значеніе α получится при $\beta^2 = 0$, такъ что получимъ

$$\alpha = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \alpha x - \lg(1+x^2) = 0.$$

Умножая первое уравненіе на x и полагая $\alpha x = u$, получимъ

$$u = \frac{2x^2}{1+x^2} = 2 - \frac{2}{1+x^2},$$

или

$$1 + x^2 = \frac{2}{2-u}, \quad u - \lg(1+x^2) = 0,$$

откуда, исключая $1+x^2$, найдемъ

$$u + \lg\left(1 - \frac{u}{2}\right) = 0.$$

При измѣненіи u отъ 0 до наивысшаго значенія 2 первая часть уравненія вначалѣ возрастаетъ отъ 0 до maximum $1 - \lg 2$ при $u = 1$ и затѣмъ убываетъ до $-\infty$ при $u = 2$; значитъ, уравненіе имѣетъ единственный корень между 1 и 2, который будетъ немного меньше 1,6, ибо при этомъ значенiи u первая часть равна

$$\bar{1},6 + \lg 0,2 = 1,6 - \lg 5 = -0,00943791.$$

Искомый корень $u = 1,59362424$ и соотвѣтственно

$$x = \sqrt{\frac{u}{2-u}} = 1,980291,$$

$$\alpha = \frac{u}{x} = \sqrt{u\,(2-u)} = 0,804742.$$

XVIII.

1) При $x = y = \frac{1}{3}$, функцiя minimum.

2) Функцiя не имѣетъ ни max., ни min.

3) При $x = 1$, $y = 2$, функцiя min.

4) При $x = 1$, $y = -1$, будетъ min. функцiи.

5) При $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$, будетъ min., а при $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 2$, max.; при $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 2$, функцiя не имѣетъ ни max., ни min.

6) При $x = 0$, $y = 0$ и при

$$x = y = \frac{3a + \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$$

функція min., а при

$$x = y = \frac{3a - \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$$

ни max., ни min.

Для опредѣленія же остальныхъ значеній x, соот. max. или min., пришлось бы рѣшать буквенное уравненіе 6-ой степени относительно y.

7) Значенія $x = y = 1$ обращаютъ въ нуль $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, но при этихъ значеніяхъ x и y выраженіе

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

обращается въ нуль, а

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0.$$

Докажемъ, что при $x = y = 1$ функція f не будетъ min.

Съ этою цѣлью изучимъ функцію $f(x, y)$ въ смежности съ значеніями для $x = y = 1$; полагаемъ

$$x = 1 + x', \quad y = 1 + y',$$

гдѣ

$$x' = \delta \cos \varphi, \quad y' = \delta \sin \varphi.$$

Получаемъ

$$(\alpha)\ f(1+x',\ 1+y')-f(1,\ 1)=(x'-y')^2+y'^3$$

$$=\delta^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\delta^3\sin^3\varphi.$$

Для всѣхъ значеній φ, кромѣ тѣхъ, для которыхъ $\cos\varphi=\sin\varphi$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi=1$, разность ($\alpha$) будетъ положительною для достаточно малыхъ значеній δ. Но при $\operatorname{tg}\varphi=1$, разность эта будетъ зависѣть отъ δ^3, т. е. измѣнять знакъ съ измѣненіемъ знака δ.

Слѣдовательно, въ смежности съ значеніями $x=y=1$, разность (α) не сохраняетъ *постояннаго* знака для любыхъ значеній δ и φ; т. е. для этихъ значеній $f(x,\ y)$ не имѣетъ ни max., ни min.

8) Поступая по способу изложенному въ предыдущей задачѣ, т. е. изучая функцію въ смежности съ значеніями $x=y=1$, получаемъ, что, при этихъ значеніяхъ x и y, $f(x,\ y)$ будетъ min.

9) Значенія $x=y=0$ обращаютъ въ нуль $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, но и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

при чемъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8\alpha\beta.$$

Докажемъ, что, при этихъ значеніяхъ x и y, $f(x,\ y)$ не имѣетъ ни max., ни min.

Съ этой цѣлью полагаемъ $y^2 = \lambda x$ въ выраженіи

$$f(x, y) = y^4 - 2(\alpha + \beta)\, xy^2 + 4\alpha\beta x^2,$$

тогда получаемъ

$$f(x, y) = x^2 (\lambda - 2\alpha)(\lambda - 2\beta)$$

и мы видимъ, что $f(x, y)$ положительна для всѣхъ значеній λ, кромѣ тѣхъ, которыя заключены между 2α и 2β, и при которыхъ она становится отрицательною, такъ что значенія $x = 0$ и $y = 0$ не могутъ соотвѣтствовать min. функціи.

10) При $x = y = \frac{\pi}{3}$, max.

11) Эта функція не имѣетъ ни max., ни min.

12) $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$ соотвѣтствуетъ min.

13) При $x = \alpha$, $y = \beta$, max., а при $x = 0$, $y = \beta + \frac{\pi}{2}$, нѣтъ ни max., ни min.

14) При $x = 3$, $y = 2$, функція max.

15) При $x = y = 0$, функція min.

Если $x = 0$, $y = \pm 1$, то при $a < b$ функція max., при $a > b$ не будетъ ни max., ни min.

При $x = \pm 1$, $y = 0$, при $a > b$ функція max., а при $a < b$ нѣтъ ни max., ни min.

16) При $x = y = \frac{\pi}{2}$ не будетъ ни max., ни min.; при $x = y = \frac{\pi}{6}$ функція max.

При $x = y = \frac{3}{2}\pi$, функція min.

17) Эта функція не имѣетъ ни max., ни min.

18) При $x = -6$, $y = 6\sqrt{3}$; $z = 12\sqrt{3}$ будетъ min.

При $x = -6$, $y = -6\sqrt{3}$; $z = -12\sqrt{3}$ будетъ max.

19) Равносторонній треугольникъ будетъ наибольшій.

20) Равносторонній треугольникъ будетъ имѣть наибольшую площадь.

21) Вопросъ приводится къ опредѣленію min. функціи $u = x^2 + y^2 + (b\cos A - x)^2 + (b\sin A - y)^2 + (c - x)^2 + y^2$, гдѣ x и y суть координаты искомой точки, принимая начало координатъ въ вершинѣ A даннаго треугольника, b и c стороны треугольника. Искомая точка будетъ центръ тяжести треугольника ABC.

22) Искомый треугольникъ равнобедренный и неподвижная сторона равна $\frac{2}{3}$ каждой изъ остальныхъ сторонъ.

23) Наибольшій объемъ имѣетъ кубъ.

24) Кубъ.

25) Кубъ.

26) Вопросъ приводится къ опредѣленію max. функціи $u = \pi xyz$, въ которой x, y суть полуоси цилиндра, z его высота, при чемъ дано, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

гдѣ r радіусъ шара.

Max. получится при

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

слѣдовательно искомый цилиндръ долженъ быть круговымъ.

27) Уравненіе эллиптическаго параболоида

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x;$$

черезъ a обозначаемъ разстояніе сѣкущей плоскости отъ вершины параболоида. Вопросъ приводится къ опредѣленію max. функціи

$$u = (a - x)^2 y^2 \left(x - \frac{y^2}{2p}\right).$$

При $x = \frac{a}{2}$, $y = \sqrt{\frac{ap}{2}}$, $z = \sqrt{\frac{aq}{2}}$, u будетъ max.

28) Нужно опредѣлить max. функціи

$$U = OC^2 = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma)^2,$$

гдѣ a, b, c постоянныя величины, т. е. длины сторонъ, а α, β, γ перемѣнные углы, которые эти стороны составляютъ съ прямою Ox. Координаты точки C будутъ

$$X = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma,\quad Y = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma$$

и мы можемъ написать

$$U = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos(\beta-\gamma) + 2ac\cos(\gamma-\alpha) + 2ab\cos(\alpha-\beta).$$

Обозначая $\beta-\gamma$ черезъ x, $\gamma-\alpha$ черезъ y, получимъ, что

$$U = a^2 + b^2 + c^2 + 2V\,abc,$$

гдѣ

$$V = \frac{\cos x}{a} + \frac{\cos y}{b} + \frac{\cos(x+y)}{c}$$

и вопросъ свелся къ опредѣленію max. или min. V, функціи отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sin x}{a} - \frac{\sin(x+y)}{c},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-\sin y}{b} - \frac{\sin(x+y)}{c},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\cos x}{a} - \frac{\cos(x+y)}{c},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = -\frac{\cos(x+y)}{c},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\cos y}{b} - \frac{\cos(x+y)}{c}.$$

Уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

даютъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin x}{a} + \frac{\sin(x+y)}{c} = 0 \\ \text{и} \\ &\frac{\sin y}{b} + \frac{\sin(x+y)}{c} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Система уравненій (α) имѣетъ слѣдующія рѣшенія:

1) $x = 0, \quad y = 0,$

2) $x = 0, \quad y = \pi,$

3) $x = \pi, \quad y = 0,$

4) $x = \pi, \quad y = \pi.$

Мы не должны разсматривать тѣ случаи, когда x или y больше 2π, такъ какъ функція V не измѣняется отъ замѣны x и y черезъ $2\pi + x$ и $2\pi + y$.

Найдемъ остальныя рѣшенія системы (α).

$$(c + a\cos y)\sin x + a\sin y\cos x = 0,$$

или

$$\frac{\sin x}{-a\sin y} = \frac{\cos x}{c + a\cos y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos y}} = \frac{\sin(x+y)}{c\sin y} = -\frac{1}{b} \ldots (\beta),$$

откуда

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos y,$$

$$-\cos y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Для того, чтобы это значенiе $\cos y$ могло соотвѣтствовать max. или min. OC, нужно, чтобы можно было изъ трехъ сторонъ a, b, c составить треугольникъ. Пусть будутъ A, B, C углы этого треугольника; тогда $y = \pi - B$ или $y = \pi + B$.

Предположимъ, что $y = \pi - B$, тогда изъ формулы (β) получаемъ

$$\frac{\sin x}{-a \sin B} = \frac{\cos x}{c - a \cos B} = -\frac{1}{b},$$

$$\sin x = \frac{a}{b} \sin B = \sin A,$$

откуда

$$x = A$$

или

$$x = \pi - A,$$

но $x = A$ не годится, такъ какъ отношенiе

$$\frac{\cos x}{c - a \cos B}$$

преобразовалось бы въ

$$\frac{\cos A}{c - a \cos B} = \frac{1}{b},$$

такъ какъ

$$c = a \cos B + b \cos A,$$

а это отношенiе должно равняться $-\frac{1}{b}$, мы слѣдовательно должны взять

$$x = \pi - A \text{ и } y = \pi - B.$$

При

$$x = \pi + B,$$

слѣдовало бы взять

$$x = \pi + A.$$

Итакъ вообще мы имѣемъ слѣдующія 6 рѣшеній:

$$1)\quad x = 0, \qquad y = 0,$$

$$2)\quad x = 0, \qquad y = \pi,$$

$$3)\quad x = \pi, \qquad y = 0,$$

$$4)\quad x = \pi, \qquad y = \pi,$$

$$5)\quad x = \pi - A, \quad y = \pi - B,$$

$$6)\quad x = \pi + A, \quad y = \pi + B.$$

Посмотримъ, которыя изъ этихъ рѣшеній будутъ соотвѣтствовать max. или min. функціи V.

Первая система рѣшеній даетъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} - \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{b} - \frac{1}{c};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0 \text{ и } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < 0.$$

Итакъ, при $x = 0$, $y = 0$, V max.

И этотъ max. будетъ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

а соотвѣтствующее значенiе U будетъ

$$U = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ac + 2ab = (a + b + c)^2,$$

т. е. три стороны расположились по одной прямой.

Вторая система рѣшенiй даетъ намъ слѣдующiя значенiя для вторыхъ производныхъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

и мы получаемъ

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{abc}\,(c + b - a),$$

выраженiе это будетъ отрицательнымъ при $a > b + c$, и такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{a - c}{ac} > 0,$$

то мы получимъ min.

Если бы a было $< b + c$, то не существовало бы ни max., ни min.

Min. V будетъ

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

и для U min. будетъ

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc - 2ac - 2ab = (a - b - c)^2$$

и въ этомъ случаѣ всѣ точки O, A, B, C будутъ лежать на одной прямой въ слѣдующемъ порядкѣ

$$O, C, B, A;$$

тогда

$$OC = OA - AB - BC = a - b - c.$$

3) Въ этомъ случаѣ $b > a + c$, мы будемъ имѣть min.; $U = (b - a - c)^2$.

4) Если $c > a + b$, будетъ min.; $U = (c - a - b)^2$.

5) При $x = \pi - A$, $y = \pi - B$, получаемъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos C}{c} = \frac{b}{ac},$$

потому что $c \cos A + a \cos C = b$;

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\cos C}{c};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a}{bc},$$

потому что $c \cos B + b \cos C = a$ и мы получаемъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\sin^2 C}{c^2} > 0$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{b}{ac}$ положительное; слѣдовательно это даетъ намъ min. Соотвѣтствующимъ значенiемъ V будетъ

$$-\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right)$$

и

$$U = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2ac \cos B - 2ab \cos C = 0,$$

потому что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

6) $x = \pi + A$, $y = \pi + B$. Значенія вторыхъ производныхъ будутъ тѣ же, что и въ предыдущемъ случаѣ; мы, слѣдовательно, получаемъ еще одинъ minimum; а значеніе для U снова будетъ равно нулю.

Въ этихъ двухъ послѣднихъ случаяхъ $OC = 0$ и со сторонами OA, AB, BC составленъ треугольникъ, такъ какъ въ этихъ двухъ послѣднихъ случаяхъ ни одна изъ сторонъ не должна превосходить суммы двухъ остальныхъ.

Итакъ получается слѣдующая таблица:

a, b, c какія нибудь,	$x = 0$,	$y = 0$,	max.	$U = (a + b - c)^2$;
$a > b + c$	$x = 0$,	$y = \pi$,	min.	$U = (a - b - c)^2$;
$b > c + a$	$x = \pi$,	$y = 0$,	min.	$U = (b - a - c)^2$;
$c > a + b$	$x = \pi$,	$y = \pi$,	min.	$U = (c - a - b)^2$;

$$\left.\begin{array}{l} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{array}\right| \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ x = \pi - A,\ y = \pi - B, \qquad U = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x = \pi + A,\ y = \pi + B, \qquad U = 0. \end{array}$$

29) Пусть будутъ

$$OA_1 = x,\ OB_1 = y,\ OC_1 = z,$$

перпендикуляры, опущенные изъ центра O круга соотвѣтственно на стороны треугольника $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. r радіусъ даннаго круга.

Тогда по условію задачи имѣемъ, принимая A_2, B_2, C_2 за вершины полярнаго треугольника,

$$OA_1 \,.\, OA_2 = r^2 = x \,.\, OA_2,$$

$$OB_1 \,.\, OB_2 = r^2 = y \,.\, OB_2,$$

$$OC_1 \,.\, OC_2 = r^2 = z \,.\, OC_2.$$

Обозначая теперь черезъ R радіусъ круга, описаннаго около даннаго треугольника, получаемъ, что площадь полярнаго треугольника $A_2\ B_2\ C_2$ будетъ равна

$$\frac{r^4}{2}\left[\frac{\sin B}{xz} + \frac{\sin C}{xy} + \frac{\sin A}{yz}\right] = \frac{r^4}{4Rxyz}(ax + by + cz).$$

Но, такъ какъ $\frac{ax + by + cz}{2} = s$ — площади даннаго треугольника, то вопросъ приводится къ опредѣленію max. выраженія xyz при условіи

$$ax + by + cz = 2s.$$

При $x = \frac{2}{3a}\,s$, $y = \frac{2}{3b}\,s$, $z = \frac{2}{3c}\,s$, площадь искомаго треугольника наименьшая.

30) Обозначая сумму $x+y+z$ сторонъ треугольника черезъ $2p$, мы имѣемъ, по условію задачи, что

$$\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-x}{2}\operatorname{tg}\frac{p-y}{2}\operatorname{tg}\frac{p-z}{2}=C,$$

гдѣ C постоянное и вопросъ приводится къ опредѣленію min. выраженія

$$2p=x+y+z-\lambda\left[\lg\operatorname{tg}\frac{x+y+z}{4}+\lg\operatorname{tg}\frac{y+z-x}{4}\right.$$

$$\left.+\lg\operatorname{tg}\frac{x+y-z}{4}+\lg\operatorname{tg}\frac{x+z-y}{4}-\lg C\right].$$

При $x=y=z$ будетъ min. $2p$, т. е. изъ всѣхъ сферическихъ треугольниковъ, имѣющихъ данную площадь наим. периметръ имѣетъ равносторонній треугольникъ.

31) $\lg u=\lg f(x)+\lg f(y)+\lg f(z)-\lambda(x+y+z-3c)$;

$$\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\lambda=0,$$

$$\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f'(y)}{f(y)}-\lambda=0,$$

$$\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\lambda=0.$$

Но этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ $x=y=z=c$.

$$\frac{du}{u}=\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx+\frac{f'(y)}{f(y)}\,dy+\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

$$\frac{d^2u}{u}-\frac{1}{u^2}(du)^2=\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{[f(x)]^2}\,dx^2+\frac{f''(y)f(y)-f'^2(y)}{[f(y)]^2}\,dy^2$$

$$+\frac{f''(z)f(z)-f'^2(z)}{[f(z)]^2}\,dz^2.$$

Такъ какъ мы предполагаемъ $u > 0$, то $d^2 u < 0$ при

$$f''(c) < \frac{f'^2(c)}{f(c)}$$

и $d^2 u > 0$ при

$$f''(c) > \frac{f'^2(c)}{f(c)}.$$

32) Мы приведемъ здѣсь способъ Коши для опредѣленія max. произведенія сомножителей, сумма которыхъ равна постоянной величинѣ. Коши доказалъ теорему

$$U \leqslant \left(\frac{a}{n}\right)^n,$$

гдѣ n число сомножителей.

Въ случаѣ двухъ сомножителей намъ извѣстно соотношеніе

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}(x-y)^2,$$

изъ котораго слѣдуетъ доказательство теоремы даже для случая отрицательныхъ сомножителей.

Въ послѣдующемъ необходимо предполагать сомножители положительными; мы обозначимъ сомножителей черезъ $x, y, z, t, u, \ldots$, такъ что для случая двухъ сомножителей вышеупомянутое равенство приводитъ къ неравенству

$$\text{(A)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Предполагая теперь четыре сомножителя x, y, z, t, получаемъ

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

$$zt \leqslant \left(\frac{z+t}{2}\right)^2,$$

и, такъ какъ всѣ сомножители положительные, то перемноживъ имѣемъ

$$xyzt \leqslant \left(\frac{x+y}{2} \cdot \frac{z+t}{2}\right)^2.$$

На основаніи же неравенства (A)

$$(x+y)(z+t) \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{2}\right)^2.$$

Слѣдовательно

$$xyzt \leqslant \left[\frac{1}{4}\left(\frac{x+y+z+t}{2}\right)^2\right]^2,$$

или

$$\text{(B)} \ldots\ldots\ldots\ldots xyzt \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4,$$

что и доказываетъ теорему для случая четырехъ сомножителей.

Переходимъ теперь къ случаю восьми сомножителей.

$$xyzt \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4,$$

$$uvwp \leqslant \left(\frac{u+v+w+p}{4}\right)^4.$$

Перемножая почленно, получаемъ

$$xyztuvwp \leqslant \left[\frac{(x+y+z+t)(u+v+w+p)}{16}\right]^4,$$

но

$$(x+y+z+t)(u+v+w+p) \leqslant \left(\frac{x+y+z+t+u+v+w+p}{2}\right)^2,$$

слѣдовательно

$$xyztuvwp \leqslant \left(\frac{x+y+z+t+u+v+w+p}{8}\right)^8.$$

Теорема доказана для случая восьми сомножителей и легко замѣтить, что это доказательство можетъ быть распространено для случая 2^n сомножителей.

Случай произвольнаго числа сомножителей сводится къ числу сомножителей, которое есть степень двухъ непосредственно большая, слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ напр., что имѣемъ пять сомножителей

$$x+y+z+t+u=a.$$

Помножимъ все перемѣнное произведеніе на три постоянныхъ сомножителя, изъ которыхъ каждый равенъ $\frac{a}{5}$. Такимъ образомъ составится восемь сомножителей и мы получаемъ

$$xyztu\left(\frac{a}{5}\right)^3 \leqslant \left(\frac{x+y+z+t+u+\frac{3a}{5}}{8}\right)^8,$$

$$\leqslant \left(\frac{a + \frac{3a}{5}}{8}\right)^8,$$

$$\leqslant \left(\frac{a}{5}\right)^8.$$

Раздѣляя обѣ части неравенства на $\left(\frac{a}{5}\right)^3$, получаемъ

$$xyztu \leqslant \left(\frac{a}{5}\right)^5,$$

т. е. max. произведенія получится при

$$x = y = z = t = u = \frac{a}{5}.$$

33) $u = ax + by + cz - \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a - 2\lambda x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b - 2\lambda y = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = c - 2\lambda z = 0,$$

откуда

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = 2\lambda,$$

$$y = \frac{bx}{a},\ z = \frac{cx}{a};\ x^2\,[a^2 + b^2 + c^2] = a^2 r^2;\ x = \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$y = \pm \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ z = \pm \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Значенія

$$x = \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y = \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z = \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

соотвѣтствуютъ max. u, а

$$x = \frac{-ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y = \frac{-br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z = \frac{-cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

соотвѣтствуютъ min. u.

34) Значенія

$$x = \sqrt{a}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

$$y = \sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

$$z = \sqrt{c}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

соотвѣтствуютъ min. u.

35) $x = \frac{a(p + q + r)}{p}$, $y = \frac{b(p + q + r)}{r}$, $z = \frac{c(p + q + r)}{r}$,

соотвѣтствуютъ min. u.

36) $x = \frac{a}{3}$, $y^3 = \frac{a}{3m}$ и $z^3 = \frac{a}{3n}$,

соотвѣтствуютъ max. u.

37) $x = y = z = \frac{\pi}{3}$,

соотвѣтствуютъ max. u.

38) Въ этой задачѣ требуется опредѣлить наибольшее и наименьшее значенія

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

гдѣ x, y, z координаты точки пересѣченія данной поверхности съ плоскостью $lx + my + nz = 0$. Вопросъ сводится къ опредѣленію наибольшихъ и наименьшихъ значеній

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left[r^4 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2\right] - 2\mu\,(lx + my + nz).$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x} = x - \lambda x\,(2r^2 - a^2) - \mu l = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial y} = y - \lambda y\,(2r^2 - b^2) - \mu m = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial z} = z - \lambda z\,(2r^2 - c^2) - \mu n = 0,$$

откуда получаемъ

$$\lambda = \frac{1}{r^2}$$

и слѣдовательно

$$x = \frac{\mu l r^2}{r^2 - a^2},$$

$$y = \frac{\mu m r^2}{r^2 - b^2},$$

$$z = \frac{\mu n r^2}{r^2 - c^2}.$$

Принимая во вниманіе, что $lx + my + nz = 0$, получаемъ

$$\frac{l^2 r^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2 r^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2 r^2}{r^2 - c^2} = 0,$$

т. е. биквадратное уравненіе относительно r, одно значеніе для r^2 будетъ min., а другое max.

39) Вопросъ приводится къ тому же, что и въ предыдущей задачѣ, тутъ только разница въ уравненіи поверхности, именно, уравненіе однополаго гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

40) Площадь эллипса $= \pi r_1 r_2$, гдѣ r_1 малая, а r_2 большая полуось и слѣдовательно, вопросъ приводится къ опредѣленію max. и min. выраженія

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

при условіи

$$A\,(x - \alpha)^2 + 2B\,(x - \alpha)\,(y - \beta) + C\,(y - \beta)^2 + 1 = 0.$$

Max. и min. r^2 опредѣлятся изъ уравненія

$$r^4\,(AC - B^2) + r^2\,(A + C) + 1 = 0,$$

слѣдовательно, площадь искомаго эллипса будетъ $= \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$.

41) Объемъ эллипсоида равенъ $\pi r_1 r_2 r_3$, гдѣ r_1, r_2 и r_3 суть полуоси эллипсоида.

Вопросъ приводится къ опредѣленію max. и min. выраженія $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ при условіи

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = c.$$

Объемъ эллипсоида будетъ равенъ

$$\frac{\pi c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{aa'a'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 - 2bb'b''}}.$$

42) Искомая точка такова, что изъ нея стороны даннаго треугольника видны подъ угломъ $= \frac{2}{3}\pi$.

43) При $x = \frac{p}{2+\sqrt{3}}$, $y = \frac{p(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})}$, $z = \frac{2p}{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}$,

гдѣ x половина основанія прямоугольника, y его высота, z одна изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника.

44) Рѣшеніе задачи совершенно аналогично съ рѣшеніемъ предыдущей.

45) Радіусы дугъ образующихъ загородку, должны быть равны между собой.

46) Вопросъ приводится къ опредѣленію min. выраженія

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты точки, лежащей на прямой

$$x = az + p,$$

$$y = bz + q,$$

а x_2, y_2, z_2 координаты точки, лежащей на прямой

$$x = cz + r,$$

$$y = dz + s.$$

Замѣняя x_1, y_1 черезъ ихъ выраженія въ z_1 и x_2, y_2 черезъ ихъ выраженія въ z_2, получимъ

$$r^2 = (az_1 + p - cz_2 - r)^2 + (bz_1 + q - dz_2 - s)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

и такъ какъ

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial z_1^2} = a^2 + b^2 + 1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial z_2^2} = c^2 + d^2 + 1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial z_1 \partial z_2} = -(ac + bd + 1),$$

то слѣдовательно

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 r^2}{\partial z_1^2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial z_1 \partial z_2}\right)^2 = (a^2+b^2+1)(c^2+d^2+1) - (ac+bd+1)^2$$

$$= (ad - bc)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 > 0$$

и значенія z_1 и z_2, обращающія $\frac{\partial r^2}{\partial z_1}$ и $\frac{\partial r^2}{\partial z^2}$ въ нуль, соотвѣтствуютъ min.

47) Обозначая черезъ QQ_1 прямую, проходящую черезъ точку P и перпендикулярную къ CD, получимъ, что min. будетъ при

$$\frac{\sin APQ}{\sin BPQ_1} = \frac{u}{v}.$$

48) (Черт. IX). BAC есть сѣченіе преломляющей призмы плоскостью перпендикулярною къ ребру, DE падающій

лучъ, x — уголъ паденія, y и z, соотвѣтствующіе этому углу, углы преломленія и паденія луча DE на вторую грань призмы, Fg лучъ выходящій и t уголъ преломленія.

Требуется опредѣлить наименьшій уголъ u между лучемъ падающимъ и выходящимъ, т. е. min.

$$u = x - y + t - z$$

при условіяхъ

$$y + z = \alpha,$$

$$\sin x = \mu \sin y,$$

$$\sin t = \mu \sin z;$$

u будетъ min. при $y = z = \frac{\alpha}{2}$.

49) Нижеслѣдующее рѣшеніе этой задачи я заимствую изъ лекцій дифференціальнаго исчисленія профессора А. А. Маркова 1898 г.

Обозначимъ $V_n^{(a,b)}\,ab$ черезъ V, тогда не трудно убѣдиться, что выраженіе V меньше каждаго изъ чиселъ

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

и потому, точнымъ низшимъ предѣломъ значеній V служитъ нуль.

Обращаясь къ разысканію наибольшаго значенія V, станемъ вмѣсто V разсматривать

$$\lg V = \lg a + \lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n + \lg b$$

$$-\lg (a+x_1) - \lg (x_1+x_2) - \ldots - \lg (x_{n-1}+x_n) - \lg (x_n+b),$$

при чемъ, для сокращенія формулъ и разсужденій, введемъ еще такія обозначенія

$$a = x_0,\ b = x_{n+1}.$$

Тогда полный дифференціалъ отъ $\lg V$ представится суммою

$$d \lg V = \sum \left\{ \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k-1}+x_k} - \frac{1}{x_k+x_{k+1}} \right\} dx_k,$$

гдѣ

$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n.$$

Затѣмъ простое вычисленіе даетъ равенство

$$\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k-1}+x_k} - \frac{1}{x_k+x_{k+1}} = \frac{x_{k-1}}{x_k(x_{k-1}+x_k)} - \frac{1}{x_k+x_{k+1}}$$

$$= \frac{x_{k-1}x_{k+1} - x_k^2}{x_k(x_{k-1}+x_k)(x_k+x_{k+1})},$$

поэтому имѣемъ

$$d \lg V = \sum \frac{x_{k-1}x_{k+1} - x_k^2}{x_k(x_{k-1}+x_k)(x_k+x_{k+1})} dx_k$$

$$= \frac{x_0x_2 - x_1^2}{x_1(x_0+x_1)(x_1+x_2)} dx_1 + \frac{x_1x_3 - x_2^2}{x_2(x_1+x_2)(x_2+x_3)} dx_2 + \ldots$$

$$+ \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_n(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_{n+1})} dx_n.$$

Приравнивая $d \lg V$ нулю, получаемъ рядъ уравненій

$$ax_2 - x_1^2 = 0,\ x_1 x_3 - x_2^2 = 0, \ldots,\ x_{n-1}\, b - x_n^2 = 0,$$

откуда выводимъ

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} \ldots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{b}{x_n} = t,$$

$$x_1 = at,\ x_2 = at^2,\ x_3 = at^3, \ldots,\ x_n = at^n,\ b = at^{n+1}$$

и наконецъ

$$t = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Отсюда можемъ заключить, что при найденныхъ нами значеніяхъ

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$$

выраженіе V достигаетъ своего наибольшаго значенія, если только примемъ за достовѣрное, что наибольшее значеніе V существуетъ.

Изслѣдуя затѣмъ выраженіе $d^2\, V$ при найденной нами системѣ значеній

$$x,\ y,\ z, \ldots,\ t,$$

можемъ убѣдиться, что при этой системѣ значеній

$$x,\ y,\ z, \ldots,\ t$$

оно остается числомъ отрицательнымъ, каковы-бы ни были величины дифференціаловъ

$$dx,\ dy,\ dz, \ldots,\ dt.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при

$$x_1 = at,\ x_2 = at^2, \ldots, x_n = at^n,\ t = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},$$

выраженіе V достигаетъ maximum'а (наибольшаго значенія по сравненію со смежными), какъ было обнаружено впервые Лагранжемъ.

Изслѣдованіе это нельзя признать вполнѣ достаточнымъ, если имѣть цѣлью строго доказать, что полученное значеніе для V есть наибольшее не только по сравненію со смежными значеніями, но и со всѣми значеніями V.

Для строгаго доказательства, что при

$$x_1 = at,\ x_2 = at^2, \ldots, x_n = at^n,\ t = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

выраженіе

$$V = \frac{ax_1 x_2 \ldots x_n b}{(a + x_1)(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \ldots (x_n + b)}$$

дѣйствительно достигаетъ своего наибольшаго значенія, остановимся сначала на случаѣ $n = 1$.

Тогда

$$V = \frac{ax_1 b}{(a + x_1)(x_1 + b)}$$

и

$$\frac{d \lg V}{dx} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{a + x_1} - \frac{1}{x_1 + b} = \frac{ab - x_1^2}{x_1 (a + x_1)(x_1 + b)}.$$

Слѣдовательно, съ возрастаніемъ x_1 отъ нуля до $\sqrt{ab}$ функція V возрастаетъ, а при дальнѣйшемъ возрастаніи x_1 она убываетъ.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что при $x_1 = \sqrt{ab}$ выраженіе

$$V = \frac{ax_1 b}{(a + x_1)(x_1 + b)}$$

достигаетъ своего наибольшаго значенія.

Установивъ это, мы можемъ уже предполагать, что теорема о достиженіи выраженіемъ

$$V = \frac{ax_1 x_2 \ldots x_n b}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}$$

наибольшаго значенія при

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}$$

доказана для случая, когда n уменьшено на одну единицу, т. е. замѣнено числомъ $n - 1$.

На этомъ предположеніи будутъ основаны дальнѣйшія разсужденія.

Пусть $x_n = at^n$, гдѣ t означаетъ произвольное данное положительное число.

Разсматриваемое нами выраженіе V можно представить въ видѣ произведенія числа $\frac{b}{x_n + b}$ на выраженіе

$$\frac{ax_1 x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_{n-1} + x_n)},$$

отличающееся отъ V только тѣмъ, что n уменьшено на единицу и b замѣнено числомъ x_n, которое мы считаемъ теперь числомъ даннымъ.

Поэтому согласно сдѣланному нами предположенію, это новое выраженіе

$$\frac{ax_1 x_2 \ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)}$$

достигаетъ своего наибольшаго значенія въ томъ случаѣ, когда

$$x_1 = at,\ x_2 = at^2, \ldots, x_{n-1} = at^{n-1}.$$

Слѣдовательно, если положимъ $x_n = at^n$, то при данномъ значеніи t мы получимъ наибольшее значеніе для V, когда положимъ

$$x_1 = at,\ x_2 = at^2, \ldots, x_{n-1} = at^{n-1}.$$

Итакъ наибольшее значеніе для V будетъ

$$V = \frac{abt^n}{(1+t)^n(b+at^n)}$$

и слѣдовательно, при $x_n = at^n$, должно быть

$$\frac{ax_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n b}{(a+x_1)(a+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)} \leqq \frac{abt^n}{(1+t)^n(b+at^n)},$$

гдѣ знакъ $=$ имѣетъ мѣсто только въ случаѣ, когда

$$x_1 = at,\ x_2 = at^2, \ldots, x_{n-1} = at^{n-1}.$$

Обращаясь къ изслѣдованію выраженія

$$\frac{abt^n}{(1+t)^n(b+at^n)},$$

находимъ

$$d \lg \frac{abt^n}{(1+t)^n(b+at^n)} = n\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{at^{n-1}}{b+at^n}\right] dt$$

$$= \frac{b-at^{n+1}}{t(1+t)(b+at^n)}\, dt$$

и отсюда тотчасъ же заключаемъ, что при

$$b = at^{n+1}$$

оно достигаетъ наибольшаго значенія

$$\frac{ab\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}}{\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^n\left[b+a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right]} = \frac{ab}{\left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ другому неравенству

$$\frac{abt^n}{(1+t)^n(b+at^n)} \leqq \frac{ab}{\left\{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b}\right\}^{n+1}},$$

гдѣ знакъ равенства имѣетъ мѣсто только при

$$b = at^{n+1},$$

т. е. при

$$t = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Сопоставляя же послѣднее неравенство съ неравенствомъ, найденнымъ раньше, заключаемъ, что выраженіе V достигаетъ при

$$x_1 = at,\ x_2 = at^2, \ldots x_n = at^n,\ t = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

своего наибольшаго значенія

$$\frac{ab}{\left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}}.$$

XIX.

1) $\frac{1}{nb} \lg (a + bx^n) + C.$

2) $a \arc \sin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

3) $-\sqrt{y-1} + C$, гдѣ $y = \frac{1}{x^2}$.

4) $\arc \sin y + C$, гдѣ $y = \frac{x-2}{\sqrt{5}}$.

5) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arc \sin y + C$, гдѣ $y = \frac{6x+5}{7}$.

6) $\arc \cos \frac{y+2}{\sqrt{8}} + C$, гдѣ $y = \frac{1}{x}$.

7) $\int \frac{2x+2a}{x^2+2ax+3a^2}\, dx - (2a+3) \int \frac{dx}{(x+a)^2 + 2a^2}$

$$= \lg (x^2 + 2ax + 3a^2) - \frac{2a+3}{a\sqrt{2}} \arc \operatorname{tg} \frac{x+a}{a\sqrt{2}} + C.$$

8) $-\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + C.$

9) $\dfrac{1}{(y-1)^{\frac{1}{2}}} + C$, гдѣ $y = \dfrac{1}{x^2}$.

10) $\sqrt{1+x^2} = z$.

Употребляя подстановку Абеля, именно, полагая

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = z', \quad x = z'z,$$

получаемъ

$$1 = z'^2 + z\frac{dz'}{dx}, \quad \frac{dx}{z} = \frac{dz'}{1-z'^2}$$

и слѣдовательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{1-z'+z'}{1-z'^2}dz' = \lg(1+z') - \frac{1}{2}\lg(1-z'^2) + \lg C$$

$$= \lg C\,(x+\sqrt{1+x^2}).$$

11) $\lg\dfrac{C}{y+\sqrt{y^2-1}}$, гдѣ $y = \dfrac{1}{x}$.

12) $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{5}} + C$.

13) $-\dfrac{3}{x^{\frac{1}{3}}} + C$.

14) $\sqrt{x} + \lg x - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + C$.

15) $\dfrac{1}{2ab}\operatorname{arc\,tg} y + C$, гдѣ $y = \dfrac{x^2}{ab}$.

16) $\dfrac{1}{2ab}\lg\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} + C$, гдѣ $y = \dfrac{x^2}{ab}$.

17) $\dfrac{1}{3}\arcsin z + C$, гдѣ $z = \dfrac{x^3}{a^2b^2}$.

18) $\frac{2}{n}\sqrt{(ab)^{2m}+x^n}+C.$

19) $\sqrt{x^2+1}-\lg\left[\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]+C.$

20) $\lg\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]+\operatorname{arc\,sec} x+C.$

21) $\frac{1}{ay^{\frac{1}{n}}}+C$, гдѣ $y=\frac{a}{x^n}+b.$

22) $\frac{1}{\sqrt{5}}\lg\frac{y-1}{y+1}+C$, гдѣ $y=\frac{2x+1}{\sqrt{5}}.$

23) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} y+C$, гдѣ $y=\frac{3x+1}{\sqrt{2}}.$

24) $\lg\left[y+\sqrt{y^2-3}\right]+C$, гдѣ $y=x+2.$

25) $\frac{1}{c}\arcsin y+C$, гдѣ $y=\frac{cx-1}{\sqrt{2}}.$

26) $\frac{1}{a}\arccos\frac{ay-1}{\sqrt{2}}+C$, гдѣ $y=\frac{1}{x}.$

27) $-\lg\left[ay+1+\sqrt{(ay+1)^2-2}\right]+\lg C$, гдѣ $y=\frac{1}{x}.$

28) $\frac{1}{q-\frac{p^2}{4}}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+C$, гдѣ $y=\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}},$

полагая, что $q>\frac{p^2}{4}.$

29) $$-\frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}-\frac{p}{4q-p^2}\frac{2x+p}{\sqrt{x^2+px+q}}+C$$

$$=-\frac{2(2q+px)}{(4q-p^2)\sqrt{x^2+px+q}}+C.$$

30) $\frac{3n}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3px^{-\frac{1}{3}} + C.$ 31) $-\frac{a^2}{3x^3} - \frac{ab}{x^2} - \frac{b^2}{x} + C.$

32) $\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5} px^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} qx^{\frac{3}{2}} + C.$

33) $\frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{4x^2} - \frac{21}{4} (1 + x)^{\frac{4}{3}} + \frac{10}{3} x^{\frac{3}{5}} + C.$

34) $-\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^3} + C.$

35) $2 \left[\frac{z^7}{7} + \frac{3}{5} z^5 + z^3 + z\right] + C$, гдѣ $z = \sqrt{x - 1}.$

36) $\arcsin \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}} + C.$

37) $\frac{3}{5} \lg (a^2 + bx + cx^2) + C.$ 38) $-\frac{1}{4(2 + 3x^2)^2} + C.$

39) $-\frac{1}{5} \lg y + C$, гдѣ $y = \frac{x+2}{x-3}.$ 40) $\lg \frac{x+4}{x+5} + C.$

41) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \lg \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} + C.$ 42) $\frac{1}{20} \lg \frac{x^4 - 3}{x^4 + 2} + C.$

43) $\operatorname{arctg} (2x - 1) + C.$ 44) $\frac{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

45) $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{3x^3} (2x^2 + 1) + C.$

46) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin (\sqrt{2} \sin \varphi) + C$, гдѣ $\sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$

47) $\frac{1}{5\sqrt{3}} \arcsin \frac{5x}{2\sqrt{3 + 4x^2}} + C.$

48) $\frac{1}{20}\lg\frac{2\sqrt{3+4x^2}+5x}{2\sqrt{3+4x^2}-5x}+C.$

49) $\lg C(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}.$

50) $\lg C\left\{\frac{(x-1)^5}{x+1}\right\}^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2(x-1)}.$

51) $\lg\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}+2\operatorname{arc\,tg}(x-1)+C.$

52) $\frac{1}{4}\lg\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\lg\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}+C.$

53) $\frac{1}{8}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{x-1}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

54) $\frac{1}{40}\lg\frac{x^{55}(x-2)}{(x^2+1)^{28}}-\frac{13}{10}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{5x^3-3x^2+3x-1}{4x^2(x^2+1)}+C.$

55) $-\frac{15x^4-30x^3+40x^2-20x+7}{15(x-1)^5}+C.$

56) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

57) $\frac{1}{6}\lg\frac{x-1}{x+1}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

58) $\frac{x-3}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+\lg(1+x^2)+C.$

59) $\lg\frac{x^2-1}{x}+C.$ 60) $\lg\frac{C\sqrt{x(x+2)}}{x+1}.$

61) $\frac{-3}{x+3}+\lg\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2+C.$

62) $\lg \frac{(x-2)^2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + C.$

63) $\lg C\,(x-2)^3\,(x-3)^4\,(x-4)^5.$

64) $\frac{1}{2a}\left[\lg \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x+a} - \frac{a}{x+a}\right] + C.$

65) $\frac{8x+13}{2(x+2)^2} + \lg C\,(x+2).$

66) $\frac{1}{2(b-a)} \lg \frac{x^2+a}{x^2+b} + C.$ 67) $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C.$

68) $\frac{2x+33}{16(4x^2+4x+17)} + \frac{33}{64} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{4} + C.$

69) $\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{3x^2}\right) + \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

70) $\lg\left[C\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,(x^2+4)^{\frac{3}{2}}\,(x-1)^5\,(x+1)^6\right] + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{3x}{2-x^2}.$

71) $\frac{1}{64}\left[\frac{11}{4} \lg \frac{x+3}{x-1} - \frac{11x^3+33x^2-19x+23}{(x-1)^2(x+3)^2}\right] + C.$

72) $-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2} \lg(x-1) - \frac{1+\sqrt{2}}{8} \lg(x^2 - x\sqrt{2}+1)$

$-\frac{1+\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1) - \frac{1-\sqrt{2}}{8} \lg(x^2+x\sqrt{2}+1)$

$+\frac{1-\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + C.$

73) $\frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1-x^2} + C.$

74) Алгебраическая часть этого интеграла будетъ

$$-\frac{1}{3(x-1)}.$$

75) Алгебраическая часть этого интеграла будетъ

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}.$$

76) Алгебраическая часть этого интеграла будетъ

$$-\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}.$$

77) Алгебраическая часть будетъ

$$-\frac{x^2-2x-2}{x^3+x+1},$$

причемъ трансцендентная часть этого интеграла равна нулю.

78) Алгебраическая часть будетъ

$$\frac{x^2+9x-9}{x^3+3x^2}.$$

79) $\frac{1}{2(b^2-a^2)}\lg\frac{cz}{z^2+b^2-a^2}$, гдѣ $z=a^2+x^2$.

80) Вопросъ приводится къ интегрированію

$$\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}}\int\frac{(1-z)^{m+n-2}}{z^m}dz,$$

гдѣ

$$z=\frac{x-a}{x-b}.$$

81) $\frac{1}{(a-b)^4}\left[-\frac{1}{z}-3\lg z+3z-\frac{1}{2}z^2\right]+C$, гдѣ

$$z=\frac{x-a}{x-b}.$$

82) $\frac{x^4}{2(a^2-x^2)}+x^2+a^2\lg(a^2-x^2)+C.$

83) $\frac{1}{2c^2}\left[-\frac{1}{2y^2}+\frac{a}{3y^3}\right]+C$, гдѣ $y=a+cx^2$.

84) $\frac{1}{2}\left[\lg y+\frac{2}{y}-\frac{1}{2y^2}\right]+C$, гдѣ $y=1+x^2$.

85) $-\frac{1}{4}\lg[z^2+z+1]+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C$, гдѣ

$$z=\frac{1}{x^2}.$$

88) $6\left[\frac{z^9}{9}-\frac{z^8}{8}+\frac{z^7}{7}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^4}{4}\right]+C$, гдѣ $z=(1+x)^{\frac{1}{3}}$.

89) $-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-2\lg(\sqrt[6]{x}-1)$

$+\lg(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1)-2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{3}}+C.$

90) $4\left[\frac{z^7}{7}-\frac{z^6}{6}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}-z+\lg(1+z)\right]+C$,

гдѣ

$$z=\sqrt[4]{1+x}.$$

91) $\frac{(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}{3}-(1+x^4)^{\frac{1}{4}}+\operatorname{arc\,tg}(1+x^4)^{\frac{1}{4}}+C.$

92) $\frac{1}{4}\left[\frac{z^3}{3}-z\right]+C$, гдѣ $z=\sqrt{1+2x^2}$.

93) $2(1+x)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(1+x)^3}{9}-\frac{3}{7}(1+x)^2+\frac{3(1+x)}{5}-\frac{1}{3}\right]+C$.

94) $\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{x-1}}{x}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{5}{4}\,\frac{1}{x}+\frac{5.3}{4.2}\right]+\frac{5.3}{6.4}\,\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{x-1})+C$.

95) $-\frac{x^4}{4(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\lg(1+x^2)+C$.

96) $\frac{3}{b^3}\left[\frac{z^{10}}{10}-\frac{2az^7}{7}+\frac{a^2z^4}{4}\right]+C$,

гдѣ

$$z=(a+bx)^{\frac{1}{3}}.$$

97) $\frac{(1+x^3)^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}{4}+C$.

98) $\lg\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{4}}+1}-2\,\mathrm{arc\,tg}\,(1+x)^{\frac{1}{4}}+C$.

99) $\frac{1}{2}\left[x(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}+\lg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]+C$.

100) $\mathrm{tg}\,\varphi-\varphi+C$, гдѣ $\varphi=\mathrm{arc\,sin}\,x$.

101) $-\frac{z}{4a^2(a^2-z^2)^2}-\frac{3z}{8a^4(a^2-z^2)}-\frac{3}{8a^5}\lg(a+z)$

$$+\frac{3}{16a^5}\lg(a^2-z^2)+C,$$

гдѣ

$$z=\sqrt{a^2-x^2}.$$

102) $\left(\frac{x^5}{6} - \frac{5}{24}x^3 + \frac{5}{16}x\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}\lg C\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$

103) $\left(\frac{x^3}{20} - \frac{3}{50}x\right)\sqrt{4+5x^2} + \frac{12}{50\sqrt{5}}\lg\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{4+5x^2}}{C}.$

104) $\frac{1}{8}\left[\frac{z^5}{5} - 2z^3 + 9z\right] + C$, гдѣ $z = \sqrt{3+2x^2}$.

105) $-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + C$, гдѣ $\varphi = \arccos x$.

106) $\sin\varphi + C$, гдѣ $\varphi = \operatorname{arctg} x$.

107) $\frac{x\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{2} + \frac{1}{2}\lg C\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$

108) $\lg C\left[\frac{3 + x - 2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right]$. 109) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C.$

110) Полагая

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

получимъ

$$-\int\frac{dz}{(z+2a)\sqrt{z^2+2az+2(b-1)}} = -\int\frac{dy}{(y-2a)^2+2(1-b)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1-b)}}\operatorname{arc\,cotg}\frac{y-2a}{\sqrt{2(1-b)}} + C,$$

гдѣ

$$y = \sqrt{z^2+2az+2(b-1)} - z.$$

111) $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\lg\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^3-1}}\right\} + C.$

112) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \lg C\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right]$.

113) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

114) $\arcsin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

115) Употребляя подстановку

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

получаемъ, что интегралъ этотъ равенъ

$$\lg C\left[\frac{1+x^2+\sqrt{1+x^4}}{x}\right].$$

116) Полагая

$$x - \frac{1}{x} = z,$$

получаемъ, что интегралъ этотъ равенъ

$$\lg C\left[\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right].$$

117) Полагая

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

получимъ

$$-\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin y\sqrt{2} + C, \text{ гдѣ } y = \frac{1}{z}.$$

118) Полагая

$$x - \frac{1}{x} = z,$$

получимъ

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \left[y\sqrt{2} + \sqrt{2y^2+1}\right] + C,$$

гдѣ

$$y = \frac{1}{z}.$$

119) $\sqrt{z+1} + C$,

гдѣ

$$z = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

120) Полагая

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

получимъ

$$-\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = \operatorname{arc} \sin y + C,$$

гдѣ

$$y = \frac{1}{z}.$$

121) Полагая

$$x - \frac{1}{x} = z,$$

получимъ

$$-\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lg \left[y\sqrt{3} + \sqrt{1+3y^2}\right] + C,$$

гдѣ

$$y = z\sqrt{3}.$$

122) Полагая

$$1 + \frac{1}{x^4} = z^2,$$

получаемъ

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z\sqrt{z-1}}=\text{arc cotg } y+C,$$

гдѣ

$$y=\sqrt{z-1}.$$

123) Полагая

$$\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}=z,$$

получаемъ

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z\sqrt{z-1}}=\text{arc cotg } y+C,$$

гдѣ

$$y=\sqrt{z-1}.$$

124) $\frac{2}{bk}\sqrt{a+be^{kx}}+C.$

125) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\lg x-\frac{1}{n+1}\right]+C.$ 126) $\text{arc tg } e^x+C.$

127) $-\frac{1}{(n-1)}\frac{1}{(\lg x)^{n-1}}+C.$ 128) $\frac{e^{2x}(2x-1)}{4}+C.$

129) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C.$ 130) $\frac{e^x}{1+x}+C.$

131) $\frac{x^4}{4}\left[(\lg x)^2-\frac{1}{2}\lg x+\frac{1}{8}\right]+C.$

132) $-e^x\frac{2+x+x^2}{6x^3}+\frac{1}{6}\int\frac{e^x\,dx}{x}.$

133) $e^x\lg x+C.$ 134) $\frac{e^x(x-1)}{x+1}+C.$

135) $\frac{e^x}{1+x^2}+C.$ 136) $\frac{xe^x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

137) $-\frac{x^5}{2\lg x}+\frac{5}{2}\int\frac{x^4\,dx}{\lg x}+C.$

138) $e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

139) $-\frac{x}{2(e^x-1)^2}-\frac{1}{2(e^x-1)}+\frac{1}{2}\lg\frac{e^x}{e^x-1}+C.$

140) $2e^{\sqrt{x}}[x^{\frac{3}{2}}-3x+6\sqrt{x}-6]+C.$

141) $x(x+a\lg x)(a\lg x-2a)+\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}ax^2+2a^2x+C.$

142) $\frac{1}{a^2k}\left[\frac{a}{a+be^{kx}}-\lg(a+be^{kx})+kx\right]+C.$

143) $\frac{1}{a}\,\frac{x\lg x}{a+bx}-\frac{1}{ab}\lg(a+bx)+C.$

144) $-\frac{\lg(a+b^2x^2)}{x}+\frac{2b}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{bx}{a}+C.$

145) $\frac{x}{a\sqrt{a+cx^2}}\lg x-\frac{1}{a\sqrt{c}}\lg\left[\sqrt{c}\,x+\sqrt{a+cx^2}\right]+C.$

146) $-\sqrt{1-x^2}\lg\frac{a+bx}{a-bx}$

$$+\frac{2}{b}\left\{a\arcsin x-\sqrt{a^2-b^2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,x}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right\},\ a^2>b^2.$$

147) $\frac{x+a}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}}\,e^{a\operatorname{arc\,tg}x}+C.$

148) $\dfrac{ax-1}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}}\, e^{a \operatorname{arc\,tg} x} + C.$

149) $\frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right] + C.$

150) $\frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right] + C.$ 151) $\lg \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + C.$

152) $-\dfrac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + C.$

153) $-\frac{2}{3}\operatorname{cotg}\varphi - \dfrac{\cos\varphi}{3\sin^3\varphi} + C.$

154) $\dfrac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + C.$

155) $\frac{3}{8}\theta + \sin\theta\left[\frac{3}{8}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^3\theta\right] + C.$

156) $\operatorname{tg} x - x + C.$ 157) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \lg\cos x + C.$

158) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \lg\cos x + C.$

159) $\frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right] + C.$

160) $\dfrac{3\sin^3 x\cos^2 x + 2\sin^3 x}{15} + C.$

161) $\lg \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{2\sin^2 x} + C.$

162) $\dfrac{1}{\cos^3 x} + \dfrac{1}{\cos x} + \lg \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

163) $\frac{1}{2\sin x}\left[\frac{1}{\cos^2 x} - 3\right] + \frac{3}{2}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

164) $-\frac{1}{2(x+\sin x)^2} + C.$

165) $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg} x\right) + C.$

166) $\frac{1}{2(b-a)}\lg C\,[a\cos^2 x + b\sin^2 x].$

167) $\sin(\lg x) + C.$

168) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg} y + C$, гдѣ $y = \dfrac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4}{3}$.

169) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}\theta - \frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}}\theta + C.$

170) $\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}}\theta - 2\cos^{\frac{1}{2}}\theta + C.$

171) $3\sin^{\frac{1}{3}}\theta - \frac{3}{7}\sin^{\frac{7}{3}}\theta + C.$

172) $\frac{\operatorname{tg}^4\theta}{4} + C.$

173) $\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}}\theta + C.$

174) $2\sqrt{\operatorname{tg}\theta}\left[1 + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^2\theta\right] + C.$

175) $-\frac{\cos^2\theta}{2\sin^2\theta} - \lg\sin\theta + C.$

176) Предложенный интегралъ мы можемъ представить подъ видомъ

$$\int\left(\frac{A}{\cos x} + \frac{B}{5+3\cos x}\right)dx, \text{ гдѣ } A = \frac{1}{5},\ B = -\frac{3}{5}$$

и мы получимъ, что

$$\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\cos x}-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{5+3\cos x}=\frac{1}{10}\lg\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{3}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}+C.$$

177) Подинтегральную функцію можно представить подъ видомъ

$$\frac{1}{(1-\cos^2 x)(a+b\cos x)}$$

и разложить на простѣйшія дроби, такъ что

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x(a+b\cos x)}=\frac{1}{2(a+b)}\int\frac{dx}{1-\cos x}+\frac{1}{2(a-b)}\int\frac{dx}{1+\cos x}$$

$$+\frac{b^2}{b^2-a^2}\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{b-a\cos x}{a^2-b^2\sin x}$$

$$-\frac{2b^2}{(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

178) $\frac{\operatorname{tg} x}{a}-\frac{b}{a^2}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$$+\frac{2b^2}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]+C.$$

179) $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

180) При $a>b$, интегралъ этотъ равенъ

$$-\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b\sin x}{a+b\cos x}-\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]+C.$$

181) При $a>b$, интегралъ этотъ равенъ

$$\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b\cos x}{a+b\sin x}+\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]+C.$$

182) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

183) $-\frac{e^{-x}}{5}\left[\cos^2 x - \sin 2x + 2\right] + C.$

184) $-\frac{2}{5}\cos^5\theta + C.$

185) $\frac{e^{-x}}{10}\left[3(\sin x - \cos x) + \cos^2 x(3\sin x - \cos x)\right] + C.$

186) $e^x \sin x + C.$

187) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$

188) $\frac{1}{4}\,\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{4}\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

189) $\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(a-c)y+b}{\sqrt{a^2-c^2-b^2}} + C$, гдѣ $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

190) $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$ 191) $\frac{1}{3}(3+\sin 2x)^{\frac{3}{2}} + C.$

192) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}\lg\frac{\cos x - \alpha}{\cos x + \alpha} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}\lg\frac{\cos x - \beta}{\cos x + \beta} + C,$

гдѣ

$$\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{4},\ \beta = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

193) Полагаемъ

$$(1)\ \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)\sin(x+c)} = \frac{A}{\sin(x+a)} + \frac{B}{\sin(x+b)} + \frac{C}{\sin(x+c)},$$

тогда

$$A \sin(x+b)\sin(x+c) + B\sin(x+a)\sin(x+c)$$
$$+ C\sin(x+a)\sin(x+b) = 1.$$

Давая x послѣдовательно значенія

$$x = -a,\ x = -b,\ x = -c,$$

получаемъ

$$A = \frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)},\ B = \frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)},$$
$$C = \frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)}.$$

Легко провѣрить, что полученныя для A, B и C значенія дѣлаютъ правую часть равенства (1) тождественно равной лѣвой части.

Итакъ предложенный интегралъ равенъ

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)} \lg\operatorname{tg}\frac{x+a}{2} + \frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)} \lg\operatorname{tg}\frac{x+b}{2}$$
$$+ \frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)} \lg\operatorname{tg}\frac{x+c}{2} + C.$$

194) Лебонъ предложилъ слѣдующій пріемъ для вычисленія интеграловъ вида

$$\int\frac{x^2\,dx}{u^2},\ \int\frac{x^2\,dx}{v^2},\ \int\frac{bx^2\,dx}{(au+bv)^2} \text{ и } \int\frac{adx}{[a+(ax+b)\operatorname{tg}x]^2},$$

гдѣ

$$u = x\sin x + \cos x;\ v = \sin x - x\cos x.$$

Обозначая черезъ U и V нѣкоторыя функціи отъ x, имѣемъ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{V}{U}\right) = \frac{V'}{U} - \frac{VU'}{U^2};$$

откуда

$$\int \frac{VU'}{U^2}\,dx = -\frac{V}{U} + \int \frac{V'}{U}\,dx \ldots\ldots\ldots (1).$$

Для того, чтобы примѣнить эту формулу къ вычисленію интеграла вида

$$(2)\quad \int \frac{N dx}{U^2},$$

гдѣ N — функція отъ x, нужно изъ равенства $N = VU'$, опредѣлить функцію V и затѣмъ составить производную отъ V по x.

Тогда вычисленіе интеграла (2) сведется къ вычисленію

$$\int \frac{V'}{U}\,dx,$$

который иногда бываетъ легче вычислить, чѣмъ предложенный.

Въ примѣрѣ 194 имѣемъ

$$U = u,\ x^2 = V(\sin x + x\cos x - \sin x) = V\,x\cos x,$$

откуда

$$V = \frac{x}{\cos x};\quad V' = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{u}{\cos^2 x}.$$

Слѣдовательно

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x + \cos x)^2} = -\frac{x}{(x\sin x + \cos x)\cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x} + C.$$

195) Въ данномъ случаѣ

$$U = v,\ x^2 = V(\cos x - \cos x + x\sin x) = Vx\sin x,$$

т. е.

$$V = \frac{x}{\sin x},\ V' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

и предложенный интегралъ равенъ

$$-\frac{\cos x + x\sin x}{\sin x - x\cos x} + C.$$

196) Полагая

$$V = \frac{bx}{a\cos x + b\sin x},$$

получимъ

$$\int \frac{bx^2\,dx}{[a(x\sin x + \cos x) + b(\sin x - x\cos x)]^2}$$

$$= -\frac{bx}{[a(x\sin x + \cos x) + b(\sin x - x\cos x)](a\cos x + b\sin x)}$$

$$+ b\int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^2} = -\frac{u}{au + bv} + C,$$

гдѣ

$$u = x\sin x + \cos x,\ v = \sin x - x\cos x.$$

197) $$-2\int \frac{\cos 2x\,dx}{(1+\sin 2x)\sqrt{2\sin 2x + \sin^2 2x}} = \arcsin\frac{1}{1+\sin 2x} + C.$$

198) $$a\int \frac{(ax+b)\cos x}{[a\cos x + (ax+b)\sin x]^2}\,\frac{\cos x}{ax+b}\,dx = \frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax+b)\operatorname{tg} x} + C.$$

199) Полагаемъ

$$\frac{b-x}{b+x} = y \text{ и } a = bk,$$

тогда, принимая во вниманіе, что $b^2 = ac$, получаемъ

$$c = \frac{b}{k} \text{ и } x = b\,\frac{1-y}{1+y},$$

$$dx = -\frac{2b}{(1+y)^2}\,dy,\ \ x+a = b\,\frac{1+k+(k-1)\,y}{1+y},$$

$$x+c = \frac{b}{k}\,\frac{1+k-(k-1)\,y}{1+y},\ \ (x+a)(x+c) = \frac{b^2}{k}\cdot\frac{(1+k)^2-(k-1)^2\,y^2}{(1+y)^2}$$

и слѣдовательно

$$v = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{b}}\int\frac{2y\,dy}{\sqrt{(1-y^2)\,[(1+k)^2-(k-1)^2\,y^2]}}.$$

Полагая теперь $y^2 = u$, получаемъ

$$v = -\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{du}{\sqrt{(1-u)\,[(1+k)^2-(k-1)^2\,u]}}$$

и интегралъ этотъ выразится черезъ lg или arc tg, смотря по тому, будетъ ли c положительнымъ или отрицательнымъ.

XX.

1) $\dfrac{2\,[4\sqrt{ac}+b]}{3a^{\frac{3}{2}}\,[2\sqrt{ac}+b]^2}$ при $4ac - b^2 > 0$.

2) $\dfrac{1}{2n+1}$.

3) Интегралъ этотъ равенъ

$$\int_1^{\infty}\frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - 2\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

4) $-\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos x - a}{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{arc\,tg} a \pm \frac{\pi}{2}$, смотря по тому,

будетъ ли a больше или меньше единицы.

5) При $a > 0$ интегралъ равенъ $-\frac{1}{a^2}$.

6) $\frac{(-1)^n\, 1.2.3\ldots.n}{a^{n+1}}$ при $a > 0$.

7) $\frac{1}{a}$. 8) $\frac{1.2.3\ldots.n}{a^{n+1}}$. 9) $\frac{a}{a^2+b^2}$.

10) $\frac{b}{a^2+b^2}$. 11) $\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$. 12) $\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$.

13) Полагая

$$x = \pi - y,$$

преобразуемъ нашъ интегралъ въ слѣдующій

$$\int_0^\pi \frac{(\pi - y)\sin y dy}{1+\cos^2 y} = \pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy - \int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x},$$

слѣдовательно

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\,(\operatorname{arc\,tg}\,\cos y)_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

14) $\frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3}$. 15) $\frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3}$.

16) Полагаемъ

$$u = \lim \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x}\, dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \beta x}{x}\, dx \right]_{\varepsilon=0}.$$

Предполагая теперь во второмъ интегралѣ $\beta x = \alpha z$, получаемъ

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \beta x}{x}\, dx = \int_{\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}}^{\infty} \frac{\cos \alpha z}{z}\, dz = \int_{\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x}\, dx,$$

откуда

$$u = \lim \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}} \frac{\cos \alpha x}{x}\, dx \right)_{\varepsilon=0}$$

$$= \lim \left\{ \cos \alpha \left[\varepsilon + \theta \left(\varepsilon - \frac{\beta}{\alpha}\, \varepsilon \right) \right] \lg \frac{\beta}{\alpha} \right\}_{\varepsilon=0} = \lg \frac{\beta}{\alpha}.$$

17) Если $X = f(x)$ есть нечетная функція отъ x, то

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + [f(x)]^2}} = \int_{-a}^{a} \frac{1 + f(x) - \sqrt{1 + [f(x)]^2}}{2 f(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \frac{1 - \sqrt{1 + [f(x)]^2}}{f(x)}\, dx = a.$$

На этомъ основаніи, полагая: 1) $f(x) = \sin x$, получаемъ, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}.$$

2) $f(x) = \sin^3 x$, получаемъ, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^3 x + \sqrt{1 + \sin^6 x}} = \frac{\pi}{2}.$$

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$, тогда получаемъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

18) Такъ какъ

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\, dx}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{4}\left[\lg\left(1 - e^{-2x}\right)\right]_0^\infty,$$

а

$$\int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{e^{4x} - 1} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^x\left(1 + e^{2x} + 1 - e^{-2x}\right)}{1 - e^{4x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{1 - e^{2x}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{1 + e^{2x}},$$

то

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x} - 1} - \int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{e^{4x} - 1}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\lg\left(1 - e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\lg\frac{1 - e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} e^x\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\lg 2.$$

19) Полагая $x = \operatorname{tg}\theta$, имѣемъ

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{1+m\operatorname{tg}^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-m)\sin^2\theta}}.$$

20) Полагая $x^4 = z$, получаемъ

$$Y = \int_0^{\infty} e^{-x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\frac{3}{4}}\,dz = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

но

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 = 2\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}}\theta\,d\theta.$$

Полагая теперь

$$\sqrt{2}\,\sin\frac{\theta}{2} = \sin\varphi,$$

т. е.

$$\sqrt{1-\cos\theta} = \sin\varphi,\quad \cos\theta = \cos^2\varphi,$$

получаемъ

$$-\sin\theta\,d\theta = -\,2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \frac{\sqrt{2}\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

слѣдовательно

$$2\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}}\theta\,d\theta = 4\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

откуда видно, что

$$Y^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right).$$

21) Для вычисленія этого интеграла воспользуемся способомъ Липшица, который состоитъ въ слѣдующемъ:

Предполагая на время, что a и b суть двѣ отрицательныя величины, абсолютная сумма которыхъ не превышаетъ единицы, мы въ выраженіи

$$Y = \int_0^{\pi} (2 \cos x)^{a+b} \cos (a-b)\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{a+b} \cos (a-b)\, x\, dx,$$

вмѣсто тригонометрическихъ функцій введемъ показательныя и положимъ

$$a = -g, \quad b = -h,$$

тогда получимъ

$$2Y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{2ix}+1)^{-g-h} \frac{e^{2ix(g-1)} + e^{2ix(h-1)}}{4i}\, d\,(e^{2ix})$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(e^{2ix}+1)^{-g-h} e^{2ix(g-1)}}{4i}\, de^{2ix} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2ix}+1)^{-g-h} e^{2ix(g-1)}\, de^{2ix}}{4i}.$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(e^{2ix}+1)^{-g-h}\, e^{2ix(h-1)}}{4i}\, de^{2ix} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2ix}+1)^{-g-h}\, e^{2ix(h-1)}}{4i}\, de^{2ix}.$$

Полагая теперь въ первомъ и въ третьемъ интегралахъ

$$e^{2ix} = \xi e^{-i\pi},$$

а во второмъ и четвертомъ

$$e^{2ix} = \xi e^{i\pi},$$

получаемъ

$$2\,Y = \int_1^0 \frac{(-\xi+1)^{-g-h}\, e^{-gi\pi}\, \xi^{g-1}}{4i}\, d\xi + \int_0^1 \frac{(-\xi+1)^{-g-h}\, e^{gi\pi}\, \xi^{g-1}\, d\xi}{4i}$$

$$+\int_1^0 \frac{(-\xi+1)^{-g-h}\, e^{-hi\pi}\, \xi^{h-1}}{4i}\, d\xi + \int_0^1 \frac{(-\xi+1)^{-g-h}\, e^{hi\pi}\, \xi^{h-1}}{4i}\, d\xi$$

$$=\int_0^1 (1-\xi)^{-g-h}\, \xi^{g-1}\, \frac{e^{gi\pi}-e^{-gi\pi}}{4i}\, d\xi$$

$$+\int_0^1 (1-\xi)^{-g-h}\, \xi^{h-1}\, \frac{e^{hi\pi}-e^{-hi\pi}}{4i}\, d\xi$$

$$=\frac{\sin g\pi}{2}\int_0^1 (1-\xi)^{-g-h}\,\xi^{g-1}\, d\xi + \frac{\sin h\pi}{2}\int_0^1 (1-\xi)^{-g-h}\,\xi^{h-1}\, d\xi$$

$$=\frac{\sin g\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1-g-h)\,\Gamma(g)}{\Gamma(1-h)} + \frac{\sin h\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1-g-h)\,\Gamma(h)}{\Gamma(1-g)};$$

принимая же во вниманіе, что, какъ извѣстно,

$$\frac{\pi}{\sin g\pi} = \Gamma(g)\,\Gamma(1-g), \quad \frac{\pi}{\sin h\pi} = \Gamma(h)\,\Gamma(1-h),$$

мы получаемъ

$$2Y = \frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1-g-h)}{\Gamma(1-g)\,\Gamma(1-h)} + \frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1-g-h)}{\Gamma(1-g)\,\Gamma(1-h)}$$

$$= \frac{\pi\Gamma(1-g-h)}{\Gamma(1-g)\,\Gamma(1-h)}$$

и слѣдовательно

$$Y = \frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1-g-h)}{\Gamma(1-g)\,\Gamma(1-h)}.$$

Формула эта впервые получена Коши.

22) Полагая

$$v = \frac{lu+m}{nu+p},$$

выберемъ v такимъ образомъ, чтобы тремъ значеніямъ u:

$$u=0,\ u=1,\ u=x,$$

соотвѣтствовали три значенія v:

$$v=0,\ v=1 \text{ и } v=\infty.$$

Для этого мы должны положить

$$v = \frac{u(x-1)}{x-u},$$

т. е.

$$u = \frac{vx}{v-1+x};$$

тогда

$$s = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt[3]{u^2 (u-1)^2 (u-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt[3]{v^2 (v-1)^2}},$$

но такъ какъ

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt[3]{v^2 (v-1)^2}} = \int_0^1 v^{-\frac{2}{3}} (v-1)^{-\frac{2}{3}} \, dv$$

есть число постоянное, то s — алгебраическая функція отъ x.

23) Предполагая $n = 2k + 1$ — нечетному числу и полагая $x^2 = y$, получаемъ

$$Y_{2k+1} = \int_0^\infty x^{2k+1} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^k e^{-y} \, dy = (-y^k e^{-y})_0^\infty$$

$$+ k \int_0^\infty y^{k-1} e^{-y} dy = 1 . 2 . 3 \ldots . k.$$

Если же n — четное, то

$$Y_{2k} = \int_0^\infty x^{2k} e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} (x^{2k-1} e^{-x^2})_0^\infty$$

$$+ \frac{2k-1}{2} \int_0^\infty x^{2k-2} e^{-x^2} \, dx = \frac{2k-1}{2} \Big[-\frac{1}{2} (x^{2k-3} e^{-x^2})_0^\infty$$

$$+ \frac{2k-3}{2} \int_0^\infty x^{2k-4} e^{-x^2} \, dx \Big] = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2} \int_0^\infty x^{2k-4} e^{-x^2} \, dx.$$

Продолжая такимъ образомъ итегрировать по частямъ, получимъ

$$Y_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1}{2^k}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

такъ какъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

24) (α) Если $\delta = \frac{b-a}{n}$, то требуется вычислить

$$\lim\left[\delta\left(c^a + c^{a+\delta} + \ldots + c^{a+(n-1)\delta}\right)\right]_{\delta=0}.$$

Этотъ предѣлъ равенъ

$$\lim\left[\frac{\delta c^a(c^{n\delta}-1)}{c^\delta - 1}\right]_{\delta=0} = \lim\left[\frac{\delta}{c^\delta-1}(c^b-c^a)\right]_{\delta=0} = \frac{1}{\lg c}(c^b-c^a).$$

$$(\beta)\ \lim\left[\delta\left(\sin a + \sin(a+\delta) + \ldots + \sin(a+(n-1)\delta)\right)\right]_{\delta=0}$$

$$= \lim\left(\frac{\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)_{\delta=0}\left[\cos\left(a-\frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(b-\frac{\delta}{2}\right)\right]_{\delta=0}$$

$$= \cos a - \cos b.$$

(γ) Предложенный интегралъ равенъ

$$\lim\left\{h\left[\cos^3 h + \cos^3 2h + \ldots + \cos^3(n-1)h\right]\right\}_{h=0},$$

гдѣ $nh = \pi$. Обозначая выраженіе, стоящее подъ знакомъ предѣла черезъ S и замѣчая, что

$$\cos^3 h = -\cos^3 (n-1) h,\ \cos^3 2h = -\cos^3 (n-2) h, \ldots,$$

$$\cos^3 (n-1) h = -\cos^3 h,$$

находимъ, что

$$S = -S,$$

т. е. что

$$\lim S = 0.$$

(δ) Обозначая черезъ S выраженіе

$$h\,[\sin^3 h + \sin^3 2h + \ldots . + \sin^3 (n-1)\,h],$$

въ которомъ $nh = \pi$, и замѣчая, что

$$\sin^3 h = \sin^3 (n-1)\,h,\ \ \sin^3 2h = \sin^3 (n-2)\,h, \ldots .,$$

находимъ, что

$$\lim S = 2 \lim\,[h\,(\sin h + \sin 2h + \ldots . + \sin (m-1)\,h]_{h=0},$$

гдѣ

$$mh = \frac{\pi}{2}.$$

Итакъ

$$\int_0^\pi \sin^3 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx.$$

25) Промежутокъ отъ 0 до π разбиваемъ на n равныхъ частей, при чемъ промежуточныя дѣленія беремъ въ ариѳметической прогрессіи, именно:

$$0,\ \frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ldots,\ \frac{(n-1)\pi}{n},$$

тогда

$$\int_0^\pi \lg(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\lim\frac{\pi}{n}\left\{\lg(1-2\alpha\cos 0+\alpha^2)\right.$$

$$+\lg\left(1-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+\alpha^2\right)+\ldots.$$

$$\left.+\lg\left(1-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\alpha^2\right)\right\}=$$

$$\lim\frac{\pi}{n}\lg\left[(1-2\alpha+\alpha^2)\left(1-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+\alpha^2\right)\ldots\left(1-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\alpha^2\right)\right].$$

По теоремѣ Котеса мы имѣемъ, что

$$\alpha^{2n}-1=(\alpha^2-1)\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\ldots.$$

$$\ldots.\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right),$$

откуда видно, что

$$\int_0^\pi \lg(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\lim\frac{\pi}{n}\lg\frac{(1-\alpha)^2(\alpha^{2n}-1)}{\alpha^2-1}$$

$$=\lim\frac{\pi}{n}\lg\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\lim\frac{\pi}{n}\lg(\alpha^{2n}-1),\ \text{при}\ \alpha>1\ \text{и}$$

$$=\lim\frac{\pi}{n}\lg\frac{1-\alpha}{\alpha+1}+\lim\frac{\pi}{n}\lg(1-\alpha^{2n}),\ \text{при}\ \alpha<1.$$

При $n=\infty$ получаемъ, что

$$\lim \frac{\pi}{n} \lg (\alpha^{2n} - 1) = \pi \lg \alpha^2,$$

при $\alpha^2 > 1$ и

$$\lim \left[\frac{\pi}{n} \lg (1 - \alpha^{2n})\right]_{n=\infty} = 0$$

при $\alpha^2 < 1$.

Итакъ

$$\int_0^\pi \lg (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx$$

равенъ, или $\pi \lg \alpha^2$, или нулю, смотря по тому, будетъ ли α^2 больше или меньше единицы.

26) Сумма

$$\frac{n}{n^2} + \frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \ldots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2}$$

можетъ быть переписана слѣдующимъ образомъ

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\},$$

или, полагая

$$\frac{1}{n} = h,$$

получимъ

$$h\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+h^2} + \frac{1}{1+(2h)^2} + \ldots + \frac{1}{1+((n-1)h)^2}\right\}$$

и слѣдовательно предѣломъ этого ряда при $h=0$ будетъ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

27) Рядъ

$$\lim\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right\}_{n=\infty}$$

$$=\lim\left[\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right\}\right]_{n=\infty}$$

$$=\lim\left\{h\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(2h)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-[(n-1)h]^2}}\right]\right\}_{h=0}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

28) (α) $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \int_0^b \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3+\frac{1}{x^3}}}.$

Полагая

$$x^3+\frac{1}{x^3}=2y^{-\frac{3}{2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

получаемъ

$$x^6-2x^3y^{-\frac{3}{2}}+1=0,$$

откуда

$$x^3=y^{-\frac{3}{2}}\pm\sqrt{y^{-3}-1}=y^{-\frac{3}{2}}\pm y^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-y^3}$$

и

$$x^3-\frac{1}{x^3}=y^{-\frac{3}{2}}\left(1\pm\sqrt{1-y^3}\right)-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{1\pm\sqrt{1-y^3}}$$

$$=\pm 2y^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-y^3}\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Далѣе, дифференцируя равенство (1), получаемъ

$$3\left(x^2-\frac{1}{x^4}\right)dx=-3y^{-\frac{5}{2}}\,dy,$$

или

$$\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)\frac{dx}{x}=-y^{-\frac{5}{2}}\,dy,$$

т. е.

$$\frac{dx}{x}=\pm\frac{y^{-1}\,dy}{2\sqrt{1-y^3}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

и значитъ

$$\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3+\frac{1}{x^3}}}=\pm\frac{dy}{2\sqrt[3]{2}\,\sqrt{y-y^4}}.$$

Теперь спрашивается, который изъ знаковъ $\pm$ нужно взять въ $\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy$ или же нужно взять оба эти знака.

Для того, чтобы рѣшить этотъ вопросъ, мы предположимъ сначала $b<1$; тогда, такъ какъ x постоянно положителенъ и, при измѣненіи x отъ 0 до 1, y возрастаетъ, то въ уравненіи (3) нужно взять знакъ $+$ и мы получаемъ соотношеніе

$$\int_0^b\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\int_0^\beta\frac{dy}{\sqrt{y-y^4}},$$

гдѣ β значеніе верхняго предѣла въ преобразованномъ интегралѣ, соотвѣтствующее $x = b$.

Для значеній же x большихъ единицы, перемѣнное y убываетъ и поэтому при $b > 1$ нужно для значеній y отъ $y = 1$ до $y = \beta$ брать въ выраженіи (3) знакъ — и въ этомъ случаѣ мы имѣемъ, что

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\int_1^\beta \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}}$$

или, что одно и то же,

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\int_0^\beta \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}}.$$

(β) Мы разсмотримъ

$$\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx,$$

частный случай котораго есть предложенный интегралъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{b^2}{4x^2}} dx.$$

Въ интегралѣ

$$\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$$

a и b мы беремъ положительными и предполагаемъ, что интегралъ этотъ существуетъ.

Замѣняя $ax + \frac{b}{x}$ черезъ y, замѣчаемъ, что, какъ при $x = 0$, такъ и при $x = \infty$, $y = \infty$; для $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, y имѣетъ наименьшее значенiе $2\sqrt{ab}$. Поэтому, когда x возрастаетъ отъ 0 до ∞, y убываетъ сначала отъ ∞ до $2\sqrt{ab}$ и затѣмъ, одновременно съ x, возрастаетъ до ∞.

Далѣе, мы имѣемъ

$$ax^2 - xy + b = 0,$$

откуда

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4ab}}{2a},$$

слѣдовательно,

$$dx = \frac{dy}{2a} \pm \frac{4dy}{2a\sqrt{y^2 - 4ab}}$$

и

$$f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = f(y) \left[\frac{1}{2} \pm \frac{y}{2\sqrt{y^2 - 4ab}}\right] \frac{dy}{a}.$$

Поэтому, принимая во вниманiе вышесказанное, мы должны, для значенiй x отъ 0 до $\sqrt{\frac{b}{a}}$, взять соотношенiе

$$x = \frac{y}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{y^2 - 4ab};$$

для промежутка же отъ $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ до $x = +\infty$, соотношенiе

$$x = \frac{y}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{y^2 - 4ab}$$

и такимъ образомъ получаемъ

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(y)\left[1-\frac{y}{\sqrt{y^2-4ab}}\right]dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(y)\left[1+\frac{y}{\sqrt{y^2-4ab}}\right]dy,$$

т. е.

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(y)\frac{y}{\sqrt{y^2-4ab}}\,dy \; \ldots\ldots (\alpha).$$

Полагая теперь

$$y^2-4ab=z^2,$$

получаемъ

$$\int_0^\infty f\left(a+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f\left(\sqrt{z^2+4ab}\right)dz.$$

Предложенный интегралъ Лапласса

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{b^2}{4x^2}}\,dx$$

получаемъ изъ вышеразсмотрѣннаго интеграла, полагая

$$f\left(ax+\frac{b}{x}\right)=e^{-\left(x+\frac{b}{2x}\right)^2},$$

тогда

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{b^2}{4x^2}}\,dx=\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{b}{2x}\right)^2}e^b\,dx=e^b\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{b}{2x}\right)^2}dx$$

и на основанiи равенства (α), мы получаемъ, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{b^2}{4x^2}}\,dx=e^b\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-b},$$

гдѣ

$$z=x+\frac{b}{2x}.$$

γ) Разсматривая

$$\int_0^{2\pi} f\,(a\cos x+b\sin x)\,dx,$$

въ которомъ a и b положительныя количества, полагаемъ

$$a\cos x+b\sin x=y,$$

тогда получаемъ, что при

$$x=0 \text{ и } x=2\pi,\ \ y=a.$$

Слѣдовательно, при возрастанiи x отъ 0 до 2π, y долженъ различнымъ образомъ измѣняться. Если мы выраженiе

$$a\cos x+b\sin x$$

перепишемъ подъ видомъ

$$a\left(\cos x + \frac{b}{a}\sin x\right)$$

и положимъ

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha,$$

гдѣ

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

то

$$y = \frac{a\cos(\alpha - x)}{\cos\alpha}, \quad dy = \frac{a\sin(\alpha - x)}{\cos\alpha}dx$$

и

$$dx = \frac{\cos\alpha\, dy}{a\sin(\alpha - x)} = \frac{\cos\alpha\, dy}{\pm\sqrt{a^2 - y^2\cos^2\alpha}}.$$

Теперь очевидно, что, при

$$\alpha - x = 0,$$

y имѣетъ наибольшее значенiе равное

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2};$$

при

$$x = \alpha + \pi,$$

y будетъ имѣть наименьшее значенiе $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

Такимъ образомъ перемѣнная y, при измѣненiи x отъ 0 до α, возрастаетъ отъ $y = a$ до $y = \sqrt{a^2 + b^2}$; когда же x измѣняется отъ $\pi + \alpha$ до 2π, то y измѣняется отъ

$-\sqrt{a^2+b^2}$ до a. Такъ какъ $\sin(\alpha - x)$ положителенъ для значеній x отъ 0 до α и отрицателенъ, когда x измѣняется отъ $\pi+\alpha$ до 2π, то для промежутка, въ которомъ y измѣняется отъ $y=a$ до $y=\sqrt{a^2+b^2}$ и для промежутка, въ которомъ y измѣняется отъ $-\sqrt{a^2+b^2}$ до a, нужно брать

$$dx = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{a^2-y^2\cos^2\alpha}}\, dy.$$

Для промежутка же, въ которомъ y измѣняется отъ $y=+\sqrt{a^2+b^2}$ до $y=-\sqrt{a^2+b^2}$, нужно брать

$$dx = -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{a^2-y^2\cos^2\alpha}}\, dy.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\, dx = \int_a^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{f(y)\cos\alpha}{\sqrt{a^2-y^2\cos^2\alpha}}\, dy$$

$$-\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{-\sqrt{a^2+b^2}} \frac{f(y)\cos\alpha}{\sqrt{a^2-y^2\cos^2\alpha}}\, dy + \int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{a} \frac{f(y)\cos\alpha}{\sqrt{a^2-y^2\cos^2\alpha}}\, dy$$

$$= 2\int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{f(y)\cos\alpha}{\sqrt{a^2-y^2\cos^2\alpha}}\, dy.$$

Принимая же во вниманіе, что

$$y\cos\alpha = \frac{ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

и не превышаетъ a, можемъ положить

$$y \cos \alpha = a \sin \varphi;$$

тогда получаемъ

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x)\, dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin \varphi \sqrt{a^2 + b^2})\, d\varphi.$$

Въ предложенномъ примѣрѣ мы имѣемъ

$$f(a \cos x + b \sin x) = \frac{1}{(a \cos x + b \sin x)^3}$$

и получаемъ, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^3} = 2\, \frac{\cos \alpha}{a} \int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{dy}{y^3 \sqrt{1 - \frac{y^2 \cos^2 \alpha}{a^2}}}$$

$$= 2\, \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi}.$$

29) Интегрируя по частямъ, получаемъ

$$1) \quad Y = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cos x\, dx = -\left(x^{-\frac{1}{2}} \sin x\right)_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} \sin x\, dx.$$

Такъ какъ

$$\lim x^n \left[x^{-\frac{3}{2}} \sin x\right]_{x=\infty} = 0$$

при

$$1 < n < \frac{3}{2},$$

то слѣдовательно интегралъ Y конеченъ.

2) Полагая $x^2 = y$, получаемъ

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \sin y\, dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(y^{-\frac{1}{2}} \cos y\right)_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{-\frac{3}{2}} \cos y\, dy\right],$$

но такъ какъ

$$\int_0^\infty y^{-\frac{3}{2}} \cos y\, dy$$

конеченъ, то слѣдовательно и

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

конеченъ.

3) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \cos y\, dy,$

а этотъ интегралъ конеченъ.

Сходимость интеграловъ Френеля, т. е.

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \cos x^2\, dx$$

можно доказать еще слѣдующимъ образомъ *).

Построимъ кривую $y = \sin x^2$ для положительныхъ значенiй x. Кривая эта выходитъ изъ начала координатъ и пересѣкаетъ ось x-овъ въ точкахъ

$$x = 0,\ x = \sqrt{\pi},\ x = \sqrt{2\pi}, \ldots,\ x = \sqrt{k\pi}, \ldots$$

Она волнообразна въ родѣ синусоиды и каждая волна имѣетъ наибольшею или наименьшею ординатою значенiя $y = +1$ или $y = -1$. Но волны этой кривой идутъ все болѣе и болѣе сближаясь. Дѣйствительно, разстоянiе $A_n A_{n+1}$ между двумя смежными точками пересѣченiя будетъ

$$\sqrt{(n+1)\,\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}}.$$

Разстоянiе это убываетъ при возрастанiи n и стремится къ нулю.

Поэтому, обозначая черезъ

$$u_1,\ u_2, \ldots u_n, \ldots$$

*) P. Appel. Éléments d'Analyse mathématique.

абсолютныя значенія площадей различныхъ волнъ, мы на основаніи вида кривой заключаемъ, что

$$u_1 > u_2 > u_3 \ldots . > u_n$$

и

$$\lim u_n = 0 \text{ при } x = \infty.$$

Интегралъ

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx,$$

будучи равенъ алгебраической суммѣ этихъ площадей, равенъ суммѣ слѣдующаго знакоперемѣннаго ряда

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots .$$

Рядъ этотъ сходящійся, такъ какъ члены его безпредѣльно убываютъ. Итакъ предложенный интегралъ сходящійся.

Подобными же разсужденіями можно доказать сходимость

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx.$$

4) Интегралъ этотъ сходящійся, такъ какъ $(x^{1+k} e^{-x^2})$ при безпредѣльномъ возрастаніи x стремится къ нулю.

5) $\dfrac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} < \dfrac{1}{a^2 + x^2}$, а $\dfrac{x^{1+k}}{a^2 + x^2}$ при $k < 1$

стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи x.

6) Интегралъ этотъ сходящійся, такъ какъ

$$x^{-\frac{5}{4}}\, x^{1+k} \lg x = \frac{\lg x}{x^{\frac{1}{4}-k}},\ \text{при } k < \frac{1}{4},$$

стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи x.

7) $$\lim \left[x^n \lg \sin \alpha x\right]_{x=0} = \lim \left[\frac{1}{\alpha^n}\left(\frac{\alpha x}{\sin \alpha x}\right)^n (\sin \alpha x)^n \lg \sin \alpha x\right]_{x=0}.$$

При $n > 0$, второй множитель стремится къ единицѣ, когда x стремится къ нулю, третій множитель

$$\lim \left[(\sin \alpha x)^n \lg \sin \alpha x\right]_{x=0} = \lim \left[\frac{\alpha \cos \alpha x}{-n (\sin \alpha x)^{-n} \alpha \cos \alpha x}\right]_{x=0} = 0;$$

слѣдовательно интегралъ сходящійся.

8) Для того, чтобы доказать сходимость этого интеграла раздѣлимъ площадь, заключенную между кривою

$$y = \frac{1}{1 + x^4 \sin^2 x}$$

и осью x на отдѣльныя площадки, ограниченныя кривою и ординатами, проведенными въ точкахъ дѣленія, и докажемъ, что рядъ, члены котораго суть эти площадки, будетъ сходящимся.

Раздѣлимъ всю площадь на элементарныя площадки, ограниченныя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ 0, π, 2π, 3π, ... и обозначимъ черезъ u_0, u_1, u_2, ... полученныя площади, которыя всѣ положительны и выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$u_0 = \int_0^{\pi} f(x)\,dx,\ \ u_1 = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx, \ldots,\ u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx, \ldots$$

Оставляя въ сторонѣ u_0, докажемъ сходимость ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Для этого опредѣлимъ высшій предѣлъ для u_n, полагая

$$x = n\pi + t,$$

получаемъ

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^4 \sin^2 t}$$

и такъ какъ

$$(n\pi + t)^4 > n^4\pi^4 - 1,$$

то

$$u_n < \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n^4\pi^4 - 1)\sin^2 t},$$

т. е.

$$u_n < \int_0^{\pi} \frac{dt}{\cos^2 t + n^4\pi^4 \sin^2 t},$$

т. е.

$$u_n < \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\operatorname{arc\,tg} n^2\pi^2 \operatorname{tg} t\Big]_0^{\pi}.$$

Когда t возрастаетъ отъ 0, arc tg возрастаетъ отъ нуля.

Когда $t = \frac{\pi}{2}$, arc tg равенъ $\frac{\pi}{2}$ и когда t продолжаетъ возрастать до π, arc tg также возрастаетъ до π. Слѣдовательно

$$u_n < \frac{1}{n^2 \pi^2} \pi.$$

Итакъ сумма

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

члены которой соотвѣтственно менѣе членовъ сходящагося ряда

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right],$$

будетъ также сходящимся рядомъ.

9) Такъ какъ

$$\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = 1,$$

то при $\mu < 1$,

$$\lim\left(\frac{\sin x}{x^\mu}\right)_{x=0} = 0,$$

при $\mu > 1$,

$$\lim\left(\frac{\sin x}{x^\mu}\right)_{x=0} = \infty$$

и для того, чтобы

$$\lim\left(x\frac{\sin x}{x^\mu}\right)_{x=0}$$

былъ равенъ нулю, необходимо, чтобы $\mu - 1$ было меньше единицы, т. е. $\mu < 2$.

$$10)\ \lim\left(x\frac{\cos x}{x^{\mu}}\right)_{x=0} = \lim\left(\frac{\cos x}{x^{\mu-1}}\right)_{x=0} = 0$$

только при $0 < \mu < 1$.

$$11)\ \lim\left(x^{n}\frac{\sin x}{x^{\mu}}\right)_{x=\infty} = \lim\left(x^{n-\mu}\sin x\right)_{x=\infty}.$$

Такъ какъ $n > 1$, то для того, чтобы $\lim\left(x^{n-\mu}\sin x\right)_{x=\infty}$ равнялся конечной, хотя бы неопредѣленной величинѣ, необходимо, чтобы $n-\mu \leqslant 0$, т. е. чтобы $0 < \mu < 1$.

$$30)\ \alpha)\ \lim\left(x\frac{x}{a^2+x^2}\right)_{x=\infty} = 1,$$

и когда x безпредѣльно возрастаетъ, то отношеніе

$$\frac{x^2}{a^2+x^2}$$

постоянно больше нуля.

$$\beta)\ \lim\left(x\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)_{x=\infty} = \frac{\pi}{2}$$

и, во все время возрастанія x, $\operatorname{arc\,tg} x$, разсматриваемый отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, возрастаетъ при возрастаніи x.

$$\gamma)\ \lim\left(x\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\right)_{x=\infty} = 1;$$

слѣдовательно предложенный интегралъ не имѣетъ конечнаго предѣла.

31) Интегралъ этотъ существуетъ, такъ какъ

$$\lg(2-2\cos x)=\lg 4+2\lg\sin\frac{x}{2},$$

а въ примѣрѣ (16) мы доказали сходимость

$$\int_0^\pi \lg\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

Замѣняя x черезъ $\pi-y$ и обозначая предложенный интегралъ черезъ k, получимъ

$$k=\int_0^\pi \lg(2+2\cos y)\,dy,$$

слѣдовательно

$$2k=\int_0^\pi \lg 4(1-\cos^2 x)\,dx=\int_0^\pi \lg 2(1-\cos 2x)\,dx.$$

Полагая теперь $2x=y$, имѣемъ

$$2k=\frac{1}{2}\int_0^\pi \lg(2-2\cos x)\,dx+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\lg(2-2\cos y)\,dy.$$

Замѣняя во второмъ интегралѣ y черезъ $2\pi-x$, получаемъ $2k=k$; слѣдовательно

$$\int_0^\pi\left(\lg 4+2\lg\sin\frac{x}{2}\right)dx=0,$$

т. е.

$$\int_0^\pi \lg \sin \frac{x}{2}\, dx = -\lg 2 \int_0^\pi dx = -\pi \lg 2.$$

При $\frac{x}{2} = y$, получаемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin y\, dy = -\frac{\pi}{2} \lg 2.$$

32) Предложенный интегралъ равенъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \lg \sin y\, dy,$$

гдѣ

$$x = \frac{\pi}{2} - y,$$

т. е. онъ равенъ нулю.

33) Обозначая предложенный интегралъ черезъ k, имѣемъ

$$k = \Big[-\cos x \lg \sin x + \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\Big[\lg \sin \frac{x}{2} - \lg \cos \frac{x}{2} - \cos x \lg \sin \frac{x}{2} - \cos x \lg \cos \frac{x}{2}$$

$$- \cos x \lg 2\Big]_{x=0} - 1 = \lg 2 - 1,$$

такъ какъ

$$\lim \left(\sin^2 \frac{x}{2} \lg \sin \frac{x}{2}\right)_{x=0} = 0.$$

34) Замѣняя θ черезъ $\pi - \theta$ въ

$$\int_0^\pi \theta^2 \lg \sin \theta \, d\theta,$$

получаемъ, что

$$\int_0^\pi (\pi^2 - 2\pi\theta) \lg \sin \theta \, d\theta = 0,$$

откуда

$$\int_0^\pi \theta \lg \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \lg \sin \theta \, d\theta = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin 2y \, dy$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} \lg 2 = \frac{\pi^2}{2} \lg \frac{1}{2}.$$

35) Полагая $x = \operatorname{tg} y$, получимъ

$$k = \int_0^1 \frac{\lg(1 + x)}{1 + x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg (1 + \operatorname{tg} y) \, dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \frac{2}{1 + \operatorname{tg} y} \, dy;$$

слѣдовательно

$$k = \frac{\pi}{8} \lg 2.$$

36) $$\int_0^1 (x^p+x^{-p})\lg(1-x)\frac{dx}{x} = -\int_0^1 (x^p+x^{-p})\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\dots\right)dx$$

$$= -\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}+\frac{x^{p+2}}{2(p+2)}+\frac{x^{p+3}}{3(p+3)}+\dots-\frac{x^{-p+1}}{p-1}-\frac{x^{-p+2}}{2(p-2)}-\dots\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p+3}\right)+\dots$$

$$=\frac{2}{p^2-1}+\frac{2}{p^2-2^2}+\frac{2}{p^2-3^2}+\dots$$

$$=\frac{\pi}{p}\left\{\frac{2p\pi}{p^2\pi^2-\pi^2}+\frac{2p\pi}{p^2\pi^2-2^2\pi^2}+\frac{2p\pi}{p^2\pi^2-3^2\pi^2}+\dots\right\}$$

$$=\frac{\pi}{p}\left\{\operatorname{cotg} p\pi-\frac{1}{p\pi}\right\}=\frac{\pi}{p}\operatorname{cotg} p\pi-\frac{1}{p^2}.$$

Замѣняя въ этомъ интегралѣ x черезъ x^2, получаемъ

$$\int_0^1 (x^{2p}+x^{-2p})\lg(1-x^2)\frac{2dx}{x} = 2\int_0^1 (x^{2p}+x^{-2p})\lg(1-x)\frac{dx}{x}$$

$$+2\int_0^1 (x^{2p}+x^{-2p})\lg(1+x)\frac{dx}{x}.$$

На основаніи вышевыведеннаго мы получаемъ, что

$$2\int_0^1 (x^{2p}+x^{-2p})\lg(1+x)\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{\pi}{p}\operatorname{cotg} p\pi-\frac{1}{p^2}-2\left[\frac{\pi}{2p}\operatorname{cotg} 2p\pi-\frac{1}{4p^2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{p}\left[\operatorname{cotg} p\pi - \operatorname{cotg} 2p\pi\right] + \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{\pi}{p}\,\frac{\cos p\pi \sin 2p\pi - \cos 2p\pi \sin p\pi}{\sin p\pi \sin 2p\pi} - \frac{1}{2p^2} = \frac{\pi}{p \sin 2p\pi} - \frac{1}{2p^2}$$

или, замѣняя $2p$ черезъ p, получаемъ

$$\int_0^1 (x^p + x^{-p}) \lg(1 + x)\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{p \sin p\pi} - \frac{1}{p^2}.$$

37) Эрмитъ напечаталъ въ Bulletin des sciences mathématiques, t. I, p. 322 слѣдующій способъ вычисленія

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Полагая

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = f(\alpha),$$

замѣчаемъ, что

$$f(\alpha + \pi) = -f(\alpha);$$

дѣйствительно,

$$f(\alpha + \pi) = -\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha\, dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2};$$

замѣняя x черезъ $-x'$, получимъ

$$f(\alpha + \pi) = -\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha\, dx'}{1 - 2x'\cos\alpha + x'^2} = -f(\alpha).$$

Итакъ

$$f(\alpha+\pi)=-f(\alpha);\ f(\alpha+2\pi)=-f(\alpha+\pi)=f(\alpha)$$

и значитъ $f(\alpha)$ періодическая функція, періодъ которой 2π.

Намъ, слѣдовательно, достаточно опредѣлить значенія $f(\alpha)$ для α, заключающагося между 0 и π.

Сдѣлаемъ слѣдующую подстановку

$$x-\cos\alpha=u\sin\alpha,$$

тогда

$$\frac{\sin\alpha dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{du}{1+u^2},$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,dx=\left[\operatorname{arc\,tg} u\right]_{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}^{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Слѣдовательно

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

для α между 0 и π и $-\frac{\pi}{2}$ для α между π и 2π, $+\frac{\pi}{2}$ для α между 2π и 3π и т. д.

Если на оси x-овъ откладывать значенія α, то линія $y=f(\alpha)$ будетъ состоять изъ отдѣльныхъ отрѣзковъ прямыхъ MN, $M'N'$, $M''N''$, ... и т. д. равныхъ между собою, параллельныхъ оси x-овъ и расположенныхъ такимъ образомъ, что MN соотвѣтствуетъ положительной ординатѣ, а $M' N'$ отрицательной и т. д.

Найдемъ теперь выраженіе

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha dx}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$$

подъ видомъ ряда.

Съ этой цѣлью разложимъ дробь

$$\frac{1}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$$

по возрастающимъ степенямъ x, принимая во вниманіе разложеніе

$$\frac{1}{a - x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{a^n} + \frac{x^n}{a^n (a - x)}.$$

Полагая

$$a = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

и приравнивая въ обѣихъ частяхъ равенства коэффиціенты при i, мы получаемъ

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \sin \alpha + x \sin 2\alpha + x^3 \sin 3\alpha + \dots$$

$$+ x^{n-1} \sin n\alpha + x^n \frac{\sin (n + 1) \alpha - x \sin n\alpha}{1 - 2x \cos a + x^2}.$$

Помножая обѣ части этого равенства на dx, интегрируя между предѣлами -1 и $+1$ и, принимая во вниманіе, что при m нечетномъ

$$\int_{-1}^{+1} x^{m-1}\,dx = \frac{2}{m},$$

а при m четномъ онъ равенъ нулю, получаемъ, что

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,dx = 2\sin\alpha + \frac{2\sin 3\alpha}{3} + \frac{2\sin 5\alpha}{5} + \ldots + R_n,$$

гдѣ

$$R_n = \int_{-1}^{+1} \frac{x^n\,[\sin(n+1)\alpha - x\sin n\alpha]}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,dx.$$

Докажемъ, что, при безпредѣльномъ возрастаніи n, R_n стремится къ нулю.

Съ этой цѣлью напишемъ равенство

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

Замѣняя x черезъ $-x'$, получимъ

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_{1}^{0} f(-x')\,dx' = \int_{0}^{1} f(-x)\,dx,$$

слѣдовательно

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} [f(x) + f(-x)]\,dx.$$

Полагая теперь

$$f(x) = \frac{x^n [\sin(n+1)\alpha - x \sin n\alpha]}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

ограничиваясь случаемъ, когда n четное, что вполнѣ достаточно и, пользуясь тождествомъ

$$(1 - 2x\cos\alpha + x^2)(1 + 2x\cos\alpha + x^2)$$

$$= 1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4,$$

получаемъ

$$f(x) + f(-x) = \frac{2x^n \sin(n+1)\alpha}{1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4} - \frac{2x^{n+2}\sin(n-1)\alpha}{1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4}.$$

Если мы теперь въ интегралахъ

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{x^{n+2}\,dx}{1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4}$$

увеличимъ всѣ элементы, замѣняя знаменателя

$$1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4 = (x^2 - \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha$$

его наименьшимъ значеніемъ $\sin^2 2\alpha$, то мы можемъ положить

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4} = \theta\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\theta}{(n+1)\sin^2 2\alpha},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}\,dx}{1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4} = \theta'\int_0^1 \frac{x^{n+2}\,dx}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\theta'}{(n+3)\sin^2 2\alpha},$$

гдѣ множители θ и θ' суть правильныя дроби, слѣдовательно

$$\frac{1}{2}R_n = \frac{\theta \sin(n+1)\alpha}{(n+1)\sin^2 2\alpha} - \frac{\theta' \sin(n-1)\alpha}{(n+3)\sin^2 2\alpha},$$

и, когда n стремится ∞, R_n стремится къ нулю.

Итакъ

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}dx = \pm\frac{\pi}{4} = \sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \ldots$$

$$+ \frac{\sin(2n-1)\alpha}{2n-1} + \frac{1}{2}R_n.$$

Предполагая теперь

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

получаемъ формулу Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2}R_n.$$

Вслѣдствіе того, что для n четнаго мы имѣемъ, при

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{2}R_n = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\theta}{n+1} + \frac{\theta'}{n+3}\right),$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$1 - 2x^2\cos 2\alpha + x^4$$

обращается въ

$$(1+x^2)^2$$

и имѣетъ наименьшее значенiе равное единицѣ, то точная формула будетъ

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n-1}+(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\theta}{n+1}+\frac{\theta'}{n+3}\right)$$

и отсюда видно, что число $\frac{\pi}{4}$ будетъ предѣломъ ряда Лейбница, если въ правой части равенства возьмемъ равное число положительныхъ и отрицательныхъ членовъ.

38) Обозначимъ $\frac{e^x-F(x)}{x^{n+1}}$ черезъ y, т. е.

$$y=\frac{1}{1.2\ldots.n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{x}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right].$$

Дифференцируя, получаемъ

$$\frac{d^py}{dx^p}=\frac{1}{1.2\ldots.n}\left[\frac{1.2\ldots.p}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(n+p+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1.2.3\ldots.(p+1)}{(n+1)\ldots.(n+p+2)}\,\frac{x}{1}+\ldots.\right],$$

но, такъ какъ

$$\frac{1.2\ldots.(p+k)}{(n+1)(n+2)\ldots.(n+p+k+1)}=\int_0^1 u^{p+k}(1-u)^n\,du,$$

то

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{1}{1.2\ldots.n}\left[\int_0^1 u^p(1-u)^n du + \frac{x}{1}\int_0^1 u^{p+1}(1-u)^n du + \ldots.\right],$$

или проще

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{1}{1.2\ldots.n}\int_0^1 u^p(1-u)^n e^{ux}\, du.$$

Это и будетъ общiй видъ для p-ой производной.

Полагая $p = n$, получаемъ отвѣтъ для задачи, предложенной Эрмитомъ, именно

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{1.2\ldots.n}\int_0^1 u^n(1-u)^n e^{ux}\, du = \frac{1}{1.2\ldots.n}\int_0^1 (u-u^2)^n e^{ux}\, du.$$

39) Мы знаемъ, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \lg \sin x\, dx = \Big[\sin x \lg \sin x - \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1,$$

но

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \lg \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \lg \sqrt{1-\cos^2 x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \lg(1-\cos^2 x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\left[\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^4 x + \frac{1}{3}\cos^6 x + \ldots.\right] dx,$$

и, такъ какъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2n.(2n-2)(2n-4)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3},$$

то мы получаемъ

$$-\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2.4}{3.5.7}+\dots\right]=-1,$$

откуда

$$\frac{2}{3.5}+\frac{2.4}{3.5.7}+\frac{2.4.6}{3.5.7.9}+\dots=\frac{2}{3}.$$

40) Мы можемъ положить, что

$$F(x)=(x-a)(b-x)f(x)\dots\dots\dots(1),$$

при чемъ по условію $f(x)$ должна быть положительною въ промежуткѣ отъ a до b.

Пусть будутъ m и M наименьшія и наибольшія значенія $f(x)$ въ этомъ промежуткѣ.

Тогда мы получаемъ неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} > \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} > \frac{1}{\sqrt{M}}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Но

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}},$$

слѣдовательно

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$$

и предложенный интегралъ будетъ заключаться между

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\pi \text{ и } \frac{1}{\sqrt{M}}\pi.$$

Если мы теперь предположимъ, что a_1 значенiе x, при которомъ $f(a_1) = m$, и a_2 то значенiе x, при которомъ $f(a_2) = M$, то a_1 совпадаетъ съ a_2, когда a совпадаеть съ b и значитъ

$$\lim \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{f(a)}}.$$

Выразимъ теперь $f(a)$ черезъ $F(a)$ и ея производныя.

Дифференцируя два раза равенство (1), мы получаемъ

$$F''(x) = -2f(x) - 4\left[x - \frac{a+b}{2}\right] f'(x) + (x-a)(b-x) f''(x).$$

Полагая

$$x = a,\ b = a,$$

получаемъ

$$F''(a) = -2f(a),$$

откуда

$$f(a) = -\frac{F''(a)}{2}$$

и значитъ

$$\lim \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \pi \sqrt{\frac{-2}{F''(a)}}.$$

41) Интегрируя

$$\int_1^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x-1}}$$

по частямъ, получаемъ

$$\int_1^x \frac{x^n}{\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{2}{2n+1}\,x^n\sqrt{x-1} + \frac{2n}{2n+1}\int_1^x \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{x-1}}.$$

Полагая послѣдовательно

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots,\ n,$$

получимъ

$$\int_1^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{2.4.6\ldots.2n}{3.5.7\ldots.(2n+1)}\left[1+\frac{x}{2}+\ldots.+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\,x^n\right]2\sqrt{x-1},$$

но

$$\int_1^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{(x-1+1)^n}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$= \int_1^x \left[(x-1)^{\frac{2n-1}{2}} + (n)_1(x-1)^{\frac{2n-3}{2}} + \ldots. + (x-1)^{-\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$= 2\sqrt{x-1}\left\{\frac{1}{2n+1}(x-1)^n + \ldots. + \frac{(n)_2}{5}(x-1)^2 + \frac{(n)_1}{3}(x-1) + 1\right\},$$

что и требовалось доказать.

42) Полагая

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = y,$$

получаемъ

$$2\cos\alpha = y + \frac{1}{y} = y + y^{-1},$$

$$2\cos n\alpha = y^n + y^{-n},$$

$$\lg z = \lg\frac{1 + 2x\cos\alpha + x^2}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \lg\frac{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)}{(1-xy)\left(1-\frac{x}{y}\right)}$$

$$= 2\left[xy + \frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{5}x^5y^5 + \ldots\right]$$

$$+ 2\left[\frac{x}{y} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{y^5} + \ldots\right]$$

$$= 4\left\{x\cos\alpha + \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha + \frac{x^5}{5}\cos 5\alpha + \ldots\right\}.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\int_0^1 x^m (\lg x)^{2n}\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{n+1}(\lg x)^{2n}\right]_0^1$$

$$-\frac{2n}{m+1}\int_0^1 x^m(\lg x)^{2n-1}\,dx = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots 3.2.1}{(m+1)^{2n+2}},$$

получаемъ, что

$$\int_0^1 (\lg x)^{2n}\lg z\,\frac{dx}{x} = 4\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots 2n\left\{\frac{\cos\alpha}{1^{2n+2}} + \frac{\cos 3\alpha}{3^{2n+2}} + \frac{\cos 5\alpha}{5^{2n+2}} + \ldots\right\}.$$

43) Для того, чтобы Y былъ конеченъ, необходимо, чтобы при $x = \infty$ подъинтегральная функція была безконечно-малою выше перваго порядка; такъ какъ $\frac{x^a}{e^x}$ будетъ безко-

нечно-малою сколь угодно большого порядка, то намъ остается только разсмотрѣть функцію Xx^{a-1}, степень которой $n+a-2$ должна быть слѣдовательно <-1, откуда получаемъ условіе $a<1-n$.

Мы можемъ переписать Y слѣдующимъ образомъ

$$Y=\int_0^\infty\left[1-\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}-\ldots\right]\frac{x^{a+n-1}}{1.2\ldots.n}\,dx.$$

Выраженіе стоящее въ скобкахъ, при $x=0$, обращается въ единицу и слѣдовательно необходимо только, чтобы, или $a+n-1>0$, или же $a+n-1>-1$, но первое неравенство невозможно, такъ какъ оно противорѣчитъ условію $a<1-n$, раньше выведенному; слѣдовательно

$$a+n>0,\ \text{т. е. } a>-n.$$

Предполагая теперь оба эти условія выполненными, мы можемъ написать такое тождество

$$Y=\frac{1}{a(a+1)\ldots.(a+n-1)}\int_0^\infty(e^{-x}-X)\,D_x^n x^{a+n-1}\,dx.$$

Разсмотримъ теперь интегралъ

$$S=\int_0^\infty(e^{-x}-X_n)\,D_x^n\,x^{a+n-1}\,dx,$$

гдѣ

$$X_1=1,\ X_2=1-\frac{x}{1},\ldots$$

и такъ далѣе.

Интегрируя S по частямъ, получаемъ

$$S = \Big[(e^{-x} - X_n)\, D_x^{n-1}\, x^{a+n-1}\Big]_0^\infty$$

$$+ \int_0^\infty \left(e^{-x} + \frac{dX_n}{dx}\right) D_x^{n-1}\, x^{a+n-1}\, dx;$$

но

$$\Big[(e^{-x} - X_n)\, D_x^{n-1}\, x^{a+n-1}\Big]_0^\infty = 0,$$

потому что, при $x = \infty$, $e^{-x} = 0$ и степень алгебраической функціи $X_n\, D_x^{n-1}\, x^{a+n-1}$ равна $n + a - 1 < 0$; при $x = 0$, всѣ члены, стоящіе въ скобкахъ, обращаются въ нуль, вслѣдствіе условія, что $a + n > 0$; далѣе

$$\frac{dX_n}{dx} = - X_{n-1}$$

и мы слѣдовательно имѣемъ, что

$$S = \int_0^\infty (e^{-x} - X_{n-1})\, D_x^{n-1}\, x^{a+n-1}\, dx,$$

т. е. получаемъ интегралъ того же типа, что и предъидущій и который тѣмъ же способомъ приводится къ виду

$$S = \int_0^\infty (e^{-x} - X_{n-2})\, D_x^{n-2}\, x^{a+n-1}\, dx.$$

Продолжая такимъ образомъ, приходимъ къ интегралу

$$S = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{a+n-1}\, dx = \Gamma\,(a+n)$$

при

$$a + n > 0,$$

а мы знаемъ, что, при a отрицательномъ,

$$\Gamma\,(a) = \frac{\Gamma\,(a+n)}{1.2\ldots(a+n-1)},$$

слѣдовательно

$$Y = \frac{S}{1.2\ldots(a+n-1)} = \frac{\Gamma\,(a+n)}{1.2\ldots(a+n-1)}.$$

Итакъ

$$Y = \int_0^\infty (e^{-x} - X)\, x^{a-1}\, dx = \Gamma\,(a)$$

при условіи

$$1 - n > a > -n.$$

44) Мы можемъ

$$\gamma = (1-\varepsilon^2)\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 - 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}$$

переписать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{2}\,\gamma = (1-\varepsilon^2)\int_0^\pi \frac{d\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}{(1+\varepsilon)^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\theta}{2} + (1-\varepsilon)^2}.$$

Полагая теперь

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\tau,$$

получаемъ

$$\frac{(1-\varepsilon^2)\,d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{(1+\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+(1-\varepsilon)^2}=(1-\varepsilon^2)\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{d\tau}{(1-\varepsilon)^2(1+\tau^2)}=\frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

при чемъ нужно отдѣльно разсматривать случаи, когда $a\leqslant\pi$ и $a>\pi$. Разсмотримъ сначала случай, когда $a\leqslant\pi$, тогда

$$\frac{1}{2}\gamma=(1-\varepsilon^2)\int\limits_0^a\frac{d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\int\limits_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

Для случая же $a>\pi$, имѣемъ

$$\frac{1}{2}\gamma=(1-\varepsilon^2)\int\limits_0^a\frac{d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=(1-\varepsilon^2)\left[\int\limits_0^\pi\frac{d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}+\int\limits_\pi^a\frac{d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

и можно пользоваться подстановкою

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{(1-\varepsilon)\tau}{1+\varepsilon}.$$

Принимая во вниманіе, что $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ отрицателенъ, въ этомъ случаѣ получаемъ

$$\frac{1}{2}\gamma=\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{1+\tau^2}+\int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

Отсюда видно, что когда ε стремится къ 1 и $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ стремится къ ∞, то

$$\lim\left(\int_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\frac{d\tau}{1+\tau^2}\right)_{\varepsilon=1}=\int_0^{\infty}d\operatorname{arc}\operatorname{tg}\tau=\frac{\pi}{2}$$

и

$$\lim\left[\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{1+\tau^2}+\int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\frac{d\tau}{1+\tau^2}\right]_{\varepsilon=1}=\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{1+\tau^2}=\frac{\pi}{2},$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ отрицателенъ и значитъ

$$\lim\left[\int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\frac{d\tau}{1+\tau^2}\right]_{\varepsilon=1}=0.$$

Итакъ

$$\lim\left[\int_0^{a}\frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}\,d\theta\right]_{\varepsilon=1}$$

будетъ ли $a<\pi$ или $>\pi$ равенъ $\frac{\pi}{2}$.

45) Если мы въ выраженіи e^{-x^2} замѣнимъ x черезъ $x+h$ и развернемъ $e^{-(x+h)^2}$ въ строку Тейлора, то получимъ

$$e^{-(x+h)^2} = e^{-x^2}\left[1 + \frac{h}{1} U_1 + \frac{h^2}{1.2} U_2 + \ldots\right],$$

или

$$e^{-2hx-h^2} = 1 + \frac{h}{1} U_1 + \frac{h^2}{1.2} U_2 + \ldots$$

Подобнымъ же образомъ, замѣняя h черезъ k, будемъ имѣть

$$e^{-2kx-k^2} = 1 + \frac{k}{1} U_1 + \frac{k^2}{1.2} U_2 + \ldots$$

Перемножая почленно эти два равенства и помножая обѣ части полученнаго равенства на e^{-x^2}, будемъ имѣть

$$e^{-x^2-2(k+h)x-k^2-h^2} = \sum\sum \frac{h^m}{1.2\ldots m}\frac{k^n}{1.2\ldots n} e^{-x^2} U_m U_n \ldots (1),$$

гдѣ во второй части равенства m и n могутъ получать всѣ цѣлыя положительныя значенія; помножая теперь обѣ части равенства (1) на dx и интегрируя въ предѣлахъ отъ $x = -\infty$ до $x = +\infty$, будемъ имѣть

$$e^{2hk}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+h+k)^2} dx = \sum\sum \frac{h^m}{1.2\ldots m}\frac{k^n}{1.2\ldots n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_m U_n dx.$$

Полагая

$$x + h + k = t,$$

получимъ

$$\sqrt{\pi}\, e^{2hk} = \sum\sum \frac{h^m}{1.2\ldots m} \frac{k^n}{1.2\ldots n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_m U_n dx \ldots (2).$$

Равенство (2) должно быть справедливо для любыхъ значеній h и k; такъ какъ первая часть этого равенства зависитъ только отъ произведенія hk, то и вторая также должна зависѣть только отъ этого произведенія, т. е. всѣ члены второй части, въ которыхъ значки m и n различны, должны обращаться въ нуль, слѣдовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_m\, U_n\, dx = 0,$$

при всякихъ цѣлыхъ значеніяхъ m и n, если только m отлично отъ n.

Оставляя въ равенствѣ (2) только тѣ члены, у которыхъ $m = n$, получаемъ

$$\sqrt{\pi}\, e^{2hk} = \sum \frac{h^n k^n}{(1.2\ldots n)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_n^2\, dx$$

или

$$\sqrt{\pi} \sum \frac{2^n h^n k^n}{1.2\ldots n} = \sum \frac{h^n k^n}{(1.2\ldots n)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} U_n^2\, dx,$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_n^2\, dx = 2.4.6\ldots 2n\, \sqrt{\pi}.$$

XXI.

1) Такъ какъ рядъ

$$(1-x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1.3}{2.4} x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^{12} + \dots .$$

равномѣрно-сходящiйся для значенiй x^2 меньшихъ единицы, то мы имѣемъ

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^9}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^{13}}{13} + \dots .$$

2) $$\int_1^x \frac{e^{ax}}{x} dx = \int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x a dx + \frac{a^2}{1.2}\int_1^x x\, dx + \dots .$$

для $x > 0$ и $a > 0$, или

$$\int_1^x \frac{e^{ax}}{x} dx = \lg x - \lg 1 + a(x-1) + \frac{a^2}{1.2}\frac{x^2-a^2}{2} + \dots ,$$

при чемъ постоянные члены въ этомъ разложенiи образуютъ сходящiйся рядъ, сумму котораго обозначимъ черезъ C. Получаемъ

$$\int_1^x \frac{e^{ax}}{x} = \lg x + ax + \frac{a^2}{1.2}\frac{x^2}{2} + \dots + C.$$

3) Если $0 < x < 1$, то

$$\frac{1}{x}\lg\frac{1}{1-x} = -\frac{\lg(1-x)}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots .$$

и слѣдовательно

$$\int_{\alpha}^{x} \lg \frac{1}{1-x} \frac{dx}{x} = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$$

$$- \left[\frac{\alpha}{1^2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{3^2} + \dots\right].$$

4) Принимая во вниманіе, что, для всѣхъ значеній $x \leqslant 1$,

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

и такъ какъ для этихъ значеній x, правая часть представляетъ равномѣрно-сходящійся рядъ, мы можемъ написать, что

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{x}\, dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots$$

вслѣдствіе того, что сумма остается сходящейся и при $x=1$, то мы получаемъ

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{x}\, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

5) По формулѣ Маклорена мы имѣемъ, что

$$\sin bx = bx - \frac{b^3 x^3}{1.2.3} + \frac{b^5 x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \pm \frac{b^{2n-1} x^{2n-1}}{1.2.\dots(2n-1)}$$

$$\pm \frac{b^{2n} x^{2n}}{1.2.\dots 2n} \sin\left(b\theta x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1.$$

Обозначая

$$\int_0^x e^{-ax} x^{2p}\, dx \text{ черезъ } P_{2p},$$

получаемъ, что

$$\int_0^x \frac{e^{-ax} \sin bx}{x}\, dx = b\, P_0 - \frac{b^3}{1.2.3} P_2 + \ldots \pm \frac{b^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} P_{2n-2}$$

$$\pm \frac{b^{2n}}{1.2\ldots 2n} \int_0^x e^{-ax}\, x^{2n-1} \sin\left[b\theta x + \frac{n\pi}{2}\right] dx.$$

Послѣдній интегралъ по абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ

$$P_{2n-1} = \int_0^x e^{-ax}\, x^{2n-1}\, dx$$

и

$$\lim\,(P_{2n-1})_{x=\infty} = \frac{1.2\ldots(2n-1)}{a^{2n}}.$$

Итакъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x}\, dx = \frac{b}{a} - \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3} + \frac{1}{5}\frac{b^5}{a^5} + \ldots \pm \frac{1}{2n-1}\frac{b^{2n-1}}{a^{2n-1}} \pm \frac{\lambda}{2n}\frac{b^{2n}}{a^{2n}},$$

гдѣ λ меньше единицы.

Этотъ послѣдній членъ, при безпредѣльномъ возрастаніи n, стремится къ нулю, если мод. $b \leqslant a$, и мы получаемъ, для всѣхъ значеній b численно меньшихъ a,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x}\, dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$$

6) При a постоянномъ и положительномъ, мы на основаніи формулы Маклорена имѣемъ, что

$$e^{-a\cos x}\cos(a\sin x) = 1 - a\cos x + \frac{a^2}{1.2}\cos 2x$$

$$-\frac{a^3}{1.2.3}\cos 3x + \ldots,$$

при чемъ выраженіе, стоящее въ правой части равенства, представляетъ равномѣрно-сходящійся рядъ и мы вправѣ написать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} - a + \frac{a^3}{1.2.3.3} - \frac{a^5}{1.2.3.4.5.5} + \ldots$$

Съ другой же стороны намъ извѣстно, что

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

такъ что для всѣхъ положительныхъ значеній a

$$\int_0^a \frac{\sin z}{z}\,dz = a - \frac{a^3}{1.2.3.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5.5} - \ldots$$

и слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Лѣвую часть равенства мы можемъ переписать слѣдующимъ образомъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx.$$

Такъ какъ, при безпредѣльномъ возрастаніи a, $e^{-a\cos x}$ для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, становится менѣе всякой напередъ заданной величины, при заданной сколь угодно малой величинѣ ε, въ то время, какъ $\cos(a\sin x)$ не превосходитъ единицы, и такъ какъ

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx$$

по абсолютной величинѣ меньше

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \varepsilon,$$

то слѣдовательно

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

Мы были вправѣ написать

$$\lim\left(\int_0^{a}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)_{a=\infty} = \int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz,$$

такъ какъ

$$\int_0^a \frac{\sin z}{z}\,dz,$$

при возрастающихъ значеніяхъ a, есть интегралъ сходящійся *).

7) Какъ извѣстно

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

Помножая обѣ части этого равенства на $x\,dx$ и интегрируя въ предѣлахъ отъ 0 до x, получаемъ

$$1-(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

Замѣняя въ этомъ равенствѣ x^2 черезъ y, получаемъ

$$1-(1-y)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6}y^3 + \ldots \qquad (a).$$

Полагая $y=1$, находимъ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2(n+1)}+\ldots=1.$$

8) Употребляя тѣ же обозначенія, что и въ предъидущей задачѣ, имѣемъ на основаніи равенства (a)

$$\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{y}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6}y^2 - \ldots \qquad (b).$$

*) L. Kronecker. Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. Seite 65.

Складывая почленно равенства (a) и (b), получаемъ

$$\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-(1-y)^{\frac{1}{2}}}{y}=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4.6}y^2+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}y^4+\dots\right]$$

$$=\left[\frac{2-2(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Замѣняя въ этомъ равенствѣ y^2 черезъ -1, получаемъ

$$2\left[\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}-\dots\right]=[2(2^{\frac{1}{2}}-1)]^{\frac{1}{2}}.$$

XXII.

1) При употребленіи метода вычисленія опредѣленнаго интеграла посредствомъ дифференцированія по параметру требуется, какъ извѣстно, каждый разъ провѣрять существованіе достаточнаго условія, чтобы

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Иногда для этого удобно доказать справедливость неравенства

$$\left|\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 f(x,\alpha)}{\partial\alpha^2}\,dx\right|<H,$$

гдѣ H нѣкоторая конечная величина.

Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin\alpha + \cos x}{(1+\sin\alpha\cos x)^2}\, dx.$$

Этотъ интегралъ величина конечная и слѣдовательно достаточное условіе выполнено.

На этомъ основаніи

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^\pi \frac{\cos\alpha dx}{1+\sin\alpha\cos x} = \pi,$$

откуда

$$u = \pi\alpha + C,$$

но при

$$\alpha = 0, \quad C = 0,$$

слѣдовательно предложенный интегралъ равенъ $\pi\alpha$.

Здѣсь предполагается α положительнымъ.

2) Въ данномъ случаѣ

$$\left|\int_0^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\, dx\right| = -\int_0^\infty xe^{-ax}\cos mx\, dx,$$

т. е. величина конечная и мы получаемъ

$$\frac{du}{dm} = \frac{a}{a^2+m^2},$$

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{m}{a} + C,$$

при

$$m = 0, \quad u = 0,$$

слѣдовательно предложенный интегралъ равенъ $\operatorname{arc\,tg} \frac{m}{a}$.

Пользуясь теоремою Дирихлэ *), мы вправѣ утверждать, что

$$\lim \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin mx}{x}\, dx. \right]_{a=0} = \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\, dx = \pm \frac{\pi}{2},$$

смотря по тому, будетъ ли $m > 0$ или $m < 0$.

$$v = \int_0^\infty \frac{\cos sx \sin rx}{x}\, dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\sin (r+s)\, x}{x}\, dx + \int_0^\infty \frac{\sin (r-s)\, x}{x}\, dx \right].$$

Если $r + s$ и $r - s$ оба положительны, то

$$v = + \frac{\pi}{2};$$

если оба отрицательны, то

$$v = - \frac{\pi}{2}$$

---

*) Смотри O. Stolz. Grundzüge der Differential und Integralrechnung. X Abschnitt, S. 447.

и, наконецъ, если они разныхъ знаковъ, то

$$v = 0.$$

3) $u = \frac{\pi}{2} \lg \left[r + \sqrt{1 + r^2}\right]$; полагая $r = 1$, получимъ

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} \lg \left[1 + \sqrt{2}\right].$$

4) $u = \frac{1}{2} \lg (1 + \alpha^2)$.

5) $u = \frac{\pi}{2} \lg (1 + r)$; полагая $r = 1$, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x(1 + x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \lg 2.$$

6) Полагая

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lg (1 + \alpha \cos x)}{\cos x}\, dx,$$

получимъ

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \alpha \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}}$$

$$= -2 \frac{d}{d\alpha}\left[\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}}\right]^2.$$

Слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lg(1+\cos x)}{\cos x}\,dx = -2\int_0^1 \frac{d}{d\alpha}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right]^2 d\alpha$$

$$= -2\left\{\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right]^2\right\}_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

9) $u = b\operatorname{arc\,tg}\frac{2b}{a} - \frac{a}{4}\lg\left(1+\frac{4b^2}{a^2}\right).$

10) Дифференцируя по x, имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \frac{-tue^{-tux}\,du}{(1+u^2)^{n+1}} = \left\{\frac{te^{-tux}}{2n(1+u^2)^n}\right\}_0^\infty$$

$$+\frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{t^2xe^{-tux}\,du}{(1+u^2)^n} = -\frac{t}{2n} + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{t^2xe^{-tux}\,du}{(1+u^2)^n},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{t^2u^2e^{-tux}}{(1+u^2)^{n+1}}\,du = \int_0^\infty \frac{t^2e^{-tux}\,du}{(1+u^2)^n} - \int_0^\infty \frac{t^2e^{-tux}\,du}{(1+u^2)^{n+1}}.$$

Слѣдовательно

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2n\frac{dy}{dx} + xyt^2 = \int_0^\infty \frac{xt^2e^{-tux}\,du}{(1+u^2)^n} - \int_0^\infty \frac{xt^2e^{-tux}\,du}{(1+u^2)^{n+1}}$$

$$+t - \int_0^\infty \frac{t^2xe^{-tux}\,dx}{(1+u^2)^n} + \int_0^\infty \frac{xt^2e^{-tux}}{(1+u^2)^{n+1}}\,du = t.$$

11) Мы имѣемъ

$$\frac{dP}{dx}=-\int_0^\infty \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt;\quad \frac{d^2P}{dx^2}=\int_0^\infty \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt,$$

откуда

$$\frac{d^2P}{dx^2}+P=\int_0^\infty e^{-tx}\,dt=\frac{1}{x}.$$

Подобнымъ же образомъ и

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}=\int_0^\infty \frac{2\sin t}{(t+x)^3}\,dt.$$

Интегрируя же $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ по частямъ, получаемъ, что

$$\theta=\left(\frac{-\cos t}{t+x}\right)_0^\infty-\int_0^\infty \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt=\frac{1}{x}-\left[\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right]_0^\infty$$

$$-2\int_0^\infty \frac{\sin t}{(t+x)^3}\,dt=\frac{1}{x}-\frac{d^2\theta}{dx^2},$$

что и предложено доказать.

12) Мы имѣемъ, что

$$\frac{F(x)}{x-c}=Q+\frac{F(c)}{x-c}, \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

гдѣ Q цѣлый раціональный многочленъ не выше $n-2$-ой степени относительно c.

Помножая обѣ части равенства (1) на dx и интегрируя въ предѣлахъ между a и b, получаемъ

$$\int_a^b \frac{F(x)}{x-c}\,dx = P(c) + F(c)\int_a^b \frac{dx}{x-c}.$$

Такъ какъ c не заключено между a и b, то мы можемъ дифференцировать подъ знакомъ интеграла по c и получаемъ

$$\int_a^b \frac{F(x)}{(x-c)^n}\,dx = \frac{1}{1.2.3\ldots.(n-1)}\,\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}\left[F(c)\lg\frac{a-c}{b-c}\right],$$

такъ какъ

$$\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}\left[P(c)\right] = 0,$$

потому что $P(c)$ не выше n—2-ой степени относительно c.

13) Равенство

$$y_n = \frac{1}{2.4.6\ldots.2n}\int_{z_0}^{x}(x^2-z^2)^n f(z)\,dz\,\ldots\ldots.(1)$$

будетъ доказано, если докажемъ, что

$$\frac{dy_n}{dx} = xy_{n-1} = \frac{x}{2.4\ldots.2(n-1)}\int_{z_0}^{x}(x^2-z^2)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Для того, чтобы это доказать, дифференцируемъ равенство (1) по x, тогда получаемъ

$$2.4.6\ldots.2n\,\frac{dy_n}{dx}=\left[(x^2-z^2)^n f(z)\right]_{z=x}$$

$$+\,2n\int_{x_0}^{x} x\,(x^2-z^2)^{n-1} f(z)\,dz,$$

т. е.

$$\frac{dy_n}{dx}=\frac{x}{2.4\ldots2(n-1)}\int_{x_0}^{x}(x^2-z^2)^{n-1} f(z)\,dz=xy_{n-1},$$

что и требовалось доказать.

14) Мы имѣемъ, что

$$\frac{du}{da}=\int_0^1 \frac{x^a \lg x\,[1+x-2x^{a+1}]-2x^{2a+1}\lg x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^a \lg x}{1-x}\,dx-\int_0^1 \frac{(x^2)^a \lg (x^2)\,d\,(x^2)}{1-x^2}=0,$$

т. е.

$$\frac{du}{da}=0;$$

значитъ u отъ a не зависитъ; полагая $a=0$, получаемъ

$$u=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\lg 2\,.$$

15) Такъ какъ

$$\left|\int_{-1}^{+1} z^2\,(z^2-1)^{n-1} e^{xz}\,dz\right|\leqslant\int_{-1}^{+1} z^2 e^{xz}\,dz,$$

т. е. меньше конечной величины, то мы имѣемъ

$$\frac{dy}{dx}=\int_{-1}^{+1} z\,(z^2-1)^{n-1}\,e^{xz}\,dz=-\frac{x}{2n}\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^n\,e^{xz}\,dz,$$

или

$$2n\,\frac{dy}{dx}=-x\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^n\,e^{xz}\,dz$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^n\,e^{xz}\,dz+\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^{n-1}\,e^{xz}\,dz,$$

т. е.

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2}+2n\,\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

16) Такъ какъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{dx}{a^2-b^2x^2\sin^2\theta}=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2-b^2x^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\pi}{2a}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{\pi}{2ab}\arcsin\frac{b}{a},$$

то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lg\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\,\frac{d\theta}{\sin\theta}=\pi\arcsin\frac{b}{a}.$$

17) Полагая

$$\beta=b\sin\theta,\quad \alpha=a,$$

помножаемъ обѣ части равенства

$$\int_0^1 \frac{\alpha\beta dx}{\alpha^2+\beta^2 x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha}$$

на $d\theta$ и интегрируемъ въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, тогда получаемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b \sin\theta}{a} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{ab dx d\theta}{a^2+b^2 x^2 \sin^2\theta}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}}{a^2+(a^2+b^2 x^2)\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2 x^2}} = \frac{\pi}{2} \lg \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a}.$$

18) Такъ какъ

$$\int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a},$$

то

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{da}{a} = \lg \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \int_0^1 dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} x^{a-1}\, da = \int_0^1 \frac{x^{\alpha_1-1}-x^{\alpha_0-1}}{\lg x}\, dx;$$

полагая

$$x = e^{-z},$$

получимъ

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_1 z}-e^{-\alpha_0 z}}{z}\, dz = \lg \frac{\alpha_0}{\alpha_1}.$$

19) $U = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}$.

20) Мы имѣемъ, что

$$\frac{1}{1+x^2} = 2\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, d\alpha.$$

Помножая обѣ части этого равенства на $\cos mx\, dx$ и интегрируя въ предѣлахъ отъ 0 до ∞, получаемъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\, dx = 2\int_0^\infty \cos mx\, dx \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, d\alpha$$

$$= 2\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2}\, d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos mx\, dx.$$

Мы вправѣ измѣнить здѣсь порядокъ интегрированія, такъ какъ подъинтегральная функція непрерывна и обращается въ нуль сколь угодно высокаго порядка при $x = \infty$ и при всякомъ m и α *).

Принимая во вниманіе, что

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{m^2}{4\alpha^2}},$$

получаемъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 - \frac{m^2}{4\alpha^2}}\, d\alpha.$$

*) См. E. Pascal. Calcolo infinitesimale, parte II. p 49.

Обозначая интегралъ, стоящій во второй части равенства черезъ V и дифференцируя его по m, находимъ

$$\frac{dV}{dm} = \frac{d}{dm}\int_0^\infty e^{-\alpha^2-\frac{m^2}{4\alpha^2}}\,d\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{m}{\alpha^2}\,e^{-\alpha^2-\frac{m^2}{4\alpha^2}}\,d\alpha.$$

Равенства эти справедливы, такъ какъ, обозначая черезъ m_0 частное значеніе m, заключенное между m и δ, гдѣ δ нѣкоторое положительное число меньшее m, получаемъ для всѣхъ значеній m, лежащихъ между $m_0+\delta$ и $m_0-\delta$

$$\left|\frac{1}{2}\int_A^\infty -\frac{m}{\alpha^2}\,e^{-\alpha^2-\frac{m^3}{4\alpha^2}}\,d\alpha\right| < \frac{1}{2}\int_A^\infty \frac{m_0+\delta}{\alpha^2}\,d\alpha < \frac{1}{2}\,\frac{m_0+\delta}{A},$$

количество отъ m не зависящее и стремящееся къ нулю при безграничномъ возрастаніи A *).

Полагая теперь

$$\alpha = \frac{m}{2t},$$

получимъ, что

$$\frac{dV}{dm} = -V,$$

откуда

$$V = Ce^{-m},$$

при чемъ

$$C = \lim\,(V)_{m=0}.$$

---

*) См. M. Jordan Cours d'Analyse de l'école Polytechnique. Deuxieme édition. Calcul Intégral, p. 165.

Мы имѣемъ, что

$$C = \lim \left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2 - \frac{m^2}{4\alpha^2}} d\alpha \right]_{m=0}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha + \lim \left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2} \left(e^{-\frac{m^2}{4\alpha^2}} - 1 \right) d\alpha \right]_{m=0}.$$

Первый членъ равенъ $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, а предѣлъ 2-го равенъ нулю.

Дѣйствительно, разложимъ второй интегралъ на сумму интеграловъ

$$\int_0^\mu e^{-\alpha^2} \left(e^{-\frac{m^2}{4\alpha^2}} - 1 \right) d\alpha + \int_\mu^\infty e^{-\alpha^2} \left(e^{-\frac{m^2}{4\alpha^2}} - 1 \right) d\alpha,$$

гдѣ μ какое нибудь положительное число.

Наибольшее значеніе модуля функціи

$$e^{-\alpha^2} \left(e^{-\frac{m^2}{4\alpha^2}} - 1 \right),$$

стоящей подъ знакомъ перваго слагаемаго интеграла, будетъ 2, наибольшее же значеніе этой функціи, стоящей подъ знакомъ 2-го интеграла, не превзойдетъ

$$e^{-\alpha^2} \left(1 - e^{-\frac{m^2}{4\mu^2}} \right).$$

Итакъ наибольшее значеніе искомаго интеграла будетъ

$$\int_0^{\mu} 2d\alpha + \left(1 - e^{-\frac{m^2}{4\mu^2}}\right)\int_{\mu}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$

$$= 2\mu + \left(1 - e^{-\frac{m^2}{4\mu^2}}\right)\int_{\mu}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Такъ какъ

$$\int_{\mu}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha < \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha < \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

то

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\left(e^{-\frac{m^2}{4\alpha^2}} - 1\right) d\alpha < 2\mu + \left(1 - e^{-\frac{m^2}{4\mu^2}}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

т. е. меньше выраженія, которое при достаточно малыхъ значеніяхъ μ и m сколь угодно мало.

Итакъ

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

и значитъ

$$V = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-m}.$$

21) Мы знаемъ, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-a}.$$

Помножая обѣ части этого равенства на da и интегрируя въ предѣлахъ отъ 0 до a, получаемъ

$$\frac{\pi}{2}\int_0^a e^{-a}\,da = \frac{\pi}{2}\left[1 - e^{-a}\right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\int_0^a \cos ax\,da = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}\,dx.$$

Слѣдовательно

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a}).$$

Мы были вправѣ измѣнить здѣсь порядокъ интегрированія, такъ какъ при всякомъ a

$$\int_A^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx < \int_A^\infty \frac{dx}{1+x^2} < \varepsilon$$

при достаточно большомъ A.

22) Для всѣхъ значеній $a < 1$ имѣетъ мѣсто равенство

$$\frac{\sin bx}{1 - 2a\cos bx + a^2} = \sin bx + a\sin 2bx + a^2\sin 3bx + \ldots.$$

Слѣдовательно

$$u = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\left[\sin bx + a\sin 2bx + a^2\sin 3bx + \ldots\right] dx.$$

Разсматривая

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} \sin nbx \, dx = V$$

и принимая во вниманіе, что

$$\int_0^\infty \frac{\cos nbx}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-nb},$$

видимъ, что

$$V = \frac{\pi}{2} e^{-nb}.$$

Итакъ

$$u = \frac{\pi}{2} [e^{-b} + ae^{-2b} + a^2 e^{-3b} + \ldots]$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{e^{-b}}{1 - a e^{-b}} = \frac{\pi}{2(e^b - a)}.$$

XXIII.

1) Принимая за контуръ C сначала прямоугольный треугольникъ OAB, котораго катетъ $OA = a$ направленъ по оси x-овъ, а $AB = b$ параллельно оси y-овъ, затѣмъ прямоугольный треугольникъ OBC, катеты котораго соотвѣтственно равны a и b, получаемъ

$$\int_0^a f(z)\, dz + \int_a^{a+bi} f(z)\, dz = \int_0^{ib} f(z)\, dz + \int_{ib}^{ib+a} f(z)\, dz.$$

Принимая же во вниманіе, что

$$z = x + yi,$$

мы можемъ это равенство переписать слѣдующимъ образомъ

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f(a+yi)\,idy = \int_0^b f(yi)\,idy + \int_0^a f(ib+x)\,dx,$$

или еще такъ

$$\int_0^a f(x+ib)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = i\left[\int_0^b f(a+yi)\,dy - \int_0^b f(yi)\,dy\right].$$

Полагая

$$f(z) = e^{-z^2},$$

получимъ

$$\int_0^a e^{-(x+ib)^2}\,dx - \int_0^a e^{-x^2}\,dx = i\left[\int_0^b e^{-(a+yi)^2}\,dy - \int_0^b e^{-(yi)^2}\,dy\right],$$

или

$$e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}(\cos 2bx - i\sin 2bx)\,dx - \int_0^a e^{-x^2}\,dx$$

$$= i\left[e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}(\cos 2ay - i\sin 2ay)\,dy - \int_0^b e^{y^2}\,dy\right].$$

Отсюда получаемъ, что

$$e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\,dx - \int_0^a e^{-x^2}\,dx = e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2by\,dy$$

и что

$$e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\sin 2bx\,dx = \int_0^b e^{-y^2}\,dy - e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\cos 2by\,dy.$$

При безпредѣльномъ возрастаніи a выраженія

$$e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay\,dy \quad \text{и} \quad e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\cos 2ay\,dy$$

стремятся къ нулю.

Слѣдовательно получаемъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^b e^{y^2}\,dy.$$

2) Возьмемъ

$$\int \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz,$$

гдѣ a вещественная и положительная величина. Полюсъ T подъинтегральной функціи лежитъ на оси x на разстояніи $OT = a$ отъ начала координатъ. Для всѣхъ остальныхъ положительныхъ значеній x и любыхъ значеній y подъинтегральная функція остается синектичной. Слѣдовательно, значеніе интеграла, взятаго по контуру полукруга, описаннаго изъ центра O произвольнымъ радіусомъ $b > a$, равно значенію интеграла, взятаго по контуру круга, описаннаго изъ центра T радіусомъ $r < b - a$.

Итакъ

$$\int_{AB} \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz + \int_{BCA} \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz = \int_{A'B'C'A'} \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz.$$

Полагая въ первомъ интегралѣ $z = iy$, во второмъ $z = be^{i\theta}$ и въ третьемъ $z = a - re^{-i\theta}$, получаемъ

$$i\int_{-b}^{b} \frac{e^{-iy}}{a-iy}\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-b(\cos\theta + i\sin\theta)}}{a - b(\cos\theta + i\sin\theta)}\,b(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-(a - r\cos\theta + i r\sin\theta)}\,d\theta.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$i\int_{-b}^{b} \frac{(\cos y - i\sin y)(a + yi)}{a^2 + y^2}\,dy$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{be^{-b\cos\theta}(i\cos\theta - \sin\theta)(a - b\cos\theta + bi\sin\theta)[\cos(b\sin\theta) - i\sin(b\sin\theta)]}{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2}\,d\theta$$

$$= ie^{-a}\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}[\cos(r\sin\theta) - i\sin(r\sin\theta)]\,d\theta.$$

Приравнивая коэффиціенты при i, находимъ

$$\int_{-b}^{b} \frac{a\cos y + y\sin y}{a^2 + y^2}\, dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{be^{-b\cos\theta}\,[(a - b\cos\theta)\cos[\theta - b\sin\theta] - b\sin\theta\sin(\theta - b\sin\theta)]}{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2}\, d\theta$$

$$+ e^{-a} \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta} \cos(r\sin\theta)\, d\theta.$$

Полагая теперь $r = 0$ и $b = \infty$, получаемъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos y + y\sin y}{a^2 + y^2}\, dy = 2\pi e^{-a}.$$

3) и 4) Если возьмемъ

$$\int \frac{e^{-z}}{a + z}\, dz,$$

то, считая a положительнымъ, видимъ, что, если примемъ за контуръ полукругъ ABC, то внутри его подъинтегральная функція не имѣетъ полюсовъ, слѣдовательно

$$i \int_{-b}^{b} \frac{(\cos y - i\sin y)(a - yi)}{a^2 + y^2}\, dy$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{be^{-b\cos\theta}\,[(a - b\cos\theta)\cos(\theta - b\sin\theta) - b\sin\theta\sin(\theta - b\sin\theta)]\, d\theta}{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2} = 0.$$

Отсюда при $b = \infty$ получаемъ, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos y - y \sin y}{a^2 + y^2}\, dy = 0.$$

Принимая же во вниманіе, что раньше (№ 2) мы нашли, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos y + y \sin y}{a^2 + y^2}\, dy = 2\pi e^{-a},$$

находимъ, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

Слѣдовательно

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos y}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{2a} e^{-a} \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{y \sin y}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

5) Мы знаемъ, что

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Полагая $e^{ix} = u$, получимъ

$$\cos x = \frac{u^2 + 1}{2u},\ dx = \frac{du}{iu};$$

когда x измѣняется отъ 0 до 2π, то u опишетъ кругъ радіуса равнаго 1, такъ какъ

$$u = \cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

Предложенный интегралъ преобразуется въ слѣдующій

$$\frac{2}{i}\int_C \frac{du}{u^2 + 2au + 1}.$$

Изъ двухъ корней уравненія

$$u^2 + 2au + 1 = 0,$$

только корень

$$u = -a + \sqrt{a^2 - 1},$$

будетъ имѣть модуль меньшій единицы и слѣдовательно будетъ лежать внутри круга, радіуса равнаго 1.

Соотвѣтствующій этому корню вычетъ будетъ

$$\left[\frac{1}{u + a + \sqrt{a^2 - 1}}\right]_{u = -a + \sqrt{a^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

и значитъ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x + a} = \frac{2\pi i}{2\sqrt{a^2 - 1}}\,\frac{2}{i} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

6) и 7) Возьмемъ за подъинтегральную функцію

$$F(z) = \left(\frac{1}{1+z} - e^{-z}\right)\frac{dz}{z}$$

и будемъ интегрировать по контуру квадрата $OAA'B$, бокъ котораго примемъ равнымъ R, направленіе стороны OA за ось x-овъ, а направленіе OB за ось y-овъ, тогда получимъ

$$\int_0^R\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x}+\int_0^R\left(\frac{1}{1+R+yi}-e^{-R-yi}\right)\frac{idy}{R+yi}$$

$$+\int_R^0\left(\frac{1}{1+x+Ri}-e^{-x-Ri}\right)\frac{dx}{x+Ri}$$

$$+\int_R^0\left(\frac{1}{1+yi}-e^{-yi}\right)\frac{idy}{yi}=0,$$

такъ какъ подъинтегральная функція голоморфна.

Дѣйствительно функція

$$\left(\frac{1}{1+z}-e^{-z}\right)\frac{1}{z}=\frac{1-z+z^2-z^3+\ldots-\left(1-z+\frac{z^2}{1.2}-\ldots\right)}{z}$$

при $z=0$ обращается въ нуль.

Такъ какъ модули интеграловъ

$$\int_0^R\left(\frac{1}{1+R+yi}-e^{-R-yi}\right)\frac{idy}{R+yi}$$

и

$$\int_R^0\left(\frac{1}{1+x+Ri}-e^{-x-Ri}\right)\frac{dx}{x+Ri}$$

соотвѣтственно менѣе интеграловъ

$$\int_0^R\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}-e^{-R}\right)dy \quad \text{и} \quad \int_R^0\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}-e^{-x}\right)dx,$$

т. е. менѣе выраженій, которыя при безпредѣльномъ возрастаніи R стремятся къ нулю, то мы получаемъ

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x} + \int_\infty^0 \left(\frac{1-yi}{1+y^2} - e^{-yi}\right)\frac{dy}{y} = 0,$$

или

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left[\frac{1-yi}{1+y^2} - (\cos y - i\sin y)\right]\frac{dy}{y}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)\frac{dx}{x}$$

и что

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

8) и 9) За подъинтегральную функцію беремъ

$$F(z) = e^{-z^2}$$

и интегрируемъ на плоскости xy по контуру равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника OAB, вершина котораго O помѣщается въ началѣ прямоугольной системы координатъ, OA — направлено по оси x-овъ, а $AB \parallel$ оси y-овъ. Такъ какъ подъинтегральная функція голоморфна, то мы получаемъ

$$\int_C F(z)\,dz = \int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^R e^{-(R+yi)^2} i\,dy + \int_\rho^0 \frac{e^{-i\rho^2}(1+i)\,d\rho}{\sqrt{2}} = 0,$$

гдѣ R длина катетовъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, а ρ его гипотенуза.

Такъ какъ для точекъ прямой OB мы имѣемъ, что

$$z = x + yi = \rho\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \rho\,\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

то

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^R e^{-(R^2-y^2)-2yi}\,idy + \int_\rho^0 e^{-i\rho^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,d\rho = 0.$$

Обозначая

$$\int_0^R e^{-(R^2-y^2)-2yi}\,idy$$

черезъ k, замѣчаемъ, что

$$mod\ k < \int_0^R e^{-(R^2-y^2)}\,dy;$$

для опредѣленія значенія этого послѣдняго интеграла при безпредѣльномъ возрастаніи R, перепишемъ его такимъ образомъ

$$\int_0^R e^{-(R^2-y^2)}dy = \int_0^r e^{-(R^2-y^2)}dy + \int_r^R e^{-(R^2-y^2)}dy = k_1 + k_2,$$

гдѣ

$$r = R - \alpha \text{ и } \alpha = \frac{\lg R}{R}.$$

При этихъ обозначеніяхъ мы имѣемъ

$$k_1 = \int_0^r e^{-(r^2+2r\alpha+\alpha^2)} e^{y^2} dy = e^{-\alpha(2r+\alpha)} \int_0^r e^{-(r^2-y^2)} dy$$

$$= e^{-2\lg R} e^{\alpha^2} \int_0^r e^{-(r^2-y^2)} dy = \frac{1}{R^2} e^{\alpha^2} \int_0^r e^{-(r^2-y^2)} dy.$$

Слѣдовательно

$$k_1 < \frac{e^{\alpha^2} r}{R^2} < \frac{e^{\alpha^2}}{R}$$

и, когда R безпредѣльно возрастаетъ, k_1 стремится къ нулю.

Что касается до k_2, то модуль его меньше, чѣмъ $R - r$, т. е. меньше α и, слѣдовательно, при безпредѣльномъ возрастаніи R, k_2 стремится къ нулю, такъ что мы получаемъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx + \int_\rho^0 e^{-i\rho^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} d\rho = 0,$$

или

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\rho (\cos\rho^2 - i\sin\rho^2) \frac{1+i}{\sqrt{2}} d\rho.$$

Такъ какъ

$$\rho = R\sqrt{2},$$

то, когда R стремится къ безконечности и ρ стремится къ безконечности, получаемъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\sqrt{2}} dx$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{\sqrt{2}}\, dx = 0,$$

или, такъ какъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + \sin x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

и

$$\int_0^\infty (\cos x^2 - \sin x^2)\, dx = 0.$$

Слѣдовательно

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

10) и 11) За подъинтегральную функцію беремъ

$$F(z) = \frac{ze^{mzi}}{z^2 + a^2}$$

и будемъ интегрировать по контуру прямоугольника $OAA'B'B$, гдѣ O начало координатъ, $OA = R$ направлено по положительному направленію оси x-овъ, $AA' = BB' = R$ соотвѣтственно параллельны оси y-овъ. При этомъ выборѣ контура подъинтегральная функція имѣетъ только одинъ полюсъ $z = ai$.

На основанiи теоремы Коши мы имѣемъ

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{mxi}}{x^2+a^2}\,dx + \int_0^R \frac{(R+yi)\,e^{m(R+yi)i}\,idy}{(R+yi)^2+a^2}$$

$$+\int_R^0 (-R+yi)\,e^{-mRi-my}\,idy + \int_R^{-R} \frac{(x+Ri)\,e^{x+Ri}\,dx}{(x+Ri)^2+a^2} = 2\pi i\varepsilon,$$

гдѣ ε вычетъ соотвѣтствующiй $z=ai$, т. е.

$$\varepsilon = \frac{aie^{maii}}{2ai} = \frac{e^{-am}}{2}.$$

Принимая же во вниманiе, что модули интеграловъ

$$\int_0^R \frac{(R+yi)\,e^{mRi-my}}{(R+yi)^2+a^2}\,idy, \qquad \int_0^R \frac{(x+Ri)\,e^{mxi-mR}}{(x+Ri)^2+a^2}\,dx$$

и

$$\int_R^0 \frac{(-R+yi)\,e^{-mRi-my}}{(-R+yi)^2+a^2}\,idy$$

соотвѣтственно менѣе

$$\int_0^R \frac{e^{-my}\,dy}{R}, \quad \int_0^R \frac{e^{-mR}}{R}\,dx, \quad \int_0^R \frac{e^{-my}}{R}\,dy,$$

т. е. что они при безпредѣльномъ возрастанiи R стремятся къ нулю, получаемъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos mx + i\sin mx)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{2\pi i e^{-am}}{2},$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos mx}{x^2 + a^2}\, dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2}\, dx = \pi e^{-am}.$$

12) Беремъ $F(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ и на осяхъ ox и oy строимъ квадратъ $OAA'B$, сторона котораго равна R, затѣмъ, принимая точку O за центръ круга, очень малымъ радіусомъ r опишемъ дугу круга ab въ квадрантѣ xoy. Функція $F(z)$ голоморфна внутри контура $aAA'Bba$, къ которому можно примѣнить теорему Коши. Замѣчая, что интегралы, распространенные на AA' и $A'B$ стремятся къ нулю одновременно съ $\frac{1}{R}$, и что интегралъ, распространенный на ab стремится къ $-\frac{i\pi}{2}$, когда r стремится къ нулю, получаемъ

$$\int_{r}^{R} \frac{\cos x + i \sin x}{x}\, dx + \int_{R}^{r} \frac{e^{-y}\, dy}{y} = \frac{i\pi}{2} + \varepsilon,$$

гдѣ ε стремится къ нулю одновременно съ $r = 0$ и $R = \infty$.

Итакъ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\, dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

13) Беремъ $F(z) = \frac{e^{iz^2} - 1}{z^2}$.

Эта функція голоморфна въ началѣ координатъ, что видно изъ разложенія e^{iz^2}.

Примѣняя теорему **Коши** выбираемъ для контура квадратъ $OAA'BA$. Интегралъ $\int F(z)\,dz$, распространенный на AA' стремится къ нулю одновременно съ $\frac{1}{R}$, такъ какъ модуль интеграла

$$\int_0^R \frac{e^{i(R+iy)^2}-1}{(R+iy)^2}\,idy$$

меньше, чѣмъ интегралъ

$$\int_0^R \frac{2}{R^2}\,dy.$$

Модуль интеграла, распространеннаго на $A'B$, т. е.

$$\int_R^0 \frac{e^{i(x+iR)^2}-1}{(x+iR)^2}\,dx \text{ также меньше } \frac{2}{R}.$$

Мы, слѣдовательно, имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos x^2 + i\sin x^2 - 1}{x^2}\,dx + \int_\infty^0 \frac{\cos y^2 - i\sin y^2 - 1}{-y^2}\,idy = 0,$$

откуда

$$\int_0^\infty \frac{\cos x^2 + \sin x^2 - 1}{x^2}\,dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

14) За контуръ интегрированія принимаемъ полуокружность, описанную изъ начала координатъ, какъ центра.

Тогда, полагая

$$\frac{dx}{1+x^4}=\frac{dz}{1+z^4},$$

гдѣ

$$z=re^{\theta i},$$

получаемъ, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_{\pi}^{0}\frac{re^{\theta i}\,id\theta}{1+r^4\,e^{4\theta i}}+2\pi i\varepsilon,$$

гдѣ ε обозначаетъ сумму вычетовъ (*residus*) $\frac{1}{1+z^4}$, соотвѣтствующихъ полюсамъ, расположеннымъ надъ осью x.

Такъ какъ мы предположимъ r равнымъ безконечности, то

$$\int_{\pi}^{0}\frac{re^{\theta i}\,id\theta}{1+r^4\,e^{4\theta i}}=0,$$

слѣдовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=2\pi i\varepsilon,$$

и намъ нужно только вычислить ε.

Нули $1+z^2$, расположенные надъ осью x, суть корни уравненія

$$1+x^4=0,$$

соотвѣтственно равные

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\alpha \text{ и } \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)=\alpha'.$$

Слѣдовательно,

$$\varepsilon = \lim \left[\frac{z-\alpha}{1+z^4}\right]_{z=\alpha} + \lim \left[\frac{z-\alpha'}{1+z^4}\right]_{z=\alpha'} = \frac{1}{4\alpha^3} + \frac{1}{4\alpha'^3} = -\frac{i\sqrt{2}}{4}$$

и значитъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

15) Вмѣсто предложеннаго интеграла разсматриваемъ

(1) .... $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x i}\,dx}{1+x^4},$

который отъ предложеннаго отличается только прибавкою

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sin \alpha x}{1+x^4}\,dx = 0.$$

(1) интегралъ есть ничто иное, какъ

$$\int \frac{e^{\alpha z i}}{1+z^4}\,dz,$$

взятый вдоль оси x.

Предположимъ $\alpha > 0$ и замѣнимъ контуръ интегрированія полукругомъ безконечнаго радіуса, описаннаго изъ начала координатъ, какъ изъ центра.

Обозначая черезъ ε сумму вычетовъ, соотвѣтствующихъ полюсамъ подъинтегральной функціи, получаемъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x i}\,dx}{1+x^4} = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{\alpha r(\cos\theta + i\sin\theta) i}\, i r e^{\theta i}\,d\theta}{1 + r^4 e^{4\theta i}} + 2\pi i \varepsilon.$$

Такъ какъ α положительно, то интегралъ, стоящій въ правой части равенства, при $r = \infty$, обращается въ нуль и мы получаемъ, что

$$\varepsilon = -\frac{i\sqrt{2}}{4}\, e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right),$$

и слѣдовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x i}\,dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right).$$

16) Полагая

$$F(z) = (1+z)^n,$$

имѣемъ, по теоремѣ Коши,

$$\int_s \frac{(1+z)^n\,dy}{z-a} = 2\pi i\,(1+a)^n,$$

откуда, взявъ k-ую производную отъ обѣихъ частей этого равенства, получаемъ

$$\int_s \frac{(1+z)^n\,dz}{(z-a)^{k+1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).\,2\pi i}{1.2.3\ldots k}\,(1+a)^{n-k},$$

слѣдовательно

$$\int_s \frac{(1+z)^n\,dz}{z^{k+1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\,.\,2\pi i.$$

Принимаемъ за контуръ интегрированія кругъ радіуса равнаго единицѣ и имѣющій центръ въ началѣ координатъ, тогда $z = e^{it}$ и мы получаемъ

$$1 + z = 1 + \cos t + i \sin t = 2 \cos \frac{t}{2} \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2}\right);$$

$$\int_s \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^n \left(\cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2}\right) \left(\cos t + i \sin t\right) idt}{\cos (k+1) t + i \sin (k+1) t}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{1.2.3 \ldots k}.$$

Отсюда видно, что

$$\int_0^{2\pi} \left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^n \sin \left(\frac{n-2k}{2}\right) t \, dt = 0$$

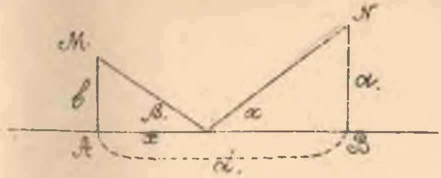
и

$$\int_0^{2\pi} \left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^n \cos \left(\frac{n-2k}{2}\right) t \, dt = \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{1.2.3 \ldots k} 2\pi,$$

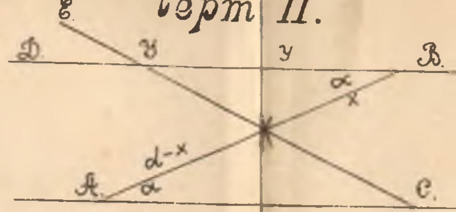
или, замѣняя въ послѣднемъ интегралѣ n черезъ $n+k$, получаемъ

$$\int_0^{2\pi} \left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^{n+k} \cos \left(\frac{n-k}{2}\right) t \, dt = 2\pi \cdot \frac{(n+1)(n+2) \ldots (n+k-1)(n+k)}{1.2.3 \ldots k}.$$

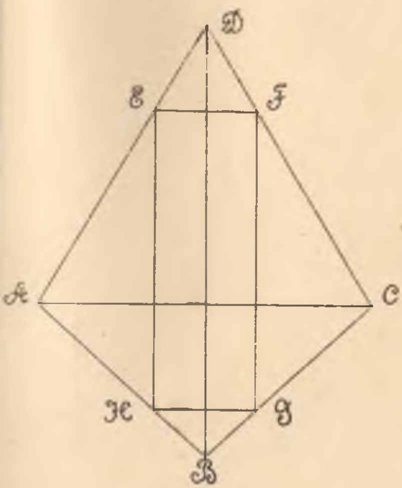
Черт. I.



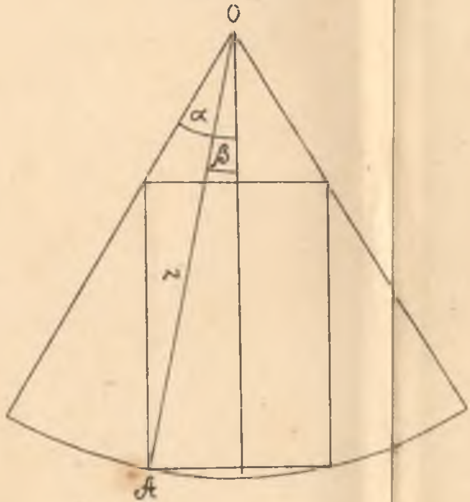
Черт II.

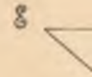


Черт. IV.

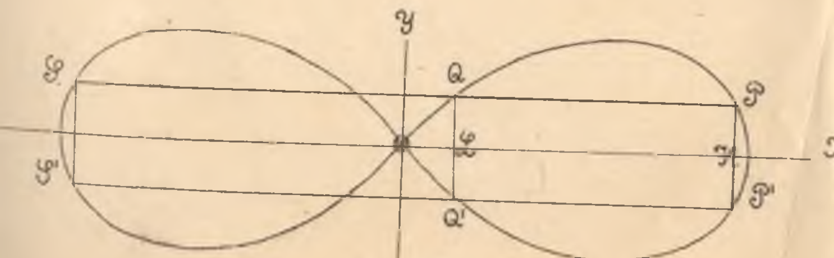


Черт. V.

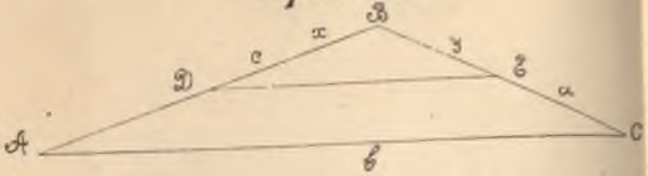




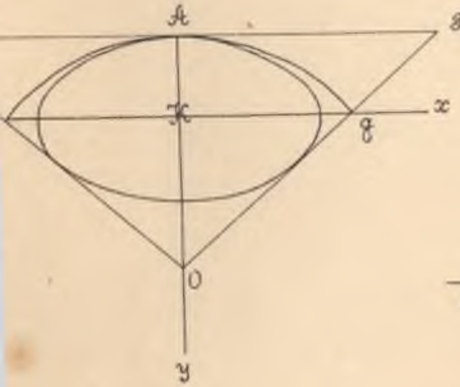
Черт. VII.

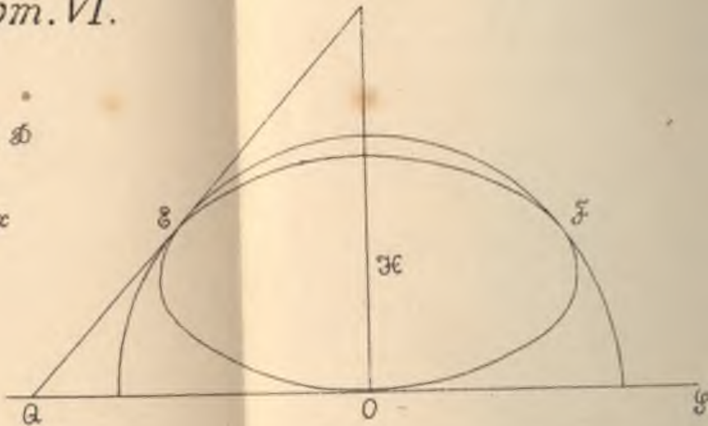


Черт. III.

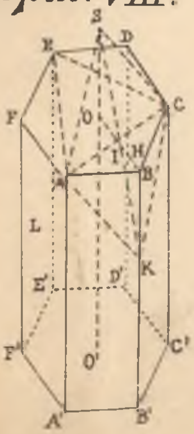


Черт. VI.





Черт. VIII.



Черт. IX.

ЛИТ. К БИРКЕНФЕЛЬДА С П

$x(x-5$

$x^2(x-4)$

ЦѢНА 1 РУБ. 50 КОП.