Gerhard Kowalewski

Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій

ГЕРГАРДЪ КОВАЛЕВСКІЙ
профессоръ Боннскаго университета

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЙ

переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей приватъ-доцента

С. О. ШАТУНОВСКАГО

Я не признаю для человѣчества другихъ интересовъ, кромѣ интереса къ истинѣ. Salomon Maimon.

Съ 31 чертеж. въ текстѣ

MATHESIS

Типо-Литографія Л. С. Шутака. Троицкая 27.

ОДЕССА 1911

Отъ редактора перевода.

Книга эта не нуждается въ рекомендаціи. Я хотѣлъ бы только обратить вниманіе читателя на изложеніе ученій объ обратныхъ функціяхъ, объ опредѣленныхъ и криволинейныхъ интегралахъ, а также на изложеніе ученія о тригонометрическихъ рядахъ. Мѣстами книга снабжена немногочисленными и краткими моими примѣчаніями. Они, въ отличіе отъ примѣчаній автора, отмѣчены звѣздочками.

С. Шатуновскій.

Г. Багами.

ПОСВЯЩАЕТСЯ

ПАМЯТИ

ЭРНЕСТО ЧЕЗАРО

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ собраніи сочиненій, выходящихъ въ свѣтъ подъ общимъ именемъ: „Изъ міра природы и духа“, я опубликовалъ „Введеніе въ исчисленіе безконечно малыхъ“ *), которое имѣетъ много точекъ соприкосновенія съ предлежащей книгой.

Будучи стѣсненъ въ объемѣ и принимая въ сооображеніе цѣли упомянутаго собранія, я тамъ долженъ былъ оставить въ сторонѣ многое такое, что теперь могло быть обстоятельно обработано, напримѣръ, теорію ирраціональныхъ чиселъ.

При опредѣленіи ирраціональныхъ чиселъ я примкнулъ къ Дедекинду (Dedekind) **). Введеніе же ариѳметическихъ операцій уже напоминаетъ Кантора (Cantor). Къ этому изложенію меня побудили работы Бэра (Baire).

Какъ я уже показалъ въ своемъ маленькомъ сочиненіи, можно очень легко описать понятіе о „предѣлѣ“, если пользоваться выраженіемъ „почти всѣ“. Когда члены безконечнаго множества, за конечнымъ числомъ исключеній, обладаютъ извѣстнымъ свойствомъ, то я говорю, что почти всѣ члены множества обладаютъ этимъ свойствомъ. Формула

$$\lim x_n = x$$

означаетъ тогда, что въ каждой окрестности числа x лежатъ почти всѣ числа x_n.

Знатокъ и въ другихъ мѣстахъ книги замѣтитъ новыя формулировки и упрощенія, которыя, будемъ надѣяться, облегчаютъ изученіе исчисленія безконечно малыхъ.

Я повсюду старался быть возможно строгимъ. Только при геометрическомъ толкованіи чиселъ помощью числовой линіи я,

---

*) Русскій переводъ этой книги вышелъ въ Одессѣ въ 1909 г.

**) Р. Дедекиндъ. «Непрерывность и ирраціональныя числа», 2-ое изданіе, Одесса, 1909 г.

какъ мнѣ казалось, могъ бы запугать читателя, если бы сталъ вдаваться въ изъясненіе аксіомъ, положенныхъ тамъ въ основаніе. Новѣйшими работами Гёльдера (Hölder) возникающіе здѣсь вопросы исчерпаны съ законченною основательностью.

Замѣчу еще, что, во вниманіе къ объему книги, я ограничился вещественною областью.

Боннъ, въ сентябрѣ 1908 г. **Г. Ковалевскій.**

СОДЕРЖАНІЕ.

Прибавленіе.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
11	19 сверху	$[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$	$\langle a, b)$, $(a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$
25	4 снизу	означаетъ	, означаетъ
29	9 снизу	равенство	неравенство
40	2 снизу	$a \leqq x_n \leqq b$	$a \leqq x \leqq b$
46	7 сверху	$u > v$	$u < v$
50	4 снизу	которое	который
68	9 снизу	пропущенъ знаменатель h.	
304	8 снизу	сходится равномѣрно	сходится
320	1 снизу	$< {}^1\pi$	$< \pi$.

Введенiе.

Задачи о касательной, о maxima и minima и о вычисленiи длинъ, площадей и объемовъ дали толчекъ къ изобрѣтенiю исчисленiя безконечно малыхъ.

Уже древнiе греческiе геометры занимались частными случаями этихъ задачъ. Слѣдуетъ прежде всего назвать Архимеда (287—212), примѣнявшаго нѣкоторый родъ интегральнаго исчисленiя къ вычисленiю площадей и объемовъ, къ опредѣленiю центровъ тяжести. Знамениты его квадратура параболическаго сегмента и вычисленiя круга и шара.

Но только послѣ того, какъ Вiета (Vieta, 1540—1603) и Декартъ (Descartes, 1596—1650) обосновали аналитическую геометрiю, эти задачи могли быть обработаны въ полной общности.

Онѣ были исчерпаны въ Ньютоновомъ исчисленiи флюксiй и въ Лейбницевомъ дифференцiальномъ и интегральномъ исчисленiи. Оба рода исчисленiя различаются только въ обозначенiяхъ. Символика, введенная Лейбницемъ (Leibniz, 1646—1716), однако же, въ такой мѣрѣ цѣлесообразна, что совершенно вытѣснила символику Ньютона.

Ньютонъ (1642—1727) долго сохранялъ втайнѣ свое исчисленiе флюксiй, вѣроятно, по той причинѣ, что ему не давалось точное обоснованiе этой дисциплины. Въ своемъ знаменитомъ сочиненiи „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1686—1687) онъ все выводитъ по строгимъ правиламъ грековъ и вообще не дѣлаетъ никакого употребленiя изъ исчисленiя флюксiй.

Уже въ 1684 году Лейбницъ обнародовалъ краткую замѣтку о своемъ дифференцiальномъ исчисленiи въ „Acta eruditorum“, и, не заботясь о недостаточности основанiй новаго исчисленiя, онъ и его ученики (прежде всего братья Бернулли) сдѣлали очень плодотворныя примѣненiя этого исчисленiя.

Это было благословеніемъ для успѣха науки. Огромная область, открытая методомъ безконечно малыхъ, раньше всего должна была быть обслѣдована въ самыхъ различныхъ направленіяхъ. Только тогда (во второй половинѣ 19-го вѣка) могъ наступить критическій періодъ, въ теченіе котораго попытались дать новому исчисленію прочное основаніе.

Оказалось, что прежде всего понадобилось установленіе точнаго понятія о числѣ. Дедекиндъ (Dedekind), Вейерштрассъ (Weierstrass) и Г. Канторъ (G. Cantor) указали путь для строгаго введенія ирраціональнаго числа. И теперь уже возможно построить вполнѣ безупречно исчисленіе безконечно малыхъ. Его примѣненіе къ геометріи также было подвергнуто критическому испытанію, и относящіяся сюда задачи могутъ считаться исчерпанными.

Въ послѣдующемъ мы строгимъ образомъ разовьемъ основанія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій и, сообразно съ этимъ, начнемъ съ разсмотрѣнія ирраціональныхъ чиселъ.

Глава I.

Введенie иррацiональныхъ чиселъ.

§ 1. **Рацiональныя числа.** Цѣлыя числа $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, а также положительныя и отрицательныя дроби называютъ рацiональными числами [1]). Они достаточны для рѣшенiя всякаго уравненiя вида

$$ax + b = 0,$$

гдѣ a и b цѣлыя числа и a отлично отъ нуля.

Но, если ограничить понятiе о числѣ рацiональными числами, то уже уравненiе

$$x^2 - 2 = 0$$

было бы неразрѣшимымъ.

Чтобы это доказать, слѣдуетъ замѣтить, что квадратъ четнаго числа есть четное число; нечетное же число имѣетъ нечетный квадратъ. Если m и n суть два взаимно простыхъ числа, то изъ равенства

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \text{ или } m^2 = 2n^2$$

вытекало бы, что m есть четное число; поэтому

$$m = 2m' \ (m' \text{ цѣлое число}).$$

Но тогда получилось бы

$$4m'^2 = 2n^2, \text{ т. е. } 2m'^2 = n^2,$$

и n тоже должно было бы быть четнымъ, такъ что

$$n = 2n' \ (n' \text{ цѣлое число});$$

m и n, вопреки допущенiю, не были бы взаимно простыми.

---

[1]) Мы предполагаемъ, что читатель умѣетъ производить вычисленiя съ этими числами такъ, какъ его этому обучали въ школѣ.

Нѣтъ раціональнаго числа, квадратъ котораго равенъ 2.

Во избѣжаніе такихъ явленій, какъ неразрѣшимость уравненія $x^2 - 2 = 0$, было предпринято расширеніе понятія о числѣ, что мы теперь и будемъ излагать.

§ 2. **Сѣченія въ области раціональныхъ чиселъ.** Подъ сѣченіемъ въ области раціональныхъ чиселъ мы вмѣстѣ съ Дедекиндомъ [1]) понимаемъ такое раздѣленіе этихъ чиселъ на два класса, что каждое число одного класса, называемаго нижнимъ, меньше каждаго числа другого класса, называемаго верхнимъ.

Мы, напримѣръ, получаемъ сѣченіе, если, исходя изъ любого раціональнаго числа, мы относимъ къ одному классу всѣ раціональныя числа, которыя меньше a или равны a, а къ другому классу всѣ раціональныя числа, которыя больше a.

Точно такъ же мы получимъ сѣченіе, если мы отнесемъ къ одному классу всѣ раціональныя числа, которыя меньше a, а къ другому всѣ раціональныя числа, которыя больше или равны a.

Оба эти сѣченія обладаютъ тою особенностью, что въ первомъ имѣется наибольшее число въ нижнемъ классѣ, а во второмъ случаѣ имѣется наименьшее число въ верхнемъ классѣ (именно a).

Если передъ нами сѣченіе, и въ нижнемъ его классѣ есть наибольшее (въ верхнемъ его классѣ есть наименьшее) число a, то всякое раціональное число, которое больше (меньше) a, должно принадлежать верхнему (нижнему) классу. Съ другой стороны, каждое число верхняго (нижняго) класса больше (меньше) каждаго числа нижняго (верхняго) класса и потому также больше, чѣмъ a. Верхній (нижній) классъ состоитъ такимъ образомъ изъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ, которыя больше (меньше) a, и, слѣдовательно, нижній (верхній) — изъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ, которыя меньше или равны (больше или равны) a.

Есть еще третій родъ сѣченій, въ которыхъ нижній классъ не имѣетъ наибольшаго, а верхній классъ не имѣетъ наименьшаго числа.

Если мы отнесемъ, напримѣръ, къ верхнему классу всѣ положительныя раціональныя числа, которыхъ квадраты больше 2, а

[1]) «Stetigkeit und irrationale Zahlen». Braunschweig, 1872. Русскій переводъ: «Непревывность и ирраціональныя числа». Одесса. 1909·

къ нижнему всѣ остальныя раціональныя числа, то, какъ легко убѣдиться, этимъ будетъ установлено сѣченіе. Однако же, въ этомъ сѣченіи нижній классъ не содержитъ наибольшаго и верхній классъ не содержитъ наименьшаго числа.

А именно, если r есть положительное раціональное число, которое (какъ, напримѣръ, 1) принадлежитъ нижнему классу, то $r^2 < 2$, такъ какъ не выполняется ни одно изъ соотношеній $r^2 > 2$ и $r^2 = 2$ (ср. § 1). Теперь выберемъ положительное раціональное число h, которое удовлетворяло бы неравенствамъ

$$h < 1 \text{ и } h < \frac{2 - r^2}{2r + 1}.$$

Тогда

$$(r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 < r^2 + (2r + 1)\,h < 2.$$

Такимъ образомъ, въ нижнемъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа.

Если r есть число верхняго класса, такъ что $r > 0$ и $r^2 > 2$, то можно выбрать положительное раціональное число h такимъ, чтобы удовлетворить неравенству

$$h < \frac{r^2 - 2}{2r}.$$

Тогда $r - h$ будетъ положительнымъ и

$$(r - h)^2 = r^2 - 2rh + h^2 > r^2 - 2rh > 2.$$

Такимъ образомъ, въ верхнемъ классѣ нѣтъ наименьшаго числа.

§ 3. **Ирраціональныя числа.** Мы познакомились съ тремя различными родами сѣченій, которыя характеризуются слѣдующими предложеніями:

1. Въ нижнемъ классѣ есть наибольшее число a.
2. Въ верхнемъ классѣ есть наименьшее число a.
3. Нѣтъ ни наибольшаго числа въ нижнемъ классѣ, ни наименьшаго числа въ верхнемъ.

Теперь мы будемъ говорить, что сѣченіемъ опредѣляется раціональное число a въ случаяхъ 1 и 2 и ирраціональное число въ случаѣ 3.

Въ этомъ содержится расширеніе понятія объ ирраціональномъ числѣ *), о чемъ упоминалось выше.

§ 4. **Сравненіе ирраціональнаго числа съ раціональнымъ числомъ.** Если ρ есть ирраціональное, а r раціональное число, то возможны два случая. Либо r принадлежитъ нижнему классу сѣченія, опредѣляющаго ρ, либо r принадлежитъ верхнему классу этого сѣченія.

Въ первомъ случаѣ мы будемъ говорить, что r меньше ρ, или что ρ больше r, и будемъ писать

$$r < \rho \text{ или } \rho > r.$$

Во второмъ случаѣ мы скажемъ, что r больше ρ или ρ меньше r, и будемъ писать

$$r > \rho \text{ или } \rho < r.$$

Согласно этому условію, ирраціональное число больше каждаго числа нижняго класса и меньше каждаго числа верхняго класса.

Такимъ образомъ, если a есть число нижняго, а b число верхняго класса того сѣченія, которымъ опредѣляется число x, то, независимо отъ того, будетъ ли x раціональнымъ или ирраціональнымъ, мы имѣемъ

$$a \leqq x \leqq b,$$

т. е., каждое число нижняго класса не больше, а каждое число верхняго класса не меньше числа, опредѣляемаго сѣченіемъ.

§ 5. **Неравенства между двумя раціональными и однимъ ирраціональнымъ числомъ.** Если r, s суть раціональныя, а ρ есть ирраціональное число, то изъ неравенствъ

$$r < \rho < s$$

всегда вытекаетъ неравенство

$$r < s.$$

*) Всякій разъ, когда мы имѣемъ сѣченіе третьяго рода, мы создаемъ символъ, — напримѣръ, ρ —, называемъ этотъ символъ ирраціональнымъ числомъ и говоримъ, что оно опредѣляется нашимъ сѣченіемъ.

Ибо $r < \rho$ означаетъ, что r принадлежитъ нижнему классу, а $\rho < s$ означаетъ, что s принадлежитъ верхнему классу сѣченія, которымъ ρ опредѣляется. Каждое же число нижняго класса меньше каждаго числа верхняго класса.

Точно такъ же легко показать, что изъ неравенствъ

$$\rho < r < s$$

всегда вытекаетъ неравенство

$$\rho < s,$$

а изъ неравенствъ

$$r < s < \rho$$

всегда слѣдуетъ неравенство

$$r < \rho.$$

§ 6. **Сравненіе двухъ ирраціональныхъ чиселъ.** Пусть ρ и σ будутъ два различныхъ ирраціональныхъ числа. Это значитъ, что различны*) тѣ сѣченія, которыми опредѣляются ирраціональныя числа ρ и σ [1]). Тогда необходимо должно существовать раціональное число r, которое въ одномъ сѣченіи принадлежитъ верхнему, въ другомъ—нижнему классу, и которое поэтому будетъ больше одного изъ двухъ ирраціональныхъ чиселъ,—скажемъ, больше числа ρ, — и меньше другого, такъ что

$$\rho < r < \sigma.$$

Въ такомъ случаѣ мы станемъ называть ρ меньшимъ и σ большимъ изъ двухъ ирраціональныхъ чиселъ ρ, σ и будемъ писать

$$\rho < \sigma \text{ или } \sigma > \rho.$$

Чтобы оправдать это опредѣленіе, необходимо еще замѣтить, что нѣтъ такого раціональнаго числа s, которое удовлетворяло бы неравенствамъ

$$\sigma < s < \rho.$$

*) Различіе сѣченій, которыми опредѣляются ирраціональныя числа, характеризуется тѣмъ, что можно указать раціональное число, принадлежащее верхнему классу въ одномъ сѣченіи и нижнему въ другомъ. Если такого раціональнаго числа нѣтъ, то оба сѣченія разсматриваются, какъ одно.

[1]) Если ρ и σ опредѣлены однимъ и тѣмъ же сѣченіемъ, то мы пишемъ $\rho = \sigma$ и говоримъ, что числа ρ и σ равны.

Изъ неравенствъ $r < \sigma < s$ вытекало бы, по § 5, что $r < s$, а изъ неравенствъ $s < \rho < r$ слѣдовало бы, что, наоборотъ, $s < r$.

§ 7. **Неравенства между однимъ раціональнымъ и двумя ирраціональными числами.** Если ρ, σ суть ирраціональныя числа, r — раціональное число, то, по опредѣленію § 6, изъ неравенствъ

$$\rho < r < \sigma$$

постоянно вытекаетъ неравенство

$$\rho < \sigma.$$

Далѣе слѣдуетъ замѣтить, что изъ неравенствъ

$$r < \rho < \sigma$$

постоянно вытекаетъ неравенство

$$r < \sigma,$$

а изъ неравенствъ

$$\rho < \sigma < r$$

— неравенство

$$\rho < r,$$

ибо, въ виду неравенства $\rho < \sigma$, существуетъ раціональное число s такого рода, что $\rho < s < \sigma$. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, въ первомъ случаѣ

$$r < \rho < s < \sigma,$$

а во второмъ

$$\rho < s < \sigma < r.$$

Отсюда же, основываясь постоянно на § 5, выведемъ, что въ первомъ случаѣ $r < s < \sigma$ и $r < \sigma$, а во второмъ случаѣ $\rho < s < r$ и $\rho < r$.

§ 8. **Неравенство между тремя ирраціональными числами.** Если ρ, σ и τ суть ирраціональныя числа, то изъ неравенствъ

$$\rho < \sigma < \tau$$

постоянно слѣдуетъ неравенство

$$\rho < \tau.$$

Выберемъ раціональное число r, удовлетворяющее неравенствамъ $\rho < r < \sigma$. Тогда

$$\rho < r < \sigma < \tau.$$

Такимъ образомъ, по § 7, имѣемъ: $\rho < r < \tau$ и $\rho < \tau$.

§ 9. **Вещественныя числа.** Раціональныя и ирраціональныя числа называютъ вещественными числами или просто числами. Мы хотимъ здѣсь сопоставить нѣкоторыя свойства этихъ чиселъ.

1. Если α и β суть два различныхъ числа, то

$$\text{либо } \alpha < \beta, \text{ либо } \alpha > \beta,$$

и, если три числа α, β, γ находятся другъ съ другомъ въ соотношеніи

$$\alpha < \beta < \gamma,$$

то отсюда постоянно слѣдуетъ [1]), что

$$\alpha < \gamma.$$

На основаніи этихъ свойствъ говорятъ, что вещественныя числа образуютъ расположенное множество (Menge) *)

n чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можно всегда такъ расположить, что ни одно изъ нихъ не будетъ больше (меньше) слѣдующаго. Ихъ называютъ тогда возрастающими (убывающими).

2. Если $\alpha < \gamma$, то можно выбрать такое (даже раціональное) число β, что $\alpha < \beta < \gamma$.

На основаніи этого свойства множество вещественныхъ чиселъ называютъ плотнымъ.

Мы говоримъ о числѣ β, что оно лежитъ между α и γ (содержится или заключается между α и γ, или есть число между α и γ).

Что между α и γ дѣйствительно есть раціональное число β, слѣдуетъ изъ опредѣленія въ § 6 для случая, когда α и γ оба суть ирраціональныя числа. Въ случаѣ, когда α число раціональное, а γ ирраціональное, (α—ирраціональное, а γ раціональное), это слѣдуетъ изъ того, что между раціональными числами, которыя меньше (больше) ирраціональнаго, нѣтъ наибольшаго (наименьшаго). Наконецъ, если оба числа α и γ — раціональныя, то достаточно положить, напримѣръ, $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$.

[1]) Если всѣ числа α, β, γ раціональныя, то это само собой понятно. Въ противномъ случаѣ это слѣдуетъ изъ предыдущаго параграфа.

*) Menge — множество, многообразіе, комплексъ, ансамбль, классъ.

Примѣняя повторно замѣчанiе 2, мы убѣждаемся въ томъ, что существуютъ n рацiональныхъ чиселъ $r_1, r_2, \ldots, r_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\alpha < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \gamma;$$

при этомъ n есть любое цѣлое положительное число.

3. Вещественное число α всегда можно заключить между двумя рацiональными числами r и s, имѣющими напередъ заданную разность d (d число рацiональное и положительное).

Если α рацiональное, то достаточно положить

$$r = \alpha - \tfrac{1}{2} d, \quad s = \alpha + \tfrac{1}{2} d.$$

Если α иррацiональное, то пусть r_0 будетъ рацiональное число нижняго класса, а s_0 рацiональное число верхняго класса соотвѣтствующаго сѣченiя. Тогда можно выбрать два цѣлыхъ числа p и q такъ, что

$$pd < r_0 \text{ и } qd > s_0$$

Въ ариѳметической прогрессiи

$$pd, \ (p+1)d, \ \ldots, \ qd$$

первый членъ меньше, а послѣднiй больше, чѣмъ α. Если въ этомъ ряду первый членъ, превосходящiй α, есть nd, то слѣдуетъ положить

$$r = (n-1)d \text{ и } s = nd.$$

4. Отъ рацiональныхъ чиселъ мы перешли къ иррацiональнымъ, производя сѣченiя. Если мы попробуемъ сдѣлать то же съ вещественными числами, то мы не придемъ къ новому расширенiю понятiя о числѣ. Вѣрна именно слѣдующая теорема:

Если имѣется сѣченiе въ области вещественныхъ чиселъ[1]), то либо въ нижнемъ классѣ есть наибольшее число, либо въ верхнемъ классѣ есть наименьшее.

Каждое сѣченiе S въ области вещественныхъ чиселъ содержитъ въ себѣ сѣченiе $\mathfrak{S}$ въ области рацiональныхъ чиселъ. Если α

[1]) Т. е. такое подраздѣленiе этихъ чиселъ на два класса, что каждое число одного класса меньше каждаго числа другого класса.

есть число, опредѣляемое сѣченіемъ $\mathfrak{S}$, и $\beta > \alpha$ ($\beta < \alpha$), то можно выбрать раціональное число r такъ, что

$$\beta > r > \alpha \quad (\beta < r < \alpha).$$

Такъ какъ r принадлежитъ тогда верхнему (нижнему) классу сѣченія $\mathfrak{S}$, а, слѣдовательно, и сѣченія S, то β принадлежитъ верхнему (нижнему) классу сѣченія S. Такимъ образомъ, α *) либо есть наибольшее число въ нижнемъ, либо наименьшее число въ верхнемъ классѣ сѣченія S.

На основаніи этого свойства множество вещественныхъ чиселъ называютъ непрерывнымъ.

§ 10. **Интервалы**. Если $a < b$, то совокупность всѣхъ чиселъ x, удовлетворяющихъ условіямъ

$$a < x < b,$$

называютъ интерваломъ (a, b) или (b, a).

a и b называются границами интервала, а именно a нижней и b верхней границей. Въ силу предыдущаго опредѣленія, границы не принадлежатъ интервалу. Если же къ интервалу мы хотимъ присоединить a или b, или a и b, то пишемъ соотвѣтственно $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$.

О числахъ, изъ которыхъ интервалъ состоитъ, мы говоримъ, что они принадлежатъ интервалу, лежатъ въ немъ, содержатся въ немъ, падаютъ въ интервалъ.

(a, b) называются окрестностью числа x, если x содержится въ (a, b), если, слѣдовательно, x лежитъ между a и b.

Глава II.

Предѣлы.

§ 11. **Послѣдовательности чиселъ**. Если мы представимъ себѣ, что въ натуральномъ ряду чиселъ 1, 2, 3, ... каждый членъ n замѣненъ вещественнымъ числомъ u_n, то получимъ послѣдовательность чиселъ или, короче, послѣдовательность.

*) Число α, конечно, принадлежитъ одному изъ двухъ классовъ сѣченія S.

Если всѣ члены послѣдовательности суть раціональныя числа, то послѣдовательность называется раціональной.

Существуютъ раціональныя послѣдовательности, которыя содержатъ въ себѣ всѣ раціональныя числа. Каждое положительное раціональное число можетъ быть представлено, и при томъ однимъ только способомъ, въ видѣ p/q, гдѣ p и q суть цѣлыя положительныя взаимно простыя числа. Мы будемъ называть $p+q$ высотою разсматриваемаго раціональнаго числа. Мы получимъ всѣ числа высоты n, если вычеркнемъ въ ряду дробей

$$\frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-2},\ \ldots,\ \frac{n-1}{1}$$

тѣ, которыя могутъ быть сокращены. Только 1 имѣетъ высоту 2, только $1/2$ и 2 имѣютъ высоту 3, только $1/3$ и 3 — высоту 4 и т. д. Если представить себѣ, что написаны по порядку всѣ числа высоты 2, 3, 4, ... [1]), то будемъ имѣть послѣдовательность чиселъ r_1, r_2, r_3, ..., въ которую каждое положительное раціональное число входитъ одинъ и только одинъ разъ, послѣдовательность $o, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \ldots$ явно содержитъ всѣ раціональныя числа и притомъ каждое одинъ только разъ [2]).

Если послѣдовательность u_1', u_2', u_3', ... получается изъ послѣдовательности u_1 u_2 u_3, ... путемъ опусканія опредѣленныхъ членовъ u_n, то u_1', u_2', u_3', ... будетъ называться частью послѣдовательности u_1, u_2, u_3, ...

§ 12. Точки сгущенія *) послѣдовательности чиселъ. Число u называется точкой сгущенія послѣдовательности u_1, u_2, u_3, ..., если въ каждой окрестности числа u находится неогра-

[1]) Числа высоты n мы представляемъ себѣ расположенными такъ, что числители возрастаютъ.

[2]) Что раціональныя числа можно написать въ формѣ послѣдовательности или что они, какъ говорятъ, образуютъ исчислимое множество, замѣчено было Георгомъ Канторомъ (Georg Cantor).

*) Здѣсь авторъ употребляетъ терминъ: Häufungswert, неупотребительный въ русскомъ языкѣ. Мы употребляемъ здѣсь употребительный въ русскомъ языкѣ терминъ „точка сгущенія“, Häufungspunkt.

ниченное число [1]) членовъ этой послѣдовательности **). Ясно, что достаточно будетъ разсмотрѣть раціонально ограниченныя окрестности.

Если присоединить къ послѣдовательности конечное число членовъ, то каждая точка сгущенія новой послѣдовательности будетъ также точкой сгущенія старой.

Если u_1', u_2', u_3', ... есть часть послѣдовательности u_1, u_2, u_3, ..., то каждая точка сгущенія послѣдовательности u_1', u_2', u_3', ... есть точка сгущенія и для u_1, u_2, u_3, ...

Послѣдовательность, которая получается изъ u_1, u_2, u_3, ... перестановкою членовъ, имѣетъ тѣ же точки сгущенія, что и u_1, u_2, u_3, ...

Построенная въ § 11 послѣдовательность всѣхъ раціональныхъ чиселъ имѣетъ то свойство, что для нея каждое число есть точка сгущенія. Въ самомъ дѣлѣ, въ каждомъ интервалѣ (a, b) находится неограниченное число раціональныхъ чиселъ (ср. § 9, замѣчаніе 2), т. е. неограниченное число членовъ нашей послѣдовательности.

§ 13. **Ограниченныя послѣдовательности. Теорема Вейерштрасса.** Послѣдовательность называется ограниченной, если есть интервалъ (a, b), содержащій всѣ ея члены. Можно, очевидно, предполагать a и b раціональными и, если угодно, принять $a = -b$.

Когда мы имѣемъ ограниченную послѣдовательность, то всегда существуютъ такія раціональныя числа, которыя меньше безчисленнаго множества членовъ этой послѣдовательности, а также и такія раціональныя числа, которыя этого свойства не имѣютъ. Всѣ раціональныя числа перваго рода мы отнесемъ къ нижнему, а всѣ раціональныя числа второго рода къ верхнему классу. Тогда каждое число нижняго класса меньше каждаго числа верхняго класса. Такимъ образомъ установлено сѣченіе.

---

[1]) Т. е. не только ограниченное число. *)

*) Это значитъ: каково бы ни было напередъ заданное положительное число N, въ каждой окрестности числа u содержится больше, чѣмъ N членовъ разсматриваемой послѣдовательности.

**) Точка сгущенія послѣдовательности можетъ быть, но можетъ и не быть членомъ этой послѣдовательности.

Пусть u будетъ число, опредѣляемое этимъ сѣченіемъ. Если тогда

$$r < u < s' < s \ (r,\ s,\ s' \text{—раціональныя числа}),$$

то r принадлежитъ нижнему, а s' верхнему классу. Такимъ образомъ, неограниченное число членовъ послѣдовательности будутъ превосходить r, но не s'. Отсюда слѣдуетъ, что въ (r, s) лежитъ неограниченное число членовъ послѣдовательности.

Каждая раціонально ограниченная окрестность числа u содержитъ поэтому неограниченное число членовъ нашей послѣдовательности. Итакъ, u есть точка сгущенія.

Этимъ мы доказали Вейерштрассову теорему: каждая ограниченная послѣдовательность обладаетъ, по крайней мѣрѣ, одною точкою сгущенія.

Найденная здѣсь точка сгущенія обладаетъ, однако, еще особеннымъ свойствомъ. Если $w > u$, то w не можетъ быть точкою сгущенія нашей послѣдовательности. Чтобы убѣдиться въ этомъ, выберемъ раціональныя числа r и s такъ, чтобы было

$$u < r < w < s.$$

Если бы w было точкой сгущенія, то въ интервалѣ (r, s) должно было бы лежать неограниченное число членовъ послѣдовательности. Всѣ они должны были бы быть больше r, между тѣмъ какъ r принадлежитъ верхнему классу построеннаго раньше сѣченія *). Такимъ образомъ, u есть наибольшая или, говорятъ и такъ, верхняя точка сгущенія послѣдовательности.

Если отнести всѣ раціональныя числа, которыя больше безчисленнаго множества членовъ ограниченной послѣдовательности, къ верхнему классу, а всѣ остальныя раціональныя числа къ нижнему классу [1]), то придемъ къ наименьшей или нижней точкѣ сгущенія.

§ 14. **Ограниченныя послѣдовательности съ одною точкою сгущенія**. На основаніи теоремы Вейерштрасса, ограни-

*) Въ этомъ содержится противорѣчіе, ибо r, будучи меньше неограниченнаго числа членовъ послѣдовательности, содержащихся въ интервалѣ (r, s), должно было бы быть отнесено къ нижнему классу.

[1]) Въ каждомъ изъ этихъ классовъ дѣйствительно содержатся числа.

ченная послѣдовательность u_1, u_2, u_3, . . . имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одну точку сгущенія. Мы хотимъ теперь разсмотрѣть тотъ замѣчательный случай, когда существуетъ одна только точка сгущенія. Если мы обозначимъ черезъ u эту единственную точку сгущенія, то въ каждой окрестности (r, s) точки u будетъ лежать безконечное множество членовъ послѣдовательности. Больше того: внѣ (r, s) можетъ находиться только ограниченное число членовъ нашей послѣдовательности. Въ самомъ дѣлѣ, если по опущеніи всѣхъ тѣхъ членовъ u_n, которые содержатся въ (r, s), осталась бы еще цѣлая послѣдовательность членовъ u_1', u_2', u_3', . . . , то она по теоремѣ Вейерштрасса имѣла бы точку сгущенія v, которая навѣрно отлична отъ u, такъ какъ ни одно u_n' не лежитъ въ интервалѣ (r, s). По § 12, v должно было бы быть точкой сгущенія и для u_1, u_2, u_3, . . . Эта послѣдовательность, вопреки допущенію, имѣла бы, такимъ образомъ, двѣ точки сгущенія.

Если послѣдовательность будетъ содержать только **ограниченное число** членовъ, которые **не** обладаютъ нѣкоторымъ опредѣленнымъ свойствомъ, то мы будемъ говорить, что **почти всѣ** члены послѣдовательности имѣютъ это свойство.

„Почти всѣ" должно, такимъ образомъ, постоянно означать: „всѣ, кромѣ конечнаго числа исключеній".

Введя этотъ способъ выраженія, мы можемъ слѣдующимъ образомъ выразить предыдущій результатъ:

Если ограниченная послѣдовательность имѣетъ **одну** только точку сгущенія, то въ **каждой** окрестности этой точки лежатъ **почти всѣ** члены послѣдовательности.

Когда послѣдовательность u_1, u_2, u_3, . . . находится въ такомъ отношеніи къ числу u, что въ каждой окрестности [1]) числа u лежатъ почти всѣ члены послѣдовательности, то послѣдовательность называютъ сходящейся, а число u — ея предѣломъ. Говорятъ также, что послѣдовательность или u_n сходится (стремится къ предѣлу u, имѣетъ предѣлъ u) и пишутъ

$$\lim u_n = u;$$

[1]) И здѣсь можно ограничиться раціонально ограниченными окрестностями.

„lim" есть начало латинскаго слова limes (предѣлъ). Эта формула читается такъ:

$$\text{limes } u_n \text{ равно } u \text{ *)}.$$

То, что мы нашли раньше, можно теперь такъ формулировать:

Каждая ограниченная послѣдовательность съ единственною точкой сгущенія сходится, и эта точка сгущенія есть ея предѣлъ.

Въ заключеніе покажемъ еще, что, наоборотъ, каждая сходящаяся послѣдовательность ограничена и ея предѣлъ есть ея единственная точка сгущенія.

$\lim u_n = u$ означаетъ, что въ каждой окрестности u лежатъ почти всѣ u_n. Поэтому, если $a < u < b$, то существуетъ только конечное число членовъ u_n, которые не падаютъ между a и b. Мы ихъ будемъ называть исключительными членами. Если выбрать интервалъ (α, β) такъ, чтобы въ немъ содержались всѣ исключительные члены, а также a и b, то въ (α, β) будутъ содержаться всѣ члены послѣдовательности. Такимъ образомъ послѣдовательность ограничена. Легко понять, что u есть ея точка сгущенія. Если v отлично отъ u, то можно построить такія окрестности около u и v, которыя не содержатъ общаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, достаточно взять три раціональныя числа r, s, t такимъ образомъ, чтобы $r > u > s > v > t$ или $r < u < s < v < t$, смотря по тому, будетъ ли $u > v$ или $u < v$. Въ (r, s) лежатъ тогда почти всѣ u_n, ибо $\lim u_n = u$. Такимъ образомъ, (s, t) содержитъ только конечное число членовъ, и потому v не можетъ быть точкой сгущенія. Согласно съ этимъ, u есть единственная точка сгущенія.

Отнынѣ мы знаемъ, что сходящіяся послѣдовательности и ограниченныя послѣдовательности съ единственною точкою сгущенія суть одно и то же.

§ 15. Замѣчанія о сходящихся послѣдовательностяхъ.

1. Если послѣдовательность стремится къ u и мы введемъ въ нее конечное число произвольныхъ членовъ, то получимъ новую послѣдовательность, которая также стремится къ u.

2. Каждая часть послѣдовательности, стремящейся къ u, также имѣетъ предѣлъ u.

*) Или предѣлъ u_n равенъ u.

3. Каждая послѣдовательность, которая получается черезъ перемѣщеніе членовъ другой послѣдовательности, стремящейся къ u, также имѣетъ предѣлъ u.

4. Если

$$\lim u_n = u \text{ и } \lim u'_n = u,$$

то и послѣдовательность

$$u_1, u_1', u_2, u_2', u_3, u_3', \ldots,$$

въ которой $(2n-1)$-ый членъ есть u_n, а $(2n)$-ый членъ есть u'_n, также имѣетъ предѣлъ u.

5. Если

$$\lim u_n = u, \ \lim v_n = v \text{ и } u < v,$$

то почти всѣ u_n будутъ меньше соотвѣтственныхъ v_n.

Дѣйствительно, имѣя въ виду неравенство $u < v$, мы можемъ выбрать раціональныя числа r, s, t такими, чтобы было

$$r < u < s < v < t.$$

Такъ какъ почти всѣ u_n лежатъ въ (r, s), а почти всѣ v_n лежатъ въ (s, t), то почти всѣ u_n меньше соотвѣтственныхъ v_n.

6. Если

$$\lim u_n' = u, \ \lim u_n'' = u$$

и постоянно

$$u_n' \leqq u_n \leqq u_n'',$$

то и

$$\lim u_n = u.$$

Ибо въ каждой окрестности точки u лежатъ почти всѣ u_n' и почти всѣ u_n'', слѣдовательно, и почти всѣ u_n.

§ 16. **Монотонныя послѣдовательности.** Послѣдовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$ называется возрастающей, когда

$$u_1 \leqq u_2 \leqq u_3 \leqq \ldots,$$

т. е. каждый членъ не больше послѣдующаго, и убывающей, когда

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots,$$

т. е. каждый членъ не меньше послѣдующаго. Оба рода послѣдовательностей называются монотонными.

Если $u_1, u_2, u_3, \ldots$ есть возрастающая и ограниченная послѣдовательность, то по теоремѣ Вейерштрасса существуетъ точка сгущенія u. Ни одинъ членъ послѣдовательности не превосходитъ этого числа u. Дѣйствительно, если бы было $u_\nu > u$, то при $r < u$ окрестность (r, u_ν) числа u содержала бы только ограниченное число членовъ u_n *), и u не могло бы быть точкой сгущенія. Если же наша послѣдовательность содержала бы двѣ точки сгущенія u и v $(> u)$, то при $s > v$ въ (u, s) не было бы ни одного u_n, между тѣмъ какъ v должно быть точкой сгущенія.

Такимъ образомъ, ограниченная возрастающая послѣдовательность всегда сходится, и ея предѣлъ не меньше каждаго изъ ея членовъ.

Точно такъ же легко убѣдиться въ томъ, что ограниченная убывающая послѣдовательность всегда сходится, и ея предѣлъ не больше каждаго изъ ея членовъ.

Монотонная послѣдовательность сходится поэтому тогда и только тогда, когда она ограничена.

§ 17. **Точки сгущенія, какъ предѣлы.** Если u есть точка сгущенія послѣдовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots$, то въ послѣдовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots$ есть часть $u_1', u_2', u_3', \ldots$, которая стремится къ u.

По § 9 (замѣчаніе 3), можно выбрать раціональное число r_n такъ, что

$$r_n < u < r_n + \frac{1}{n},$$

при чемъ n есть какое-либо положительное цѣлое число.

Для краткости мы интервалъ $\left(r_n, r_n + \frac{1}{n}\right)$ обозначимъ черезъ $\mathfrak{U}_n$. Такъ какъ u есть точка сгущенія, то въ интервалѣ $\mathfrak{U}_n$ лежитъ неограниченное число чиселъ u_n.

Пусть теперь будетъ

u_1' — первый членъ послѣдовательности, лежащій въ $\mathfrak{U}_1$;
u_2' — первый членъ, лежащій въ $\mathfrak{U}_2$ и слѣдующій за u_1;
u_3' — первый членъ, лежащій въ $\mathfrak{U}_3$ и слѣдующій за u_2', и т. д.

Числа $u_1', u_2', u_3', \ldots$ явно образуютъ часть послѣдовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots$

*) Если въ послѣдовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots$ членъ u_κ есть первый, не меньшій числа r, то интервалъ (r, u_ν) содержитъ только члены $u_\kappa, u_{\kappa+1}, \ldots u_{\nu-1}$ этой послѣдовательности.

Мы докажемъ, что

$$\lim u_n' = u.$$

Пусть будетъ

$$r < u < s \quad (r,\ s \text{ — раціональныя числа}).$$

Выберемъ раціональныя числа r', s' такъ, что

$$r < r' < u < s' < s.$$

Если теперь

$$n > \frac{1}{r'-r} \quad \text{и вмѣстѣ съ тѣмъ} \quad n > \frac{1}{s-s'},$$

то $\mathfrak{U}_n$ лежитъ въ (r, s). Дѣйствительно, если бы было $r_n \leqq r$, то отсюда слѣдовало бы, что

$$r_n + \frac{1}{n} < r + (r'-r), \quad \text{т. е.} \quad r_n + \frac{1}{n} < r' < u,$$

а между тѣмъ $r_n + \frac{1}{n} > u$. Если бы, далѣе, было $r_n + \frac{1}{n} \geqq s$, то отсюда слѣдовало бы

$$r_n + (s-s') > s, \quad \text{т. е.} \quad r_n > s' > u,$$

а между тѣмъ $r_n < u$. Мы видимъ такимъ образомъ, что

$$r < r_n < r_n + \frac{1}{n} < s,$$

т. е. $\mathfrak{U}_n$ лежитъ въ (r, s), коль скоро n больше каждаго изъ двухъ чиселъ $1 : (r'-r)$ и $1 : (s-s')$.

Сообразно съ этимъ въ каждой раціонально ограниченной окрестности числа u лежатъ почти всѣ $\mathfrak{U}_n$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и почти всѣ u_n'. Но это означаетъ, что $\lim u_n' = u$.

Въ § 11 мы ознакомились съ раціональною послѣдовательностью чиселъ, въ которой содержится каждое раціональное число. Въ § 12 мы замѣтили, что каждое число есть точка сгущенія этой послѣдовательности. На основаніи предыдущей теоремы, для каждаго числа существуетъ раціональная послѣдовательность, предѣломъ которой оно служитъ. Это можно и прямо доказать.

Глава III.

Раціональныя операціи.

§ 18. **Сумма двухъ чиселъ.** По § 17 для каждаго вещественнаго числа существуетъ раціональная послѣдовательность, предѣломъ которой оно служитъ.

Положимъ, что x и y суть два вещественныхъ числа и пусть

$\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$ (x_n, y_n—раціональныя числа).

Разсмотримъ послѣдовательность

$$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3, \ldots$$

Такъ какъ каждая сходящаяся послѣдовательность ограничена, то можно выбрать положительное раціональное число c такъ, что всѣ x_n и всѣ y_n будутъ заключаться въ интервалѣ $(-c, c)$. Но тогда всѣ числа $x_n + y_n$ лежатъ въ интервалѣ $(-2c, 2c)$, такъ что послѣдовательность $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2, \ldots$ ограничена и, слѣдовательно, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одну точку сгущенія по теоремѣ Вейерштрасса.

Если бы она имѣла двѣ точки сгущенія u и v $(> u)$, то въ ней существовала бы часть

$$x_1' + y_1',\ x_2' + y_2', \ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } u,$$

и часть

$$x_1'' + y_1'',\ x_2'' + y_2'', \ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } v.$$

Въ виду того, что $u < v$, можно выбрать раціональныя числа r, r', s, s' такъ, что

$$r < u < r' < s < v < s'.$$

Такъ какъ почти всѣ

$$x_n' + y_n' \text{ лежатъ въ } (r, r')$$

и почти всѣ

$$x_n'' + y_n'' \text{ лежатъ въ } (s, s'),$$

то почти всѣ разности

$$(x_n'' + y_n'') - (x_n' + y_n')$$

или суммы

$$(x_n'' - x_n') + (y_n'' - y_n')$$

будутъ больше, чѣмъ $s - r'$.

Съ другой стороны, имѣя какое-либо положительное раціональное число d, можно выбрать раціональныя числа a и b такъ, что

$$a < x < a + d \quad \text{и} \quad b < y < b + d.$$

Почти всѣ x_n' и x_n'' заключаются тогда въ $(a, a + d)$, а почти всѣ y_n' и y_n'' — въ $(b, b + d)$; слѣдовательно, почти всѣ $x_n'' - x_n'$ и $y_n'' - y_n'$ содержатся въ интервалѣ $(-d, d)$; поэтому почти всѣ

$$(x_n'' - x_n') + (y_n'' - y_n')$$

будутъ содержаться въ интервалѣ $(-2d, 2d)$.

Положивъ $d = \frac{1}{2}(s - r')$, приходимъ къ противорѣчію.

Мы знаемъ теперь, что послѣдовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots$ сходится (ср. § 14). Ея предѣлъ мы обозначимъ черезъ $x + y$ и будемъ его называть суммой чиселъ x и y.

Чтобы это опредѣленіе имѣло смыслъ, нужно еще показать слѣдующее:

Если

$$\lim \bar{x}_n = x \quad \text{и} \quad \lim \bar{y}_n = y \quad (\bar{x}_n, \bar{y}_n \text{ — раціональныя числа}),$$

то всегда будетъ

$$\lim (\bar{x}_n + \bar{y}_n) = \lim (x_n + y_n) \text{ *)}.$$

По § 15 (замѣчаніе 4)

$$x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \ldots \text{ стремится къ } x$$

и

$$y_1, \bar{y}_1, y_2, \bar{y}_2, \ldots \text{ стремится къ } y.$$

Такимъ образомъ, послѣдовательность

$$x_1 + y_1, \bar{x}_1 + \bar{y}_1, x_2 + y_2, \bar{x}_2 + \bar{y}_2, \ldots$$

сходится. По § 15 (замѣчаніе 2) всѣ части сходящейся послѣдовательности стремятся къ одному и тому же предѣлу; слѣдовательно, $x_n + y^n$ и $\bar{x}_n + \bar{y}_n$ имѣютъ одинъ предѣлъ.

Если x и y — оба раціональныя числа, то можно полагать всѣ x_n равными x, а всѣ y_n равными y. Тогда всѣ $x_n + y_n$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и $\lim (x_n + y_n)$, дѣлаются равными $x + y$. Такимъ образомъ, наше опре-

*) Если бы эта теорема не была вѣрна, то сложеніе представляло бы многозначную операцію, ибо мы имѣли бы $x + y = \lim (x_n + y_n)$ и $x + y = \lim (\bar{x}_n + \bar{y}_n)$.

дѣленіе не содержитъ въ себѣ противорѣчія въ случаѣ раціональныхъ x и y.

§ 19. **Произведеніе двухъ чиселъ**. Какъ и въ § 18, пусть будетъ

$$\lim x_n = x \quad \text{и} \quad \lim y_n = y \qquad (x_n,\ y_n\text{—раціональныя числа}).$$

Тогда послѣдовательность

$$x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_3y_3, \ldots$$

ограничена, такъ какъ всѣ ея члены принадлежатъ интервалу $(-c^2, c^2)$ [1]). Такимъ образомъ, эта послѣдовательность имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одну точку сгущенія.

Если бы она имѣла двѣ различныя точки сгущенія u и v ($>u$), то въ ней была бы часть

$$x_1'y_1',\ x_2'y_2', \ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } u,$$

и часть

$$x_1''y_1'',\ x_2''y_2'', \ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } v.$$

Выбравъ, какъ и въ § 18, раціональныя числа r, r', s, s' такъ, чтобы выполнялись неравенства

$$r < u < r' < s < v < s',$$

найдемъ, что почти всѣ $x'_n y'_n$ лежатъ въ (r, r'), а почти всѣ $x_n'' y_n''$ — въ (s, s'). Почти всѣ разности

$$x_n'' y''_n - x_n' y_n'$$

будутъ поэтому больше $s - r'$.

Пусть d будетъ произвольное положительное раціональное число; выберемъ раціональныя числа a и b такъ, что

$$a < x < a + d \quad \text{и} \quad b < y < b + d.$$

Почти всѣ x_n', x_n'' находятся тогда въ $(a,\ a + d)$, а почти всѣ y_n', y_n'' въ $(b,\ b + d)$; поэтому почти всѣ $x_n'' - x_n'$ и $y_n'' - y_n'$ находятся въ $(-d,\ d)$.

Принявъ во вниманіе, что

$$x_n'' y_n'' - x_n' y_n' = (x_n'' - x_n') y_n'' + (y_n'' - y_n') x_n',$$

находимъ, что почти всѣ числа $x_n'' y_n'' - x_n' y_n'$ лежатъ въ интервалѣ

[1]) c означаетъ то же, что и въ § 18.

$(-2cd, 2cd)$. Съ другой стороны, почти всѣ эти числа будутъ больше, чѣмъ $s - r'$. Положивъ

$$d = \frac{s - r'}{2c},$$

приходимъ къ противорѣчію.

Предѣлъ послѣдовательности $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots$ мы обозначимъ черезъ xy и назовемъ его **произведеніемъ** чиселъ x и y. Предѣлъ этотъ не зависитъ отъ того, какія употреблены были послѣдовательности, стремящіяся къ x и y [1]).

Когда x и y оба суть раціональныя числа, то можно всѣ x_n полагать равными x, а всѣ y_n — равными y. Тогда всѣ произведенія $x_n y_n$, а вмѣстѣ съ ними и $\lim x_n y_n$, становятся равными xy. Наше опредѣленіе не приводитъ, такимъ образомъ, къ противорѣчію въ случаѣ раціональныхъ x и y.

Произведеніе $(-1)x$ мы обозначимъ черезъ $-x$, сумму $x + (-y)$ черезъ $x - y$. Въ случаѣ раціональныхъ x и y это не ведетъ къ противорѣчію, ибо тогда на самомъ дѣлѣ

$$(-1)x = -x$$

и

$$x + (-1)y = x - y.$$

§ 20. **Обратное значеніе числа, отличнаго отъ нуля.** Пусть $x > 0$ $(x < 0)$ и

$$\lim x_n = x \quad (x_n \text{ — раціональныя числа}).$$

Выберемъ раціональныя числа k и k' такъ, что

$$k' > x > k > 0 \quad (k' < x < k < 0).$$

Тогда почти всѣ x_n лежатъ въ интервалѣ (k, k'). Остальныя x_n мы опустимъ, и пусть тогда остается послѣдовательность $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots$

Всѣ члены послѣдовательности

$$\frac{1}{\mathfrak{x}_1}, \frac{1}{\mathfrak{x}_2}, \frac{1}{\mathfrak{x}_3}, \ldots$$

явно содержатся въ интервалѣ

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k'}\right),$$

[1]) Доказывается, какъ въ § 18.

вслѣдствіе чего эта послѣдовательность **ограничена** и имѣетъ, поэтому, по крайней мѣрѣ, **одну** точку сгущенія. Если бы она имѣла двѣ точки сгущенія u и $v\ (>u)$, то въ ней была бы часть

$$\frac{1}{\mathfrak{x}_1'},\ \frac{1}{\mathfrak{x}_2'},\ \frac{1}{\mathfrak{x}_3'},\ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } u.$$

и часть

$$\frac{1}{\mathfrak{x}_1''},\ \frac{1}{\mathfrak{x}_2''},\ \frac{1}{\mathfrak{x}_3''},\ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } v.$$

Когда раціональныя числа r, r', s, s' выбраны такъ, что

$$r<u<r'<s<v<s',$$

то почти всѣ $1/\mathfrak{x}_n'$ лежатъ въ (r, r'), почти всѣ $1/\mathfrak{x}_n''$ въ (s, s'). Поэтому почти всѣ разности

$$\frac{1}{\mathfrak{x}_n''}-\frac{1}{\mathfrak{x}_n'}$$

становятся больше, чѣмъ $s-r'$.

Пусть теперь d будетъ произвольное положительное раціональное число; выберемъ раціональное число a такъ, что

$$a<x<a+d.$$

Почти всѣ $\mathfrak{x}_n'$ и $\mathfrak{x}_n''$ содержатся тогда въ $(a, a+d)$, поэтому почти всѣ $\mathfrak{x}_n'-\mathfrak{x}_n''$ будутъ содержаться въ $(-d, d)$. Принявъ въ соображеніе, что

$$\frac{1}{\mathfrak{x}_n''}-\frac{1}{\mathfrak{x}_n'}=\frac{\mathfrak{x}_n'-\mathfrak{x}_n''}{\mathfrak{x}_n'\mathfrak{x}_n''},$$

и что всѣ произведенія $\mathfrak{x}_n'\mathfrak{x}_n''$ больше, чѣмъ k^2, находимъ, что почти всѣ разности $1/\mathfrak{x}_n''-1/\mathfrak{x}_n'$ падаютъ въ интервалъ

$$\left(-\frac{d}{k^2},\ \frac{d}{k^2}\right).$$

Съ другой стороны, почти всѣ эти разности будутъ больше, чѣмъ $s-r'$. Положивъ

$$d=k^2\ (s-r'),$$

приходимъ къ противорѣчію.

Поэтому послѣдовательность

$$\frac{1}{\mathfrak{x}_1},\ \frac{1}{\mathfrak{x}_2},\ \frac{1}{\mathfrak{x}_3},\ldots$$

сходится. Ея предѣлъ мы обозначимъ черезъ $1/x$ и назовемъ обратнымъ значеніемъ числа x. Такимъ образомъ,

$$\frac{1}{x}=\lim \frac{1}{\mathfrak{x}_n}$$

или

$$\frac{1}{x}=\lim \frac{1}{x_n},$$

ибо въ каждой окрестности числа $1/x$ лежатъ не только почти всѣ $1/\mathfrak{x}_n$, но и почти всѣ $1/x_n$ [1]) *).

$1/x$ не зависитъ отъ того, какая была употреблена раціональная послѣдовательность, стремящаяся къ x [2]).

Если x раціональное число, то можно всѣ x_n положить равными x. Тогда всѣ $1/x_n$, а, слѣдовательно, и $\lim 1/x_n$, становятся равными $1/x$. Поэтому не будетъ противорѣчія въ случаѣ раціональнаго x.

Произведеніе y на $1/x$ (x не равно нулю) мы обозначимъ черезъ y/x или $y:x$ и будемъ называть частнымъ y и x. Въ случаѣ раціональныхъ x и y противорѣчія не будетъ.

§ 21. **Раціональныя операціи.** Основными операціями мы будемъ называть слѣдующія:

1. Переходъ отъ x къ x (тождество).

2. Переходъ отъ x къ $1/x$ (инверсія, обращеніе). Эта операція примѣнима только тогда, когда число x отлично отъ нуля.

3. Переходъ отъ x, y къ $x+y$ (сложеніе).

4. Переходъ отъ x, y къ xy (умноженіе).

Подъ раціональной операціей мы разумѣемъ послѣдовательность конечнаго числа основныхъ операцій.

---

[1]) Такъ какъ послѣдовательность $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots$ получена изъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ черезъ опущеніе конечнаго числа членовъ.

*) Итакъ, утвержденіе, что изъ равенства $\lim x_n = x$ ($x \neq 0$) слѣдуетъ равенство $\frac{1}{x}=\lim\frac{1}{x_n}$ означаетъ, что 1) почти всѣ x_n отличны отъ нуля и потому почти всѣ они имѣютъ обратныя значенія, 2) почти всѣ эти обратныя значенія принадлежатъ любой окрестности числа $\frac{1}{x}$.

[2]) Доказательство, какъ въ § 18.

Положимъ, для болѣе точнаго описанія, что мы имѣемъ n чиселъ:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Примѣняя къ одному или къ двумъ изъ нихъ основную операцію $\mathfrak{G}_1$, получаемъ число x_{n+1}. Изъ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ получаемъ при помощи основной операціи $\mathfrak{G}_2$ число x_{n+2} и т. д., пока, наконецъ, послѣ примѣненія p операцій

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_p$$

не придемъ къ числу x_{n+p}. О числѣ x_{n+p} говорятъ, что оно получено изъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ посредствомъ раціональной операціи, или раціонально выведено изъ нихъ.

Для выраженія того, что число x раціонально выведено изъ чиселъ

$$a, b, \ldots, h,$$

мы будемъ писать

$$x = \mathfrak{R}\ (a, b, \ldots, h).$$

Если всѣ числа $a, b, \ldots, h$ будутъ раціональными, то и x, очевидно, будетъ раціональнымъ.

Положимъ теперь, что $a, b, \ldots, h$ суть какія-либо вещественныя числа, и что къ нимъ примѣнима раціональная операція $\mathfrak{R}$. Положимъ еще, что

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b, \ldots, \lim h_n = h$$
$$(a_n, b_n, \ldots, h_n \text{ — раціональныя числа}).$$

Тогда

$$\mathfrak{R}\ (a, b, \ldots, h) = \lim \mathfrak{R}\ (a_n, b_n, \ldots, h_n)\ ^{*)}.$$

Эта формула, очевидно, вѣрна, когда $\mathfrak{R}$ есть основная операція.

Допустимъ, что она уже доказана для такихъ раціональныхъ операцій $\mathfrak{R}$, которыя состоятъ изъ послѣдовательныхъ $p-1$ основныхъ операцій. Если теперь удастся доказать, что формула вѣрна и въ томъ случаѣ, когда $\mathfrak{R}$ образовано послѣдовательностью p основныхъ операцій, то формула будетъ оправдана вообще.

---

*) Это значитъ, что 1) операція $\mathfrak{R}$ выполнима почти для всѣхъ чиселъ $a_n, b_n, \ldots, h_n$ (т. е. можно указать число m такого рода, что при всякомъ $n > m$ выраженіе $\mathfrak{R}\ (a_n, b_n, \ldots, h_n)$ будетъ имѣть смыслъ), и 2) почти всѣ числа $\mathfrak{R}\ (a_n, b_n, \ldots, h_n)$ находятся въ любой окрестности числа $\mathfrak{R}\ (a, b, \ldots, h)$.

Пусть $\mathfrak{S}_1$ будетъ первая изъ этихъ p основныхъ операцій и

$$k = \mathfrak{S}_1 (a, b, \ldots, h).$$

Тогда

$$\mathfrak{R} (a, b, \ldots, h) = \overline{\mathfrak{R}} (a, b, \ldots, h, k),$$

гдѣ $\overline{\mathfrak{R}}$ означаетъ послѣдовательность $p-1$ операцій. А такъ какъ

$$k = \lim \mathfrak{S}_1 (a_n, b_n, \ldots, h_n) = \lim k_n \text{ [1]}$$

и

$$\overline{\mathfrak{R}} (a, b, \ldots, h, k) = \lim \overline{\mathfrak{R}} (a_n, b_n, \ldots, h_n, k_n),$$

то

$$\mathfrak{R} (a, b, \ldots, h) = \lim \overline{\mathfrak{R}} (a_n, b_n, \ldots, h_n, k_n) = \lim \mathfrak{R} (a_n, b_n, \ldots, h_n).$$

§ 22. **Правила для раціональныхъ операцій.** Какъ читатель уже знаетъ, раціональныя операціи съ раціональными числами подчинены слѣдующимъ правиламъ: [2])

(1) $$(x + y) + z = x + (y + z),$$
(2) $$x + y = y + x,$$
(3) $$x + 0 = x,$$
(4) $$(xy) z = x (yz)$$
(5) $$xy = yx,$$
(6) $$0x = 0,$$
(7) $$1x = x,$$
(8) $$(x + y) z = xz + yz,$$
(9) $$x - x = 0,$$
(10) $$\frac{x}{x} = 1 (x \gtreqless 0).$$

Всѣ эти формулы имѣютъ общую форму. Лѣвая, какъ и правая, часть каждой формулы получается путемъ примѣненія раціональной операціи къ числамъ

$$0,\ 1, -1,\ x,\ y,\ z.$$

Каждое изъ предыдущихъ равенствъ можно поэтому написать въ видѣ

$$\mathfrak{R} (0, 1, -1, x, y, z) = \mathfrak{R}_1 (0, 1, -1, x, y, z),$$

гдѣ $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_1$ означаютъ раціональныя операціи.

---

[1]) $k_n = \mathfrak{S}_n (a_n, b_n, \ldots, h_n)$ — есть раціональное число.

[2]) x, y, z — раціональныя числа.

Пусть теперь x, y, z будутъ произвольныя вещественныя числа, однако же такія, чтобы операціи $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_1$ можно было примѣнить къ числамъ 0, 1, —1, x, y, z. Пусть далѣе

$$\lim x_n = x,\ \lim y_n = y,\ \lim z_n = z$$

$$(x_n,\ y_n,\ z_n\text{—раціональныя числа}).$$

Тогда, по § 21,

$$\mathfrak{R}(0,\ 1, -1,\ x,\ y,\ z) = \lim\ \mathfrak{R}(0,\ 1, -1,\ x_n,\ y_n,\ z_n)$$

и

$$\mathfrak{R}_1(0,\ 1, -1,\ x,\ y,\ z) = \lim\ \mathfrak{R}_1(0,\ 1, -1,\ x_n,\ y_n,\ z_n).$$

Такъ какъ наши правила примѣнимы къ раціональнымъ числамъ, то

$$\mathfrak{R}(0,\ 1, -1,\ x_n,\ y_n,\ z_n) = \mathfrak{R}_1(0,\ 1, -1,\ x_n,\ y_n,\ z_n);$$

слѣдовательно, и предѣлы равны. Предыдущія правила вычисленія примѣнимы поэтому всегда, когда x, y, z суть вещественныя числа.

§ 23. **Неравенства.** Если x, y, z суть раціональныя числа, то всегда изъ неравенства

$$x > y \text{ слѣдуетъ } x + z > y + z;$$

далѣе, изъ неравенствъ

$$x > y \text{ и } z > 0 \text{ слѣдуетъ } xz > yz.$$

Мы хотимъ доказать, что оба эти положенія вѣрны и тогда, когда x, y, z суть произвольныя вещественныя числа.

Пусть будетъ

$$\lim x_n = x,\ \lim y_n = y,\ \lim z_n = z$$

$$(x_n,\ y_n,\ z_n\text{—раціональныя числа}).$$

Тогда почти для всѣхъ значеній индекса n (§ 15, замѣчаніе 5)

$$x_n > y_n, \qquad (x_n > y_n \text{ и } z_n > 0);$$

слѣдовательно,

$$x_n + z_n > y_n + z_n \qquad (x_n z_n > y_n z_n).$$

Если же выполнялось бы неравенство

$$x + z < y + z \qquad (xz < yz),$$

то почти всѣ $x_n + z_n$ были бы меньше соотвѣтствующихъ $y_n + z_n$ (почти всѣ $x_n z_n$ были бы меньше соотвѣтствующихъ $y_n z_n$). Но и равенство

$$x + z = y + z \qquad (xz = yz)$$

невозможно, потому что изъ него, по § 22, слѣдовало бы $x = y$. *)

Такимъ образомъ,

$$x + z > y + z \qquad (xz > yz).$$

§ 24. **Слѣдствія.** 1. Изъ неравенствъ

$$x > y \quad \text{и} \quad x_1 > y_1$$

слѣдуетъ [1])

$$x + x_1 > y + y_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$x + x_1 > y + x_1 > y + y_1.$$

---

*) Изъ предложенiй, изложенныхъ въ § 22, это еще не вытекаетъ, и мы приведемъ поэтому другое доказательство разсматриваемыхъ въ § 23 теоремъ.

При $x > y$ можно найти четыре раціональныхъ числа r, ρ, s и σ, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$x > r + \rho > r > y; \quad s + \sigma > z > s; \quad r + \rho > r + \sigma.$$

Теперь почти всѣ числа x_n, y_n, z_n удовлетворяютъ неравенствамъ

$$x_n > r + \rho > r > y_n, \quad s + \sigma > z_n > s,$$

откуда

$$x_n + z_n > r + \rho + s > r + \sigma + s > y_n + z_n;$$

поэтому

$$x + z \geqslant r + \rho + s > r + \sigma + s \geqslant y + z,$$

т. е.

$$x + z > y + z.$$

Если $z > 0$, то число s и почти всѣ числа z_n можно считать положительными, и потому можно во всѣхъ предыдущихъ формулахъ замѣнить знаки сложенія знаками умноженія, чѣмъ докажемъ, что изъ соотношенiй $x = y$, $z > 0$ вытекаетъ равенство $xz > yz$. Аналогичныя теоремы докажутся для случаевъ $x < y$ или $z < 0$. Теперь легко доказать отъ противнаго, что изъ соотношенiй $x + z \gtreqless y + z$ вытекаютъ соотвѣтственно соотношенія $x \gtreqless y$, и что равенство $xy = 0$ влечетъ за собою одно изъ равенствъ $x = 0$, $y = 0$. Въ этихъ теоремахъ содержатся теоремы объ однозначности операцiй вычитанія и дѣленія. Въ самомъ дѣлѣ, если $Z - z = x$ и $Z - z = y$, то $x + z = y + z$ и потому $x = y$. Если же $\frac{Z}{z} = x$, $\frac{Z}{z} = y$, $z \neq 0$, то $(x - y)z = 0$ и потому $x = y$.

[1]) Изъ $x \geq y$ и $x_1 \geq y_1$ слѣдуетъ $x + x_1 \geq y + y_1$.

Если y и y_1 суть положительныя числа или нули, то изъ неравенствъ

$$x > y \quad \text{и} \quad x_1 > y_1$$

всегда слѣдуетъ [1])

$$xx_1 > yy_1.$$

Дѣйствительно, для $y > 0$

$$xx_1 > yx_1 > yy_1.$$

Въ случаѣ же $y=0$

$$xx_1 > yx_1 = yy_1.$$

2. Изъ неравенства $x > y$ слѣдуетъ

$$-x < -y.$$

Для доказательства припишемъ въ неравенствѣ

$$x + z > y + z$$

величинѣ z значеніе $-x-y$.

Такимъ образомъ, $-x < 0$, когда $x > 0$, и $-x > 0$, когда $x < 0$. Изъ двухъ чиселъ

$$x \quad \text{и} \quad -x,$$

въ случаѣ, когда ни одно изъ двухъ не равно нулю, одно будетъ поэтому положительнымъ, т. е. больше нуля, другое — отрицательнымъ, т. е. меньше нуля. Положительное обозначаютъ знакомъ $|x|$ и называютъ абсолютной величиной x. Говорятъ также, что x, взятое абсолютно, равно $|x|$. Въ случаѣ $x=0$ полагаютъ $|x|=0$.

Очевидно,

$$|x| = |-x|,$$

ибо по § 22

$$-(-x) = (-1)(-1)x = x.$$

Далѣе вѣрна формула:

$$|xy| = |x|\,|y|,$$

потому что

$$|x| = \varepsilon x, \quad |y| = \varepsilon' y; \qquad (\varepsilon,\ \varepsilon' = \pm 1)$$

слѣдовательно,

$$|x|\,|y| = \varepsilon\varepsilon' xy = \varepsilon'' xy, \qquad (\varepsilon'' = \pm 1)$$

[1]) Когда y, y_1 суть положительныя числа или нули, то изъ $x \geq y$ и $x_1 \geq y_1$ слѣдуетъ $xx_1 \geq yy_1$.

и $|x|\,|y|$ не отрицательное число [1]).

Если x отлично отъ нуля, то (ср. § 22, формула 10)

$$x\frac{1}{x}=1;$$

такимъ образомъ,

$$|x|\left|\frac{1}{x}\right|=1,$$

поэтому

$$\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}.$$

Чтобы доказать формулу

$$|x+y|\leqq|x|+|y|,$$

слѣдуетъ принять въ соображеніе, что

$$-|x|\leqq\pm x\leqq|x| \text{ и } -|y|\leqq\pm y\leqq|y|;$$

поэтому

$$-|x|-|y|\leqq\pm(x+y)\leqq|x|+|y|.$$

Такъ какъ $x-y+y=x$, то

$$|x|\leqq|x-y|+|y|;$$

поэтому

$$|x-y|\geqq|x|-|y|$$

и

$$|x-y|\geqq|y|-|x|.$$

Сдѣлаемъ, наконецъ, еще слѣдующее замѣчаніе: предложенія

$$|x|<a \text{ и } -a<x<a$$

суть вполнѣ равнозначащія. Ибо изъ неравенства

$$|x|<a \text{ слѣдуетъ } -|x|>-a,$$

такъ что

$$-a<|x|<a \text{ и } -a<-|x|<a,$$

Изъ

$$-a<x<a \text{ слѣдуетъ } -a<-x<a.$$

Точно такъ же предложенія

$$|y-x|<\varepsilon \text{ и } x-\varepsilon<y<x+\varepsilon$$

---

[1]) Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенствъ $|x|\geqq 0$, $|y|\geqq 0$ слѣдуетъ $|x|\,|y|\geqq 0$ (ср. вторую теорему въ § 23).

суть вполнѣ равнозначащія. Ибо неравенство $|y - x| < \varepsilon$ означаетъ то же, что

$$-\varepsilon < y - x < \varepsilon,$$

а эти неравенства равнозначащи неравенствамъ

$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon.$$

§ 25. **Другой взглядъ на предѣлъ.** Если

$$\lim u_n = u,$$

то это, по § 14, означаетъ, что въ каждой окрестности числа u лежатъ почти всѣ u_n.

Если подъ ε понимать положительное число, то $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ будетъ окрестностью точки u, ибо изъ неравенствъ $\varepsilon > 0$ и $-\varepsilon < 0$, по § 23, вытекаетъ:

$$u - \varepsilon < u < u + \varepsilon.$$

Если (α, β) есть нѣкоторая окрестность числа u $(\alpha < u < \beta)$, то надлежащимъ выборомъ числа ε можно достичь того, чтобы окрестность $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ лежала въ (α, β). Слѣдуетъ только подчинить ε неравенствамъ

$$\varepsilon < u - \alpha \quad \text{и} \quad \varepsilon < \beta - u.$$

Послѣ этого ясно, что понятіе о предѣлѣ можетъ быть описано и такъ:

$\lim u_n = u$ означаетъ, что неравенству

$$|u - u_n| < \varepsilon$$

удовлетворяютъ **почти всѣ** u_n, какъ бы ни было выбрано положительное число ε.

§ 26. **Примѣненія.** 1. Изъ равенствъ

$$\lim u_n = u, \quad \lim v_n = v$$

слѣдуетъ

$$\lim (u_n + v_n) = u + v.$$

Въ самомъ дѣлѣ, почти всѣ u_n, v_n удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|u - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |v - v_n| < \frac{\varepsilon}{2}; \qquad (\varepsilon > 0)$$

слѣдовательно, почти всѣ $u_n + v_n$ удовлетворяютъ неравенству

$$|(u + v) - (u_n + v_n)| < \varepsilon,$$

ибо

$$|(u+v)-(u_n+v_n)| \leqq |u-u_n|+|v-v_n|.$$

2. Изъ равенствъ

$$\lim u_n = u, \quad \lim v_n = v$$

слѣдуетъ

$$\lim (u_n v_n) = uv.$$

Почти всѣ u_n, v_n удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|u-u_n| < \varepsilon', \quad |v-v_n| < \varepsilon'. \qquad (\varepsilon' > 0)$$

Такъ какъ

$$uv - u_n v_n = (u-u_n)\,v + (v-v_n)\,u + (u_n-u)(v-v_n),$$

то почти всѣ $u_n v_n$ удовлетворяютъ неравенству

$$|uv - u_n v_n| < \varepsilon'(|u|+|v|) + \varepsilon'^2.$$

Если дано положительное число ε, то можно такъ выбрать ε', что

$$\varepsilon' < 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{1+|u|+|v|}.$$

Тогда почти всѣ $u_n v_n$ удовлетворяютъ неравенству

$$|uv - u_n v_n| < \varepsilon.$$

3. Изъ соотношеній

$$\lim u_n = u \quad \text{и} \quad u \gtrless 0$$

слѣдуетъ

$$\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u}.$$

Почти всѣ u_n удовлетворяютъ неравенству

$$|u-u_n| < \varepsilon'. \qquad (\varepsilon' > 0)$$

Если

$$\varepsilon' < \frac{1}{2}|u|,$$

то абсолютныя величины всѣхъ этихъ u_n будутъ больше, чѣмъ $\frac{1}{2}|u|$, такъ какъ

$$|u-u_n| \geq |u| - |u_n|.$$

Далѣе имѣемъ:

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u}{u_n u}.$$

Почти всѣ $1/u_n$ удовлетворяютъ, такимъ образомъ, неравенству

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n}\right| < \frac{2\varepsilon'}{u^2}.$$

Если дано положительное число ε, то мы можемъ положить

$$\varepsilon' = \frac{u^2}{2}\varepsilon.$$

Тогда почти всѣ $1/u_n$ удовлетворяютъ неравенству

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon. \; ^{*})$$

4. Пусть $u, v, \ldots, x$ будутъ числа, къ которымъ примѣнима раціональная операція $\mathfrak{R}$. Тогда изъ равенствъ

$$\lim u_n = u, \; \lim v_n = v, \ldots, \lim x_n = x$$

всегда вытекаетъ равенство

$$\lim \mathfrak{R}(u_n, v_n, \ldots, x_n) = \mathfrak{R}(u, v, \ldots, x). \; ^{**})$$

Если $\mathfrak{R}$ есть основная операція, то (ср. § 21) формула, очевидно, вѣрна.

Допустимъ, что она уже доказана для такихъ раціональныхъ операцій, которыя состоятъ изъ $p-1$ слѣдующихъ другъ за другомъ основныхъ операцій, и пусть $\mathfrak{R}$ означаетъ послѣдовательность p основныхъ операцій. Если $\mathfrak{G}_1$ есть первая изъ этихъ основныхъ операцій и

$$y = \mathfrak{G}_1(u, v, \ldots, x),$$

то

$$\mathfrak{R}(u, v, \ldots, x) = \overline{\mathfrak{R}}(u, v, \ldots, x, y),$$

гдѣ $\overline{\mathfrak{R}}$ означаетъ послѣдовательность $p-1$ основныхъ операцій. Но такъ какъ

$$y = \lim \mathfrak{G}_1(u_n, v_n, \ldots, x_n) = \lim y_n$$

и

$$\overline{\mathfrak{R}}(u, v, \ldots, x, y) = \lim \overline{\mathfrak{R}}(u_n, v_n, \ldots, x_n, y_n),$$

---

*) Слѣдуетъ замѣтить, что изъ равенства $\lim u_n = u$ $(u \gtrless 0)$ вытекаетъ, что почти всѣ дроби $1/u_n$ имѣютъ смыслъ, такъ какъ почти всѣ u_n въ этомъ случаѣ отличны отъ нуля ($|u_n| > \frac{1}{2}|u|$).

**) Этимъ равенствомъ хотятъ, между прочимъ, сказать, что почти для всѣхъ $u_n, v_n, \ldots, x_n$ выраженіе $\mathfrak{R}(u_n, v_n, \ldots, x_n)$ имѣетъ смыслъ (числовое значеніе). Данное въ текстѣ индуктивное доказательство разсматриваемой теоремы содержитъ въ себѣ также индуктивное доказательство и этого утвержденія.

то

$$\mathfrak{R}(u, v, \ldots, x) = \lim \overline{\mathfrak{R}}(u_n, v_n, \ldots, x_n, y_n) = \lim \mathfrak{R}(u_n, v_n, \ldots, x_n).$$

5. Если $\lim x_n = x$, то

$$\lim (x - x_n) = 0 \text{ и } \lim (x_n - x) = 0;$$

поэтому и

$$\lim |x - x_n| = 0.$$

Но, по § 24, No 2,

$$|x| - |x_n| \leqq |x - x_n| \text{ и } |x_n| - |x| \leqq |x - x_n|,$$

такъ что

$$-|x - x_n| \leqq |x_n| - |x| \leqq |x - x_n|;$$

слѣдовательно,

$$\lim (|x_n| - |x|) = 0$$

и потому

$$\lim |x_n| = \lim (|x| + |x_n| - |x|) = |x|.$$

Только въ случаѣ $x = 0$ изъ равенства

$$\lim |x_n| = |x|$$

постоянно слѣдуетъ обратное предложеніе, что

$$\lim x_n = x.$$

§ 27. **Критерій сходимости Коши (Cauchy).** Послѣдовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$ сходится тогда и только тогда, когда для каждаго положительнаго числа ε существуетъ такое u_ν, которое отличается почти отъ всѣхъ u_n меньше, чѣмъ на ε. [1])

Указанное условіе необходимо. Именно, если

$$\lim u_n = u,$$

то почти всѣ u_n удовлетворяютъ неравенству

$$|u - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если u_ν есть одно изъ этихъ u_n, такъ что

$$|u - u_\nu| < \frac{\varepsilon}{2},$$

[1]) Два числа x и y различаются менѣе, чѣмъ на ε, когда $|x - y| < \varepsilon$. Этотъ способъ выраженія мы могли бы употребить и въ § 25.

то почти всѣ u_n удовлетворяютъ неравенству

$$|u_n - u_\nu| < \varepsilon,$$

такъ какъ

$$u_n - u_\nu = (u_n - u) + (u - u_\nu).$$

Но указанное условіе также достаточно. А именно, если оно выполнено, то существуетъ членъ u_ρ, отъ котораго почти всѣ u_n отличаются менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{3}\varepsilon$.

Послѣдовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$ поэтому ограничена и, слѣдовательно, навѣрное имѣетъ точку сгущенія u. Между $u - \frac{1}{3}\varepsilon$ и $u + \frac{1}{3}\varepsilon$ находится неограниченное число членовъ u_n; поэтому существуетъ такой членъ u_σ, который удовлетворяетъ неравенствамъ

$$|u_\rho - u_\sigma| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad |u - u_\sigma| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Такъ какъ почти для всѣхъ u_n

$$|u_\rho - u_n| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

то почти всѣ u_n удовлетворяютъ неравенству

$$|u - u_n| < \varepsilon,$$

ибо

$$u - u_n = (u - u_\sigma) + (u_\sigma - u_\rho) + (u_\rho - u_n).$$

Глава IV.

Функціи отъ одной перемѣнной.

§ 28. **Перемѣнная.** Если дано множество $\mathfrak{M}$, состоящее исключительно изъ различныхъ чиселъ, то можно условиться понимать подъ буквой x каждое изъ этихъ чиселъ. Такую букву называютъ перемѣнной, каждое число изъ $\mathfrak{M}$ — значеніемъ этой перемѣнной, а самое множество $\mathfrak{M}$ — ея областью.

Когда область $\mathfrak{M}$ состоитъ изъ одного только числа, то говорятъ, что x есть постоянная (константа).

§ 29. **Функціи.** Если каждому значенію перемѣнной x соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе перемѣнной y, то y называютъ функціей отъ x и пишутъ [1])

$$y = f(x);$$

x называется независимой, y зависимой перемѣнной. Область перемѣнной x называютъ областью опредѣленія функціи $f(x)$.

Если къ каждому значенію перемѣнной x отнесено число, то этимъ опредѣлена функція въ области перемѣнной x, ибо числа, соотвѣтствующія значеніямъ x, можно разсматривать, какъ значенія перемѣнной y.

§ 30. **Примѣры.** Простѣйшая функція отъ x есть постоянная. Мы получимъ эту функцію, отнеся къ каждому значенію x одно и то же число.

Пусть x^m (m положительное цѣлое число) означаетъ, какъ и въ случаѣ раціональнаго x, произведеніе m множителей, равныхъ x. Очевидно, x^m есть функція отъ x. За область перемѣнной x можно здѣсь принять совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ. Также и

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\, x + a_m,$$

гдѣ $a_0, a_1, \ldots, a_m$ суть данныя числа ($m > o$), есть функція отъ x. Ее называютъ цѣлой раціональной функціей m-ой степени въ предположеніи, что a_0 не нуль. Постоянную, отличную отъ нуля, мы будемъ называть цѣлою функціей нулевой степени

Цѣлая раціональная функція m-ой степени имѣетъ по большей мѣрѣ m корней, т. е. существуетъ не больше, чѣмъ m значеній x, обращающихъ ее въ нуль.

Если x_1 есть корень, то

$$y = a_0(x^m - x_1^m) + a_1(x^{m-1} - x_1^{m-1}) + \cdots + a_{m-1}\,(x - x_1),$$

или

$$y = (x - x_1)\ (a_0' x^{m-1} + a_1' x^{m-2} + \cdots + a'_{m-1}),$$

гдѣ

$$a_0' = a_0,\ a_1' = a_0 x_1 + a_1,\ a_2' = a_0 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \ldots,$$

$$a'_{m-1} = a_0 x_1^{m-1} + a_1 x_1^{m-2} + \cdots + a_{m-1}.$$

---

[1]) Эта формула читается: «y равно f отъ x». Вмѣсто f можно употребить другую букву.

Изъ предыдущей формулы можно заключить, что наше утвержденіе вѣрно для цѣлыхъ функцій m-ой степени, если оно вѣрно для цѣлыхъ функцій $(m-1)$-ой степени. Но для функціи нулевой степени оно вѣрно; слѣдовательно, оно вѣрно вообще.

Частное двухъ цѣлыхъ функцій

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m \quad \text{и} \quad b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

т. е. выраженіе

$$\frac{a_0\,x^m + a_1\,x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0\,x^n + b_1\,x^{n-1} + \cdots + b_n},$$

также есть функція отъ x. Нужно только исключить тѣ значенія x, которыя являются корнями знаменателя. Такое частное называютъ **раціональной функціей**.

Раціональная функція, знаменатель которой имѣетъ степень, равную нулю, есть цѣлая раціональная функція.

§ 31. **Непрерывность.** Пусть x_0 будетъ значеніе перемѣнной x, и положимъ, что возможно выбрать такую послѣдовательность x_1, x_2, $x_3, \ldots$ значеній x, что $x_n \gtrless x_0$, но $\lim x_n = x_0$. Если для каждой такой послѣдовательности

$$\lim f(x_n) = f(x_0),$$

то говорятъ, что функція $f(x)$ **непрерывна** на мѣстѣ x_0. Въ противномъ случаѣ функція $f(x)$ на мѣстѣ x_0 имѣетъ **разрывъ**. Послѣдовательность, имѣющая вышеуказанное свойство, существуетъ тогда и только тогда, когда въ **каждой** окрестности числа x_0 существуютъ значенія x, **отличныя** отъ x_0.

Что это условіе необходимо, вытекаетъ изъ смысла формулы $\lim x_n = x_0\,(x_n \gtrless x_0)$. Но это условіе также достаточно. Если, напримѣръ, въ каждомъ интервалѣ

$$\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right),$$

гдѣ $n = 1, 2, 3, \ldots$, имѣется отличное отъ x_0 значеніе x_n перемѣнной x, то $\lim x_n = x_0$, потому что x_n лежитъ между двумя числами, стремящимися къ x_0.

Если нѣтъ такой послѣдовательности значеній x, что $\lim x_n = x_0$ и $x_n \gtreqless x_0$, то x_0 называютъ изолированнымъ значеніемъ x. Тогда вокругъ x_0 можно построить окрестность, въ которой x_0 есть единственное значеніе x.

О непрерывности и разрывѣ на мѣстѣ x_0 можно говорить только тогда, когда x_0 не изолировано.

Изъ § 26, No 4, можно вывести, что раціональная функція непрерывна на каждомъ мѣстѣ ея области опредѣленія.

§ 32. **Примѣненіе раціональныхъ операцій къ непрерывнымъ функціямъ.** Пусть $f(x)$, $g(x), \ldots,$ $u(x)$ будетъ конечное число функцій съ общей областью опредѣленія. Положимъ, что x_0 есть значеніе въ этой области, и что функціи $f(x)$, $g(x), \ldots, u(x)$ непрерывны при $x = x_0$.

Если можно примѣнить раціональную операцію $\mathfrak{R}$ къ числамъ

$$f(x_0),\ g(x_0), \ldots,\ u(x_0),$$

то функція

$$\mathfrak{R}\,(f(x),\ g(x), \ldots,\ u(x))$$

непрерывна при $x = x_0$. Дѣйствительно, если $\lim x_n = x_0$, то, по § 26, No 4,

$$\lim \mathfrak{R}\,(f(x_n),\ g(x_n), \ldots,\ u(x_n)) = \mathfrak{R}\,(f(x_0),\ g(x_0), \ldots,\ u(x_0)).$$

Замѣчаніе. Около x_0 можно построить такую окрестность, что операція $\mathfrak{R}$ будетъ примѣнима къ $f(x)$, $g(x), \ldots, u(x)$, коль скоро x принадлежитъ этой окрестности. Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ каждомъ интервалѣ

$$\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right),$$

гдѣ $n = 1, 2, 3, \ldots$, можно было указать такое число $\bar{x}_n$, что операція $\mathfrak{R}$ была бы непримѣнима къ числамъ $f(\bar{x}_n)$, $g(\bar{x}_n), \ldots, u(\bar{x}_n)$, то мы имѣли бы $\lim \bar{x}_n = x_0$, а потому, согласно § 26, No 4,

$$\lim \mathfrak{R}(f(\bar{x}_n),\ g(\bar{x}_n), \ldots,\ u(\bar{x}_n)) = \mathfrak{R}\,(f(x_0),\ g(x_0), \ldots\ u(x_0)).$$

Но тогда почти всѣ выраженія

$$\mathfrak{R}\,(f(\bar{x}_n),\ g(\bar{x}_n), \ldots, u(\bar{x}_n))$$

имѣли бы смыслъ.

§ 33. **Объ одномъ свойствѣ непрерывныхъ функцій.** Мы прежде всего докажемъ слѣдующую вспомогательную теорему:

Если $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ и функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ [1]), то между a и b есть число c такого рода, что $f(c) = 0$.

Допустимъ, что нѣтъ такого c. Тогда либо

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0, \text{ либо } f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0.$$

Въ первомъ случаѣ положимъ

$$a_1 = a \text{ и } b_1 = \frac{a+b}{2},$$

а во второмъ случаѣ

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ и } b_1 = b,$$

такъ что

$$f(a_1) > 0 \text{ и } f(b_1) < 0.$$

Точно тѣ же разсужденія можно примѣнить къ интервалу (a_1, b_1). Смотря по тому, будетъ ли

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0 \text{ или } f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0,$$

нижняя граница a_2 того или другого изъ интерваловъ

$$\left(a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right) \text{ или } \left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right)$$

даетъ функціи положительное значеніе, а верхняя его граница b_2— значеніе отрицательное.

---

[1]) Говоря подробно, мы требуемъ слѣдующаго: если $a \leqslant x_n \leqslant b$ и $\lim x_n = x$, то всегда должно быть $\lim f(x_n) = f(x)$.

Это послѣдовательное дѣленіе пополамъ промежутка можно продолжать in infinitum. При этомъ получается послѣдовательность интерваловъ

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots,$$

имѣющихъ то свойство, что

$$f(a_n) > 0, \ f(b_n) < 0.$$

Такъ какъ числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ явно представляютъ собой ограниченныя монотонныя послѣдовательности, то по § 16

$$\lim a_n \text{ и } \lim b_n$$

существуютъ, и, такъ какъ

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

то

$$\lim (b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n = 0,$$

такъ что

$$\lim a_n = \lim b_n.$$

Если обозначить черезъ c этотъ общій предѣлъ, то, въ виду непрерывности,

$$f(c) = \lim f(a_n) \text{ и } f(c) = \lim f(b_n).$$

Такъ какъ $f(a_n) > 0$, то необходимо $f(c) \geqq 0$, а такъ какъ $f(b_n) < 0$, то должно быть $f(c) \leqq 0$. Такимъ образомъ выводится, что $f(c) = 0$.

Теперь легко доказать слѣдующую общую теорему:

Пусть функція $F(x)$ будетъ непрерывной въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$. Пусть далѣе

$$F(a) = A \text{ и } F(b) = B. \qquad (A \gtrless B)$$

Если C есть произвольное число между A и B, то между a и b есть такое число c, что

$$F(c) = C.$$

Составимъ функцію

$$f(x) = \frac{F(x) - C}{A - B}.$$

Она удовлетворяетъ условіямъ вышеприведенной вспомогательной теоремы. Поэтому между a и b есть такое c, что $f(c) = 0$. Это означаетъ, что $F(c) = C$.

§ 34. **Примѣненія.** Пусть m будетъ положительное цѣлое число. Мы уже знаемъ, что въ этомъ случаѣ функція x^m повсюду непрерывна. Мы хотимъ показать, что уравненіе

$$x^m = a \qquad (a > 0)$$

имѣетъ положительный корень. [1])

При $x = 0$ функція $F(x) = x^m$ меньше, чѣмъ a, и именно равна нулю. Взявъ цѣлое число k, большее, чѣмъ a, будемъ имѣть

$$F(k) \geq k > a.$$

Такимъ образомъ,

$$F(0) < a \text{ и } F(k) > a.$$

Между 0 и k существуетъ поэтому, согласно § 33, такое c, что

$$F(c) = c^m = a$$ [2])

Не можетъ быть двухъ различныхъ положительныхъ чиселъ, которыхъ m-ыя степени были бы равны a. А именно, изъ неравенствъ

$$c_1 > c > 0$$

слѣдуетъ

$$c_1^m > c^m.$$

Положительное число c, котораго m-ая степень равна a, называютъ положительнымъ m-ымъ корнемъ изъ a; пишутъ

$$c = \sqrt[m]{a} \text{ или } c = a^{\frac{1}{m}}.$$

---

[1]) $x = 0$ есть единственный корень при $a = 0$.

[2]) Теперь мы видимъ, что разсмотрѣнное въ § 1 уравненіе $x^2 = 2$ разрѣшимо.

Если $a = 1$, то

$$\sqrt[m]{a} = 1\,.$$

Если $a > 1$, то $F(1) = 1 < a$. Поэтому $\sqrt[m]{a}$ лежитъ между 1 и k и, слѣдовательно, больше, чѣмъ 1. Если $a < 1$, то $F(1) = 1 > a$. Слѣдовательно, $\sqrt[m]{a}$ лежитъ между 0 и 1.

§ 35. **a^x для раціональныхъ значеній x ($a > 0$).** Если x есть положительное раціональное число, такъ что

$$x = \frac{n}{m},$$

при чемъ положительныя цѣлыя числа m, n должны быть взаимно простыми, то мы полагаемъ

$$a^x = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n.$$

Если x есть отрицательное раціональное число, то мы полагаемъ

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Пусть далѣе будетъ

$$a^0 = 1\,.$$

Теперь a^x имѣетъ смыслъ для каждаго раціональнаго значенія x. Читатель докажетъ формулы

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{и} \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

а также формулу

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

При этомъ $a > 0$, $b > 0$, а x, y суть раціональныя числа.

Послѣднюю формулу слѣдуетъ доказать, напримѣръ, только для $x = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Но

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a,$$

$$\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b,$$

такъ что

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\, b^{\frac{1}{n}}\right)^n = ab,$$

т. е.

$$a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}.$$

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ справедливости остальныхъ формулъ.

Изъ третьей формулы въ случаѣ $b = 1/a$ слѣдуетъ:

$$b^x = \frac{1}{a^x}.$$

Если $b < 1$, то $a > 1$. Въ дальнѣйшемъ мы можемъ поэтому ограничиться случаемъ $a > 1$. Въ случаѣ $a = 1$ будетъ постоянно $a^x = 1$.

§ 36. **Вспомогательная формула.** Пусть h будетъ число, отличное отъ нуля, и $1 + h > 0$. Тогда при $n = 2, 3, 4, \ldots$ имѣетъ мѣсто неравенство.

$$(1 + h)^n > 1 + nh.$$

Для доказательства примѣнимъ полную индукцію. Убѣждаемся прежде всего въ томъ, что неравенство вѣрно въ случаѣ $n = 2$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h.$$

Затѣмъ мы доказываемъ, что неравенство вѣрно для случая $n + 1$, когда оно вѣрно для n. Помножая обѣ части неравенства

$$(1 + h)^n > 1 + nh$$

на $1 + h$, получаемъ

$$(1 + h)^{n+1} > (1 + nh)(1 + h).$$

Но

$$(1 + nh)(1 + h) = 1 + (n + 1)h + nh^2 > 1 + (n + 1)h,$$

такъ что

$$(1 + h)^{n+1} > 1 + (n + 1)h.$$

§ 37. **Предѣлъ функціи a^x для раціональныхъ значеній x, приближающихся къ предѣлу нуль.** Предполагаемъ, что $a > 1$; слѣдовательно $\sqrt[n]{a} > 1$. Если теперь положить

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n,$$

то
$$a = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n;$$
такимъ образомъ,
$$0 < h_n < \frac{a-1}{n} \text{ и } \lim h_n = 0,$$
т. е.
$$\lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

Такъ какъ и $1 : \sqrt[n]{a}$ имѣетъ предѣлъ 1, то оба выраженiя
$$a^{\frac{1}{n}} \text{ и } a^{-\frac{1}{n}}$$
приближаются къ предѣлу 1.

Пусть теперь
$$\lim x_n = 0 \ (x_n \text{ — рацiональныя числа}),$$
и пусть ε будетъ произвольное положительное число. Тогда можно выбрать положительное цѣлое число ν такимъ образомъ, что оба числа $a^{\frac{1}{\nu}}$ и $a^{-\frac{1}{\nu}}$ будутъ лежать въ интервалѣ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Но почти всѣ x_n содержатся въ интервалѣ $\left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$; поэтому почти всѣ числа a^{x_n} содержатся [1]) въ
$$\left(a^{-\frac{1}{\nu}}, a^{\frac{1}{\nu}}\right), \text{ а потому и въ } (1-\varepsilon, 1+\varepsilon).$$
Но это означаетъ, что
$$\lim a^{x_n} = 1.$$

§ 38. **a^x для произвольныхъ вещественныхъ значенiй x.** Мы разсматриваемъ сходящуюся послѣдовательность рацiональныхъ чиселъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Всѣ они могутъ быть заключены между двумя цѣлыми числами k и l $(> k)$ Члены послѣдовательности
$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots$$
такимъ образомъ лежатъ [1]) между a^k и a^l, т. е. послѣдователь-

[1]) Мы опираемся здѣсь на то, что $a^x < a^y$, коль скоро $x < y$. Въ самомъ дѣлѣ, имъемъ $y = x + z$ $(z > 0)$ и $a^y = a^x a^z > a^x$, ибо $a^z > 1$, что непосредственно вытекаетъ изъ опредѣленiя и изъ § 34 (заключенiе). „$a>1$

ность ограничена и имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одну точку сгущенiя. Если бы она имѣла двѣ точки сгущенiя u и v ($>u$), то существовала бы часть

$$a^{y_1},\ a^{y_2},\ a^{y_3}, \ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } u,$$

и часть

$$a^{z_1},\ a^{z_2},\ a^{z_3}, \ldots, \text{ имѣющая предѣлъ } v.$$

Въ виду того, что $u > v$, можно выбрать рацiональныя числа r, r', s, s' такъ, что

$$r < u < r' < s < v < s'.$$

Такъ какъ почти всѣ числа

$$a^{y_n} \text{ лежатъ въ } (r, r')$$

и почти всѣ

$$a^{z_n} \text{ въ } (s,\ s'),$$

то почти всѣ разности

$$a^{z_n} - a^{y_n}$$

больше числа $s - r'$. Если же принять въ соображенiе, что

$$a^{z_n} - a^{y_n} = a^{y_n}\ (a^{z_n - y_n} - 1) < a^{r'}\ (a^{z_n - y_n} - 1),$$

и что

$$\lim\ (z_n - y_n) = 0,$$

то выйдетъ, что

$$\lim\ (a^{z_n} - a^{y_n}) = 0,$$

между тѣмъ какъ почти всѣ числа $a^{z_n} - a^{y_n}$ больше числа $s - r'$.

Мы знаемъ теперь, что a^{x_1}, a^{x_2}, $a^{x_3}, \ldots$ есть сходящаяся послѣдовательность. Предѣлъ этой послѣдовательности мы полагаемъ равнымъ a^x, гдѣ $x = \lim x_n$. Онъ не зависитъ отъ выбора той послѣдовательности рацiональныхъ чиселъ, которая имѣетъ предѣлъ x. А именно, если

$$\lim\ x_n = \lim\ \bar{x}_n = x,\ (x_n,\ \bar{x}_n \text{ — рацiональныя числа}),$$

то и послѣдовательность x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2, \ldots$ имѣетъ предѣлъ x. Поэтому и послѣдовательность

$$a^{x_1},\ a^{\bar{x}_1},\ a^{x_2},\ a^{\bar{x}_2}, \ldots$$

сходится. Всѣ части сходящейся послѣдовательности имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ. Въ частности

$$\lim a^{x_n} = \lim a^{\bar{x}_n}.$$

Не будетъ противорѣчія въ томъ случаѣ, когда x будетъ раціональное число, ибо мы вправѣ взять всѣ x_n равными x.

Отнынѣ a^x опредѣлено для всѣхъ вещественныхъ значеній x. Функцію a^x называютъ показательной функціей.

Легко доказать для любыхъ вещественныхъ значеній x и y формулы

$$a^{x+y} = a^x a^y, \ (a^x)^y = a^{xy}, \ (ab)^x = a^x b^x$$

$$(a > 0, \ b > 0),$$

которыя въ § 35 были установлены только для раціональныхъ значеній x и y.

Точно такъ же легко убѣдиться въ томъ, что $a^z > 1$ $(a > 1)$, коль скоро $z > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если взять раціональное число r между 0 и z, то будетъ $a^r > 1$. Если теперь $\lim z_n = z$ (z_n есть раціональное число), то почти всѣ z_n будутъ больше, чѣмъ r; слѣдовательно, почти всѣ a^{z_n} будутъ больше, чѣмъ a^r, такъ что $\lim a^{z_n}$ навѣрно не будетъ меньше, чѣмъ a^r, т. е. будетъ больше единицы.

Если $x < y$, то $a^x < a^y$, ибо

$$y = x + z \text{ и } z > 0,$$

такъ что $a^z > 1$; поэтому

$$a^y = a^x a^z > a^x.$$

Сообразно съ этимъ a^x постоянно возрастаетъ съ возрастаніемъ x.

§ 39. **Непрерывность функціи a^x.** Мы докажемъ, что изъ равенства

$$\lim x_n = x$$

всегда слѣдуетъ равенство

$$\lim a^{x_n} = a^x.$$

Можно выбрать раціональное число r_n такъ, что

$$r_n < x_n < r_n + \frac{1}{n}.$$

Такъ какъ обѣ разности

$$x_n - r_n \quad \text{и} \quad \left(r_n + \frac{1}{n}\right) - x_n$$

лежатъ между 0 и $1/n$, то

$$\lim r_n = x \quad \text{и} \quad \lim \left(r_n + \frac{1}{n}\right) = x.$$

Съ другой стороны,

$$a^{r_n} < a^{x_n} < a^{r_n + \frac{1}{n}}.$$

Такимъ образомъ a^{x_n} содержится между двумя числами, стремящимися къ a^x. Слѣдовательно, и a^{x_n} стремится къ a^x.

§ 40. **Логариѳмы при основаніи a.** Показательная функція a^x $(a > 1)$ имѣетъ одни только положительныя значенія. Ибо $a^0 = 1$, $a^x > 1$ (при $x > 0$), и, такъ какъ $a^x = 1/a^{-x}$, то a^x также будетъ положительнымъ при $x < 0$.

Имѣя произвольное положительное число y, можно выбрать положительное цѣлое число n такъ, что

$$a^{-n} < y < a^n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$a^n > 1 + n(a-1) \text{ и } a^{-n} < \frac{1}{1 + n(a-1)},$$

то нужно только позаботиться о томъ, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{1 + n(a-1)} < y < 1 + n(a-1),$$

которыя равносильны неравенствамъ

$$n > \frac{1-y}{(a-1)y} \text{ и } n > \frac{y-1}{a-1}.$$

Поэтому, согласно § 33, между $-n$ и n содержится число x такого рода, что $a^x = y$, и при томъ только одно такое число, ибо a^x постоянно возрастаетъ съ возрастаніемъ x. Это число x называютъ логариѳмомъ числа y при основаніи a и пишутъ

$$x = \operatorname{Log} y.$$

$\operatorname{Log} y$ опредѣленъ только для положительныхъ значеній y.

Изъ опредѣленія вытекаетъ непосредственно, что $\operatorname{Log} y$ постоянно возрастаетъ съ возрастаніемъ y. Легко также найти формулы

$$\operatorname{Log}(xy) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y \quad \text{и} \quad \operatorname{Log}(x^y) = y \operatorname{Log} x.$$

Въ первой x и y — оба положительныя числа, во второй только x необходимо должно быть положительнымъ.

§ 41. **Непрерывность функціи Log x.** Пусть

$$\lim x_n = x,$$

и x, равно какъ и всѣ x_n, пусть будутъ положительными. Тогда можно выбрать [1]) два числа k и l ($> k$) такъ, чтобы всѣ числа x_n лежали въ интервалѣ (k, l). Послѣдовательность

$$\operatorname{Log} x_1, \operatorname{Log} x_2, \operatorname{Log} x_3, \ldots$$

будетъ поэтому ограничена, и всѣ ея члены будутъ содержаться между $\operatorname{Log} k$ и $\operatorname{Log} l$. Если y есть точка сгущенія послѣдовательности и

$$\operatorname{Log} x_1', \operatorname{Log} x_2', \operatorname{Log} x_3', \ldots$$

есть такая часть послѣдовательности, которая имѣетъ своимъ предѣломъ y, то

$$\lim x_n' = \lim a^{\operatorname{Log} x_n'}, \text{ или } x = a^y.$$

Поэтому возможна одна только точка сгущенія, и она есть $\operatorname{Log} x$. Такимъ образомъ,

$$\lim \operatorname{Log} x_n = \operatorname{Log} x.$$

§ 42. **Натуральные логариѳмы.** Если во вспомогательной формулѣ § 36 положить

$$h = -\frac{1}{n^2},$$

[1]) Слѣдуетъ выбрать сначала k' и l' такими, чтобы выполнялись неравенства $0 < k' < x < l'$. Тогда въ интервалѣ (k', l') не будетъ лежать только ограниченное число чиселъ x_n. Эти x_n, а также и числа k' и l', должны содержаться въ (k, l).

то послѣ легкаго преобразованія получится:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Послѣдовательность

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1},\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2},\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3},\ldots$$

поэтому возрастаетъ.

Положивъ въ упомянутой вспомогательной формулѣ

$$h=\frac{1}{n^2-1},$$

находятъ прежде всего, что

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}>1+\frac{n}{n^2-1},$$

а такъ какъ

$$\frac{n}{n^2-1}>\frac{n}{n^2},$$

то

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}>1+\frac{1}{n}$$

и, наконецъ,

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Такимъ образомъ, послѣдовательность

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{2},\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^{3},\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^{4},\ldots$$

убываетъ.

Но эта послѣдовательность ограничена. Она имѣетъ поэтому предѣлъ, которое обозначаютъ черезъ e, такъ что

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

А такъ какъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}$$

и

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

то имѣемъ также:

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Обозначеніе e принадлежитъ Эйлеру (Euler).

Мы представили e, какъ предѣлъ убывающей, а равно и возрастающей послѣдовательности. Такимъ образомъ, согласно § 16, для $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Это число e сдѣлали основаніемъ системы логариѳмовъ, и логариѳмы при основаніи e называютъ натуральными логариѳмами. Для обозначенія натуральнаго логариѳма числа x мы употребляемъ символъ $\log x$.

§ 43. **Другія послѣдовательности, имѣющія предѣлъ e.** Когда почти всѣ члены послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ будутъ больше, чѣмъ g, какъ бы при этомъ число g ни было выбрано, то мы скажемъ, что a_n становится положительно-безконечнымъ или положительною безконечностью.

Мы примемъ, что всѣ числа a_n больше 1[1]).

Пусть ν_n будетъ наибольшее цѣлое число, которое меньше a_n или равно a_n. Тогда

$$0 \leqq a_n - \nu_n < 1,$$

такъ что и ν_n становится положительно-безконечнымъ. Но

$$1+\frac{1}{\nu_n+1}<1+\frac{1}{a_n}\leqq 1+\frac{1}{\nu_n},$$

такъ что[2])

$$\left(1+\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{a_n}<\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\leqq\left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{a_n},$$

---

[1]) Такъ какъ a_n становится положительно-безконечнымъ, то почти всѣ числа a_n больше 1. Мы представляемъ себѣ, что остальныя вычеркнуты.

[2]) Если $z > 0$, то $a^z > b^z$ $(a > b > 0)$. Въ самомъ дѣлѣ, $a/b = c > 1$ и $a^z = b^z c^z > b^z$.

и потому

$$\left(1+\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{\nu_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n+1}.$$

А такъ какъ оба числа

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} \text{ и } \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

имѣютъ предѣлъ e, то можно выбрать g такъ, чтобы эти числа при $m > g$ лежали въ интервалѣ $(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Но почти всѣ ν_n больше, чѣмъ g. Поэтому и почти всѣ числа

$$\left(1+\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{\nu_n}, \quad \left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n+1}$$

содержатся въ интервалѣ $(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$. То же относится, слѣдовательно, и къ числамъ

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n},$$

такъ что

$$\lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ будетъ послѣдовательность такого рода, что $-b_n$ становится положительною безконечностью. Тогда говорятъ, что b_n становится отрицательно-безконечнымъ или отрицательною-безконечностью.

Мы примемъ, что всѣ числа b_n меньше, чѣмъ -1.[1]) Если положить тогда

$$b_n = -1 - a_n,$$

то всѣ числа a_n будутъ положительными и

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = \left(\frac{a_n}{a_n+1}\right)^{-a_n-1} = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

---

[1]) Для этой цѣли достаточно отбросить только конечное число чиселъ b_n.

Такъ какъ $1/a_n$ стремится къ нулю, то

$$\lim\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

Итакъ, соединяя оба результата, мы можемъ сказать, что

$$\lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = e,$$

если $|\omega|$ становится безконечностью [1]).

Предложенія

„$|\omega|$ дѣлается безконечнымъ"

и

$$„\lim\frac{1}{\omega} = 0"$$

вполнѣ равнозначащи. Поэтому мы можемъ выразить нашъ результатъ и такъ:

Если h стремится къ нулю, оставаясь постоянно отличнымъ отъ нуля, то

$$\lim\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\} = e.$$

§ 44. **Предѣлъ выраженія $(a^h - 1):h$.** Мы предполагаемъ $a > 1$. Пусть $h (\gtreqless 0)$ стремится къ нулю. Тогда, какъ мы знаемъ, $\lim a^h = 1$, но a^h отлично отъ 1; поэтому

$$a^h = 1 + k \ (k \gtreqless 0) \text{ и } \lim k = 0.$$

Такъ какъ

$$h \log a = \log(1+k),$$

то

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{k \log a}{\log(1+k)} = \frac{\log a}{\log\left\{(1+k)^{\frac{1}{k}}\right\}}.$$

Но, по § 43,

$$\lim\left\{(1+k)^{\frac{1}{k}}\right\} = e;$$

[1]) Въ этомъ случаѣ достаточно сказать «безконечностью» вмѣсто «положительной безконечностью».

поэтому, по § 41,

$$\lim \log \left\{ (1+k)^{\frac{1}{k}} \right\} = \log e = 1;$$

слѣдовательно,

$$\lim \frac{a^h - 1}{h} = \log a.$$

Эта формула пригодна и при $a = 1$, такъ какъ въ этомъ случаѣ обѣ части становятся равными нулю.

Въ случаѣ $0 < a < 1$ слѣдуетъ положить $a = 1/b$. Тогда

$$\lim \frac{a^h - 1}{h} = \lim \frac{1 - b^h}{h b^h} = -\lim \frac{1}{b^h} \frac{b^h - 1}{h};$$

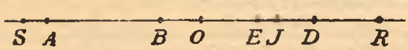
поэтому

$$\lim \frac{a^h - 1}{h} = -\log b = \log a.$$

Глава V.

Геометрическое толкованіе чиселъ и функцій.

§ 45. **Представленіе вещественныхъ чиселъ съ помощью точекъ прямой**[1]). Для представленія вещественныхъ чиселъ мы употребляемъ прямую, которую называемъ числовой прямой. На ней избираются двѣ различныя точки O и E. Точка O называется нулевой точкой, начальной точкой, началомъ, а точка E точкой единицы.



Фиг. 1.

Когда предложено положительное раціональное число r, то мы относимъ къ нему такую точку R числовой линіи, которая вмѣстѣ съ E расположена по одну сторону отъ точки O и притомъ такъ, что OR относится къ OE, какъ r къ 1. Если поэтому

---

[1]) Мы не будемъ излагать положенныхъ здѣсь въ основаніе геометрическихъ аксіомъ.

$r = m/n$ (m, n — цѣлыя положительныя числа), то мы отъ точки O въ сторону точки E откладываемъ m разъ n-ую часть прямой OE.

Точку R мы называемъ точкой изображенія (или просто изображеніемъ) числа r или, коротко, точкой r. E есть точка изображенія числа 1. Поэтому мы назвали E точкой единицы.

Если s есть отрицательное раціональное число, такъ что $s = -m/n$ (m, n — положительныя цѣлыя числа), то мы отъ точки O откладываемъ m разъ n-ую часть OE въ ту сторону, которая не содержитъ E. Такимъ образомъ мы получаемъ точку S, которая будетъ называться точкой изображенія числа s, или, коротко, точкой s.

Если еще разсматривать точку O, какъ точку изображенія числа нуль, то каждое раціональное число будетъ имѣть свою точку изображенія. Эти точки изображенія мы называемъ раціональными точками.

На фиг. 1 точка E лежитъ вправо отъ O. Если r и r' суть два различныхъ раціональныхъ числа и R и R' соотвѣтственно суть ихъ изображенія, то R' лежитъ вправо или влѣво отъ R, смотря по тому, будетъ ли $r' > r$ или $r' < r$.

Кромѣ раціональныхъ точекъ, на числовой прямой имѣются еще другія, которыя называются ирраціональными. Если, напримѣръ, построить квадратъ на сторонѣ OE и сдѣлать OJ равнымъ діагонали этого квадрата, то J не можетъ быть раціональной точкой. Въ самомъ дѣлѣ, если бы точка J была изображеніемъ раціональнаго числа r. то, по теоремѣ Пиѳагора, должно было бы быть $r^2 = 2$, что, какъ мы знаемъ, невозможно.

Ирраціональная точка J приводитъ къ подраздѣленію всѣхъ раціональныхъ точекъ на два класса. Къ первому, или нижнему, классу мы причисляемъ всѣ раціональныя точки, которыя лежатъ влѣво отъ J; ко второму, или верхнему, классу — всѣ раціональныя точки, которыя лежатъ вправо отъ J. Каждая точка нижняго класса лежитъ тогда влѣво отъ каждой точки верхняго класса. Если мы теперь замѣстимъ каждую раціональную точку тѣмъ раціональнымъ числомъ, для котораго она служитъ изображеніемъ, то получимъ сѣченіе (ср. § 2). Пусть α будетъ число, опредѣляемое этимъ сѣченіемъ. Это число будетъ ирраціональнымъ, ибо между каждой раціональной точкой и точкой J имѣются еще другія раціональныя точки, такъ что въ нижнемъ классѣ нѣтъ крайней правой, а въ верхнемъ нѣтъ крайней лѣвой точки. Теперь мы станемъ разсматривать J, какъ точку изображенія ирраціональнаго числа α и будемъ ее кратко называть точкой α.

Каждая точка числовой линіи является, такимъ образомъ, изображеніемъ вещественнаго числа. Это число называютъ абсциссой точки (въ отношеніи начала O и точки единицы E). Если P_1 и P_2 суть двѣ различныя точки, то и ихъ абсциссы x_1 и x_2 будутъ различными и притомъ P_2 будетъ лежать вправо или влѣво отъ P_1, смотря по тому, будетъ ли $x_2 > x_1$ или $x_2 < x_1$ [1]).

Каждому ли ирраціональному числу соотвѣтствуетъ точка, абсцисса которой есть это число? Сущность нашихъ пространственныхъ представленій такова, что этотъ вопросъ можетъ быть разрѣшенъ только при помощи аксіомы.

Если бы ирраціональному числу α не соотвѣтствовала никакая точка изображенія, то всѣ точки числовой линіи распались бы на два класса:

1. Точки, абсциссы которыхъ меньше, чѣмъ α.
2. Точки, абсциссы которыхъ больше, чѣмъ α.

Каждая точка нижняго класса находилась бы влѣво отъ каждой точки верхняго класса, и въ нижнемъ классѣ не было бы крайней правой, а въ верхнемъ — крайней лѣвой точки, потому что между двумя числами содержатся еще другія.

Мы, принимаемъ, какъ аксіому, что нѣчто подобное невозможно (аксіома непрерывности). Тогда каждое ирраціональное число имѣетъ свое изображеніе на числовой линіи.

Говорятъ, что между вещественными числами и точками числовой прямой существуетъ однозначное соотвѣтствіе. Каждое число имѣетъ опредѣленное изображеніе на числовой прямой, и каждая точка на числовой прямой есть изображеніе опредѣленнаго числа.

§ 46. **Измѣреніе отрѣзковъ.** Двѣ точки A и B, разсматриваемыя въ этомъ порядкѣ, опредѣляютъ на числовой прямой

[1]) Для случая, когда P_1 и P_2 суть ирраціональныя числа, это вытекаетъ изъ того, что между P_1 и P_2 лежатъ раціональныя числа (ср. § 6).

отрѣзокъ. A называется начальной, а B — конечной точкой отрѣзка (начало и конецъ). Смотря по тому, находится ли B вправо или влѣво отъ A, мы откладываемъ вправо или влѣво отъ O отрѣзокъ OD, равный AB. Абсциссу точки D мы называемъ числомъ, измѣряющимъ отрѣзокъ AB; это число мы обозначимъ черезъ $\overline{AB}$.

Поэтому абсцисса точки P есть не что иное, какъ $\overline{OP}$.

Если a есть абсцисса точки A и b есть абсцисса точки B, то число, измѣряющее отрѣзокъ AB, равно $b - a$.

Это предложеніе не нуждается въ доказательствѣ, когда a и b раціональныя числа. Если же это суть ирраціональныя числа, то возможно выбрать раціональныя числа a_n и b_n такъ, что

$$a_n < a < a_n + \frac{1}{n}, \quad b_n < b < b_n + \frac{1}{n}$$

(ср. § 9). Пусть P_n и Q_n будутъ соотвѣтственно изображенія чиселъ a_n и b_n, а P_n' и Q_n' — изображенія чиселъ $a_n + \frac{1}{n}$, $b_n + \frac{1}{n}$.

Тогда $\overline{AB}$ навѣрное лежитъ между $\overline{P_n Q_n'}$ и $\overline{P_n' Q_n}$, слѣдовательно, и между

$$b_n - a_n + \frac{1}{n} \text{ и } b_n - a_n - \frac{1}{n}.$$

Такъ какъ оба эти числа стремятся къ $b - a$, то

$$\overline{AB} = b - a.$$

Если A, B, C суть три произвольныя точки числовой линіи (a, b, c ихъ абсциссы), то постоянно

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

такъ какъ

$$(b - a) + (c - b) + (a - c) = 0.$$

Когда точки B и C совпадаютъ, то $\overline{BC} = 0$ и формула читается такъ:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0, \text{ или } \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

Четыре точки A, B, C, D числовой линіи (съ абсциссами a, b, c, d) удовлетворяютъ указанному Эйлеромъ соотношенію:

$$\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{AD}.\overline{BC}=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(b-a)(d-c)+(c-a)(b-d)+(d-a)(c-b)=0.$$

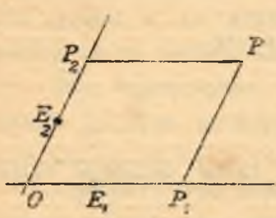
Замѣчаніе. Если выбрать точки O' и E' такъ, что

$$\overline{O'E'}=1,$$

то отрѣзокъ AB въ отношеніи O' и E' имѣетъ то же измѣряющее число, что и въ отношеніи O и E.

§ 47. **Изображеніе паръ чиселъ при помощи точекъ плоскости.** Два вещественныхъ числа x_1 и x_2, взятыхъ въ этомъ порядкѣ, образуютъ пару чиселъ. Число x_1 называется первымъ, а x_2—вторымъ числомъ пары.

Мы проводимъ въ плоскости черезъ точку O, которую мы называемъ начальной (начало), двѣ различныя прямыя (координатныя оси). На каждой изъ нихъ мы соотвѣтственно выбираемъ по одной отличной отъ O точкѣ E_1 и E_2 [1]).



Фиг. 2.

На прямой OE_1 мы принимаемъ O за начало и E_1 за точку единицы. Точно такъ же на прямой OE_2 принимаемъ точку O за начало и E_2 за точку единицы.

Если теперь P_1 есть изображеніе числа x_1 на прямой OE_1 и P_2 есть изображеніе числа x_2 на прямой OE_2, то черезъ точки P_1 и P_2 проводимъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ OE_2 и OE_1, и получаемъ такимъ образомъ точку P. Ее мы называемъ точкой изображенія (изображеніемъ) пары чиселъ x_1 и x_2 или, короче, точкой (x_1, x_2).

[1]) Обыкновенно, OE_1 и OE_2 берутся равными. Вмѣсто того, чтобы указать на чертежѣ точки E_1 и E_2, указываютъ стрѣлками, на какой сторонѣ лежатъ точки единицы.

Такимъ образомъ между парами чиселъ и точками плоскости устанавливается однозначное соотвѣтствіе. Каждая пара чиселъ имѣетъ опредѣленное изображеніе въ плоскости и каждая точка плоскости есть изображеніе опредѣленной пары чиселъ.

Числа x_1, x_2 называютъ координатами точки P.

На параллельныхъ прямыхъ обыкновенно выбираютъ отрѣзки-единицы[1]) такимъ образомъ, чтобы эти отрѣзки могли быть приведены въ совпаденіе путемъ параллельнаго перемѣщенія.

Согласно съ этимъ

$$x_1 = \overline{OP_1} = \overline{P_2P}$$

и

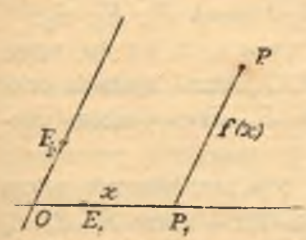
$$x_2 = \overline{OP_2} = \overline{P_1P}.$$

§ 48. **Кривая изображенія функціи.** Для геометрическаго представленія функціи $y = f(x)$ пользуются указаннымъ въ § 47 представленіемъ паръ чиселъ при помощи точекъ плоскости.

Каждому значенію независимой перемѣнной соотвѣтствуетъ пара чиселъ

$$x,\ f(x),$$

которая имѣетъ въ плоскости свою точку изображенія. Совокупность полученныхъ такимъ образомъ точекъ изображенія называютъ кривой изображенія функціи $f(x)$, а уравненіе $y = f(x)$ — уравненіемъ этой кривой.



Фиг. 3.

Кривой изображенія вполнѣ опредѣляется функція, потому что кривая изображенія даетъ возможность усмотрѣть значеніе функціи, соотвѣтствующее каждому значенію независимой перемѣнной.

Если $f(x)$ есть постоянная, то кривая изображенія есть прямая, параллельная оси x-въ[2]).

---

[1]) Отрѣзокъ-единица есть отрѣзокъ, который измѣряется числомъ 1.

[2]) Мы называемъ здѣсь OE_1 осью x-въ, а OE_2 — осью y-въ.

Кривая изображенія цѣлой функціи первой степени

$$y = a_0 x + a_1 \qquad (a_0 \gtrless 0)$$

есть прямая, которая, однако, не параллельна оси x-въ.

Кривая изображенія цѣлой раціональной функціи второй степени есть парабола.

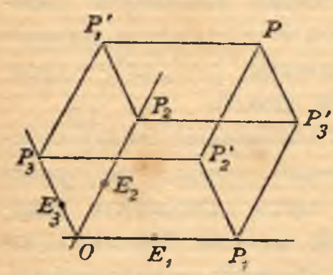
Кривая изображенія

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \leqq x \leqq a)$$

въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ есть полукругъ радіуса a.

§ 49. **Представленіе системъ изъ трехъ чиселъ при помощи точекъ пространства.** Три вещественныхъ числа x_1, x_2, x_3, взятыхъ въ этомъ порядкѣ, образуютъ систему трехъ чиселъ; x_1 называется первымъ, x_2—вторымъ, x_3—третьимъ числомъ системы.

Черезъ точку O пространства, которую мы называемъ начальною точкой, началомъ, мы проводимъ три прямыя, не лежащія въ одной плоскости. Онѣ называются координатными осями, а три плоскости, попарно ими опредѣляемыя, — координатными плоскостями. На каждой изъ координатныхъ осей мы соотвѣтственно выбираемъ по одной отличной отъ O точкѣ E_1, E_2, E_3.



Фиг. 4.

На OE_n ($n = 1, 2, 3$) мы пользуемся точкой O, какъ нулевой точкой, а точкой E_n, какъ точкою единицы.

Если P_n есть изображеніе числа x_n на OE_n, то черезъ точки P_1, P_2, P_3 проводимъ три плоскости, соотвѣтственно параллельныя координатнымъ плоскостямъ, и получаемъ такимъ образомъ точку P. Ее мы называемъ точкой изображенія, или изображеніемъ системы трехъ чиселъ x_1, x_2, x_3, или просто точкой (x_1, x_2, x_3).

Такимъ образомъ установлено однозначное соотвѣтствіе между системами трехъ чиселъ и точками пространства. Каждая система трехъ чиселъ имѣетъ опредѣленную точку изображенія въ пространствѣ, и каждая точка въ пространствѣ есть изображеніе опредѣленной системы трехъ чиселъ.

Числа x_1, x_2, x_3 называются координатами точки P.

x_2, x_3 суть координаты точки P_1' въ плоскости OE_2E_3, равно какъ x_3, x_1 суть координаты точки P_2' въ плоскости OE_3E_1 и x_1, x_2 суть координаты точки P_3' въ плоскости OE_1E_2.

§ 50. **Функціи двухъ перемѣнныхъ.** Пусть $\mathfrak{M}$ будетъ множество, составленное только изъ различныхъ паръ чиселъ или, выражаясь геометрически, множество, составленное исключительно изъ различныхъ точекъ плоскости.

Если къ каждой точкѣ изъ $\mathfrak{M}$ отнесено число, то говорятъ, что множество $\mathfrak{M}$ опредѣляетъ функцію.

Отнесенныя числа мы будемъ разсматривать, какъ значенія перемѣнной z. Мы далѣе положимъ, что пара буквъ x, y можетъ означать любую пару чиселъ изъ $\mathfrak{M}$. Будемъ называть такую пару буквъ парою перемѣнныхъ, каждую пару чиселъ множества $\mathfrak{M}$—системой значеній этой пары, а $\mathfrak{M}$—областью перемѣнной пары.

Тогда каждой системѣ значеній x, y соотвѣтствуетъ значеніе z.

z называютъ функціей отъ x, y и пишутъ [1])

$$z = f(x, y).$$

$\mathfrak{M}$ называется областью опредѣленія функціи.

Чтобы получить геометрическое представленіе функціи $f(x, y)$ примѣняютъ указанные въ § 49 представленіе системъ трехъ чиселъ при помощи точекъ пространства. Каждой системѣ значеній x, y соотвѣтствуетъ система

$$x, y, f(x, y)$$

трехъ чиселъ, которая имѣетъ свою точку изображенія въ пространствѣ. Совокупность полученныхъ такимъ образомъ точекъ изо-

[1]) Эта формула читается такъ: «z равно f отъ x, y». Вмѣсто f можно пользоваться и другими буквами.

браженія называютъ поверхностью изображенія функціи $f(x, y)$, а уравненіе $z = f(x, y)$ — уравненіемъ этой поверхности. Такъ, напримѣръ, уравненіе

$$z = ax + by + c \quad (a,\ b,\ c \text{ постоянныя})$$

есть уравненіе плоскости.

§ 51. **Непрерывность.** Пусть (x_0, y_0) будетъ мѣсто (точка) въ области $\mathfrak{M}$ и допустимъ, что въ $\mathfrak{M}$ возможно выбрать точки

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ \ldots$$

такъ, что точка $(x_n,\ y_n)$ отлична отъ точки $(x_0,\ y_0)$ и

$$\lim x_n = x_0 \text{ и } \lim y_n = y_0 \text{ [1]}$$

Если въ этомъ случаѣ постоянно будетъ

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim f(x_0, y_0),$$

то говорятъ, что функція $f(x, y)$ непрерывна на мѣстѣ (x_0, y_0) или въ точкѣ (x_0, y_0). Въ противномъ случаѣ функція $f(x, y)$ разрывна на мѣстѣ (x_0, y_0), или имѣетъ разрывъ непрерывности (или разрывъ сплошности) въ точкѣ (x_0, y_0).

Послѣдовательность $(x_1 y_1)$, (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., обладающая вышеуказаннымъ свойствомъ, существуетъ тогда и только тогда, когда въ каждой окрестности[2] точки (x_0, y_0) имѣется отличная отъ (x_0, y_0) точка множества $\mathfrak{M}$[3]).

Если въ области $\mathfrak{M}$ нѣтъ послѣдовательности точекъ, кото-

---

[1]) Когда $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$, то говорятъ, что точка (x_n, y_n) или послѣдовательность точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... стремится къ точкѣ (x_0, y_0).

[2]) Пусть (a, a') будетъ окрестность x_0, а (b, b') окрестность y_0 (ср. § 10). Тогда тѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ требованіямъ $a < x < a'$ и $b < y < b'$ образуютъ окрестность точки (x_0, y_0). Мы это слово будемъ употреблять только въ этомъ смыслѣ. Такая окрестность образуется внутренними точками параллелограмма, котораго стороны параллельны осямъ координатъ и внутри котораго содержится точка (x_0, y_0).

[3]) Доказательство подобно приведенному въ § 31.

рая стремится къ (x_0, y_0), то (x_0, y_0) называютъ изолированной точкой области $\mathfrak{M}$. Нѣтъ смысла говорить о непрерывности въ такой точкѣ.

§ 52. **Функціи отъ n перемѣнныхъ.** [1]) Пусть $\mathfrak{M}$ будетъ множество, состоящее исключительно изъ различныхъ системъ трехъ чиселъ или, выражаясь геометрически, множество, состоящее исключительно изъ различныхъ точекъ пространства [2]).

Если къ каждой точкѣ изъ $\mathfrak{M}$ отнесено число, то говорятъ, что $\mathfrak{M}$ опредѣляетъ функцію.

Отнесенныя числа мы будемъ разсматривать, какъ значенія перемѣнной u. Мы далѣе положимъ, что система трехъ буквъ x, y, z можетъ означать каждую систему трехъ чиселъ изъ $\mathfrak{M}$. Будемъ называть такую систему трехъ буквъ системою трехъ перемѣнныхъ, каждую систему трехъ чиселъ изъ $\mathfrak{M}$—системою значеній этихъ перемѣнныхъ, а $\mathfrak{M}$—областью значеній системы трехъ перемѣнныхъ.

Каждой системѣ значеній x, y, z соотвѣтствуетъ значеніе u. Говорятъ, что u есть функція отъ x, y, z и пишутъ [3])

$$u = f(x, y, z).$$

$\mathfrak{M}$ называется областью опредѣленія этой функціи.

Пусть (x_0, y_0, z_0) будетъ мѣсто въ области $\mathfrak{M}$ и пусть оно не будетъ изолированнымъ, т. е. допустимъ, что въ области $\mathfrak{M}$ возможно выбрать послѣдовательность точекъ

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ (x_3, y_3, z_3),\ \ldots$$

такъ, что (x_n, y_n, z_n) отличается отъ (x_0, y_0, z_0) и

$$\lim x_n = x_0,\ \ \lim y_n = y_0,\ \ \lim z_n = z_0 \ ^{4)}$$

---

[1]) Для простоты мы говоримъ о случаѣ, когда $n = 3$.

[2]) Въ случаѣ $n > 3$ такое геометрическое представленіе невозможно. Несмотря на это, употребляютъ геометрическіе способы выраженія и говорятъ о точкахъ въ пространствѣ n измѣреній.

[3]) Эта формула читается такъ: «u равно f отъ x, y, z».

[4]) Если $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$, $\lim z_n = z_0$, то говорятъ, что точка (x_n, y_n, z_n) или послѣдовательность (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), ... стремится къ точкѣ (x_0, y_0, z_0).

Если при этомъ постоянно

$$\lim f(x_n, y_n, z_n) = f(x_0, y_0, z_0),$$

то говорятъ, что функція $f(x, y, z)$ непрерывна на мѣстѣ или въ точкѣ (x_0, y_0, z_0). Въ противномъ случаѣ говорятъ, что функція $f(x, y, z)$ имѣетъ разрывъ на мѣстѣ (x_0, y_0, z_0), или въ точкѣ (x_0, y_0, z_0).

Послѣдовательность (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $(x_3, y_3, z_3), \ldots$, обладающая вышеуказаннымъ свойствомъ, существуетъ тогда и только тогда, когда въ каждой окрестности[1]) точки x_0, y_0, z_0 имѣется отличная отъ (x_0, y_0, z_0) точка множества $\mathfrak{M}$.

§ 53. **Раціональныя функціи отъ n перемѣнныхъ.** Пусть $a, b, \ldots$ будетъ конечное число постоянныхъ, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — система перемѣнныхъ. Положимъ, что область перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такова, что

$$\mathfrak{R}\,(a, b, \ldots; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

имѣетъ смыслъ, гдѣ $\mathfrak{R}$ означаетъ раціональную операцію.

Этимъ путемъ къ каждой системѣ значеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отнесено число и

$$y = \mathfrak{R}\,(a, b, \ldots; x_1, x_2, \ldots x_n)$$

есть, такимъ образомъ, функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Этого рода функціи называются раціональными функціями.

Легко убѣдиться, при помощи § 26, No 4, въ томъ, что раціональная функція непрерывна въ каждомъ мѣстѣ ея области опредѣленія.

---

[1]) Пусть (a, a'), (b, b'), (c, c') будутъ соотвѣтственно окрестности точекъ x_0, y_0, z_0. Тогда точки, которыхъ координаты удовлетворяютъ условіямъ $a < x < a'$, $b < y < b'$ и $c < z < c'$, образуютъ окрестность точки (x_0, y_0, z_0).

Глава VI.

Дифференцированіе функцій отъ одной перемѣнной.

§ 54. **Отношеніе приращеній.** Если x и $x+h$ суть два различныхъ числа изъ области опредѣленія функціи $y=f(x)$, то отношеніе

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

называютъ отношеніемъ приращеній. Послѣдующій его членъ является разностью двухъ значеній $x+h$ и x независимой перемѣнной, предшествующій же — разностью соотвѣтственныхъ значеній функціи. Обыкновенно числителя обозначаютъ черезъ $\Delta f(x)$ или Δy, знаменателя же — черезъ Δx, такъ что отношеніе приращеній выражается частнымъ $\Delta f(x) / \Delta x$ или $\Delta y / \Delta x$. Буква Δ напоминаетъ слово разность (Differentia).

Отношеніе приращеній имѣетъ простое геометрическое значеніе. Пусть P и Q будутъ тѣ точки кривой, изображающей функцію $f(x)$, которыя отвѣчаютъ значеніямъ x и $x+h$. Тогда (ср. фиг. 5)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}.$$

Это отношеніе называютъ угловымъ коэффиціентомъ прямой PQ. Если обозначить его черезъ a, то уравненіе прямой приметъ видъ

$$y=ax+b.$$

Такимъ образомъ, отношеніе приращеній равно угловому коэффиціенту сѣкущей[1]) кривой, которая изображаетъ разсматриваемую функцію.

§ 55. **Производная и дифференціалъ.** Если каждая послѣдовательность отношеній приращеній

$$\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}, \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}, \frac{f(x+h_3)-f(x)}{h_3}, \ldots,$$

[1]) Сѣкущей данной кривой мы называемъ прямую, соединяющую двѣ ея точки.

которая обладаетъ свойствомъ

$$\lim h_n = 0,$$

сходится, то мы говоримъ, что $f(x)$ въ точкѣ x имѣетъ производную [1]. Подъ производной мы разумѣемъ общій предѣлъ всѣхъ этихъ послѣдовательностей.

Легко убѣдиться въ томъ, что онъ существуетъ. *)

$$\lim \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = A \qquad (\lim h_n = 0)$$

и

$$\lim \frac{f(x+\bar{h}_n)-f(x)}{\bar{h}_n} = B, \qquad (\lim \bar{h}_n = 0)$$

то и послѣдовательность

$$\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}, \quad \frac{f(x+\bar{h}_1)-f(x)}{\bar{h}_1}, \quad \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}, \quad \frac{f(x+\bar{h}_2)-f(x)}{\bar{h}_2}, \ldots$$

сходится. Всѣ ея части имѣютъ поэтому одинъ и тотъ же предѣлъ, такъ что, въ частности, $A = B$.

Мы обозначаемъ производную функціи $f(x)$ въ точкѣ x черезъ $f'(x)$. Это обозначеніе ввелъ Лагранжъ (Lagrange).

Произведеніе $f'(x)$ на нѣкоторую постоянную h называютъ дифференціаломъ функціи $f(x)$ въ точкѣ x и обозначаютъ его, по Лейбницу, черезъ $df(x)$, такъ что

$$df(x) = f'(x)\,h.$$

Обыкновенно для всѣхъ функцій пользуются однимъ и тѣмъ же h, такъ что, въ частности,

$$dx = h.\,^{2)}$$

---

[1]) Говорить о производной въ изолированной точкѣ области опредѣленія не имѣетъ никакого смысла.

*) Т. е., если каждая изъ упомянутыхъ послѣдовательностей имѣетъ предѣлъ, то всѣ онѣ имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.

[2]) Производная функціи $f(x) = x$ равна 1, ибо всѣ отношенія приращеній равны 1. **)

**) Въ полученномъ равенствѣ $dx = h$ выраженіе dx означаетъ дифференціалъ функціи $f(x) = x$. Если же x есть независимая перемѣнная, то $dx = h$ по опредѣленію.

Вслѣдствіе этого мы можемъ писать

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}.$$

Такимъ образомъ, производная является частнымъ двухъ дифференціаловъ. Ее называютъ поэтому также **дифференціальнымъ частнымъ**.

Вычисленіе производной или дифференціала называется **дифференцированіемъ**.

§ 56. **Геометрическая интерпретація производной и дифференціала.** Какъ мы знаемъ, отношеніе

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

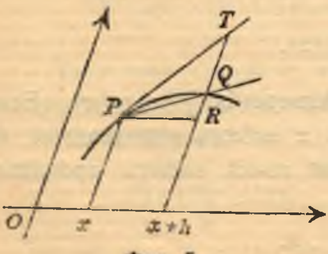
есть угловой коэффиціентъ сѣкущей кривой, изображающей функцію $f(x)$.

Послѣдовательность

$$\frac{f(x+h_1) - f(x)}{h_1}, \quad \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}, \quad \frac{f(x+h_3) - f(x)}{h_3}, \ldots$$

$$(\lim h_n = 0)$$

отвѣчаетъ нѣкоторой послѣдовательности сѣкущихъ, проходящихъ черезъ P, угловые коэффиціенты которыхъ имѣютъ предѣлъ $f'(x)$. [1]) Проходящую черезъ P прямую PT, угловой коэффиціентъ которой равенъ $f'(x)$, мы назовемъ **предѣльнымъ положеніемъ** сѣкущей PQ.



Фиг. 5.

Обыкновенно **касательную** къ нашей кривой въ точкѣ P опредѣляютъ, какъ предѣльное положеніе сѣкущей PQ при h, стремящемся къ нулю.

[1]) Мы допускаемъ, что $f'(x)$ существуетъ.

Поэтому производная равна угловому коэффиціенту касательной къ кривой, изображающей разсматриваемую функцію.

На фиг. 5

$$RT = f'(x)\,h = df(x).$$

Напротивъ,

$$RQ = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x).$$

§ 57. **Дифференцированіе суммы $f(x)+g(x)$.** Если функціи $u=f(x)$ и $v=g(x)$ въ точкѣ x имѣютъ производныя, то и сумма $F(x)=f(x)+g(x)$ въ этой точкѣ имѣетъ производную, при чемъ

$$d(u+v) = du + dv.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \qquad (\lim h = 0)$$

и

$$\lim \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x), \qquad (\lim h = 0)$$

согласно § 26, вытекаетъ, что

$$\lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

§ 58. **Дифференцированіе произведенія $f(x)\,g(x)$.** Если функціи $u=f(x)$ и $v=g(x)$ въ точкѣ x имѣютъ производныя, то и произведеніе $F(x)=f(x)\,g(x)$ въ этой точкѣ имѣетъ производную, при чемъ

$$d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Дѣйствительно,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot h,$$

откуда при $\lim h = 0$

$$\lim\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=g(x)f'(x)+f(x)g'(x).$$

Слѣдствія. Если $g(x)$ есть нѣкоторая постоянная c, то $g'(x)=0$ и

$$d(cu)=c\,du.$$

Такъ какъ

$$u-v=u+(-1)v,$$

то

$$d(u-v)=du+(-1)dv=du-dv.$$

§ 59. **Дифференцированіе выраженія $1:f(x)$.** Если функція $u=f(x)$ въ точкѣ x не равна нулю и имѣетъ производную, то и $F(x)=1:f(x)$ въ этой точкѣ имѣетъ производную, при чемъ

$$d\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{du}{u^2}.$$

Изъ соотношенія

$$\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \qquad (\lim h=0)$$

слѣдуетъ:

$$\lim f(x+h)=f(x)+\lim\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\right)=f(x).$$[1]

Такъ какъ $f(x)\gtrless 0$, то и почти всѣ $f(x+h)$ также отличны отъ нуля, и мы можемъ на нихъ дѣлить.

Далѣе имѣемъ

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}\right\}$$

$$=-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}:f(x)f(x+h);$$

[1]) Отсюда ясно, что непрерывность есть необходимое условіе существованія производной.

слѣдовательно,

$$\lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Слѣдствіе. Если функціи $u=f(x)$ и $v=g(x)$ въ точкѣ x имѣютъ производныя и $f(x)$ въ точкѣ x отлично отъ нуля, то и частное $F(x)=g(x):f(x)$ въ этой точкѣ также имѣетъ производную, при чемъ

$$d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2}.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{v}{u} = v \cdot \frac{1}{u},$$

такъ что

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{u}\,dv + v\,d\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2}.$$

§ 60. **Дифференцированіе суммы и произведенія p функцій.** Съ помощью повторнаго примѣненія правилъ дифференцированія, указанныхъ въ §§ 57 и 58, получимъ слѣдующіе результаты:

Если функціи

$$u_1 = f_1(x),\ u_2 = f_2(x),\ \ldots,\ u_p = f_p(x)$$

въ точкѣ x имѣютъ производныя, то и сумма

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_p$$

также имѣетъ въ этой точкѣ производную, при чемъ

$$d(u_1 + u_2 + \cdots + u_p) = du_1 + du_2 + \cdots + du_p.$$

Равнымъ образомъ, и произведеніе

$$u_1 u_2 \ldots u_p$$

имѣетъ въ точкѣ x производную, при чемъ

$$d(u_1 u_2 \ldots u_p) = (u_1 u_2 \ldots u_p)_1\,du_1 + (u_1 u_2 \ldots u_p)_2\,du_2 + \cdots$$
$$\cdots + (u_1 u_2 \ldots u_p)_p\,du_p.$$

Здѣсь символъ $(u_1 u_2 \ldots u_p)_k$ означаетъ произведеніе, которое получается изъ $u_1 u_2 \ldots u_p$ вычеркиваніемъ u_k; такъ, напримѣръ,

$$(u_1 u_2 \ldots u_p)_1 = u_2 \ldots u_p.$$

§ 61. **Дифференцированіе раціональныхъ функцій.** Мы видѣли въ § 60, какъ дифференцируется произведеніе p множителей: дифференціалъ каждаго множителя умножается на остальные множители и полученныя такимъ путемъ произведенія складываются.

Если всѣ p множителей равны функціи u, то получится формула

$$d(u^p) = pu^{p-1}\,du.$$

Въ случаѣ $u = x$ эта формула принимаетъ видъ

$$d(x^p) = px^{p-1}\,dx.$$

Теперь мы въ состояніи продифференцировать цѣлую раціональную функцію

$$G(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m.$$

При этомъ мы должны лишь принять во вниманіе § 60 и первое слѣдствіе § 58-го.

Мы получимъ:

$$d\,G(x) = (m a_0 x^{m-1} + (m-1)\,a_1 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1})\,dx.$$

Производная цѣлой раціональной функціи m-ой степени является, такимъ образомъ, цѣлой раціональной функціей $(m-1)$-ой степени.

Если мы теперь разсмотримъ раціональную функцію $G(x) : H(x)$, при чемъ

$$H(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n,$$

то, согласно § 59, будемъ имѣть:

$$d\{G(x) : H(x)\} = \frac{H(x)\,d\,G(x) - G(x)\,d\,H(x)}{(H(x))^2}. \quad (H(x) \gtrless 0)$$

Производная раціональной функціи также есть раціональная функція.

§ 62. **Дифференцированіе функціи a^x.** Такъ какъ

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^h-1}{h}\,a^x,$$

то (ср. § 44)

$$\lim\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim\frac{a^h-1}{h}=a^x\log a,\qquad(\lim h=0)$$

т. е.

$$d(a^x)=a^x\log a\cdot dx,$$

и, въ частности,

$$d(e^x)=e^x\,dx.$$

§ 63. **Дифференцированіе функціи $\log x$.** Если $x>0$ и $\lim h=0$, то почти всѣ $x+h$ больше нуля.

Такъ какъ

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}\,\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\log\left\{(1+\bar h)^{\frac{1}{\bar h}}\right\},$$

гдѣ

$$\bar h=\frac{h}{x},$$

то имѣемъ:

$$\lim\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x},$$

т. е.

$$d\log x=\frac{dx}{x}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\lim h=0$, то и $\lim\bar h=0$, и выраженіе

$$(1+\bar h)^{\frac{1}{\bar h}}=\bar e$$

имѣетъ въ такомъ случаѣ предѣлъ e. Въ силу непрерывности функціи $\log x$ изъ соотношенія $\lim\bar e=e$ вытекаетъ

$$\lim\log\bar e=\log e=1.$$

Если $\mathrm{Log}\,x$ есть логариѳмъ x при основаніи a (>0), т. е.

$$x=a^{\mathrm{Log}\,x},$$

то

$$\log x = \operatorname{Log} x \cdot \log a,$$

такъ что

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{\log a} \cdot \log x.$$

Число $\frac{1}{\log a} = M$ называютъ **модулемъ** логариѳмовъ при основаніи a. Для того, чтобы получить логариѳмы при основаніи a, натуральные логариѳмы должны быть умножены на M.

Дифференцируя, получаемъ:

$$d \operatorname{Log} x = \frac{M\,dx}{x}.$$

§ 64. **Дифференцированіе сложныхъ функцій.** Пусть $f(x)$ будетъ такая функція, что всѣ ея значенія принадлежатъ области опредѣленія функціи $F(u)$.

Тогда

$$F(f(x))$$

также представляетъ нѣкоторую функцію отъ x въ области опредѣленія $f(x)$. Функцію $F(f(x))$ называютъ **сложной функціей**.

Если функція $f(x)$ непрерывна въ точкѣ x, а функція $F(u)$ непрерывна въ точкѣ $u = f(x)$, то и функція $F(f(x))$ непрерывна въ точкѣ x.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношенія $\lim x_n = x$ постоянно вытекаетъ:

$$\lim f(x_n) = f(x)$$

и

$$\lim F(f(x_n)) = F(f(x)).$$

Если $f(x)$ имѣетъ производную въ точкѣ x, а $F(u)$ имѣетъ производную въ точкѣ $u = f(x)$, то и $F(f(x))$ имѣетъ производную въ точкѣ x, при чемъ

$$dF(f(x)) = F'(f(x))\,df(x).$$

Положимъ

$$f(x + h_n) - f(x) = k_n$$

и разсмотримъ послѣдовательность

$$\frac{F(u + k_1) - F(u)}{h_1}, \quad \frac{F(u + k_2) - F(u)}{h_2}, \quad \frac{F(u + k_3) - F(u)}{h_3}, \ldots$$

при чемъ $\lim h_n = 0$ и, слѣдовательно, также и $\lim k_n = 0$ [1]).

Если въ послѣдовательности $k_1, k_2, k_3, \ldots$ есть только конечное число отличныхъ отъ нуля членовъ, то отвѣчающія имъ отношенія

$$Q_n = \frac{F(u + k_n) - F(u)}{h_n}$$

не вліяютъ на предѣлъ Q_n. Если же существуетъ безконечное число отличныхъ отъ нуля чиселъ k_n, то они образуютъ послѣдовательность $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \ldots,$ (составляющую часть послѣдовательности $k_1, k_2, k_3, \ldots,$), и для нихъ имѣемъ:

$$\bar{Q}_n = \frac{F(u + \bar{k}_n) - F(u)}{\bar{h}_n} = \frac{F(u + \bar{k}_n) - F(u)}{\bar{k}_n} \cdot \frac{f(x + \bar{h}_n) - f(x)}{\bar{h}_n},$$

такъ что

$$\lim \bar{Q}_n = F'(u) f'(x).$$

Если въ послѣдовательности $k_1, k_2, k_3, \ldots$ есть только конечное число исчезающихъ членовъ, то отвѣчающія имъ Q_n не оказываютъ вліянія на предѣлъ Q_n. Если же существуетъ безконечное число исчезающихъ чиселъ k_n, то они образуютъ послѣдовательность $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \ldots$ и

$$\underline{Q}_n = \frac{F(u + \underline{k}_n) - F(u)}{\underline{h}_n} = 0.$$

Но въ этомъ случаѣ

$$\frac{f(x + \underline{h}_n) - f(x)}{\underline{h}_n} = 0,$$

такъ что и

$$f'(x) = \lim \frac{f(x + \underline{h}_n) - f(x)}{\underline{h}_n} = 0,$$

а потому

$$\lim \underline{Q}_n = F'(u) f'(x).$$

---

[1]) Такъ какъ существуетъ $f'(x)$, то функція $f(x)$ въ точкѣ x непрерывна.

Изъ вышесказаннаго *) мы можемъ заключить, что постоянно

$$\lim Q_n = F'(u) f'(x),$$

т. е.

$$dF(f(x)) = F'(f(x))\, df(x).$$

Такимъ образомъ, дифференціалъ $F(u)$ имѣетъ видъ

$$F'(u)\, du$$

независимо отъ того, будетъ ли независимой перемѣнной сама перемѣнная u или какая-нибудь другая. Въ этомъ состоитъ одно изъ удобствъ пользованія Лейбницевымъ дифференціаломъ.

§ 65. **Примѣры.** 1. $y = e^{f(x)}$.

$$dy = e^{f(x)}\, df(x) = e^{f(x)} f'(x)\, dx.$$

2. $$y = x^\mu, \quad x > 0.$$

Напишемъ это равенство въ видѣ

$$y = e^{\mu \log x}.$$

Тогда, согласно No 1,

$$dy = e^{\mu \log x}\, d(\mu \log x) = x^\mu \frac{\mu\, dx}{x};$$

такимъ образомъ,

$$dy = \mu x^{\mu-1}\, dx.$$

3. $$y = \log f(x), \quad f(x) > 0.$$

$$dy = \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

4. $$y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

$$dy = \frac{d\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{dx + d\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

*) См. § 15, NoNo 3 и 4.

Но, согласно No. 2,

$$d\sqrt{1+x^2} = d\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2) = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Окончательно находимъ

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

§ 66. **Теорема Ролля.** Допустимъ, что функція $f(x)$ непрерывна при $x=a$ и $x=b$ [1]) и во всѣхъ точкахъ между a и b имѣетъ производную; пусть, сверхъ того, $f(a)=f(b)$. Тогда между a и b существуетъ такая точка c, что $f'(c)=0$.

Прежде всего замѣтимъ, что функція $f(x)$ и во всѣхъ точкахъ между a и b также непрерывна. Это вытекаетъ изъ существованія производной. Такимъ образомъ, функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$.

Мы положимъ

$$b-a=k \text{ и } k_1=\tfrac{1}{3}k$$

и разсмотримъ функцію

$$\varphi(x) = f(x+k_1) - f(x).$$

Она непрерывна въ интервалѣ $\langle a, a+2k_1 \rangle$ и имѣетъ то свойство, что

$$\varphi(a) + \varphi(a+k_1) + \varphi(a+2k_1) = 0.$$

При этомъ возможны слѣдующіе случаи:

1. числа $\varphi(a)$, $\varphi(a+k_1)$, $\varphi(a+2k_1)$ не всѣ равны нулю;
2. числа $\varphi(a)$, $\varphi(a+k_1)$, $\varphi(a+2k_1)$ всѣ равны нулю.

Въ первомъ случаѣ, такъ какъ сумма чиселъ $\varphi(a)$, $\varphi(a+k_1)$, $\varphi(a+2k_1)$ равна нулю, между ними навѣрное найдется одно положительное число и одно отрицательное. Но тогда, согласно

[1]) Точно выражаясь, мы требуемъ, чтобы изъ условій $a \leqq x_n \leqq b$ и $\lim x_n = a$ или $\lim x_n = b$ всегда, соотвѣтственно, вытекало, что $\lim f(x_n) = f(a)$ или $\lim f(x_n) = f(b)$ *).

*) Это свойство функціи часто называютъ односторонней непрерывностью въ точкахъ a, b, а именно—правосторонней для точки a, лѣвосторонней—для точки b.

§ 33, между a и $a+2k_1$ существуетъ нѣкоторая точка a_1 такого рода, что

$$\varphi(a_1)=f(a_1+k_1)-f(a_1)=0.$$

Во второмъ случаѣ также существуетъ такая точка a_1, именно $a_1=a+k_1$.

Изъ равенства

$$f(a+k)=f(a)$$

мы, такимъ образомъ, выводимъ

$$f(a_1+k_1)=f(a_1)\quad \left(k_1=\frac{1}{3}k,\ a<a_1<a+2k_1\right).$$

Но точно такъ же мы изъ послѣдняго равенства получимъ

$$f(a_2+k_2)=f(a_2)\quad \left(k_2=\frac{1}{3}k_1,\ a_1<a_2<a_1+2k_2\right),$$

затѣмъ

$$f(a_3+k_3)=f(a_3)\quad \left(k_3=\frac{1}{3}k_2,\ a_2<a_3<a_2+2k_3\right),$$

и т. д. in infinitum.

Очевидно,

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть возрастающая,

а

$a_1+k_1,\ a_2+k_2,\ a_3+k_3, \ldots$ — убывающая

послѣдовательность. Обѣ послѣдовательности ограничены и потому сходятся. Въ виду соотношенія

$$\lim(a_n+k_n)-\lim a_n=\lim k_n=\lim\frac{b-a}{3^n}=0$$

онѣ стремятся къ одному и тому же предѣлу c, при чемъ

$$a_n<c<a_n+k_n.$$

Такъ какъ $f'(c)$ существуетъ, то

$$\lim\frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c}=f'(c)$$

и

$$\lim \frac{f(a_n + k_n) - f(c)}{a_n + k_n - c} = f'(c).$$

Числители обоихъ отношеній приращеній равны, знаменатели же имѣютъ разные знаки. Такимъ образомъ, изъ этихъ отношеній (если они отличны отъ нуля) одно будетъ положительнымъ, а другое—отрицательнымъ.

Если послѣдовательность имѣетъ положительный (отрицательный) предѣлъ, то почти всѣ члены послѣдовательности суть положительныя (отрицательныя) числа. Поэтому необходимо

$$f'(c) = 0.$$

§ 67. **Теорема о среднемъ значеніи.** Допустимъ снова, что функція $f(x)$ непрерывна при $x = a$ и при $x = b$[1]) и повсюду между a и b имѣетъ производную. Тогда существуетъ между a и b такая точка c, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Если мы разсмотримъ функцію

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda x,$$

то постоянную λ можно будетъ опредѣлить такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Дѣйствительно, равенство

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$$

равнозначаще съ равенствомъ

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Послѣ того, какъ постоянная λ опредѣлена указаннымъ образомъ, мы можемъ къ функціи $\varphi(x)$ примѣнить теорему Ролля. Въ

[1]) Ср. подстрочное примѣчаніе къ § 66.

самомъ дѣлѣ, $\varphi(x)$ удовлетворяетъ всѣмъ приведеннымъ въ ней условіямъ: $\varphi(x)$ не имѣетъ разрыва ни при $x = a$, ни при $x = b$ (такъ какъ это имѣетъ мѣсто въ отношеніи $f(x)$ и λx); далѣе, $\varphi(x)$ всюду между a и b имѣетъ производную, именно $f'(x) + \lambda$, и, наконецъ, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Въ такомъ случаѣ, согласно теоремѣ Ролля, существуетъ между a и b точка c такого рода, что

$$f'(c) + \lambda = 0, \text{ т. е. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Слѣдствіе. Если функція $f(x)$ имѣетъ повсюду въ нѣкоторомъ интервалѣ производную, равную нулю, то она будетъ постоянной въ этомъ интервалѣ. Дѣйствительно, если a и b суть какія-нибудь два значенія изъ названнаго интервала, то по теоремѣ о среднемъ значеніи имѣемъ

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) = 0,$$

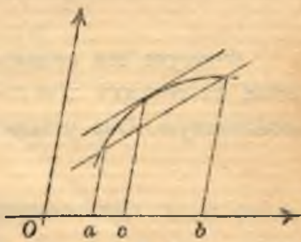
такъ какъ $f'(c) = 0$. Такимъ образомъ, постоянно

$$f(a) = f(b).$$

§ 68. **Геометрическая интерпретація теоремы о среднемъ значеніи.** Если мы начертимъ кривую, изображающую функцію $f(x)$, то $f'(c)$ есть угловой коэффиціентъ касательной къ кривой въ точкѣ $(c, f(c))$. Выраженіе же

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

есть угловой коэффиціентъ сѣкущей, соединяющей двѣ точки кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Теорема о среднемъ значеніи утверждаетъ, что касательная и сѣкущая, при соблюденіи поставленныхъ въ теоремѣ условій, параллельны.



Фиг. 6.

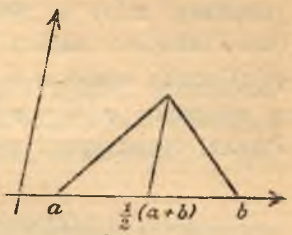
Если функція $f(x)$ опредѣлена слѣдующими равенствами:

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad a \leqq x < b, \quad f(b) = 1,$$

то она повсюду между a и b имѣетъ равную нулю производную. Но

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}.$$

Въ этомъ случаѣ непримѣнимость теоремы о среднемъ значеніи обусловливается разрывомъ функціи въ точкѣ b.



Фиг. 7.

Фиг. 7 изображаетъ функцію, къ которой также непримѣнима теорема о среднемъ значеніи, именно, въ виду того, что въ точкѣ $\frac{1}{2}(a+b)$ не существуетъ производной.

§ 69. **Другая запись теоремы о среднемъ значеніи.** Если положить

$$a=x \text{ и } b=x+h$$

или

$$b=x \text{ и } a=x+h,$$

то число c, какъ лежащее между x и $x+h$, можетъ быть представлено въ формѣ

$$c=x+\vartheta h \quad (0<\vartheta<1)$$

Формула теоремы о среднемъ значеніи тогда получаетъ видъ:[1])

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\vartheta h). \quad (0<\vartheta<1)$$

Формула эта имѣетъ мѣсто, коль скоро функція $f(x)$ непрерывна въ точкахъ x и $x+h$ и повсюду между x и $x+h$ имѣетъ производную. Она утверждаетъ, что отношеніе приращеній

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

принадлежитъ къ числу значеній, которыя производная $f'(x)$ принимаетъ между x и $x+h$.

---

[1]) Можно ее также написать такъ:

$$\Delta f(x)=\{df(x)\}_{x+\vartheta h}.$$

Правая часть равенства указываетъ, что, послѣ составленія дифференціала $df(x)$, x должно быть замѣнено черезъ $x+\vartheta h$.

§ 70. **Обобщенная теорема о среднемъ значеніи.** Пусть функція $g(x)$, подобно функціи $f(x)$, будетъ непрерывна въ точкахъ a и b и повсюду между a и b имѣетъ производную. Положимъ, сверхъ того, что эта производная нигдѣ не обращается въ нуль.

Мы можемъ тогда выбрать число λ такъ, чтобы функція

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

удовлетворяла условію

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Именно, условіе это выполняется, если мы положимъ [1])

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Примѣняя теорему Ролля къ функціи $\varphi(x)$, мы получимъ:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b).$$

Если положить

$$a = x,\ b = x + h \quad \text{или} \quad b = x,\ a = x + h,$$

то эта формула принимаетъ видъ

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x+\vartheta h)}{g'(x+\vartheta h)},$$

или же

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \left\{\frac{df(x)}{dg(x)}\right\}_{x+\vartheta h}. \qquad (0 > \vartheta > 1)$$

§ 71. **Высшіе производныя и дифференціалы.** Если функція $f'(x)$ имѣетъ въ точкѣ x производную, то послѣднюю назы-

[1]) Мы можемъ производить дѣленіе на $g(b) - g(a)$, такъ какъ $g(b) - g(a) \gtrless 0$. Это вытекаетъ изъ теоремы о среднемъ значеніи, согласно которой

$$g(b) - g(a) = (b - a)\, g'(c) \gtrless 0,$$

такъ какъ $g'(x)$ въ интервалѣ (a, b) никогда не обращается въ нуль.

ваютъ второй производной функціи $f(x)$ и обозначаютъ черезъ $f''(x)$. Если функція $f''(x)$ имѣетъ въ точкѣ x производную, то ее называютъ третьей производной функціи $f(x)$ и обозначаютъ черезъ $f'''(x)$ и т. д. Такимъ образомъ,

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$
$$df'(x) = f''(x)\,dx,$$
$$df''(x) = f'''(x)\,dx,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Легко видѣть, что m-ая производная n-ой производной функціи $f(x)$ есть $(m+n)$-ая производная послѣдней.

По примѣру Лейбница, дифференціалъ dx независимой перемѣнной x разсматриваютъ*), какъ постоянную.

Если стать на эту точку зрѣнія, то дифференціалъ отъ $df(x)$ есть

$$ddf(x) = df'(x) \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

дифференціалъ этого послѣдняго выраженія есть

$$dddf(x) = df''(x) \cdot (dx)^2 = f'''(x)(dx)^3,$$

и т. д.

Вмѣсто $ddf(x)$, $dddf(x)$, ... пишутъ

$$d^2 f(x),\ d^3 f(x),\ \ldots$$ [1])

и называютъ эти выраженія вторымъ, третьимъ, ... дифференціаломъ функціи $f(x)$.

Такимъ образомъ, n-ый дифференціалъ связанъ съ n-ой производной соотношеніемъ

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Вмѣсто $(dx)^n$ пишутъ просто dx^n. Это не можетъ повести къ недоразумѣніямъ, такъ какъ дифференціалъ отъ x^n всегда обозначаютъ черезъ $d(x^n)$.

---

*) Условно.

[1]) Эти символы читаются такъ: d второе $f(x)$, d третье $f(x)$, ...

Въ силу вышеприведенной формулы, n-ая производная равна n-ому дифференціалу, раздѣленному на n-ую степень dx:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Въ случаѣ $n = 1$ это соотношеніе остается въ силѣ также и тогда, когда вмѣсто x введена другая независимая перемѣнная. Въ случаѣ же $n > 1$, какъ мы увидимъ, этого нѣтъ.

§ 72. **Высшіе дифференціалы сложной функціи.** Пусть всѣ значенія функціи $u = f(x)$ принадлежатъ области опредѣленія функціи $F(u)$, такъ что равенствомъ $y = F(f(x))$ опредѣляется нѣкоторая функція во всей области опредѣленія функціи $f(x)$.

Пусть $f(x)$ въ точкѣ x и $F(u)$ въ точкѣ $u = f(x)$ имѣютъ всѣ производныя, входящія въ выводимыя ниже формулы.

Прежде всего, согласно § 64,

$$dy = F'(u)\,du.$$

Отсюда мы получаемъ (по правилу дифференцированія произведенія)

$$d^2y = dF'(u) \cdot du + F'(u)\,d^2u,$$

а такъ какъ, по § 64,

$$dF'(u) = F''(u)\,du,$$

то

$$d^2y = F''(u)\,du^2 + F'(u)\,d^2u.$$

Далѣе находимъ:

$$d^3y = F'''(u)\,du^3 + 3F''(u)\,du\,d^2u + F'(u)\,d^3u,$$

и т. д.[1])

Только первая изъ этихъ формулъ: $dy = F'(u)du$ имѣетъ такой видъ, какъ будто перемѣнная u была бы независимой. Существуетъ, однако, частный случай, въ которомъ всѣ эти формулы обладаютъ такимъ же свойствомъ.

[1]) Вмѣсто du, d^2u, d^3u, ... должны быть подставлены ихъ значенія $f'(x)\,dx$, $f''(x)\,dx^2$, $f'''(x)\,dx^3$, ...

Именно, если

$$u = \lambda x + \mu \quad (\lambda,\ \mu \text{ — постоянныя и } \lambda \gtrless 0),$$

то

$$du = \lambda dx,\ d^2u = 0,\ d^3u = 0,\ \ldots,$$

такъ что вообще

$$d^n y = F^{(n)}(u)\, du^n \quad \text{и} \quad F^{(n)}(u) = \frac{d^n y}{du^n}.$$

Въ общемъ же случаѣ для $n > 1$ функція $F^{(n)}(u)$ отнюдь не равняется $d^n y$, дѣленному на du^n.

§ 73. **Примѣры.** Пусть n—положительное цѣлое число и

$$y = \frac{x^n}{n!}.$$

Тогда

$$y' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\ y'' = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!},\ \ldots,\ y^{(n-1)} = \frac{x}{1!},\ y^{(n)} = 1.$$

Всѣ высшія производныя равны нулю.

Для каждой цѣлой раціональной функціи n-ой степени n-ая производная есть постоянная *), а послѣдующія производныя равны нулю.

Функція e^x имѣетъ ту особенность, что всѣ ея производныя равны e^x; n-ая производная функціи a^x имѣетъ видъ $a^x(\log a)^n$.

Если $y = \log x$ $(x > 0)$, то

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1};$$

$$y'' = (-1)x^{-2},$$

$$y''' = (-1)(-2)x^{-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

вообще

$$y^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n+1)x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n};$$

*) Отличная отъ нуля.

n-ый дифференціалъ функціи

$$\log(\lambda x+\mu)\,{}^{*)} \quad (\lambda,\ \mu\text{ — постоянныя, } \lambda \gtreqless 0)$$

имѣетъ видъ (ср. § 72):

$$d^n \log(\lambda x+\mu) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(\lambda x+\mu)^{-n}(\lambda dx)^n.$$

§ 74. **Теорема Тэйлора (Taylor).** Пусть $F(x)$ будетъ цѣлая раціональная функція $(n-1)$-ой степени, т. е.

$$F(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}.$$

Тогда функція $F(x+h)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$F(x+h) = F_0(x) + \frac{h}{1!}F_1(x) + \frac{h^2}{2!}F_2(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}F_{n-1}(x),$$

гдѣ $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... суть цѣлыя раціональныя функціи, которыя мы сейчасъ опредѣлимъ.

Если мы будемъ разсматривать h, какъ перемѣнную, а x, какъ постоянную, то съ помощью дифференцированія получимъ:

$$F'(x+h) = F_1(x) + \frac{h}{1!}F_2(x) + \ldots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}F_{n-1}(x),$$

$$F''(x+h) = F_2(x) + \ldots + \frac{h^{n-3}}{(n-3)!}F_{n-1}(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F^{(n-1)}(x+h) = F_{n-1}(x).$$

Если повсюду положимъ $h=0$, то найдемъ:

$$F(x)=F_0(x), F'(x)=F_1(x), F''(x)=F_2(x), \ldots, F^{(n-1)}(x)=F_{n-1}(x).$$

Такимъ образомъ, имѣетъ мѣсто формула

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1!}F'(x)+\frac{h^2}{2!}F''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x),$$

---

*) Перемѣнная x принимаетъ только такія значенія, для которыхъ $\lambda x+\mu > 0$.

или, положивъ, $x = x_1$ и $x + h = x_2$, имѣемъ:

$$F(x_2) = F(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{1!} F'(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2!} F''(x_1) + \dots$$
$$\dots + \frac{(x_2 - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_1).$$

Этотъ результатъ мы имѣемъ въ виду обобщить.

Допустимъ, что въ интервалѣ $\langle x_1, x_2 \rangle$ функцію $f(x)$ можно дифференцировать n разъ. Тогда функція

$$\varphi(x) = f(x_2) - f(x) - \frac{x_2 - x}{1!} f'(x) - \frac{(x_2 - x)^2}{2!} f''(x) - \dots$$
$$\dots - \frac{(x_2 - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

имѣетъ въ упомянутомъ интервалѣ производную, а именно

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_2 - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Если къ функціи $\varphi(x)$ и къ функціи

$$\psi(x) = (x_2 - x)^p \quad (p \text{ положительное цѣлое число})$$

мы примѣнимъ обобщенную теорему о среднемъ значеніи [1]), то получимъ:

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad (\xi \text{ лежитъ между } x_1 \text{ и } x_2),$$

или

$$\frac{\varphi(x_1)}{(x_2 - x_1)^p} = \frac{(x_2 - \xi)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\xi).$$

Такъ какъ ξ лежитъ между x_1 и x_2, то мы можемъ положить

$$\xi = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1),$$

при чемъ $0 < \vartheta < 1$. Тогда

$$\varphi(x_1) = \frac{(x_2 - x_1)^n (1 - \vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)).$$

---

[1]) Условія теоремы всѣ выполнены.

Такимъ образомъ, написавъ снова x и $x+h$ вмѣсто x_1 и x_2, мы придемъ къ формулѣ

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+R_n,$$

гдѣ

$$R_n=\frac{h^n(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(x+\vartheta h).\quad (0<\vartheta<1)$$

Вышеприведенная формула содержитъ въ себѣ теорему Тэйлора и носитъ названіе формулы Тэйлора. Мы доказали ее въ предположеніи, что функція $f(x)$ въ интервалѣ $\langle x, x+h\rangle$ n-кратно дифференцируема.

Если положить въ выраженіи для R_n

$$p=1 \quad \text{или} \quad p=n,$$

то получимъ, соотвѣтственно,

$$R_n=\frac{h^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\vartheta h), \quad \text{или} \quad R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\vartheta h).$$

Первое выраженіе называется остаточнымъ членомъ въ формѣ Коши, второе—остаточнымъ членомъ въ формѣ Лагранжа.

Формула Тэйлора можетъ быть записана короче, если положить $f(x)=y$ и воспользоваться тѣмъ, что

$$dy=f'(x)h,\ d^2y=f''(x)h^2,\ \ldots,\ d^ny=f^{(n)}(x)h^n,$$

и

$$\Delta y=f(x+h)-f(x).$$

Именно, она при этомъ принимаетъ видъ:

$$\Delta y=\frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\cdots+\frac{d^{n-1}y}{(n-1)!}+R_n,$$

при чемъ

$$R_n=\frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}(d^ny)_{x+\vartheta h}.\quad (0<\vartheta<1)$$

Символъ

$$(d^ny)_{x+\vartheta h}$$

означаетъ, что послѣ составленія $d^n y$ вмѣсто x должно подставить значеніе $x + \vartheta h$.

Глава VII.

Безконечные ряды.

§ 75. **Сходящіеся и расходящіеся ряды.** Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots$ будетъ нѣкоторая числовая послѣдовательность и

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

— сумма n первыхъ ея членовъ.

Можетъ случиться, что послѣдовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ сходится, такъ что s_n стремится къ нѣкоторому предѣлу s. Этотъ фактъ выражаютъ съ помощью формулы

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

которая, такимъ образомъ, является лишь инымъ способомъ написанія соотношенія

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = s.$$

Говорятъ, что безконечный рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходится и имѣетъ сумму s.

Если послѣдовательность $s_1, s_2. s_3, \ldots$ не сходится, т. е. если $\lim s_n$ не существуетъ, то говорятъ, что безконечный рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ расходится.

Сумму s_n называютъ n-ой частной суммой безконечнаго ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

§ 76. **Простѣйшія предложенія относительно сходящихся рядовъ.** Изъ опредѣленія въ § 75 непосредственно получаются слѣдующія теоремы:

1. Если рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходится, то и рядъ $u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \ldots$ также сходится, и, наоборотъ; ν означаетъ одно изъ чиселъ $2, 3, \ldots$ [1])

---

[1]) Рядъ $u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \ldots$ называютъ остаткомъ ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

2. Если рядъ $u_1+u_2+u_3+\ldots$ сходится, то и рядъ

$$(u_1+\ldots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2})+\ldots$$

также сходится, при чемъ оба ряда имѣютъ одну и ту же сумму.

Въ самомъ дѣлѣ, частныя суммы второго ряда образуютъ часть послѣдовательности $s_1, s_2, s_3, \ldots$

3. Если

$$s=u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

то

$$as=au_1+au_2+au_3+\ldots$$

4. Если рядъ $u_1+u_2+u_3+\ldots$ сходится. то

$$\lim u_n=0.$$

Изъ соотношенiй

$$\lim s_n=s \quad \text{и} \quad \lim s_{n-1}=s$$

слѣдуетъ:

$$\lim(s_n-s_{n-1})=\lim u_n=0.$$

Впрочемъ, хотя условiе $\lim u_n=0$ необходимо для сходимости ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots$, оно не является *достаточнымъ*. Это обнаруживается на примѣрѣ

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots,$$

въ которомъ

$$s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

такъ что $\lim s_n$ не существуетъ [1]), въ то время, какъ

$$\lim u_n=\lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

5. Пусть

$$s=u_1+u_2+u_3+\ldots,\quad t=v_1+v_2+v_3+\ldots$$

Тогда

$$s+t=u_1+v_1+u_2+v_2+u_3+v_3+\ldots$$

---

[1]) Послѣдовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ не ограничена.

Дѣйствительно, $(2n)$-ая частная сумма послѣдняго ряда имѣетъ видъ $s_n + t_n$, а $(2n-1)$-ая равна $s_n + t_n - v_n$. Оба выраженія стремятся къ предѣлу $s + t$.

Равнымъ образомъ,

$$s - t = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + \ldots,$$

такъ какъ, согласно No 3, имѣемъ:

$$-t = -v_1 - v_2 - v_3 - \ldots$$

§ 77. **Примѣры.** 1. Геометрическій рядъ (прогрессія)

$$a + aq + aq^2 + \ldots \qquad (a \gtrless 0)$$

не сходится для $|q| \geqq 1$, такъ какъ не выполняется условіе $\lim u_n = 0$. Именно, имѣемъ

$$|u_n| = |a|\,|q|^{n-1} \geqq |a|.$$

Остается лишь изслѣдовать случай, когда $|q| < 1$. При этомъ

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},$$

$$s_n q = \qquad aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n,$$

такъ что

$$s_n(1-q) = a(1-q^n),$$

т. е.

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Такъ какъ $\lim q^n = 0$ [1]), то

$$\lim s_n = \frac{a}{1-q},$$

или

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots$$

---

[1]) Въ случаѣ $q = 0$ это очевидно. Въ случаѣ $|q| > 0$ положимъ $1 : |q| = 1 + h$. Числа h будутъ положительными, такъ какъ $|q| < 1$. Вмѣстѣ съ тѣмъ (согласно § 36)

$$|q|^n = 1 : (1+h)^n < 1 : (1 + nh).$$

Отсюда и вытекаетъ, что $\lim q^n = 0$.

Геометрическій рядъ

$$a + aq + aq^2 + \ldots, \qquad (a \gtrless 0)$$

такимъ образомъ, сходится въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $|q| < 1$.

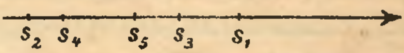
2. Рядъ, члены котораго попеременно имѣютъ то положительный, то отрицательный знакъ, называется **знакоперемѣннымъ рядомъ**. Такой рядъ имѣетъ видъ

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,$$

гдѣ всѣ a суть положительныя числа.

Еще Лейбницъ установилъ относительно знакоперемѣнныхъ рядовъ слѣдующую важную теорему:

Если a_n, убывая, стремится къ нулю, то рядъ $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ сходится.



Фиг. 8.

Если на числовой линіи отмѣтить точки $s_1, s_2, s_3, \ldots$, то окажется, что онѣ расположены такъ, какъ указано на фиг. 8.

$s_1, s_3, s_5, \ldots$ есть убывающая послѣдовательность, $s_2, s_4, s_6, \ldots$ — возрастающая. Обѣ, очевидно, ограничены и, слѣдовательно, сходятся. Сверхъ того,

$$\lim (s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim a_{2n} = 0,$$

такъ что

$$\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n}.$$

§ 78. **Ряды съ положительными членами.**[1]) Если всѣ члены безконечнаго ряда суть положительныя числа, то его частныя суммы образуютъ возрастающую послѣдовательность.

Коль скоро мы убѣдились въ томъ, что суммы s_n остаются постоянно меньшими нѣкотораго постояннаго числа g, сходимость ряда доказана: послѣдовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ въ этомъ случаѣ сходится (§ 16).

---

[1]) Предложенія въ §§ 78, 80 и 82 остаются въ силѣ также и въ томъ случаѣ, если потребовать лишь, чтобы члены рядовъ были неотрицательными числами.

Если имѣемъ два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \text{и} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

съ положительными членами, и

$$u_n \leqq v_n, \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

то изъ сходимости второго ряда вытекаетъ сходимость перваго.

Если первый рядъ расходится, то это же, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто и въ отношенiи второго ряда.

д'Аламбера

§ 79. **Признакъ u_{n+1}/u_n.** Безконечный рядъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

съ положительными членами сходится, если существуетъ число q, которое, будучи меньше 1, превосходитъ почти всѣ члены послѣдовательности

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \ldots$$

Если почти всѣ члены этой послѣдовательности не меньше 1, то рядъ расходится, при чемъ даже не выполняется условiе $\lim u_n = 0$.

Въ первомъ случаѣ, за конечнымъ числомъ исключенiй, имѣютъ мѣсто неравенства:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Если $\nu - 1$ есть наибольшiй изъ индексовъ, отвѣчающихъ исключенiямъ, то имѣемъ

$$u_{\nu+1} < q u_\nu,$$

$$u_{\nu+2} < q u_{\nu+1},$$

$$\ldots\ldots,$$

$$u_{\nu+n} < q u_{\nu+n-1},$$

откуда *)

$$u_{\nu+n} < q^n u_\nu.$$

*) Перемножая эти неравенства почленно и сокращая на $u_{\nu+1}\, u_{\nu+2} \cdots u_{\nu+n-1}$.

Изъ сходимости ряда $u_\nu + qu_\nu + q^2 u_\nu + \ldots$, на основаніи замѣчанія въ § 78, вытекаетъ сходимость ряда $u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \ldots$, а отсюда заключаемъ о сходимости ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

Во второмъ случаѣ, за конечнымъ числомъ исключеній,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Если $\nu - 1$ есть наибольшій изъ индексовъ, отвѣчающихъ исключеніямъ, то имѣемъ:

$$u_{\nu+1} \geqq u_\nu,\; u_{\nu+2} \geqq u_{\nu+1}, \ldots;$$

слѣдовательно,

$$u_{\nu+1} \geqq u_\nu,\; u_{\nu+2} \geqq u_\nu, \ldots,$$

такъ что даже не выполняется условіе $\lim u_n = 0$.

Если u_{n+1}/u_n имѣетъ предѣлъ l, то разсматриваемый рядъ сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$. Дѣйствительно, если въ первомъ случаѣ выбрать число q между l и 1, то почти всѣ отношенія u_{n+1}/u_n окажутся меньшими, чѣмъ q. Во второмъ случаѣ почти всѣ u_{n+1}/u_n будутъ больше 1.

Коши.

§ 80. **Признакъ $\sqrt[n]{u_n}$.** Безконечный рядъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

съ положительными членами сходится, если существуетъ число q, которое меньше 1 и превосходитъ почти всѣ члены послѣдовательности

$$u_1,\; \sqrt[2]{u_2},\; \sqrt[3]{u_3}, \ldots$$

Если неограниченное множество членовъ этой послѣдовательности не меньше 1, то рядъ расходится, при чемъ даже не выполняется условіе $\lim u_n = 0$.

Въ первомъ случаѣ, за конечнымъ числомъ исключеній, имѣемъ:

$$\sqrt[n]{u_n} < q, \text{ такъ что } u_n < q^n. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Если $\nu - 1$ есть наибольшій изъ индексовъ, отвѣчающихъ исключеніямъ, то

$$u_\nu < q^\nu,\quad u_{\nu+1} < q^{\nu+1},\quad u_{\nu+2} < q^{\nu+2},\ldots$$

Изъ сходимости ряда $q^\nu + q^{\nu+1} + q^{\nu+2} + \ldots$ вытекаетъ сходимость ряда $u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \ldots$ и ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

Во второмъ случаѣ неограниченное число чиселъ u_n имѣетъ то свойство, что

$$\sqrt[n]{u_n} \geqq 1,\ \text{такъ что}\ u_n \geqq 1;$$

слѣдовательно, не выполняется даже условіе $\lim u_n = 0$.

Если $\sqrt[n]{u_n}$ имѣетъ предѣлъ l, то рядъ въ случаѣ $l < 1$ сходится, въ случаѣ $l > 1$ расходится. Дѣйствительно, если—въ первомъ случаѣ—выбрать число q между l и 1, то почти всѣ $\sqrt[n]{u_n}$ меньше q. Во второмъ случаѣ почти всѣ $\sqrt[n]{u_n}$ больше 1.

§ 81. **Взаимоотношеніе обоихъ признаковъ.** Допустимъ, что почти всѣ u_{n+1}/u_n меньше q $(0 < q < 1)$. Тогда при надлежащемъ выборѣ ν

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < q,\quad \frac{u_{\nu+2}}{u_{\nu+1}} < q,\ \ldots,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} < q;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ

$$u_n < u_\nu q^{n-\nu},\ \text{такъ что}\ u_n^{\frac{1}{n}} < u_\nu^{\frac{1}{n}} q^{1-\frac{\nu}{n}}. \qquad (n > \nu)$$

Такъ какъ

$$\lim \left(u_\nu^{\frac{1}{n}} q^{1-\frac{\nu}{n}} \right) = q,$$

то, при $q < \mathfrak{q} < 1$, почти всѣ $u_\nu^{\frac{1}{n}} q^{1-\frac{\nu}{n}}$ меньше $\mathfrak{q}$, такъ что и почти всѣ $\sqrt[n]{u_n}$ меньше $\mathfrak{q}$ *).

Такимъ образомъ, если съ помощью признака u_{n+1}/u_n можетъ быть констатирована сходимость ряда, то это же можетъ быть сдѣлано и съ помощью признака $\sqrt[n]{u_n}$.

Но существуютъ ряды, сходимость которыхъ можетъ быть

*) Ибо $\sqrt[n]{u_n} = u_n^{\frac{1}{n}} < u_\nu^{\frac{1}{n}} q^{1-\frac{\nu}{n}}$.

установлена съ помощью признака $\sqrt[n]{u_n}$, но не съ помощью признака u_{n+1}/u_n. Пусть a и b будутъ два положительныя числа и $a < b$. Мы выбираемъ c такъ, чтобы выполнялись неравенства $a < c < b$, и полагаемъ $c/b = q$. Тогда $q < 1$. Если мы составимъ затѣмъ рядъ

$$a + bq + aq^2 + bq^3 + \ldots,$$

то

$$u_{2n-1} = aq^{2n-2}, \quad u_{2n} = bq^{2n-1}.$$

Отсюда вытекаетъ:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = q.$$

Однако же,

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \frac{bq}{a} = \frac{c}{a} > 1$$

и

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{aq}{b} < 1.$$

Такимъ образомъ, признакъ u_{n+1}/u_n не даетъ возможности въ этомъ случаѣ обнаружить сходимость ряда.

§ 82. **Перемѣщеніе членовъ.** Пусть $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будетъ сходящійся рядъ съ положительными членами. Положимъ, что рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ полученъ изъ перваго при нѣкоторомъ перемѣщеніи членовъ[1]).

Первый рядъ имѣетъ нѣкоторую сумму s. Мы докажемъ, что второй рядъ сходится и имѣетъ ту же сумму s.

Для каждой частной суммы σ_n ряда $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ можно найти большую ея сумму s_m ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ Достаточно лишь позаботиться, чтобы въ составъ s_m входили члены $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и сверхъ того еще другіе. Рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$, такимъ образомъ, сходится, ибо всѣ его частныя суммы меньше s, а изъ того, что

$$s > \sigma_n, \text{ вытекаетъ, что } s \geq \sigma,$$

если черезъ σ обозначить сумму этого ряда.

---

[1]) Т. е. каждое число должно одинаковое количество разъ входить въ качествѣ члена въ оба ряда.

Такъ какъ оба ряда играютъ одну и ту же роль въ отношеніи другъ друга, то и $\sigma \geqq s$, а слѣдовательно, $s = \sigma$.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Если въ сходящемся ряду съ положительными членами по произволу перемѣстить члены, то рядъ останется сходящимся и сохранитъ ту же сумму,

§ 83. **Абсолютно сходящіеся ряды.** Легко убѣдиться въ томъ, что изъ сходимости ряда

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$$

вытекаетъ сходимость ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$0 \leqq \frac{|u_n| + u_n}{2} \leqq |u_n| \quad \text{и} \quad 0 \leqq \frac{|u_n| - u_n}{2} \leqq |u_n|.$$

Такимъ образомъ, ряды

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \qquad \left(v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}\right)$$

и

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots \qquad \left(w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}\right),$$

сходятся; слѣдовательно, сходятся (ср. § 76) также ряды

$$v_1 - w_1 + v_2 - w_2 + v_3 - w_3 + \cdots$$

и

$$(v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) + (v_3 - w_3) + \cdots,$$

т. е.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots.$$

Рядъ $u_1 + u_2 + u_3 \cdots$ называютъ абсолютно сходящимся, если сходится рядъ $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$.

§ 84. **Перемѣщеніе членовъ въ абсолютно сходящемся ряду.** Абсолютно сходящійся рядъ, какъ мы видѣли выше, всегда можетъ быть разсматриваемъ, какъ разность двухъ сходящихся рядовъ съ неотрицательными членами. Любое перемѣщеніе членовъ ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ можетъ быть выполнено путемъ соотвѣтствующаго перемѣщенія членовъ рядовъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ и $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ При этомъ они останутся сходящимися и сохранятъ тѣ же суммы. Слѣдовательно, это же обстоятельство имѣетъ мѣсто и въ отношеніи ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, такъ что нами доказана теорема:

Если въ абсолютно сходящемся ряду по произволу перемѣстить члены, то онъ останется сходящимся и сохранитъ ту же сумму.*)

§ 85. **Произведеніе двухъ абсолютно сходящихся рядовъ.** Возьмемъ сначала два сходящихся ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots.$$

съ неотрицательными членами; n-ую частную сумму перваго изъ нихъ обозначимъ черезъ A_n, а второго — черезъ B_n. Суммы этихъ рядовъ пусть будутъ, соотвѣтственно, A и B.

Разсмотримъ рядъ

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + \cdots.$$

Членами его являются произведенія каждаго изъ членовъ перваго ряда на каждый изъ членовъ второго ряда. Эти произведенія расположены такимъ образомъ, что сумма индексовъ множителей имѣетъ вначалѣ значеніе 2, затѣмъ 3, 4 и т. д. Произведенія, въ которыхъ сумма индексовъ равна $n + 1$, именно произведенія

$$a_1 b_n,\ a_2 b_{n-1}, \ldots, a_{n-1} b_2,\ a_n b_1$$

расположены въ ряду въ томъ порядкѣ, какой здѣсь указанъ, т. е. такъ, что индексы при a возрастаютъ. Если мы возьмемъ какую-нибудь частную сумму S_n ряда $a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \cdots$, то можно выбрать индексъ μ такъ, чтобы выполнялось соотношеніе

$$S_n \leqq A_\mu B_\mu.$$

*) Какъ доказалъ Риманъ (Riemann), этимъ свойствомъ обладаютъ только абсолютно сходящіеся ряды.

Дѣйствительно, если μ достаточно велико, то въ развернутое произведеніе $A_\mu B_\mu$ входятъ всѣ члены суммы S_n и, кромѣ нихъ, еще другіе неотрицательные члены.

Такъ какъ

$$A_\mu \leqq A \text{ и } B_\mu \leqq B,$$

то

$$S_n \leqq A B.$$

Такимъ образомъ, всѣ частныя суммы ряда $a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \cdots$ не превосходятъ $A B$. Отсюда заключаемъ, что рядъ этотъ сходится, и что его сумма S удовлетворяетъ соотношенію

$$S \leqq A B.$$

Съ другой стороны, если мы возьмемъ произведеніе $A_n B_n$, то можно выбрать ν такъ, чтобы имѣло мѣсто соотношеніе

$$A_n B_n \leqq S_\nu.$$

Для этого достаточно лишь позаботиться о томъ, чтобы въ S_ν входили всѣ члены развернутаго произведенія $A_n B_n$.

Такъ какъ $S_\nu \leqq S$, то

$$A_n B_n \leqq S,$$

такъ что и

$$A B \leqq S.$$

Мы находимъ такимъ образомъ, что

$$A B = S.$$

Пусть теперь

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \text{ и } v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

будутъ абсолютно сходящіеся ряды съ суммами s и t.

Мы знаемъ, что каждый такой рядъ можетъ быть представленъ въ видѣ разности двухъ сходящихся рядовъ съ неотрицательными членами.

Пусть рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будетъ разностью рядовъ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \text{ и } b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

съ суммами A и B, такъ что $u_n = a_n - b_n$, $s = A - B$.

Пусть рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ будетъ разностью рядовъ

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots \quad \text{и} \quad d_1 + d_2 + d_3 + \cdots$$

съ суммами C и D, такъ что $v_n = c_n - d_n$, $t = C - D$.

Согласно изложенному выше, имѣемъ:

$$AC = a_1 c_1 + a_1 c_2 + a_2 c_1 + \cdots,$$
$$AD = a_1 d_1 + a_1 d_2 + a_2 d_1 + \cdots,$$
$$BC = b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + \cdots,$$
$$BD = b_1 d_1 + b_1 d_2 + b_2 d_1 + \cdots;$$

слѣдовательно, (ср. § 76):

$$st = AC - AD - BC + BD$$
$$= u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + \cdots,$$

такъ какъ

$$a_1 c_1 - a_1 d_1 - b_1 c_1 + b_1 d_1 = (a_1 - b_1)(c_1 - d_1) = u_1 v_1$$

и т. д.

Рядъ $u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + \cdots$ не только сходится, но и абсолютно сходится. Въ самомъ дѣлѣ,

$$AC + AD + BC + BD$$

есть сумма ряда, котораго общій членъ

$$a_i c_k + a_i d_k + b_i c_k + b_i d_k,$$

очевидно, не меньше абсолютной величины произведенія $u_i v_k$, такъ какъ

$$|u_i| \leqq a_i + b_i, \qquad |v_k| \leqq c_k + d_k.\text{*)}$$

Поэтому члены ряда $u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + \cdots$ можно произ-

*) Т. е. члены ряда $|u_1 v_1| + |u_1 v_2| + \cdots$ не будутъ больше соотвѣтственныхъ членовъ сходящагося ряда, и рядъ $|u_1 v_1| + \cdots$ будетъ сходиться (§ 78).

вольно перемѣщать, при чемъ онъ останется сходящимся и сохранитъ сумму st.

Такимъ образомъ, мы получаемъ слѣдующую теорему: Положимъ, что ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \text{ и } v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

абсолютно сходятся и имѣютъ соотвѣтственно суммы s и t. Если составимъ рядъ, члены котораго суть произведенія

$$u_i v_k,^{1)} \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

то онъ абсолютно сходится и имѣетъ сумму st.[2])

§ 86. **Примѣръ.** Мы знаемъ, что рядъ

$$1 + q + q^2 + \cdots$$

при условіи $|q| < 1$ абсолютно сходится и имѣетъ сумму $1 : (1 - q)$, такъ что

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = (1 + q + q^2 + \cdots)(1 + q + q^2 + \cdots).$$

Здѣсь членами $u_i v_k$ будутъ величины

$$\begin{array}{llll} 1, & q, & q^2, & q^3, \ldots, \\ & q, & q^2, & q^3, \ldots, \\ & & q^2, & q^3, \ldots, \\ & & & q^3, \ldots, \\ & & & \ldots\ldots \end{array}$$

[1]) Каждое изъ этихъ произведеній должно входить въ составъ ряда одинъ и только одинъ разъ, и другихъ членовъ рядъ не долженъ содержать.

[2]) Мы присовокупимъ къ этому слѣдующее: если рядъ $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ абсолютно сходится, то это же имѣетъ мѣсто и въ отношеніи ряда $(w_1 + \cdots + w_{n_1}) + (w_{n_1+1} + \cdots + w_{n_2}) + \cdots$, который получается изъ перваго соединеніемъ сосѣднихъ членовъ въ одинъ. Мы можемъ поэтому и въ рядѣ st соединить въ одинъ сосѣдніе члены, при чемъ онъ сохранитъ абсолютную сходимость.

Такимъ образомъ,

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots \qquad (|q| < 1).$$

Если этотъ абсолютно сходящійся рядъ еще разъ умножить на рядъ $1 + q + q^2 + \cdots$, то получится рядъ, имѣющій сумму $1 : (1-q)^3$, и т. д.

§ 87. **Степенные ряды.** Геометрическій рядъ принадлежитъ къ важному классу такъ называемыхъ степенныхъ рядовъ.

Степенной рядъ имѣетъ видъ:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Числа a_0, a_1, a_2, ... называются коэффиціентами степенного ряда. Въ случаѣ геометрическаго ряда они всѣ равны 1.

Если заданъ степенной рядъ (т. е. извѣстны его коэффиціенты), то возникаетъ вопросъ:

Для какихъ значеній x рядъ сходится?

Эти значенія образуютъ область сходимости ряда.

§ 88. **Теорема Коши-Гадамара (Cauchy-Hadamard** Для того, чтобы опредѣлить область сходимости степенного ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, составимъ послѣдовательность

$$|a_1|, \; |a_2|^{\frac{1}{2}}, \; |a_3|^{\frac{1}{3}}, \ldots.$$

При этомъ возможны два случая:

1. Послѣдовательность ограничена.
2. Послѣдовательность не ограничена.

Во второмъ случаѣ степенной рядъ сходится только для $x = 0$. Дѣйствительно, если бы онъ сходился для $x = x_0 \, (\gtrless 0)$, то имѣло бы мѣсто равенство

$$\lim (a_n x_0^n) = 0.$$

Но существуетъ неограниченное число членовъ нашей послѣдовательности, превосходящихъ любое напередъ заданное число[1]).

---

[1]) Въ противномъ случаѣ послѣдовательность была бы ограничена.

Слѣдовательно, неограниченное число чиселъ a_n удовлетворяетъ неравенству

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|x_0|},$$

а въ силу этого и неравенству

$$|a_n x_0^n| > 1,$$

что противорѣчитъ равенству $\lim (a_n x_0^n) = 0$.

Въ первомъ случаѣ мы обозначимъ черезъ h наивысшую точку сгущенія послѣдовательности (ср. § 13).

Если $h = 0$, то послѣдовательность имѣетъ единственную точку сгущенія — нуль, такъ что въ этомъ случаѣ (ср. § 14)

$$\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Нашъ рядъ при этомъ сходится абсолютно для каждаго значенія x, и его называютъ постоянно сходящимся. Дѣйствительно, если x есть какое-нибудь число, то

$$\lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Такимъ образомъ, на основаніи признака, указаннаго въ § 80, сходится рядъ $|a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \cdots$, а, слѣдовательно, и рядъ

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots.$$

Если $h > 0$, то степенной рядъ сходится и при томъ абсолютно, коль скоро $|x| < \frac{1}{h}$, и расходится, коль скоро $|x| > \frac{1}{h}$.

Если $|x| < \frac{1}{h}$, то можно выбрать положительное число ε такъ, чтобы

$$|x| < \frac{1}{h + 2\varepsilon}.$$

При этомъ почти всѣ $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ меньше, чѣмъ $h + \varepsilon$.[1]) Такимъ образомъ,

[1]) Въ противномъ случаѣ точка h не была бы наивысшей точкой сгущенія.

почти для всѣхъ значенiй индекса n

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}|x| < \frac{h+\varepsilon}{h+2\varepsilon}, \text{ и вмѣстѣ съ тѣмъ } |a_n x^n| < \left(\frac{h+\varepsilon}{h+2\varepsilon}\right)^n.$$

Отсюда же явствуетъ, что рядъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \text{ для } |x| < \frac{1}{h}$$

сходится абсолютно.

Если $|x| > \frac{1}{h}$, такъ что

$$\left|\frac{1}{x}\right| < h,$$

то слѣдуетъ принять во вниманiе, что существуетъ безконечное множество чиселъ $|a_n|^{\frac{1}{n}}$, большихъ, чѣмъ $\left|\frac{1}{x}\right|$. Поэтому для безконечнаго множества значенiй индекса n

$$|a_n x^n| > 1.$$

Такимъ образомъ, даже не выполняется условiе $\lim(a_n x^n) = 0$.

Въ сказанномъ выше содержится слѣдующая теорема:

Если наивысшая точка сгущенiя h послѣдовательности

$$|a_1|, \quad |a_2|^{\frac{1}{2}}, \quad |a_3|^{\frac{1}{3}}, \ldots$$

существуетъ и больше нуля, то степенной рядъ

$$\text{для } |x| < \frac{1}{h} \text{ абсолютно сходится,}$$

$$\text{для } |x| > \frac{1}{h} \text{ расходится.}$$

Если h существуетъ, но равно нулю, то рядъ сходится для каждаго значенiя x, и при томъ абсолютно.

Если h не существуетъ, то рядъ сходится только для $x = 0$.

Говорятъ, что въ первомъ случаѣ рядъ имѣетъ радiусъ сходимости $\frac{1}{h}$ и интервалъ сходимости $\left(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right)$, во второмъ случаѣ — радіусъ сходимости ∞ [1]) и интервалъ сходимости $(-\infty, \infty)$, въ третьемъ случаѣ — радіусъ сходимости нуль.

§ 89. **Примѣры.** 1. Рядъ

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

постоянно сходится. Именно, для $x \gtrless 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{n+1}, \quad \text{такъ что } \lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=0.$$

Такимъ образомъ, рядъ на основаніи признака u_{n+1}/u_n абсолютно сходится.

2. Рядъ

$$1+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots$$

для каждаго отличнаго отъ нуля значенія x расходится. Дѣйствительно, имѣемъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=(n+1)x.$$

Почти всѣ частныя

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=(n+1)|x|,$$

такимъ образомъ, больше 1, такъ что не выполняется даже условіе

$$\lim(n!\,x^n)=0,$$

необходимое для сходимости.

3. Рядъ

$$1+x+x^2+\cdots$$

имѣетъ радіусъ сходимости 1. [2])

---

[1]) ∞ означаетъ «безконечность».

[2]) Ряды въ No 1 и 2 имѣютъ, соотвѣтственно, радіусы сходимости ∞ и 0.

§ 90. **Дифференцированіе степенного ряда.** Степенной рядъ, радіусъ сходимости котораго не есть нуль, представляетъ въ своемъ интервалѣ сходимости [1]) нѣкоторую функцію. Дѣйствительно, каждому значенію x въ этомъ интервалѣ отвѣчаетъ одно опредѣленное значеніе суммы нашего ряда.

Мы допустимъ теперь, что степенной рядъ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ имѣетъ отличный отъ нуля радіусъ сходимости, и покажемъ, что функція

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

повсюду въ интервалѣ сходимости имѣетъ производную.

Если бы почти всѣ коэффиціенты степенного ряда были равны нулю, такъ что функція $f(x)$ была бы цѣлой раціональной функціей, то мы имѣли бы

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

Мы докажемъ, что эта формула имѣетъ мѣсто всегда.

Прежде всего мы обнаружимъ слѣдующее:

Степенной рядъ

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

имѣетъ тотъ же радіусъ сходимости, что и рядъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.\,^{2})$$

Если x есть произвольное число изъ интервала сходимости [3])

---

[1]) Границы мы не относимъ къ интервалу.

[2]) Эту теорему можно доказать и такъ. Рядъ $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$ имѣетъ тотъ же радіусъ сходимости, что и рядъ $a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots$ При этомъ послѣдовательность Коши-Гадамара имѣетъ видъ: $|a_1|$, $2^{\frac{1}{2}}|a_2|^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}|a_3|^{\frac{1}{3}}$, ... Но каждая точка сгущенія этой послѣдовательности есть точка сгущенія послѣдовательности $|a_1|$, $|a_2|^{\frac{1}{2}}$, $|a_3|^{\frac{1}{3}}$, ... и наоборотъ. Это легко доказать съ помощью замѣчанія, что $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$.

[3]) Мы допускаемъ, что радіусъ сходимости не нуль. Границы интервала сходимости не принимаются въ расчетъ.

ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, то можно въ этомъ интервалѣ выбрать число x_0 такъ, чтобы выполнялось неравенство $|x| < |x_0|$. Такъ какъ

$$\lim (a_n x_0^n) = 0,$$

то числа $a_n x_0^n$, а, слѣдовательно, и числа $a_n x_0^{n-1}$ — образуютъ ограниченную послѣдовательность. Поэтому можно выбрать G такъ, чтобы всѣ числа $a_n x_0^{n-1}$ лежали въ интервалѣ $(-G, G)$. Но

$$n a_n x^{n-1} = a_n x_0^{n-1} \cdot n \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1};$$

слѣдовательно,

$$|n a_n x^{n-1}| < G \cdot n q^{n-1}. \qquad \left(q = \left|\frac{x}{x_0}\right|\right)$$

Такъ какъ $q < 1$, то рядъ $1 + 2q + 3q^2 + \cdots$ сходится. а вмѣстѣ съ нимъ и рядъ

$$|a_1| + |2 a_2 x| + |3 a_3 x^2| + \cdots$$

Если x есть произвольное число въ интервалѣ сходимости [1]) ряда $a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots$, то сходится рядъ

$$|a_1| + |2 a_2 x| + |3 a_3 x^2| + \cdots;$$

слѣдовательно, сходятся и ряды

$$|a_1 x| + |2 a_2 x^2| + |3 a_3 x^3| + \cdots$$

и

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots.$$

Подобнымъ же образомъ, и рядъ

$$2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \cdots,$$

который получается изъ ряда

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots$$

точно такъ же, какъ этотъ послѣдній — изъ ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

[1]) См. примѣчаніе [3]) на стр. 105.

(именно, путемъ почленно выполненнаго дифференцированія), имѣетъ тотъ же радіусъ сходимости, что и рядъ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

Это же имѣетъ мѣсто и въ отношеніи ряда

$$3 \cdot 2 \cdot 1\, a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2\, a_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3\, a_5 x^2 + \cdots$$

и т. д.

Пусть x и x_0, какъ и выше, будутъ два числа изъ интервала сходимости ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ и пусть $|x| < |x_0|$. Подъ h мы будемъ разумѣть стремящуюся къ нулю перемѣнную, не принимающую, однако, значенія нуль, и допустимъ, что $|x + h| < |x_0|$. Тогда имѣемъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a_1 \frac{(x+h) - x}{h} + a_2 \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + a_3 \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} + \cdots.$$

Если вычтемъ отсюда

$$\varphi(x) = a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 + \cdots,$$

то получимъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \varphi(x) = a_2 \left\{ \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} - 2x \right\} + a_3 \left\{ \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} - 3\, x^2 \right\} + \cdots.$$

По теоремѣ о среднемъ значеніи

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\, \xi_n^{\,n-1},$$

при чемъ ξ_n лежитъ между x и $x + h$.

Въ силу этого

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} = n\,(\xi_n^{\,n-1} - x^{n-1}).$$

Далѣе, на основаніи теоремы о среднемъ значеніи,

$$\xi_n^{\,n-1} - x^{n-1} = (\xi_n - x)\,(n-1)\, x_n^{\,n-2},$$

при чемъ x_n лежитъ между x и ξ_n, а, слѣдовательно, навѣрное между x и $x + h$.

Такимъ образомъ, въ окончательномъ результатѣ

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} = n(n-1)(\xi_n - x)\, x_n^{\,n-2}$$

и потому

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} \right| < n(n-1)\, |x_0|^{n-2} h,$$

такъ какъ

$$|x_n| < |x_0| \quad \text{и} \quad |\xi_n - x| < h.$$

Теперь мы можемъ написать: [1])

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \varphi(x) \right| < |h| \left\{ 2 \cdot 1\, |a_2| + 3 \cdot 2\, |a_3 x_0| + \cdots \right\}.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\lim \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \varphi(x) \right\} = 0,$$

или

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x), \text{ такъ что } f'(x) = \varphi(x).$$

Такимъ образомъ, степенной рядъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

радіусъ сходимости котораго не равенъ нулю, имѣетъ повсюду въ интервалѣ сходимости производную

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots.$$

Она можетъ быть получена путемъ почленнаго дифференцированія ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

---

[1]) Если $s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ и рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ абсолютно сходится, то $|s| \leqq |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$, какъ это легко доказать.

Глава VIII.

Нѣкоторыя примѣненія степенныхъ рядовъ.

§ 91. Степенной рядъ для e^x. Функція e^x, какъ мы знаемъ, имѣетъ производную e^x.

Постоянно сходящійся степенной рядъ

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

также представляетъ функцію $\varphi(x)$, которая равна своей производной, что можетъ быть обнаружено съ помощью § 90.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ

$$(e^x)'=e^x \quad \text{и} \quad \varphi'(x)=\varphi(x).$$

Такъ какъ e^x не нуль, то отсюда вытекаетъ, что

$$\left(\frac{\varphi(x)}{e^x}\right)'=\frac{e^x\varphi'(x)-e^x\varphi(x)}{e^{2x}}=0.$$

Итакъ, $\varphi(x):e^x$ имѣетъ производную, повсюду равную нулю; но въ такомъ случаѣ [1])

$$\frac{\varphi(x)}{e^x}=c. \qquad (c\text{—постоянная})$$

Такъ какъ

$$\varphi(0)=1 \quad \text{и} \quad e^0=1,$$

то $c=1$ и

$$\varphi(x)=e^x,$$

т. е.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots.$$

Если положить $x=1$, то получимъ:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots.$$

---

[1]) Ср. § 67, слѣдствіе.

Эта формула очень пригодна для приближеннаго вычисленія числа e. Именно, имѣемъ:

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$$
$$=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right).$$

Но такъ какъ

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots<1+\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{n},$$

то можно написать

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{\vartheta}{n}\right),$$

при чемъ извѣстно, что ϑ лежитъ между 0 и 1.

Окончательно находимъ, такимъ образомъ, что

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\left(1+\frac{\vartheta}{n}\right).$$

Если положить $\vartheta=0$ и $\vartheta=1$, то получатся два числа, между которыми лежитъ e. Каждое изъ этихъ чиселъ отличается отъ e меньше, чѣмъ на $1:n!n$.

§ 92. **Функціи косинусъ и синусъ.** Оба ряда

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

и

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

постоянно сходятся. Суммы ихъ мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$\cos x$ (т. е. косинусъ x)

и

$\sin x$. (т. е. синусъ x)

Обѣ эти функціи опредѣлены для всѣхъ значеній x.

Очевидно,

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{и} \quad \sin(-x) = -\sin x.$$ [1]

Согласно § 90,

$$(\cos x)' = -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

и

$$(\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

т. е.

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \text{и} \quad (\sin x)' = \cos x.$$

§ 93. **Теоремы сложенія для $\cos x$ и $\sin x$.** Разумѣя подъ a произвольную постоянную, разсмотримъ слѣдующую функцію:

$$\{\cos(a+x) - \cos a \cos x + \sin a \sin x\}^2$$
$$+ \{\sin(a+x) - \sin a \cos x - \cos a \sin x\}^2 = \varphi(x).$$

Мы легко найдемъ, что

$$\varphi'(x) = 0.$$

Такимъ образомъ, $\varphi(x)$ есть постоянная. Такъ какъ, сверхъ того, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, такъ что $\varphi(0) = 0$, то функція $\varphi(x)$ постоянно равна 0. Отсюда вытекаетъ

$$\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x,$$
$$\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x.$$

Эти формулы называютъ *теоремами сложенія* для функцій $\cos x$ и $\sin x$.

Изъ первой формулы, если положить въ ней $a = -x$, вытекаетъ, что

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

§ 94. **Наименьшій положительный корень уравненія $\cos x = 0$.** Функція $\cos x$ для $x = 0$ имѣетъ *положительное* зна-

[1]) Функцію $f(x)$, удовлетворяющую условію $f(-x) = f(x)$, называютъ *четной*. Если же она удовлетворяетъ условію $f(-x) = -f(x)$, то ее называютъ *нечетной*. Такимъ образомъ, $\cos x$ является *четной* функціей, а $\sin x$ — *нечетной*.

ченіе, именно, равное 1. Для $x = 2$ она, наоборотъ, имѣетъ **отрицательное** значеніе. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \cdots,$$

при чемъ всѣ выраженія въ скобкахъ суть положительныя числа, такъ что

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4}\right) = -\frac{1}{3},$$

будетъ, слѣдовательно, отрицательнымъ числомъ.

Согласно § 33, между 0 и 2 существуетъ точка ξ такого рода, что

$$\cos \xi = 0.$$

Двухъ такихъ точекъ существовать не можетъ, ибо изъ равенствъ

$$\cos \xi = 0 \text{ и } \cos \xi_1 = 0 \qquad (0 < \xi,\ \xi_1 < 2)$$

вытекало бы, что между ξ и ξ_1, — слѣдовательно, между 0 и 2, — лежитъ точка, въ которой обращается въ нуль производная $(\cos x)'$, т. е. $\sin x$. Съ другой же стороны,

$$\sin x = \frac{x}{1!}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \cdots,$$

при чемъ для $0 < x < 2$ всѣ выраженія въ скобкахъ имѣютъ положительныя значенія, слѣдовательно, и $\sin x > 0$.

Въ силу этого, въ интервалѣ (0, 2) существуетъ только одна точка, въ которой $\cos x$ обращается въ нуль. Она является вмѣстѣ съ тѣмъ наименьшимъ положительнымъ корнемъ уравненія $\cos x = 0$.

Удвоенный этотъ корень мы обозначимъ черезъ π, и, слѣдовательно, самый корень черезъ $\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ и } 0 < \frac{\pi}{2} < 2.$$

$\sin \frac{\pi}{2}$ имѣетъ положительное значеніе; въ силу же соотношенія $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$. Отсюда вытекаетъ, что

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Съ помощью теоремы сложенія получаемъ:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x;$$

далѣе

$$\cos(x+\pi)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x,$$

$$\sin(x+\pi)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

и

$$\cos(x+2\pi)=-\cos(x+\pi)=\cos x,$$

$$\sin(x+2\pi)=-\sin(x+\pi)=\sin x.$$

На основаніи двухъ послѣднихъ формулъ говорятъ, что $\cos x$ и $\sin x$ суть періодическія функціи и имѣютъ періодъ 2π.

§ 95. **Вычисленіе логариѳмовъ**. Пусть $|x|<1$. Функція

$$f(x)=\log(1+x)$$

имѣетъ производную

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Съ другой стороны,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots;$$

поэтому

$$f'(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots.$$

Степенной рядъ въ правой части этого равенства есть производная отъ функціи

$$\varphi(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ:

$$f'(x)-\varphi'(x)=0;$$

слѣдовательно (§ 67, слѣдствіе),

$$f(x) - \varphi(x) = c.$$

Такъ какъ

$$f(0) = \varphi(0) = 0,$$

то $c = 0$ и

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots. \qquad (|x| < 1)$$

Замѣнивъ x на $-x$, получимъ:

$$\log(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Если вычесть второй рядъ изъ перваго, то для выраженія

$$\log(1 + x) - \log(1 - x) = \log\frac{1 + x}{1 - x}$$

получится формула:

$$\log\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \qquad (|x| < 1)$$

Когда n есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, . . . , то въ этой формулѣ, очевидно, можно положить

$$x = \frac{1}{2n + 1}.$$

Тогда

$$\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{n + 1}{n},$$

и мы получаемъ:

$$\log(n + 1) - \log n = 2\left\{\frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{3(2n + 1)^3} + \frac{1}{5(2n + 1)^5} + \cdots\right\}.$$

Для $n = 1$ эта формула даетъ намъ:

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \cdots\right).$$

Если положить

$$s_\nu = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2\nu - 1)\, 9^{\nu - 1}}\right),$$

то получимъ:

$$\log 2 = s_\nu + \varepsilon_\nu,$$

при чемъ найдемъ, что

$$\varepsilon_\nu < \frac{2}{3(2\nu+1)\,9^\nu}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right),$$

или

$$\varepsilon_\nu = \frac{\vartheta_\nu}{12(2\nu+1)\,9^{\nu-1}}, \qquad (0 < \vartheta_\nu < 1)$$

такъ что

$$\log 2 = s_\nu + \frac{\vartheta_\nu}{12(2\nu+1)\,9^{\nu-1}}.$$

Съ помощью этого равенства легко вычислить $\log 2$ съ произвольной напередъ заданной степенью точности.

Если мы теперь въ нашей формулѣ для $\log(n+1) - \log n$ положимъ $n = 4$, то получимъ:

$$\log 5 = 2\log 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 81} + \frac{1}{5\cdot 81^2} + \cdots\right).$$

Отсюда $\log 5$ можетъ быть вычисленъ съ напередъ заданной степенью точности.

Такимъ образомъ, мы можемъ съ произвольной степенью точности вычислить

$$\log 2 + \log 5 = \log 10,$$

а равнымъ образомъ и

$$M = \frac{1}{\log 10},$$

т. е. модуль¹) логариѳмовъ при основаніи 10.

Если мы умножимъ формулу для $\log(n+1) - \log n$ на M, то получимъ

$$\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n$$

$$= 2M\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right\}.$$

Этой формулой можно воспользоваться для вычисленія таблицы логариѳмовъ.

¹) $M = 0{,}43429448\ldots$

Если желаютъ вычислить логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10^5, то достаточно ограничиться вычисленіемъ логариѳмовъ пятизначныхъ чиселъ, ибо, напримѣръ,

$$\operatorname{Log} 13 = \operatorname{Log}\frac{13000}{10^3} = -3 + \operatorname{Log} 13000.$$

Такимъ образомъ, въ вышеприведенной формулѣ $n \geq 10^4$. Если положить

$$\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n = \frac{2M}{2n+1} + \delta_n,$$

то (такъ какъ $2M < 1$)

$$\delta_n < \frac{1}{3(2n+1)^3}\left\{1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right\},$$

или, такъ какъ

$$1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)},$$

то

$$\delta_n < \frac{1}{12n(n+1)(2n+1)} < \frac{1}{24n^3} < \frac{1}{10^{13}}.$$

Такимъ образомъ, δ_n меньше единицы 13-аго десятичнаго порядка.

Напримѣръ,

$$\operatorname{Log}(10^4+1) = 4 + \frac{2M}{2\cdot 10^4 + 1}$$

съ точностью до одной единицы 13-го десятичнаго порядка.

§ 96. **Теорема о биноміальномъ рядѣ.** Мы предпошлемъ ей слѣдующее замѣчаніе:

Если два степенныхъ ряда въ интервалѣ $(-\rho, \rho)$ сходятся $(\rho > 0)$ и имѣютъ одну и ту же сумму, то они вообще тождественны.

Дѣйствительно, если для $|x| < \rho$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots,$$

то, согласно § 90, и

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots,$$

$$2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots = 2\cdot 1b_2 + 3\cdot 2b_3x + 4\cdot 3b_4x^2 + \cdots,$$

и т. д. Положивъ повсюду $x = 0$, находимъ:

$$a_n = b_n. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Мы станемъ теперь искать степенной рядъ, который для $|x| < 1$ [1]) равнялся бы $(1+x)^\mu$. Для $x = 0$ онъ долженъ равняться 1. Слѣдовательно, первымъ его членомъ будетъ 1, и степенной рядъ имѣетъ видъ $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$. Мы требуемъ, чтобы для $|x| < 1$ имѣло мѣсто равенство:

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = (1+x)^\mu.$$

Путемъ дифференцированія получаемъ [2]):

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \mu (1+x)^{\mu - 1}.$$

Если обѣ части умножимъ на $1+x$, то придемъ къ соотношенію:

$$(1+x)(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots) = \mu (1+x)^\mu$$
$$= \mu (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots),$$

или

$$c_1 + (2c_2 + c_1) x + (3c_3 + 2c_2) x^2 + \cdots = \mu + \mu c_1 x + \mu c_2 x^2 + \cdots.$$

На основаніи замѣчанія въ началѣ настоящаго параграфа, отсюда слѣдуетъ:

$$c_1 = \mu, \ 2c_2 + c_1 = \mu c_1, \ 3c_3 + 2c_2 = \mu c_2, \ldots,$$

т. е.

$$c_1 = \frac{\mu}{1}, \ c_2 = \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}, \ c_3 = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots.$$

Вмѣсто выраженія

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

обыкновенно пишутъ:

$$\binom{\mu}{k} \text{ или } (\mu)_k.$$

1) При допущеніи $|x| < 1$ число $1+x$ будетъ положительнымъ.

2) Слѣдуетъ принять при этомъ во вниманіе правило дифференцированія, изложенное въ § 90.

Нашъ степенной рядъ принимаетъ, такимъ образомъ, видъ:

$$1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\cdots.$$

Если μ имѣетъ одно изъ значеній $0, 1, 2, \ldots$, то этотъ рядъ сходится для каждаго значенія x, такъ какъ въ этомъ случаѣ, начиная съ опредѣленнаго мѣста, всѣ члены исчезаютъ.

Если μ не имѣетъ указанныхъ значеній, то для $x \gtrless 0$ всѣ члены отличны отъ нуля, при чемъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mu-n+1}{n}x,$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=-x \text{ и } \lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|.$$

Такимъ образомъ, нашъ рядъ **абсолютно сходится** для $|x|<1$, каково бы ни было значеніе μ.

Если мы обозначимъ сумму ряда черезъ $\varphi(x)$, то, на основаніи вышесказаннаго,

$$(1+x)\varphi'(x)=\mu\varphi(x).$$

Отсюда, такъ какъ $(1+x)^\mu$ не равно нулю, слѣдуетъ:

$$\left(\frac{\varphi(x)}{(1+x)^\mu}\right)'=\frac{(1+x)^\mu\varphi'(x)-\mu(1+x)^{\mu-1}\varphi(x)}{(1+x)^{2\mu}}=0,$$

такъ что

$$\varphi(x)=c(1+x)^\mu. \qquad (c\text{ — нѣкоторая постоянная})$$

Такъ какъ $\varphi(0)=1$, то $c=1$ и

$$(1+x)^\mu=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\cdots \qquad (|x|<1)$$

Это — **Ньютонова** формула бинома. Рядъ въ правой части равенства называютъ **биноміальнымъ рядомъ**, коэффиціенты его — **биноміальными коэффиціентами**.

Замѣтимъ еще, что для цѣлаго положительнаго μ условіе $|x|<1$ отпадаетъ. Если же μ отлично отъ чиселъ $0, 1, 2, \ldots$

и $|x| > 1$, то биноміальный рядъ расходится, такъ какъ (ср. § 79) даже не выполняется условіе $\lim u_n = 0$.

§ 97. **Рядъ Тэйлора**. Въ § 74 мы доказали формулу Тэйлора. Если разсматриваемая функція имѣетъ всѣ производныя въ интервалѣ $\langle x, x+h \rangle$, то индексу n въ формулѣ Тэйлора мы можемъ приписать любое изъ значеній 1, 2, 3, ...

Можетъ случиться при этомъ, что

$$\lim R_n = 0.$$

Тогда

$$\lim \left\{ f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right\}$$
$$= \lim \{ f(x+h) - R_n \} = f(x+h),$$

или, что имѣетъ тотъ же смыслъ,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots.$$

Этотъ безконечный рядъ называютъ Тэйлоровымъ рядомъ.

Если для $n = 1, 2, 3, \ldots$ и для всѣхъ значеній ϑ между 0 и 1

$$|f^{(n)}(x + \vartheta h)| < A \quad (A \text{ — постоянная}),$$

то можно быть увѣреннымъ, что R_n стремится къ нулю. Дѣйствительно,

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \vartheta h),$$

такъ что

$$|R_n| < \frac{|h|^n}{n!} A.$$

Но мы знаемъ (ср. § 89), что рядъ

$$1 + \frac{|h|}{1!} + \frac{|h|^2}{2!} + \cdots$$

сходится. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\lim \frac{|h|^n}{n!} = 0, \text{ вмѣстѣ съ чѣмъ и } \lim R_n = 0.$$

§ 98. **Примѣры.** 1. Всѣ производныя функціи $f(x) = e^x$ равны e^x; поэтому

$$f^{(n)}(x + \vartheta h) = e^{x + \vartheta h}. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Но $e^{x+\vartheta h}$ лежитъ между e^x и e^{x+h}. Такимъ образомъ, условіе, указанное въ концѣ § 97, выполнено [1]), и мы получаемъ:

$$e^{x+h} = e^x + \frac{h}{1!}e^x + \frac{h^2}{2!}e^x + \cdots.$$

Въ частности (если x замѣнить черезъ 0, а h — черезъ x), мы приходимъ къ результату:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

который выше былъ нами полученъ другимъ путемъ (ср. § 91).

2. Въ силу соотношенія

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$\cos x$ и $\sin x$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|\cos x| \leqq 1, \quad |\sin x| \leqq 1.$$

Такъ какъ

$$(\cos x)' = -\sin x, \; (\cos x)'' = -\cos x, \; (\cos x)''' = \sin x,$$

$$(\cos x)^{\text{IV}} = \cos x, \ldots$$

и

$$(\sin x)' = \cos x, \; (\sin x)'' = -\sin x, \; (\sin x)''' = -\cos x,$$

$$(\sin x)^{\text{IV}} = \sin x, \ldots,$$

то $\cos x$ и $\sin x$ также удовлетворяютъ условію, указанному въ концѣ § 97.

Поэтому имѣемъ:

$$\cos(x + h) = \cos x - \frac{h}{1!}\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \frac{h^4}{4!}\cos x - \cdots$$

и

$$\sin(x + h) = \sin x + \frac{h}{1!}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x + \cdots.$$

---

[1]) Достаточно положить A равнымъ большему изъ чиселъ e^x, e^{x+h}.

Если мы замѣнимъ x на 0 и h на x, то не получимъ ничего новаго, такъ какъ именно равенствами

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

и

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

мы опредѣли въ § 92 функціи косинусъ и синусъ.

Вышеприведенныя формулы для $\cos(x+h)$ и $\sin(x+h)$ могутъ быть написаны еще такимъ образомъ:

$$\cos(x+h) = \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots\right)\cos x$$
$$- \left(\frac{h}{1!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots\right)\sin x$$

и

$$\sin(x+h) = \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots\right)\sin x$$
$$+ \left(\frac{h}{1!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots\right)\cos x,$$

или

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h,$$

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

Это даетъ намъ новое доказательство теоремъ сложенія для функцій $\cos x$ и $\sin x$ (ср. § 93).

3. $y = \log(1+x)$ имѣетъ для $x > -1$ всѣ производныя, а именно

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}.$$

Для $x = 0$

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!.$$

По формулѣ Тэйлора

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

при чемъ

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{(1-\vartheta)^{n-p}x^n}{p(1+\vartheta x)^n}. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Въ случаѣ $|x| < 1$ положимъ $p = 1$ и представимъ R_n въ видѣ

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1} x^n.$$

Такъ какъ ϑx лежитъ между $-\vartheta$ и ϑ, то

$$\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} \text{ лежитъ между } \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta} \text{ и } \frac{1-\vartheta}{1-\vartheta} = 1,$$

а потому и между 0 и 1. Въ силу соотношеній $0 < \vartheta < 1$, имѣемъ далѣе

$$1 + \vartheta x \geq 1 - |x|.$$

Такимъ образомъ,

$$|R_n| < \frac{|x|^n}{1-|x|};$$

слѣдовательно,

$$\lim R_n = 0$$

и

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots; \qquad (|x| < 1)$$

этотъ результатъ намъ уже извѣстенъ.

Въ случаѣ $x = 1$ положимъ $p = n$. Тогда

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta)^n}, \text{ такъ что } |R_n| < \frac{1}{n}$$

и

$$\lim R_n = 0,$$

въ результатѣ чего имѣемъ:

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots.$$

Въ случаѣ $x = -1$ нашъ рядъ принимаетъ видъ

$$-1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \cdots.$$

Онъ расходится. Въ самомъ дѣлѣ, сумма 2^{n-1} членовъ

$$-\frac{1}{2^{n-1}}, \; -\frac{1}{2^{n-1}+1}, \ldots, -\frac{1}{2^n - 1}$$

меньше, чѣмъ

$$-2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2}.$$

Если суммировать q первыхъ группъ членовъ этого рода ($n = 1, 2, \ldots$), то получимъ нѣкоторую частную сумму ряда, которая меньше, чѣмъ $-\frac{1}{2}q$. Такимъ образомъ, послѣдовательность частныхъ суммъ не ограничена.

Въ случаѣ $|x| > 1$ рядъ расходится, такъ что формула

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

имѣетъ мѣсто только для $-1 < x \leqq 1$.

4. Функція $y = (1+x)^\mu$ для $x > -1$ имѣетъ всѣ производныя, а именно

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}.$$

Для $x = 0$ имѣемъ:

$$y = 1, \quad y^{(n)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1).$$

Съ помощью формулы Тэйлора получаемъ:

$$(1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \cdots + \binom{\mu}{n-1}x^{n-1} + R_n,$$

при чемъ

$$R_n = \frac{n}{p}\binom{\mu}{n}(1+\vartheta x)^{\mu-n}(1-\vartheta)^{n-p}x^n. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Въ случаѣ $|x| < 1$ положимъ $p = 1$ и дадимъ R_n видъ:

$$R_n = x(1+\vartheta x)^{\mu-1}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1} . n\binom{\mu}{n}x^{n-1}.$$

Третій множитель

$$\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}$$

какъ мы знаемъ, содержится между 0 и 1; второй лежитъ между 1 и $(1+x)^{\mu-1}$. Такимъ образомъ, если K есть большее изъ чиселъ 1 и $(1+x)^{\mu-1}$, то

$$|R_n| < n\binom{\mu}{n}|x|^{n-1}K.$$

Далѣе, для $|x| < 1$ рядъ (ср. § 96)

$$1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \cdots,$$

сходится; слѣдовательно, сходится и рядъ

$$\binom{\mu}{1}+2\binom{\mu}{2}x+3\binom{\mu}{3}x^2+\cdots,$$

а потому

$$\lim n\binom{\mu}{n}x^{n-1}=0;$$

слѣдовательно,

$$\lim R_n=0,$$

такъ что имѣемъ

$$(1+x)^\mu=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\cdots. \qquad (|x|<1)$$

Этотъ результатъ намъ уже извѣстенъ.

Въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи мы допустимъ, что μ имѣетъ значеніе, отличное отъ $0, 1, 2, \ldots$, такъ что рядъ не обрывается.

Тогда для $|x|>1$ нашъ рядъ расходится. Такимъ образомъ, остаются лишь случаи $x=1$ и $x=-1$.

Въ случаѣ $x=1$ положимъ $p=n$, такъ что

$$R_n=\binom{\mu}{n}(1+\vartheta)^{\mu-n}. \qquad (0<\vartheta<1)$$

Второй множитель при достаточно большомъ n меньше единицы.

Первый множитель можетъ быть написанъ такъ:

$$\binom{\mu}{n}=(-1)^n\frac{(-\mu)(-\mu+1)\cdots(-\mu+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}.$$

Здѣсь идетъ рѣчь о выраженіи вида[1]):

$$P_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)},$$

именно, въ настоящемъ случаѣ

$$a=-\mu \text{ и } b=1.$$

Относительно P_n имѣетъ мѣсто слѣдующее предложеніе.

---

[1]) Ни одинъ множитель въ знаменателѣ не нуль.

Если $a > b$, то

$$\lim \frac{1}{P_n} = 0.$$

Пусть положительное цѣлое число k будетъ больше, чѣмъ $|b|$. Тогда $b+k$ и $a+k$ будутъ положительными числами. Положимъ $a-b=d$ и возьмемъ $n>k$; тогда

$$\frac{a+k}{b+k} = 1 + \frac{d}{b+k} > 1 + \frac{d}{2k},$$

$$\frac{a+k+1}{b+k+1} = 1 + \frac{d}{b+k+1} > 1 + \frac{d}{2k+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a+n-1}{b+n-1} = 1 + \frac{d}{b+n-1} > 1 + \frac{d}{k+n-1}.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{P_n}{P_k} > 1 + d\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \cdots + \frac{1}{k+n-1}\right).$$

Но рядъ

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \cdots$$

расходится. Если g есть какое-нибудь положительное число, то почти всѣ частныя суммы этого ряда больше g. Поэтому почти всѣ P_n будутъ удовлетворять неравенству

$$\frac{P_n}{P_k} > 1 + gd \quad \text{или} \quad \frac{P_k}{P_n} < \frac{1}{1+gd} < \varepsilon,$$

если мы сдѣлаемъ

$$g > \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Но это означаетъ, что

$$\lim \frac{P_k}{P_n} = 0, \text{ и, слѣдовательно}^{2)}, \lim \frac{1}{P_n} = 0.$$

Какъ слѣдствіе изъ вышеприведенной теоремы выводимъ, что $\lim P_n = 0$, когда $a < b$.

[2]) P_k отлично отъ нуля.

Въ случаѣ $a=b$ всѣ P_n равны 1, а, слѣдовательно, и $\lim P_n = 1$.

Примѣняя нашу теорему къ выраженію

$$\frac{(-\mu)(-\mu+1)\cdots(-\mu+n-1)}{1\cdot 2\cdots n},$$

можемъ заключить, что оно при $-\mu < 1$, т. е. при $\mu > -1$, имѣетъ предѣлъ нуль. Такимъ образомъ, $\lim R_n = 0$ для $\mu > -1$ и потому

$$2^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} + \cdots$$

Для $\mu = -1$

$$\binom{\mu}{n} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{1\cdot 2\cdots n} = (-1)^n,$$

такъ что не выполнено условіе $\lim u_n = 0$.

Для $\mu < -1$, т. е. для $-\mu > 1$, обратное значеніе выраженія

$$\frac{(-\mu)(-\mu+1)\cdots(-\mu+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} (\geqq 0)$$

имѣетъ предѣломъ 0. Слѣдовательно, условіе $\lim u_n = 0$ снова не выполняется.

Такимъ образомъ, вышеприведенная формула для 2^μ имѣетъ мѣсто только для $\mu > -1$.

Въ случаѣ $x = -1$ биноміальный рядъ принимаетъ видъ

$$1 - \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} - \binom{\mu}{3} + \cdots.$$

Его частныя суммы легко могутъ быть вычислены, при чемъ мы найдемъ:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -\binom{\mu-1}{1}, \quad s_3 = \binom{\mu-1}{2}, \quad s_4 = -\binom{\mu-1}{3}, \ldots .$$

Вообще

$$s_n = (-1)^{n-1}\binom{\mu-1}{n-1} = \frac{(1-\mu)(2-\mu)\cdots(n-1-\mu)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}.$$

$\lim s_n = 0$ для $\mu > 0$; такимъ образомъ,

$$(1-1)^\mu = 1 - \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} - \cdots.$$

Для $\mu < 0$ величина s не имѣетъ никакого предѣла, ибо въ этомъ случаѣ $\lim (1/s_n) = 0$.

Всѣ полученные нами выше результаты можно объединить въ слѣдующемъ предложеніи:

Если μ имѣетъ значеніе, отличное отъ чиселъ 0, 1, 2, . . . , то формула бинома

$$(1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 + \cdots$$

имѣетъ мѣсто

въ случаѣ $|x| < 1$ для каждаго значенія μ,

въ случаѣ $x = 1$ лишь для $\mu > -1$,

въ случаѣ $x = -1$ лишь для $\mu > 0$;

въ случаѣ же $|x| > 1$ она вовсе не имѣетъ мѣста.

Глава IX.

Maxima и minima.

§ 99. **Опредѣленіе.** Говорятъ, что функція $f(x)$ имѣетъ въ точкѣ x_0 maximum (minimum) [1], если можно построить такой содержащій точку x_0 интервалъ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что значеніе $f(x_0)$ будетъ наибольшимъ (наименьшимъ) среди значеній функціи $f(x)$ въ этомъ интервалѣ и это значеніе будетъ достигаться функціей только въ точкѣ x_0.

При этомъ весь интервалъ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ долженъ принадлежать области опредѣленія функціи $f(x)$. [2]

Для maxima и minima существуетъ также и общее названіе extrema (множественное число отъ extremum).

Если $f(x_0)$ есть extremum и существуетъ производная $f'(x_0)$, то необходимо $f'(x_0) = 0$.

---

[1]) или $f(x_0)$ есть (представляетъ собою) maximum (minimum).

[2]) Если такой интервалъ существуетъ, обыкновенно говорятъ, что x_0 есть внутренняя точка области опредѣленія.

Если $|h| < \delta$, то объ разности

$$f(x_0+h)-f(x_0) \text{ и } f(x_0-h)-f(x_0)$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, и, слѣдовательно, отношенія приращеній

$$\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} \text{ и } \frac{f(x_0-h)-f(x)}{-h}$$

имѣютъ обратные знаки. Обозначимъ черезъ u то изъ этихъ отношеній, которое оказывается положительнымъ, а черезъ v то, которое оказывается отрицательнымъ; въ такомъ случаѣ, если h стремится къ нулю, то

$$\lim u = f'(x_0) \text{ и } \lim v = f'(x_0).$$

Изъ перваго равенства можно заключить, что $f'(x_0) \geqq 0$, а изъ второго, что $f'(x_0) \leqq 0$. Слѣдовательно,

$$f'(x_0) = 0.$$

Геометрически это означаетъ, что касательная къ кривой, изображающей функцію $f(x)$, въ точкѣ, которой отвѣчаетъ extremum, параллельна оси x-овъ (предполагается, что касательная существуетъ).

Легко убѣдиться въ томъ, что условіе $f'(x_0) = 0$ является лишь необходимымъ, но вовсе не достаточнымъ, для существованія exrtemum'а. Напримѣръ, функція x^3 въ точкѣ $x = 0$ не имѣетъ extremum'а, но въ то же время производная ея $3x^2$ въ этой точкѣ равна нулю.

§ 100. **Знакъ производной.** Пусть x_0 будетъ внутренняя точка области опредѣленія функціи $f(x)$. Далѣе, пусть будетъ $f'(x_0) > 0$. Тогда можно построить такой интервалъ $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, содержащій точку x_0, что въ одной его части $(x_0 - \delta,\ x_0)$ функція $f(x)$ меньше, чѣмъ $f(x_0)$, а въ другой $(x_0,\ x_0 + \delta)$, наоборотъ, $f(x)$ больше, чѣмъ $f(x_0)$.

Мы будемъ это кратко выражать, говоря, что слѣва[1]) отъ

---

[1]) Мы представляемъ себѣ фигуру расположенной такъ, что на оси x-въ точка лежитъ тѣмъ дальше вправо, чѣмъ больше ея абсцисса.

x_0 функція $f(x)$ меньше, чѣмъ $f(x_0)$, а справа отъ x_0 — больше.

Если бы совсѣмъ не существовало такого интервала, то интервалъ $\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$ не обладалъ бы желаемымъ свойствомъ, и, слѣдовательно, въ немъ была бы отличная отъ x_0 точка x_n, для которой имѣли бы мѣсто либо соотношенія

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 \quad \text{и} \quad f(x_n) \geqq f(x_0),$$

либо соотношенія

$$x_0 < x_n < x_0 + \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad f(x_n) \leqq f(x_0).$$

Такимъ образомъ, въ обоихъ случаяхъ мы имѣли бы

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqq 0,$$

откуда вытекало бы, что

$$\lim \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0) \leqq 0,$$

вопреки сдѣланному допущенію: $f'(x_0) > 0$.

Если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ слѣва отъ x_0 больше, чѣмъ $f(x_0)$, а справа отъ x_0 — меньше.

§ 101. **Критерій для maxima и minima.** 1. Пусть функція $f(x)$ въ нѣкоторой окрестности точки x_0 повсюду имѣетъ производную $f'(x)$. Сверхъ того, пусть существуетъ $f''(x_0)$, и, наконецъ, допустимъ, что

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) \gtrless 0.$$

Тогда $f(x_0)$ есть minimum или maximum въ зависимости отъ того, будетъ ли $f''(x_0) > 0$ или $f''(x_0) < 0$.

Въ случаѣ $f''(x_0) > 0$ производная $f'(x)$

слѣва отъ x_0 меньше, чѣмъ $f'(x_0)$, т. е. отрицательна,

справа отъ x_0 больше, чѣмъ $f'(x_0)$, т. е. положительна.

Съ помощью теоремы о среднемъ значеніи

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\vartheta h),$$
$$(0<\vartheta<1)$$

узнаемъ, что $f(x)$ какъ слѣва, такъ и справа отъ x_0 больше, чѣмъ $f(x_0)$, такъ что $f(x_0)$ есть minimum.

Въ случаѣ $f''(x_0)<0$ точно такъ же выведемъ, что $f(x_0)$ есть maximum.[1])

2. Положимъ, что $f(x)$ имѣетъ въ нѣкоторой окрестности точки x_0 обѣ производныя $f'(x)$ и $f''(x)$. Допустимъ, кромѣ того, что $f'''(x_0)$ существуетъ, и, наконецъ, пусть будетъ

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\gtrless 0.$$

Тогда $f(x_0)$ не есть extremum.

Въ случаѣ $f'''(x_0)>0$, согласно No 1, $f'(x)$ имѣетъ въ точкѣ x_0 minimum. Слѣдовательно, $f'(x)$ какъ слѣва, такъ и справа отъ x_0 имѣетъ положительныя значенія. Съ помощью теоремы о среднемъ значеніи убѣдимся въ томъ, что $f(x)$ слѣва отъ x_0 меньше, чѣмъ $f(x_0)$, а справа отъ x_0 больше, чѣмъ $f(x_0)$.

Въ случаѣ $f'''(x_0)<0$ функція $f(x)$ слѣва отъ x_0 больше, чѣмъ $f(x_0)$, а справа отъ x_0 она меньше, чѣмъ $f(x_0)$.

3. Пусть $f(x)$ имѣетъ въ нѣкоторой окрестности точки x_0 три производныя $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$. Сверхъ того, положимъ, что существуетъ $f^{\mathrm{IV}}(x_0)$ и что

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)=0,\ f^{\mathrm{IV}}(x_0)\gtrless 0.$$

Тогда $f(x_0)$ есть minimum или maximum въ зависимости отъ того, будетъ ли $f^{\mathrm{IV}}(x_0)>0$ или <0.

Въ случаѣ $f^{\mathrm{IV}}(x_0)>0$, согласно No 2, $f'(x)$ слѣва отъ x_0 меньше, чѣмъ $f'(x_0)$, т. е. имѣетъ отрицательныя значенія, а справа отъ x_0 функція $f'(x)$ больше, чѣмъ $f'(x_0)$, т. е. имѣетъ положительныя значенія. Съ помощью теоремы о среднемъ значеніи мы

---

[1]) Второй случай можетъ быть приведенъ къ первому, если замѣнить функцію $f(x)$ функціей $-f(x)$. Поэтому достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ одного лишь перваго случая.

въ этомъ случаѣ такъ же, какъ и въ No 1, заключаемъ, что $f(x_0)$ есть minimum.

Въ случаѣ $f^{IV}(x_0) < 0$ число $f(x_0)$ есть maximum.

Эта цѣпь теоремъ можетъ быть по произволу продолжена. Вообще, имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема, въ справедливости которой можно убѣдиться съ помощью перехода отъ n къ $n+1$.

Положимъ, что функція $f(x)$ въ нѣкоторой окрестности точки x_0 имѣетъ производныя

$$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x). \qquad (n > 1).$$

Сверхъ того допустимъ, что существуетъ $f^{(n)}(x_0)$ и что

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \gtrless 0.$$

Въ такомъ случаѣ, при **четномъ** n число $f(x_0)$ есть minimum или maximum въ зависимости отъ того, будетъ ли $f^{(n)}(x_0) > 0$ или $f^{(n)}(x_0) < 0$.

При **нечетномъ** n число $f(x_0)$ не будетъ extremum, при чемъ $f(x)$ слѣва отъ x_0 меньше, чѣмъ $f(x_0)$, а справа отъ x_0 больше, чѣмъ $f(x_0)$, или, наоборотъ, слѣва отъ x_0 больше чѣмъ $f(x_0)$, а справа отъ x_0 меньше, чѣмъ $f(x_0)$, — въ зависимости отъ того, будетъ ли $f^{(n)}(x_0) > 0$ или $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Существуютъ функціи, для которыхъ эта теорема не рѣшаетъ вопроса. Примѣромъ можетъ служить функція, опредѣляемая равенствами

$$f(0) = 0, \; f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}. \qquad (x \gtrless 0)$$

Если обозначить показатель $-1/x^2$ черезъ u, то для $x \gtrless 0$ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$f'(x) = u' e^u,$$

$$f''(x) = (u'^2 + u'') e^u,$$

$$f'''(x) = (u'^3 + 3u'u'' + u''') e^u,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

при чемъ

$$u' = \frac{2}{x^3}, \; u'' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \; u''' = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, \ldots.$$

Такимъ образомъ, во всѣхъ случаяхъ

$$f^{(n)}(x) = G_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad (x \gtrless 0),$$

гдѣ G_n означаетъ цѣлую раціональную функцію. Эта формула имѣетъ мѣсто и для $n = 0$, если положить $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Остается еще вычислить $f'(0)$, $f''(0), \ldots$

Изъ разложенія

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

видно, что для $x > 0$ имѣютъ мѣсто неравенства

$$e^x > \frac{x^m}{m!}. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Допустимъ, что мы уже доказали равенство $f^{(n)}(0) = 0$. Тогда можно показать, что $f^{(n+1)}(0) = 0$. Дѣйствительно, такъ какъ

$$f^{(n+1)}(0) = \lim \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h}, \qquad (\lim h = 0)$$

то нужно лишь обнаружить, что

$$\lim \left\{\frac{1}{h} G_n\left(\frac{1}{h}\right) : e^{\left(\frac{1}{h}\right)^2}\right\} = 0.$$

Подлежащее разсмотрѣнію выраженіе состоитъ изъ конечнаго числа членовъ вида

$$\left(\frac{1}{h}\right)^\mu : e^{\left(\frac{1}{h}\right)^2}. \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Выберемъ цѣлое число m такъ, чтобы выполнялось неравенство $2m > \mu$; тогда абсолютное значеніе указаннаго члена меньше стремящагося къ нулю числа

$$m! \, |h|^{2m - \mu}.$$

Такимъ образомъ, мы находимъ, что $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Такъ какъ $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$, то равны нулю и $f'(0)$, $f''(0), \ldots$

Очевидно, $f(x)$ въ точкѣ $x = 0$ имѣетъ minimum. Однако, это обстоятельство не могло бы быть обнаружено съ помощью вышеприведенной теоремы, такъ какъ для $x=0$ всѣ производныя обращаются въ нуль.

Наша функція одновременно даетъ примѣръ того, что рядъ Тэйлора

$$f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

можетъ сходиться, не представляя, однако, функціи $f(x)$.

§ 102. **Примѣненіе формулы Тэйлора для доказательства указаннаго критерія.** Если функція $f(x)$ въ нѣкоторой окрестности точки x_0 имѣетъ производныя

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x), \qquad (n>1)$$

то для $|h|<\delta$ имѣетъ мѣсто формула Тэйлора: [1])

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x)+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0+\vartheta h).$$
$$(0<\vartheta<1)$$

Допустимъ, далѣе, что существуетъ $f^{(n)}(x_0)$, и что

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\ldots,\ f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\gtrless 0;$$

тогда, въ случаѣ $f^{(n)}(x_0)>0$, производная $f^{(n-1)}(x)$ слѣва отъ x_0 меньше, а справа отъ x_0 больше, чѣмъ $f^{(n-1)}(x_0)=0$. Такимъ образомъ,[2])

для $h<0$ $\qquad f^{(n-1)}(x_0+\vartheta h)<0$

для $h>0$ $\qquad f^{(n-1)}(x_0+\vartheta h)>0.$

При этомъ наша Тэйлорова формула принимаетъ видъ

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0+\vartheta h).$$

[1]) Положительное число δ выбирается такъ, что $x_0-\delta$ и $x_0+\delta$ лежатъ въ упомянутой окрестности точки x_0. Тогда всѣ условія примѣненія формулы Тэйлора выполнены.

[2]) Число $|h|$ должно быть меньше, чѣмъ нѣкоторое положительное число δ' $(\leqq\delta)$.

Поэтому въ случаѣ четнаго n

$$\text{для } h < 0 \qquad f(x_0 + h) > f(x_0),$$
$$\text{для } h > 0 \qquad f(x_0 + h) > f(x_0),$$

т. е. $f(x_0)$ есть minimum.

Въ случаѣ нечетнаго n, наоборотъ,

$$\text{для } h < 0 \qquad f(x_0 + h) < f(x_0),$$
$$\text{для } h > 0 \qquad f(x_0 + h) > f(x_0),$$

т. е. $f(x_0)$ не представляетъ собою extremum.

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то въ случаѣ четнаго n функція $f(x)$ въ точкѣ x_0 имѣетъ maximum, въ случаѣ же нечетного n она совсѣмъ не имѣетъ extremum'а въ этой точкѣ.

§ 103. **Монотонныя функціи.** Если функція въ интервалѣ (a, b) повсюду имѣетъ положительную производную, то она въ этомъ интервалѣ возрастаетъ съ возрастаніемъ x.

Именно, если

$$a < x_1 < x_2 < b,\text{[1]}$$

то, по теоремѣ о среднемъ значеніи,

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \qquad (x_1 < \xi < x_2)$$

такъ что

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Если производная въ интервалѣ (a, b) повсюду имѣетъ отрицательное значеніе, то функція убываетъ съ возрастаніемъ x.

Теорема остается вѣрной и въ томъ случаѣ, если производная въ конечномъ числѣ точекъ обращается въ нуль.

Функцію, постоянно возрастающую (убывающую) съ возрастаніемъ x, мы будемъ называть возрастающей (убывающей). Функціи обоихъ родовъ носятъ названіе монотонныхъ.

---

[1]) Если функція $f(x)$ непрерывна для $x = a$, то можно полагать $x_1 = a$; равнымъ образомъ, можно полагать $x_2 = b$, если функція $f(x)$ непрерывна для $x = b$.

Если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle x_0-\varepsilon,\ x_0\rangle$ возрастаетъ (убываетъ), а въ интервалѣ $\langle x_0,\ x_0+\varepsilon\rangle$ убываетъ (возрастаетъ), то $f(x_0)$ есть maximum (minimum) На практикѣ обыкновенно этимъ путемъ и устанавливается существованіе maximum'а или minimum'а.

§ 104. **Примѣръ.** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будутъ данныя числа. Требуется выбрать x такъ, чтобы функція

$$\varphi(x)=(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+\cdots+(a_n-x)^2$$

имѣла возможно малое значеніе.

Въ этомъ случаѣ

$$\varphi'(x)=-2n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-x\right).$$

Такимъ образомъ, $\varphi'(x)$ имѣетъ значенія

$$\text{отрицательныя для } x<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$\text{положительныя для } x>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$\text{нулевое для } \quad x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n};$$

слѣдовательно, $\varphi(x)$

$$\text{для } x<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \text{ убываетъ,}$$

$$\text{для } x>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \text{ возрастаетъ.}$$

Слѣдовательно, въ точкѣ

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

функція $\varphi(x)$ имѣетъ minimum и вмѣстѣ съ тѣмъ наименьшее значеніе.

§ 105. **Наибольшее и наименьшее значенія непрерывной функціи.** Если функція $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$ непрерывна, то между ея значеніями существуетъ наибольшее и наименьшее.

Интервалъ $\langle \alpha, \beta \rangle$, заключающійся въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$, мы будемъ называть особенной частью интервала $\langle a, b \rangle$, если въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ нѣтъ такого значенія функціи, которое превосходило бы всѣ значенія функціи въ интервалѣ $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Если при помощи числа

$$c = \frac{a+b}{2}$$

разложить интервалъ $\langle a, b \rangle$ на два интервала $\langle a, c \rangle$ и $\langle c, b \rangle$, то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ этихъ интерваловъ будетъ особенною частью интервала $\langle a, b \rangle$. Въ противномъ случаѣ, можно было бы выбрать въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ числа x_1 и x_2 такъ, чтобы

въ интервалѣ $\langle a, c \rangle$ функція $f(x)$ была меньше, чѣмъ $f(x_1)$, *)
въ интервалѣ $\langle c, b \rangle$ функція $f(x)$ была меньше, чѣмъ $f(x_2)$.

Одно изъ двухъ значеній $f(x_1)$, $f(x_2)$ функціи $f(x)$ было бы въ такомъ случаѣ больше всѣхъ ея значеній въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ *), что, очевидно, представляетъ противорѣчіе.

Такимъ образомъ, въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ навѣрное существуетъ особенная половина $\langle a_1, b_1 \rangle$. Подобно этому и въ интервалѣ $\langle a_1, b_1 \rangle$ существуетъ особенная половина $\langle a_2, b_2 \rangle$, въ интервалѣ $\langle a_2, b_2 \rangle$ имѣется особенная половина $\langle a_3, b_3 \rangle$ и т. д.

Если ξ есть общій предѣлъ чиселъ a_n и b_n, то можно показать, что ни одно изъ значеній функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ не больше, чѣмъ $f(\xi)$.

Дѣйствительно, пусть x_0 — произвольная точка въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$; тогда существуетъ

*) Такъ какъ интервалъ $\langle a, c \rangle$ не есть особенная часть интервала $\langle a, b \rangle$, то хоть одно значеніе $f(x_1)$ функціи $f(x)$ изъ интервала $\langle a, b \rangle$ будетъ больше любого значенія $f(x)$ нашей функціи въ интервалѣ $\langle a, c \rangle$, т. е. при нѣкоторомъ $x = x_1$, содержащемся въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$, и при всѣхъ значеніяхъ x, содержащихся въ интервалѣ $\langle a, c \rangle$, будетъ выполняться неравенство $f(x) < f(x_1)$.

въ интервалѣ $\langle a_1, b_1\rangle$ такая точка x_1, что $f(x_1) \geq f(x_0)$, *)

въ интервалѣ $\langle a_2, b_2\rangle$ такая точка x_2, что $f(x_2) \geq f(x_1)$,

въ интервалѣ $\langle a_3, b_3\rangle$ такая точка x_3, что $f(x_3) \geq f(x_2)$,

и т. д.

Такъ какъ

$$\lim x_n = \xi,$$

то, вслѣдствіе непрерывности функціи $f(x)$ въ точкѣ ξ,

$$\lim f(x_n) = f(\xi).$$

Но числа $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ образуютъ возрастающую послѣдовательность, такъ что

$$\lim f(x_n) \geq f(x_0),$$

т. е.

$$f(\xi) \geq f(x_0).$$

Если аналогичныя разсужденія примѣнить къ функціи $-f(x)$, то придемъ къ значенію $f(\xi)$ функціи $f(x)$, которое будетъ наименьшимъ среди значеній этой функціи въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Если точка, обозначенная выше черезъ ξ, лежитъ между a и b (такъ что значеніе ξ отлично отъ a и b), то, въ случаѣ существованія производной $f'(\xi)$, необходимо $f'(\xi) = 0$. Дѣйствительно, изъ отношеній приращеній

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \quad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h}$$

одно (обозначимъ его черезъ u) ≥ 0, а другое (его обозначимъ черезъ v) ≤ 0. Такъ какъ при стремящемся къ нулю h

$$\lim u = f'(\xi) \text{ и } \lim v = f'(\xi),$$

*) Въ самомъ дѣлѣ, $f(x_0)$ есть одно изъ значеній функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Это значеніе не можетъ быть больше всѣхъ значеній функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a_1, b_1\rangle$, ибо $\langle a_1, b_1\rangle$ есть особенная часть интервала $\langle a, b\rangle$. Въ интервалѣ $\langle a_1, b_1\rangle$ имѣется, слѣдовательно, хоть одно значеніе x_1 перемѣнной x, удовлетворяющее соотношенію $f(x_1) \geq f(x_0)$.

то $f'(\xi)$ не можетъ быть ни положительнымъ числомъ, ни отрицательнымъ.

Если точка, обозначенная нами черезъ ξ, лежитъ между a и b и $f'(\xi)$ существуетъ, то необходимо $f'(\xi) = 0$.

§ 106. **Примѣненія.** 1. Доказанная въ § 105 теорема, принадлежащая Вайерштрассу, можетъ быть использована для доказательства теоремы Ролля (§ 66). Согласно сдѣланному въ теоремѣ Ролля предположенію, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ, обозначенныхъ нами въ § 105 черезъ ξ и ξ, должна лежать между a и b, если только функція $f(x)$ не равна повсюду $f(a)$.

2. Пусть $f(x)$ повсюду въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ имѣетъ производную, при чемъ $f'(a) \gtrless f'(b)$. Если C есть какое-нибудь число между $f'(a)$ и $f'(b)$, то между a и b есть точка c, такого рода, что $f'(c) = C$.

Функція

$$\varphi(x) = f(x) - Cx$$

въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ непрерывна, такъ какъ повсюду въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ она имѣетъ производную, именно

$$\varphi'(x) = f'(x) - C.$$

Эта производная для $x = a$ имѣетъ отрицательное значеніе, а для $x = b$ — положительное, или наоборотъ, такъ какъ числа

$$f'(a) - C \text{ и } f'(b) - C$$

имѣютъ обратные знаки.

Далѣе, если, напримѣръ, $\varphi'(a) > 0$ и $\varphi'(b) < 0$, то $\varphi(x)$ справа отъ a больше, чѣмъ $\varphi(a)$, и слѣва отъ b больше, чѣмъ $\varphi(b)$ (§ 100). Такимъ образомъ, ни одно изъ чиселъ $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ не будетъ наибольшимъ значеніемъ функціи $\varphi(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Слѣдовательно, согласно § 105, существуетъ между a и b точка c, въ которой функція достигаетъ наибольшаго значенія, и въ такомъ случаѣ

$$\varphi'(c) = f'(c) - C = 0.$$

Въ случаѣ $\varphi'(a) < 0$ и $\varphi'(b) > 0$ функція $\varphi(x)$ достигаетъ своего наименьшаго значенія въ нѣкоторой точкѣ c между a и b, при чемъ снова $f'(c) = C$.

3. Если функція $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ непрерывна и для каждаго значенія x между a и b обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что

$$\lim \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = 0, \qquad (\lim h = 0)$$

то, при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ λ и μ, во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ имѣетъ мѣсто равенство

$$f(x) = \lambda x + \mu.$$

Обозначимъ черезъ c произвольное число между a и b. Тогда существуетъ цѣлая раціональная функція второй степени, именно

$$Q(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c),$$

которая для $x = a$, $x = b$, $x = c$ принимаетъ, соотвѣтственно, значенія $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$. Функція

$$\varphi(x) = Q(x) - f(x),$$

такимъ образомъ, въ упомянутыхъ точкахъ обращается въ нуль.

Функція $\varphi(x)$, какъ и $f(x)$, непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Согласно § 105, существуютъ между a и b двѣ точки $\bar{\xi}$ и $\underline{\xi}$, въ которыхъ функція $\varphi(x)$ достигаетъ, соотвѣтственно, своего наибольшаго и наименьшаго значенія. [1])

Далѣе, для $a < x < b$, если $\lim h = 0$, имѣемъ:

$$\lim \frac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)}{h^2} = \lim \frac{Q(x+h)+Q(x-h)-2Q(x)}{h^2}$$

$$= \frac{2f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{2f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)} = K.$$

Такимъ образомъ, и

$$\lim \frac{\varphi(\bar{\xi}+h)+\varphi(\bar{\xi}-h)-2\varphi(\bar{\xi})}{h^2} = K$$

---

[1]) Если одно изъ чиселъ $\bar{\xi}$, $\underline{\xi}$, упоминаемыхъ въ § 105, равно a или b, то мы можемъ также положить его равнымъ c. Слѣдовательно, мы можемъ принять, что числа $\bar{\xi}$, $\underline{\xi}$ оба лежатъ между a и b.

и

$$\lim \frac{\varphi(\xi+h)+\varphi(\xi-h)-2\varphi(\xi)}{h^2}=K.$$

Но такъ какъ

$$\varphi(\xi+h)\leqq\varphi(\xi),\quad \varphi(\xi-h)\leqq\varphi(\xi)$$

и

$$\varphi(\xi+h)\geqq\varphi(\xi),\quad \varphi(\xi-h)\geqq\varphi(\xi),$$

то въ одномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ предѣломъ неположительнаго числа, а въ другомъ — съ предѣломъ неотрицательнаго числа; слѣдовательно, число K не можетъ быть ни положительнымъ, ни отрицательнымъ. Итакъ, $K=0$, т. е.

$$f(c)=\frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b).$$

Точка c была взята нами по произволу между a и b. Наше равенство остается, однако, справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда замѣнимъ въ немъ c черезъ a или черезъ b. Такимъ образомъ, во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Эта теорема принадлежитъ Шварцу (H. A. Schwarz).

Глава X.

Дифференцированіе функцій отъ многихъ перемѣнныхъ.

§ 107. **Частныя производныя.** Положимъ, что функція $f(x, y)$ опредѣлена [1]) въ области

$$a\leqq x\leqq b,\quad c\leqq y\leqq d.$$

[1]) Для простоты мы ограничимся разсмотрѣніемъ функцій отъ двухъ перемѣнныхъ.

которую мы будемъ обозначать символомъ $\langle a, b; c, d\rangle$.[2])

Если постоянная y_0 удовлетворяетъ условію $c \leqq y_0 \leqq d$, то выраженіе

$$f(x, y_0)$$

представляетъ нѣкоторую функцію $\varphi(x)$ отъ x въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Точно такъ же выраженіе

$$f(x_0, y)$$

представляетъ нѣкоторую функцію $\psi(y)$ отъ y въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$, если только постоянная x_0 удовлетворяетъ условію $a \leqq x_0 \leqq b$.

Если существуетъ производная $\varphi'(x_0)$, то ее называютъ производною функціи $f(x, y)$ по x въ точкѣ (x_0, y_0).

Если существуетъ производная $\psi'(y_0)$, то ее называютъ производною функціи $f(x, y)$ по y въ точкѣ (x_0, y_0).

Обѣ эти производныя носятъ названіе **частныхъ производныхъ** функціи $f(x, y)$. Вычисленіе такого рода производныхъ называется **частнымъ дифференцированіемъ**.

Для обозначенія числа $\varphi'(x_0)$ употребляютъ символъ

$$f'_x(x_0, y_0),$$

для обозначенія же числа $\psi'(y_0)$ — символъ

$$f'_y(x_0, y_0).$$

Если производныя

$$f'_x(x, y) \text{ и } f'_y(x, y)$$

существуютъ въ области $\langle a, b; c, d\rangle$, то можетъ случиться, что онѣ, въ свою очередь, дифференцируемы по x и по y въ точкѣ (x_0, y_0). Производныя функціи $f'_x(x, y)$ по x и по y въ точкѣ (x_0, y_0) обозначаютъ, соотвѣтственно, черезъ

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \text{ и } f''_{xy}(x_0, y_0),$$

---

[2]) Символъ $\langle a, b; c, d\rangle$ геометрически означаетъ параллелограммъ, стороны котораго параллельны осямъ.

а производныя функціи $f'_y(x, y)$ по x и по y въ точкѣ (x_0, y_0) обозначаютъ черезъ

$$f''_{yx}(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Эти четыре величины называютъ частными производными второго порядка[1]) функціи $f(x, y)$ въ точкѣ (x_0, y_0).

Подобнымъ же образомъ опредѣляются и обозначаются частныя производныя третьяго и болѣе высокихъ порядковъ. Легко видѣть, что существуетъ всего 2^n частныхъ производныхъ n-го порядка. Но обыкновенно ихъ число приводится къ $n+1$. Напримѣръ, какъ мы увидимъ, обыкновенно существуетъ лишь три частныхъ производныхъ второго порядка.

§ 108. **Производныя f''_{xy} и f''_{yx}.** Если въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ существуютъ частныя производныя функціи $f(x, y)$ перваго и второго порядковъ, то въ каждой точкѣ (x_0, y_0), въ которой производныя f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, онѣ равны.

Для того, чтобы доказать эту теорему, разсмотримъ выраженіе

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$$
$$- f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0).$$

Мы будемъ при этомъ предполагать, что точка (x_0+h, y_0+k), какъ и точка (x_0, y_0), лежитъ въ области $\langle a, b; c, d\rangle$. Числа h и k отличны отъ нуля.

Если положимъ

$$f_1(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0)$$

и

$$f_2(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y),$$

то вышеприведенное выраженіе будетъ равно выраженію

$$f_1(x_0+h) - f_1(x_0),$$

а также и выраженію

$$f_2(y_0+k) - f_2(y_0).$$

[1]) или короче — вторыми производными.

По теоремѣ о среднемъ значенiи,

$$f_1(x_0+h)-f_1(x_0)=hf_1'(x_0+\vartheta_1 h) \qquad (0<\vartheta_1<1)$$

и

$$f_2(y_0+k)-f_2(y_0)=kf_2'(y_0+\vartheta_2 k). \qquad (0<\vartheta_2<1)$$

Представляя производныя въ развернутомъ видѣ, имѣемъ:

$$f_1'(x_0+\vartheta_1 h)=f_x'(x_0+\vartheta_1 h,\ y_0+k)-f_x'(x_0+\vartheta_1 h,\ y_0)$$

и

$$f_2'(y_0+\vartheta_2 k)=f_y'(x_0+h,\ y_0+\vartheta_2 k)-f_y'(x_0,\ y_0+\vartheta_2 k).$$

Къ этимъ выраженiямъ снова можетъ быть примѣнена теорема о среднемъ значенiи. Въ результатѣ получимъ:

$$f_1'(x_0+\vartheta_1 h)=kf_{xy}''(x_0+\vartheta_1 h,\ y_0+\vartheta_1 k) \qquad (0<\vartheta_1<1)$$

и

$$f_2'(y_0+\vartheta_2 k)=hf_{yx}''(x_0+\vartheta_2 h,\ y_0+\vartheta_2 k). \qquad (0<\vartheta_2<1)$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что

$$f_{xy}''(x_0+\vartheta_1 h,\ y_0+\vartheta_1 k)=f_{yx}''(x_0+\vartheta_2 h,\ y_0+\vartheta_2 k).$$

Если мы допустимъ, что величины h и k стремятся къ нулю, то обѣ части этого равенства будутъ стремиться, соотвѣтственно, къ предѣламъ

$$f_{xy}''(x_0,\ y_0) \text{ и } f_{yx}''(x_0,\ y_0),$$

ибо мы предположили, что функцiи f_{xy}'' и f_{yx}'' въ точкѣ $(x_0,\ y_0)$ непрерывны.

Итакъ,

$$f_{xy}''(x_0,\ y_0)=f_{yx}''(x_0,\ y_0).$$

§ 109. **Дифференцiалы.** Если функцiя $f(x,\ y)$ въ области $\langle a,b;\ c,\ d\rangle$ имѣетъ производныя f_x' и f_y' и точка $(x,\ y)$ принадлежитъ этой области, то выраженie

$$f_x'(x,\ y)\,h+f_y'(x,\ y)\,k$$

называютъ дифференцiаломъ функцiи $f(x,\ y)$ въ точкѣ $(x,\ y)$ и обозначаютъ символомъ $df(x,\ y)$.

Величины h и k суть двѣ постоянныя, и для всѣхъ функцій пользуются **однѣми и тѣми** же постоянными h и k.

Если формулу

$$df(x, y)=f'_x(x, y)\,h+f'_y(x, y)\,k$$

примѣнить къ двумъ функціямъ

$$f(x, y)=x \quad \text{и} \quad f(x, y)=y,$$

то получимъ, соотвѣтственно,

$$dx=h \quad \text{и} \quad dy=k.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ разсматривать величины h и k, какъ дифференціалы перемѣнныхъ x и y, и писать

$$df(x, y)=f'_x\,dx+f'_y\,dy.$$

Дифференціалъ функціи $df(x)$ обозначаютъ символомъ

$$d^2 f(x, y),$$

дифференціалъ функціи $d^2 f(x)$ — символомъ

$$d^3 f(x, y)$$

и т. д.

При образованіи этихъ **высшихъ дифференціаловъ** функціи $f(x, y)$ величины h и k, или dx и dy, должны быть разсматриваемы, какъ постоянныя.

Мы найдемъ: [1])

$$d^2 f(x, y)=f''_{xx}dx^2+f''_{xy}dx\,dy+f''_{yx}dx\,dy+f''_{yy}dy^2,$$

или, если $f''_{xy}=f''_{yx}$,

$$d^2 f(x, y)=f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dx\,dy+f''_{yy}dy^2.$$

Подобнымъ же образомъ вычислимъ

$$d^3 f(x, y),\ d^4 f(x, y)$$

и т. д.

[1]) Изъ опредѣленія дифференціала $df(x, y)$ непосредственно вытекаетъ, что $d(f+g)=df+dg$ и $d(cf)=c\,df$ (c — постоянная).

§ 110. **Дифференцированіе сложныхъ функцій.** Пусть $F(u, v)$ будетъ функціей отъ u и v въ области $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta \rangle$, а $f(x, y)$ и $g(x y)$ — функціями отъ x и y въ области $\langle a, b; c, d \rangle$. Допустимъ сверхъ того, что функціи $f(x, y)$ и $g(x, y)$ всегда удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$\alpha \leqq f(x, y) \leqq \beta \quad \text{и} \quad \gamma \leqq g(x, y) \leqq \delta.$$

Если положить

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

и

$$z = F(u, v),$$

то z черезъ посредство u и v будетъ функціей отъ x и y въ области $\langle a, b; c, d \rangle$, и мы можемъ написать

$$z = F(f(x, y), g(x, y)).$$

Если функціи $f(x, y)$ и $g(x, y)$ непрерывны въ точкѣ (x, y), а функція $F(u, v)$ непрерывна въ точкѣ $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, то функція $F(f(x, y), g(x, y))$ непрерывна въ точкѣ (x, y).[1]

Мы будемъ теперь вычислять дифференціалъ dz, предполагая, что производныя

$$f'_x, f'_y, g'_x, g'_y$$

существуютъ во всей области $\langle a, b; c, d \rangle$, а производныя

$$F'_u, F'_v$$

— во всей области $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta \rangle$. Сверхъ того, мы требуемъ непрерывности функцій F'_u, F'_v въ области $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta \rangle$.

Положимъ[2])

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \Delta u,$$

$$g(x+h, y) - g(x, y) = \Delta v;$$

[1]) Доказательство ведется такъ же, какъ и въ § 64.

[2]) Точка $(x+h, y)$, какъ и (x, y), должна принадлежать области $\langle a, b; c, d \rangle$.

тогда отношеніе приращенія функціи z къ приращенію независимой перемѣнной x приметъ видъ:

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v)}{h}.$$

Числитель этого отношенія будетъ суммой выраженій

$$F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)$$

и

$$F(u, v+\Delta v) - F(u, v).$$

Обѣ эти разности, по теоремѣ о среднемъ значеніи, соотвѣтственно могутъ быть написаны въ видѣ

$$F'_u(u+\theta\Delta u, v+\Delta v)\Delta u \qquad (0<\theta<1)$$

и

$$F'_v(u, v+\theta\Delta v)\Delta v. \qquad (0<\theta<1)$$

Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$\frac{\Delta z}{h} = F'_u(u+\theta\Delta u, v+\Delta v)\frac{\Delta u}{h} + F'_v(u, v+\theta\Delta v)\frac{\Delta v}{h}.$$

Пусть h стремится къ нулю; тогда

$$\lim\frac{\Delta u}{h} = u'_x, \quad \lim\frac{\Delta v}{h} = v'_x;$$

поэтому

$$\lim\Delta u = 0, \quad \lim\Delta v = 0$$

и, вслѣдствіе непрерывности функцій F'_u, F'_v,

$$\lim F'_u(u+\theta\Delta u, v+\Delta v) = F'_u(u, v),$$

$$\lim F'_v(u, v+\theta\Delta v) = F'_v(u, v).$$

Отсюда

$$z'_x = F'_u u'_x + F'_v v'_x$$

и подобнымъ же образомъ

$$z'_y = F'_u u'_y + F'_v v'_y,$$

такъ что

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

$$= F'_u(u'_x dx + u'_y dy) + F'_v(v'_x dx + v'_y dy),$$

или

$$dz = z'_u\, du + z'_v\, dv.$$

Точно такой же видъ имѣло бы выраженіе для dz, если бы перемѣнныя u и v были независимыми.

Если въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ существуютъ и вторыя производныя функцій u, v, а въ области $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta\rangle$ существуютъ и непрерывны вторыя производныя функціи $F(u, v)$, то имѣемъ: [1])

$$d^2 z = d z'_u\, d u + d z'_v\, dv$$
$$+ z'_u\, d^2 u + z'_v\, d^2 v,$$

такъ что

$$d^2 z = z''_{uu} du^2 + 2 z''_{uv} du\, dv + z''_{vv} dv^2 + z'_u d^2 u + z'_v d^2 v.$$

Подобнымъ же образомъ можно вычислить $d^3 z, d^4 z, \ldots$

Выраженія для величинъ $d^2 z, d^3 z, \ldots$ имѣютъ иной видъ, нежели выраженія, получаемыя для этихъ величинъ въ томъ случаѣ, когда u и v суть независимыя перемѣнныя. Но если u и v суть функціи вида

$$\lambda x + \mu y + \nu \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ — постоянныя}),$$

то эти выраженія имѣютъ такой же видъ, какъ и при $u = x$, $v = y$, ибо въ этомъ случаѣ, очевидно,

$$d^2 u = d^3 u = \cdots = 0 \quad \text{и} \quad d^2 v = d^3 v = \cdots = 0.$$

§ 111. **Теорема о среднемъ значеніи.** Положимъ, что функція $f(x, y)$ имѣетъ въ области $\langle a, a+h; b, b+k\rangle$ непрерывныя первыя производныя. Тогда

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$
$$= h f'_x(a + \vartheta h, b + \vartheta k) + k f'_y(a + \vartheta h, b + \vartheta k),$$

при чемъ $0 < \vartheta < 1$.

---

[1]) Мы пользуемся здѣсь тѣмъ, что для произведенія двухъ функцій $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имѣетъ мѣсто формула $d(uv) = v\,du + u\,dv$, которая можетъ быть получена изъ общей формулы для dz, если положить $F(u, v) = uv$.

Для доказательства разсмотримъ функцію

$$\varphi(t) = f(a + th,\ b + tk). \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

Согласно § 110,

$$\varphi'(t) = f'_x(a + th,\ b + tk)\,h + f'_y(a + th,\ b + tk)\,k;$$

съ помощью теоремы о среднемъ значеніи (§ 67) получаемъ:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta). \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Это и есть вышеприведенная формула.

Замѣчаніе. Если функція $f(x, y)$ въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ имѣетъ непрерывныя первыя производныя, то она въ названной области также непрерывна. Дѣйствительно, если точки (x, y) и $(x + h, y + k)$ принадлежатъ разсматриваемой области, то

$$f(x + h,\ y + k) = f(x, y) + hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y).$$

$$(x = x + \vartheta h,\ \ y = y + \vartheta k,\ \ 0 < \vartheta < 1)$$

Если величины h и k стремятся къ нулю, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\lim f(x + h,\ y + k) = f(x, y).$$

Это можетъ быть доказано также съ помощью теоремы о среднемъ значеніи, изложенной въ § 67. Именно, выраженіе

$$f(x + h,\ y + k) - f(x, y)$$

есть сумма выраженій

$$f(x + h,\ y + k) - f(x,\ y + k)$$

и

$$f(x,\ y + k) - f(x, y),$$

и, слѣдовательно, равно выраженію

$$hf'_x(x + \vartheta h,\ y + k) + kf'_y(x,\ y + \vartheta k). \qquad (0 < \vartheta,\ \vartheta < 1)$$

§ 112. **Формула Тэйлора.** Положимъ, что функція $z = f(x, y)$ въ области $\langle x, x + h; y, y + k\rangle$ имѣетъ непрерывныя частныя производныя до n-го порядка включительно. Тогда имѣетъ мѣсто формула

$$\Delta z = \frac{dz}{1!} + \frac{d^2 z}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1} z}{(n-1)!} + R_n.$$

При этомъ

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x, y), \quad dx = h, \quad dy = k$$

и

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} (d^n z)_{x+\vartheta h,\, y+\vartheta k}; \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

p означаетъ положительное цѣлое число, выбираемое по произволу.

Для доказательства положимъ [1])

$$\varphi(t) = f(x+th, y+tk).$$

При этомъ функціи

$$u = x + th, \quad v = y + tk$$

таковы, что

$$d^2 u = d^3 u = \cdots = 0 \text{ и } d^2 v = d^3 v = \cdots = 0.$$

Такимъ образомъ, имѣемъ (§ 110):

$$d^\nu \varphi(t) = d^\nu f(u, v). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Если положимъ $dt = 1$, то

$$du = h, \quad dv = k;$$

въ этомъ случаѣ вмѣсто $d^\nu \varphi(t)$ мы можемъ писать $\varphi^{(\nu)}(t)$.

Для того, чтобы получить нашу формулу для Δz, достаточно воспользоваться тѣмъ, что, согласно § 74,

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + R_n,$$

при чемъ

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} \varphi^{(n)}(\vartheta). \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

---

[1]) Величины x, y, h, k разсматриваются здѣсь, какъ постоянныя.

ГЛАВА XI.

Maxima и minima.

§ 113. **Опредѣленіе.** Пусть точка (x_0, y_0) будетъ внутренней точкой области опредѣленія функціи $f(x, y)$. [1])

Говорятъ, что функція $f(x, y)$ имѣетъ въ точкѣ $(x_0\ y_0)$ maximum (minimum) [2]), если можно построить такую окрестность $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon;\ y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ точки (x_0, y_0), что въ ней значеніе $f(x_0, y_0)$ является наибольшимъ (наименьшимъ) изъ значеній функціи и достигается функціею только въ точкѣ (x_0, y_0).

Если $f(x_0, y_0)$ есть extremum (т. е. maximum или minimum) и существуютъ производныя $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, то необходимо

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Дѣйствительно, въ точкѣ x_0 функція

$$\varphi(x) = f(x, y_0),$$

а въ точкѣ y_0 функція

$$\psi(y) = f(x_0, y)$$

имѣютъ въ этомъ случаѣ extremum. Такимъ образомъ, согласно § 99,

$$\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$$

и

$$\psi'(y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

§ 114. **Примѣненіе формулы Тэйлора.** Положимъ, что въ опредѣленной окрестности точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ имѣетъ непрерывныя частныя производныя перваго и второго порядковъ. Допустимъ, далѣе, что

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

---

[1]) Т. е. всѣ точки нѣкоторой окрестности точки (x_0, y_0) должны принадлежать этой области.

[2]) или $f(x_0, y_0)$ есть (представляетъ собою) maximum (minimum).

Если точка $(x_0 + h, y_0 + k)$ лежитъ въ упомянутой окрестности точки (x_0, y_0), то, согласно формулѣ Тэйлора, имѣемъ:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{d^2 f}{2!}\right)_{x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k} \quad (0 < \theta < 1).$$

Если положить

$$x_0 + \theta h = x, \quad y_0 + \theta k = y,$$

то, представивъ дифференціалъ въ развернутомъ видѣ, получимъ

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{1}{2!}\{f''_{xx}(x, y)\, h^2 + 2 f''_{xy}(x, y)\, hk + f''_{yy}(x, y)\, k^2\}.$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе вопроса объ extremum'ѣ въ точкѣ (x_0, y_0) приводится къ разсмотрѣнію характера выраженія

$$f''_{xx}(x, y)\, h^2 + 2 f''_{xy}(x, y)\, hk + f''_{yy}(x, y)\, k^2.$$

Такое выраженіе называютъ *квадратичной формой* величинъ h и k.

§ 115. **Двоичныя квадратичныя формы.** Мы займемся разсмотрѣніемъ квадратичной формы величинъ h и k

$$\varphi(h, k) = a_0 h^2 + 2 a_1 hk + a_2 k^2.$$

Существуютъ квадратичныя формы, которыя обращаются въ нуль только въ томъ случаѣ, когда

$$h = 0 \text{ и } k = 0.$$

Ихъ мы будемъ называть *опредѣленными формами*. Опредѣленной формой является, напримѣръ, форма

$$h^2 + k^2.$$

Если форма $\varphi(h, k)$ должна быть опредѣленной, то должно быть $a_0 \neq 0$. Дѣйствительно, въ случаѣ $a_0 = 0$ мы имѣли бы

$$\varphi(h, k) = 2 a_1 hk + a_2 k^2,$$

и форма $\varphi(h, k)$ исчезала бы при k, равномъ нулю, и h равномъ произвольному числу.

Если $a_0 \gtrless 0$, то мы можемъ написать:

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{a_0}(a_0^2 h^2 + 2 a_0 a_1 hk + a_0 a_2 k^2),$$

или

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{a_0}\{(a_0 h + a_1 k)^2 + (a_0 a_2 - a_1^2) k^2\}.$$

Въ случаѣ

$$a_0 a_2 - a_1^2 < 0$$

$\varphi(h, k)$ обращается въ нуль, если положить

$$a_0 h + a_1 k = k\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2},$$

т. е.

$$h = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0} k,$$

а величинѣ k придать произвольное значенiе. Такимъ образомъ, форма $\varphi(h, k)$ въ этомъ случаѣ не будетъ опредѣленной.

Въ случаѣ

$$a_0 a_2 - a_1^2 > 0$$

$\varphi(h, k)$ обращается въ нуль только при $h = 0$, $k = 0$ и, слѣдовательно, есть опредѣленная форма. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ выраженiе

$$a_0 \varphi(h, k) \qquad (h, k \mp 0, 0)\ ^{1)}$$

всегда имѣетъ положительное значенiе.

Такимъ образомъ, имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Квадратичная форма

$$a_0 h^2 + 2 a_1 hk + a_2 k^2$$

въ томъ и только въ томъ случаѣ будетъ опредѣленной, если

$$a_0 a_2 - a_1^2 > 0.\ ^{2)}$$

---

1) Запись $h, k \mp 0, 0$ должна означать, что числа h, k одновременно не равны нулю.

2) Если $a_0 a_2 - a_1^2 > 0$, то числа a_0, a_2 оба отличны отъ нуля. *)
*) и имѣютъ одинаковые знаки.

Опредѣленная форма имѣетъ для $h, k \neq 0, 0$ тотъ же знакъ, что и каждый изъ ея крайнихъ коэффиціентовъ (т. е. a_0 и a_2),

§ 116. **Критерій для maxima и minima.** Относительно функціи $f(x, y)$ мы дѣлаемъ тѣ же предположенія, что и въ § 114.

Если бы оказалось, что въ опредѣленной окрестности точки (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

то мы могли бы заключить, что въ этой точкѣ существуетъ extremum. Въ самомъ дѣлѣ, $d^2 f$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и f''_{xx}, а эта функція сохраняетъ постоянный знакъ въ названной окрестности, ибо f''_{xx} нигдѣ не исчезаетъ. Если бы функція f''_{xx} въ точкѣ (x, y) имѣла положительное значеніе, а въ точкѣ $(x+h, y+k)$ — отрицательное, то наша функція должна была бы въ нѣкоторой точкѣ $(x+\vartheta h, y+\vartheta k)$, $0 < \vartheta < 1$, обратиться въ нуль, такъ какъ функція

$$\varphi(t) = f''_{xx}(x+th, y+tk),$$

непрерывная въ интервалѣ $\langle 0, 1 \rangle$, имѣла бы для $t = 0$ положительное значеніе, а для $t = 1$ — отрицательное. (Ср. § 33.)

Но въ нашемъ случаѣ достаточно, если

$$f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

ибо вторыя производныя непрерывны, а относительно непрерывныхъ функцій имѣетъ мѣсто слѣдующее предложеніе:

Если функція $F(x, y)$ въ точкѣ (x_0, y_0) непрерывна, при чемъ

$$F(x_0, y_0) > 0,$$

то можно построить такую окрестность точки (x_0, y_0), въ которой функція $F(x, y)$ принимала бы исключительно положительныя значенія. Если бы въ каждой области

$$\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n};\ y_0 - \frac{1}{n},\ y_0 + \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

существовала такая точка (x_n, y_n), что было бы

$$F(x_n, y_n) \leqq 0,$$

то, въ виду соотношеній $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$ и непрерывности функціи $F(x, y)$, мы имѣли бы:

$$\lim F(x_n, y_n) = F(x_0, y_0).$$

А такъ какъ ни одно изъ чиселъ $F(x_n, y_n)$ не будетъ положительнымъ, то и предѣлъ $F(x_0, y_0)$ не могъ бы быть положительнымъ числомъ, что противорѣчитъ предположенію $F(x_0, y_0) > 0$.

Итакъ, нами установлена слѣдующая теорема.

Допустимъ, что функція $f(x, y)$ въ извѣстной окрестности точки (x_0, y_0) имѣетъ непрерывныя первыя и вторыя производныя. Далѣе, пусть будетъ

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

и

$$f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Тогда $f(x_0, y_0)$ есть minimum или maximum функціи $f(x, y)$ въ зависимости отъ того, будетъ ли

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ или } f''_{xx}(x_0, y_0) < 0.$$

§ 117. **Наибольшее и наименьшее значеніе непрерывной функціи.** Пусть функція $f(x, y)$ будетъ непрерывна въ области $\langle a, b; c, d\rangle$.

Мы будемъ разсматривать величины x, y, какъ прямоугольныя координаты нѣкоторой точки на плоскости. Тогда область $\langle a, b; c, d\rangle$ представитъ собою прямоугольникъ со сторонами, параллельными осямъ.

Содержащійся въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ прямоугольникъ

$$\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta\rangle \qquad (a \leq \alpha < \beta \leq b,\ c \leq \gamma < \delta \leq d)$$

мы будемъ называть особенной ея частью, если въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ нѣтъ такого значенія функціи $f(x, y)$, которое превосходило бы всѣ значенія функціи въ области $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta\rangle$.

Если раздѣлить прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ на четыре части

$$\left|\left[a, \frac{a+b}{2}; c, \frac{c+d}{2}\right]\right|,\text{*)}$$

$$\left|\left[a, \frac{a+b}{2}; \frac{c+d}{2}, d\right]\right|,$$

$$\left|\left[\frac{a+b}{2}, b; c, \frac{c+d}{2}\right]\right|,$$

$$\left|\left[\frac{a+b}{2}, b; \frac{c+d}{2}, d\right]\right|,$$

то, по крайней мѣрѣ, одна изъ этихъ частей будетъ особенною частью области $\langle a, b; c, d\rangle$. Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ существовало бы значеніе функціи $f(x_\nu, y_\nu)$, превосходящее всѣ значенія функціи въ ν-ой четверти этой области. Наибольшее изъ чиселъ

$$f(x_\nu, y_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

превосходило бы тогда всѣ значенія функціи $f(x, y)$ въ области $\langle a, b; c, d\rangle$, что представляетъ противорѣчіе.

Такимъ образомъ, въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ существуетъ (какъ мы коротко будемъ говорить) особенная четверть $\langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle$; въ области $\langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle$, въ свою очередь, существуетъ особенная четверть $\langle a_2, b_2; c_2, d_2\rangle$ и т. д.

Если мы обозначимъ черезъ ξ общій предѣлъ чиселъ a_n и b_n, и черезъ η — общій предѣлъ чиселъ c_n и d_n, то окажется, что ни одно изъ значеній функціи $f(x, y)$ въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ не превзойдетъ числа $f(\xi, \eta)$. Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Пусть (x_0, y_0) будетъ произвольной точкой области $\langle a, b; c, d\rangle$. Тогда въ области $\langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle$ будетъ существовать такая точка (x_1, y_1), что

$$f(x_1, y_1) \geq f(x_0, y_0);\text{**)}$$

---

*) Скобки $[[\ ]]$ означаютъ то же, что и скобки $\langle\ \rangle$.

**) Ибо $\langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle$ есть особенная часть области $\langle a, b; c, d\rangle$, т. е. каждое значеніе функціи $f(x, y)$ въ $\langle a, b; c, d\rangle$ не будетъ больше всѣхъ значеній функціи $f(x, y)$ въ $\langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle$ и потому въ этой области найдется хоть одно значеніе $f(x_1, y_1)$, которое не меньше разсматриваемаго значенія $f(x_0, y_0)$.

въ области $\langle a_2, b_2; c_2, d_2\rangle$ найдется такая точка (x_2, y_2), что

$$f(x_2, y_2) \geq f(x_1, y_1),$$

и т. д.

Такъ какъ

$$\lim x_n = \xi, \ \lim y_n = \eta,$$

то, въ виду непрерывности функціи $f(x, y)$,

$$\lim f(x_n, y_n) = f(\xi, \eta),$$

такъ что

$$f(\xi, \eta) \geqq f(x_0, y_0).^{*)}$$

Если приведенныя выше разсужденія примѣнить къ функціи $-f(x, y)$, то придемъ къ заключенію, что въ области $\langle a, b; c, d\rangle$ существуетъ такая точка $(\bar\xi, \bar\eta)$, что число $f(\bar\xi, \bar\eta)$ не превосходитъ ни одного изъ значеній функціи $f(x, y)$ въ упомянутой области.

Если точка (ξ, η) будетъ **внутренней точкой** области $\langle a, b; c, d\rangle$ и производныя $f'_x(\xi, \eta)$, $f'_y(\xi, \eta)$ существуютъ, то необходимо

$$f'_x(\xi, \eta) = 0 \ \text{ и } \ f'_y(\xi, \eta) = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $f(\xi, \eta)$ будетъ наибольшимъ значеніемъ

функціи $\varphi(x) = f(x, \eta)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$

и

функціи $\psi(y) = f(\xi, y)$ въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$.

Поэтому, согласно § 105,

$$\varphi'(\xi) = f'_x(\xi, \eta) = 0$$

и

$$\psi'(\eta) = f'_x(\xi, \eta) = 0.$$

---

*) Ибо $f(x_0, y_0)$, $f(x_1, y_1)$, ... есть **возрастающая** послѣдовательность, предѣлъ которой есть $f(\xi, \eta)$.

ГЛАВА XII.

Обращеніе функцій и системъ функцій.

§ 118. **Обращеніе непрерывной функціи $f(x)$.** Пусть функція $y=f(x)$ будетъ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Мы попытаемся обратить эту функцію, т. е. попытаемся разсматривать x, какъ функцію отъ y.

Для того, чтобы это было возможно, необходимо, чтобы функція $f(x)$ принимала каждое значеніе не болѣе одного раза. Въ противномъ случаѣ нѣкоторому значенію y отвѣчало бы нѣсколько значеній x, что противорѣчитъ данному нами опредѣленію понятія о функціи, согласно которому каждому значенію независимой перемѣнной должно отвѣчать только одно значеніе функціи.

Итакъ, если c и c_1 суть два различныхъ значенія въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то отвѣчающія имъ значенія $f(c)$ и $f(c_1)$ функціи должны удовлетворять соотношенію $f(c) \gtrless f(c_1)$.

Возьмемъ теперь въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ три значенія x_1, x_2, x_3, связанныя соотношеніями

$$x_1 < x_2 < x_3,$$

такъ что x_2 лежитъ между x_1 и x_3. Можно показать, что въ такомъ случаѣ и $f(x_2)$ заключается между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Дѣйствительно, если бы значеніе $f(x_2)$ лежало внѣ интервала $\langle f(x_1), f(x_3)\rangle$, то существовало бы нѣкоторое число C, содержащееся какъ между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, такъ и между $f(x_2)$ и $f(x_3)$.*) Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то, согласно § 33, между x_1 и x_2 должна была бы существовать такая точка c, а между x_2 и x_3—такая точка c_1, что

$$f(c) = C \text{ и } f(c_1) = C.$$

Но это противорѣчитъ требованію $f(c) \gtrless f(c_1)$.

Такимъ образомъ, функція $f(x)$ должна быть монотонной въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, т. е. должна съ возрастаніемъ x либо постоянно возрастать, либо постоянно убывать.

Съ другой стороны, легко убѣдиться въ томъ, что для моно-

*) *C есть любое число, содержащееся между числомъ $f(x_2)$ и тѣмъ изъ чиселъ $f(x_1)$, $f(x_3)$, которое ближе къ $f(x_2)$.*

тонной и непрерывной въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функціи можно построить обратную функцію.

Въ самомъ дѣлѣ, если положить

$$f(a) = A,\ f(b) = B,$$

то каждому значенію y въ интервалѣ $\langle A, B\rangle$ отвѣчаетъ одно и только одно такого рода значеніе x въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, что выполняется равенство $y = f(x)$.

Такимъ образомъ, существуетъ въ интервалѣ $\langle A, B\rangle$ одна и только одна функція

$$x = \varphi(y)$$

такого рода, что въ упомянутомъ интервалѣ

$$a \leqq \varphi(y) \leqq b \quad \text{и} \quad y = f(\varphi(y)).$$

Функція $\varphi(y)$ называется обращеніемъ функціи $f(x)$ или функціей, обратной по отношенію къ функціи $f(x)$.

Функція $\varphi(y)$ въ интервалѣ $\langle A, B\rangle$ монотонна и непрерывна. Ея монотонность очевидна. Для того же, чтобы доказать ея непрерывность, необходимо обнаружить, что изъ соотношенія [1])

$$\lim y_n = y$$

всегда вытекаетъ соотношеніе

$$\lim \varphi(y_n) = \varphi(y).$$

Числовая послѣдовательность $\varphi(y_1), \varphi(y_2), \varphi(y_3), \ldots$ ограничена. Если выдѣлить изъ нея сходящуюся часть

$$\varphi(\bar{y}_1),\ \varphi(\bar{y}_2),\ \varphi(\bar{y}_3), \ldots \text{[2])}$$

и положить

$$\bar{x}_n = \varphi(\bar{y}_n),$$

то

$$\bar{y}_n = f(\bar{x}_n).$$

---

[1]) Всѣ значенія $y, y_1, y_2, \ldots$ принадлежатъ интервалу $\langle A, B\rangle$.

[2]) Каждая точка сгущенія послѣдовательности $\varphi(y_1), \varphi(y_2), \varphi(y_3), \ldots$ будетъ предѣломъ для нѣкоторой сходящейся ея части.

такъ что, въ виду непрерывности функціи $f(x)$,

$$y = f(\lim x_n).$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\lim x_n = \varphi(y).$$

Такимъ образомъ, $\varphi(y)$ будетъ единственной точкой сгущенія послѣдовательности $\varphi(y_1)$, $\varphi(y_2)$, $\varphi(y_3)$, ..., т. е. $\lim \varphi(y_n) = \varphi(y)$.

Очевидно, функція $f(x)$ является обратной по отношенію къ функціи $\varphi(y)$. Поэтому говорятъ также, что f и φ суть взаимно обратныя функціи.

§ 119. **Обращеніе функцій $\cos x$ и $\sin x$.** Теперь мы приступимъ къ обращенію функцій косинусъ и синусъ, опредѣленныхъ въ § 92.

Мы обозначили наименьшій положительный корень уравненія $\cos x = 0$ черезъ $\pi/2$. Изъ § 94 можно заключить, что $\sin x$ въ интервалѣ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имѣетъ положительныя значенія. А такъ какъ

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

то функція $\cos x$ въ интервалѣ $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ убываетъ отъ 1 до 0. [1])

Изъ соотношенія

$$(\sin x)' = \cos x$$

усматриваемъ, что функція $\sin x$ въ интервалѣ $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ возрастаетъ отъ 0 до 1. Какъ видно изъ соотношенія

$$\sin x = -\sin(-x),$$

эта функція въ интервалѣ $\langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ возрастаетъ отъ -1 до 0. Формула

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

даетъ возможность заключить, что $\cos x$ въ интервалѣ $\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ убываетъ отъ 0 до -1.

---

[1]) Слова „при возрастаніи x“ мы ради краткости опускаемъ.

Такимъ образомъ, $\cos x$ въ интервалѣ $\langle 0, \pi\rangle$ и $\sin x$ въ интервалѣ $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ являются монотонными и непрерывными функціями.

Функцію, обратную функціи $y = \cos x$ въ интервалѣ $\langle 0, \pi\rangle$, называютъ

$$\operatorname{arc}\cos y \quad (\text{т. е. arcus cosinus } y),$$

а функцію, обратную функціи $y = \sin x$ въ интервалѣ $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, —

$$\operatorname{arc}\sin y \quad (\text{т. е. arcus sinus } y).$$

Обѣ эти функціи въ интервалѣ $\langle -1, 1\rangle$ монотонны и непрерывны.

На ряду съ косинусомъ и синусомъ разсматриваютъ отношеніе

$$\frac{\sin x}{\cos x},$$

которое обозначаютъ символомъ $\operatorname{tg} x$ (т. е. тангенсъ x). Функція $\operatorname{tg} x$ не опредѣлена только въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ $\cos x = 0$.

Производная отъ $\operatorname{tg} x$ можетъ быть найдена по правилу дифференцированія частнаго:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Въ интервалѣ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x$ есть монотонная и непрерывная функція. Обращеніе функціи $\operatorname{tg} x$ называютъ

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x \quad (\text{т. е arcus tangens } x).$$

Равнымъ образомъ, въ интервалѣ $(0, \pi)$ можетъ быть обращена функція

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \quad (\text{т. е. котангенсъ } x).$$

Она имѣетъ производную

$$(\cot x)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Функцію, обратную $\operatorname{cotg} x$, называютъ

$$\operatorname{arc}\cot x \quad (\text{т. е. arcus cotangens } x).$$

§ 120. **Производныя обратныхъ функцій.** Предположимъ, что функція $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ монотонна и непрерывна, и что она въ точкѣ x_0 имѣетъ отличную отъ нуля производную $f'(x_0)$.

Пусть функція $\varphi(y)$ будетъ обратной по отношенію къ $f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$, такъ что $x_0 = \varphi(y_0)$.

Если $y_0 + k\ (k \gtrless 0)$ содержится въ интервалѣ $\langle A, B\rangle$ [1]), то число

$$x_0 + h = \varphi(y_0 + k)$$

заключено въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, и вмѣстѣ съ этимъ $y_0 + k = f(x_0 + h)$, гдѣ $h \gtrless 0$.

Далѣе,

$$\frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}.$$

Если k стремится къ нулю, то и h также имѣетъ предѣломъ нуль (въ виду доказанной въ § 118 непрерывности функціи $\varphi(y)$). Такимъ образомъ,

$$\lim \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \frac{1}{f'(x)},$$

т. е.

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Если же доказано, что производная $\varphi'(y)$ существуетъ, коль скоро производная $f'(x)$ существуетъ и отлична отъ нуля, то для вычисленія производной $\varphi'(y)$ можно также воспользоваться правиломъ дифференцированія сложной функціи. По этому правилу дифференціалъ функціи $y = f(x)$ выражается равенствомъ

$$dy = f'(x)\,dx,$$

безразлично, разсматриваемъ ли мы, какъ независимую перемѣнную, x или y. Взявъ y за независимую перемѣнную, мы получимъ изъ этого равенства:

$$1 = f'(x)\,\varphi'(y).$$

[1]) $A = f(a)$, $B = f(b)$.

Выведенное нами соотношеніе имѣетъ чрезвычайно простой геометрическій смыслъ. Если мы представимъ себѣ начерченной кривую, изображающую функцію $f(x)$, то эта же кривая явится изображеніемъ функціи $\varphi(y)$, коль скоро перемѣнить роли осей координатъ.

Производныя $f'(x)$, $\varphi'(y)$ представляютъ собою угловые коэффиціенты одной и той же касательной къ кривой, но первая — относительно осей Ox, Oy, а вторая — относительно осей Oy, Ox. Отсюда очевидно, что должно имѣть мѣсто равенство $f'(x)\,\varphi'(y) = 1$.

§ 121. **Дифференцированіе функцій arc sin x, arc cos x, arc tg x, arc cot x.** 1. Мы знаемъ, что для функціи

$$y = \operatorname{arc\,cos} x \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

обратной будетъ функція

$$x = \cos y. \qquad (0 \leq y \leq \pi)$$

Поэтому

$$dx = -\sin y\, dy,$$

такъ что для $0 < y < \pi$, т. е. для $-1 < x < 1$

$$dy = -\frac{dx}{\sin y} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Точно такъ же найдемъ, что дифференціалъ функціи

$$y = \operatorname{arc\,sin} x$$

для $-1 < x < 1$ выражается равенствомъ

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Дифференціалъ функціи

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

можетъ быть полученъ, если принять во вниманіе, что функція

$$x = \operatorname{tg} y$$

служитъ обратной для функціи arc tg x. Именно,

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}\,dy = (1 + \operatorname{tg}^2 y)\, dy,$$

откуда

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}.$$

4. Для дифференціала функціи

$$y = \operatorname{arc\,cot} x$$

послѣ аналогичныхъ нахожденій получимъ выраженіе:

$$dy = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

§ 122. **Нахожденіе числа π.** Мы теперь въ состояніи указать удобный способъ для нахожденія числа π.

Функція

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

имѣетъ производную

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Для $|x| < 1$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

Этотъ степенной рядъ есть производная ряда

$$F(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Такимъ образомъ,

$$F'(x) = f'(x);$$

слѣдовательно,

$$F(x) - f(x) = c.$$

А такъ какъ

$$F(0) = f(0) = 0,$$

то постоянная c должна быть равна нулю.

Поэтому

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots. \qquad (|x| < 1)$$

Для $|x| > 1$ рядъ въ правой части послѣдняго равенства расходится

Можно показать, что для $x = 1$ и $x = -1$ вышеприведенная формула сохраняется. Если положимъ

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \text{ [1]}$$

и если $0 < x < 1$, то рядъ

$$s - \operatorname{arctg} x = \frac{1-x}{1} - \frac{1-x^3}{3} + \frac{1-x^5}{5} - \cdots$$

является знакоперемѣннымъ рядомъ разсмотрѣннаго въ § 77 типа. Дѣйствительно, согласно доказанной въ § 70 обобщенной теоремѣ о среднемъ значеніи,

$$\frac{1-x^{2n+1}}{1-x^{2n-1}} = \frac{(2n+1)\xi^{2n}}{(2n-1)\xi^{2n-2}} = \frac{2n+1}{2n-1}\xi^2 < \frac{2n+1}{2n-1},$$

такъ какъ

$$x < \xi < 1.$$

Отсюда же вытекаетъ, что

$$\frac{1-x^{2n+1}}{2n+1} < \frac{1-x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Мы знаемъ, что въ знакоперемѣнномъ ряду такого рода частныя суммы съ нечетнымъ индексомъ превосходятъ сумму ряда, а частныя суммы съ четнымъ индексомъ меньше ея. Поэтому

$$1 - x - \frac{1-x^3}{3} < s - \operatorname{arctg} x < 1 - x.$$

Приближая теперь x къ 1, какъ къ предѣлу (такъ, однако, чтобы постоянно выполнялись неравенства $0 < x < 1$), найдемъ, что

$$\lim (s - \operatorname{arctg} x) = 0;$$

поэтому

$$\lim \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = s.$$

Такъ какъ $\operatorname{arctg}(-x)$ равенъ $-\operatorname{arctg} x$, то

$$\operatorname{arctg}(-1) = -s.$$

[1]) Этотъ рядъ, согласно § 77, сходится.

Мы можемъ вычислить $\operatorname{arctg} 1$. Такъ какъ вообще

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

то

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = 0$$

и, въ виду того, что $\cos x$ и $\sin x$ въ интервалѣ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имѣютъ положительныя значенія, мы изъ послѣдняго равенства получимъ:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

такъ что

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Итакъ, имѣемъ формулу

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

которая является однимъ изъ первыхъ результатовъ, добытыхъ въ математикѣ Лейбницемъ, и носитъ названіе формулы Лейбница. Впрочемъ, для приближеннаго вычисленія π, эта формула очень неудобна, что было отмѣчено еще Ньютономъ.

Болѣе удобныя формулы могутъ быть получены съ помощью теоремы сложенія для $\operatorname{tg} x$. Изъ обѣихъ теоремъ сложенія для $\sin x$ и $\cos x$, выражаемыхъ формулами

$$\sin (x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2,$$

$$\cos (x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2,$$

путемъ дѣленія этихъ равенствъ получается:

$$\operatorname{tg} (x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}.$$

Это и есть теорема сложенія для $\operatorname{tg} x$.

Мы теперь попытаемся опредѣлить такія двѣ дроби вида $\frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n_1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{n_2}.$$

Если положить

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n_1}=x_1,\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{n_2}=x_2,$$

то

$$\frac{\pi}{4}=x_1+x_2,\quad \text{такъ что}\quad \operatorname{tg}(x_1+x_2)=1,$$

или

$$\frac{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}{1-\frac{1}{n_1 n_2}}=\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2-1}=1.$$

Итакъ, числа n_1 и n_2 подчинены условію

$$n_1+n_2=n_1 n_2-1,$$

т. е.

$$(n_1-1)(n_2-1)=2.$$

Такъ какъ 1 и 2 суть единственные дѣлители числа 2 и такъ какъ n_1 и n_2 могутъ быть переставлены, мы можемъ положить

$$n_1=2,\quad n_2=3.$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

или

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 5}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}-\cdots\right);$$

эта формула уже съ бо́льшимъ удобствомъ можетъ быть примѣнена къ вычисленію π.

Можно вывести еще и другія формулы, если воспользоваться слѣдующимъ предложеніемъ.

Если m есть положительное цѣлое число, то всегда могутъ быть указаны такія два положительныхъ цѣлыхъ числа m_1 и m_2, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{m}=\operatorname{arctg}\frac{1}{m_1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{m_2}.$$

Нужно только, чтобы удовлетворялось равенство

$$\frac{1}{m}=\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2-1},$$

или

$$(m_1 - m)(m_2 - m) = m^2 + 1.$$

Съ этой цѣлью разлагаютъ число $m^2 + 1$ на два положительныхъ цѣлыхъ множителя

$$m^2 + 1 = k_1 k_2,$$

и полагаютъ

$$m_1 = m + k_1, \quad m_2 = m + k_2$$

Если $m = 2$, то

$$m^2 + 1 = 5 = 1 \cdot 5,$$

такъ что

$$m_1 = 2 + 1 = 3, \quad m_2 = 2 + 5 = 7,$$

и

$$\operatorname{arctg} \tfrac{1}{2} = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{3} + \operatorname{arctg} \tfrac{1}{7};$$

поэтому

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$

Если $m = 3$, то

$$m^2 + 1 = 10 = 2 \cdot 5,$$

такъ что

$$m_1 = 3 + 2 = 5, \quad m_2 = 3 + 5 = 8$$

и

$$\operatorname{arctg} \tfrac{1}{3} = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} \tfrac{1}{8};$$

поэтому

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

Можно, очевидно, идти какъ угодно далеко, пользуясь указаннымъ способомъ.

Особенно цѣлесообразнымъ методомъ, съ помощью котораго π было вычисленно съ 707 знаками, оказывается слѣдующій.

Полагаютъ

$$\operatorname{arctg} \tfrac{1}{5} = \varphi,$$

такъ что $\operatorname{tg} \varphi = 1/5$.

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{5}{12}$$

и

$$\operatorname{tg} 4\varphi = 1 + \frac{1}{119},$$

что легко можетъ быть найдено съ помощью теоремы сложенія.

Если вычислимъ затѣмъ $\operatorname{tg}\left(4\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$, то получимъ:[1])

$$\operatorname{tg}\left(4\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}4\varphi-1}{\operatorname{tg}4\varphi+1}=\frac{1}{239}.$$

Отсюда

$$4\varphi-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

т. е.

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3\cdot 3}+\frac{1}{5^5\cdot 5}-\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{239^3\cdot 3}+\frac{1}{239^5\cdot 5}-\cdots\right).$$

Слѣдующее французское четверостишіе даетъ возможность запомнить первые 31 десятичныхъ знаковъ числа π:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur!
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Замѣнивъ каждое слово числомъ его буквъ, мы получимъ 31 цифру числа π; послѣ первой изъ нихъ ставится запятая. Такимъ образомъ находимъ:

$$\pi=3{,}14159265358979323846264338327\,9\cdots.$$

§ 123. **Обращеніе системы двухъ непрерывныхъ функцій $u(x, y)$, $v(x, y)$.** Пусть функціи $u(x, y)$ и $v(x, y)$ въ нѣкоторой окрестности U точки (x_0, y_0) имѣютъ непрерывныя первыя производныя.

Мы положимъ

$$u'_x(x, y)=u_1(x, y),\quad u'_y(x, y)=u_2(x, y),$$
$$v'_x(x, y)=v_1(x, y),\quad v'_y(x, y)=v_2(x, y).$$

[1]) $\operatorname{tg}x$ есть нечетная функція.

Кромѣ того, положимъ, что эти производныя удовлетворяютъ условію

$$u_1(x_0, y_0)\,v_2(x_0, y_0) - u_2(x_0, y_0)\,v_1(x_0, y_0) \neq 0.$$

Прежде всего покажемъ, что при сдѣланныхъ предположеніяхъ имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Теорема 1. Вокругъ точки (x_0, y_0) можетъ быть построенъ квадратъ [1])

$$(Q) \qquad (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon;\ y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$$

такого свойства, что постоянно

$$u_1(x, y)\,v_2(\bar{x}, \bar{y}) - u_2(x, y)\,v_1(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0,$$

какъ бы ни были выбраны точки (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ въ этомъ квадратѣ.

Это непосредственно вытекаетъ изъ непрерывности функцій u_1, u_2, v_1, v_2. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что такого квадрата Q нѣтъ. Тогда и квадратъ Q_n, отвѣчающій значенію $\varepsilon = 1/n$, не можетъ обладать желаемымъ свойствомъ [2]).

Слѣдовательно, въ квадратѣ Q_n найдутся такія двѣ точки

$$(x_n, y_n) \text{ и } (\bar{x}_n, \bar{y}_n),$$

что

$$u_1(x_n, y_n)\,v_2(\bar{x}_n, \bar{y}_n) - u_2(x_n, y_n)\,v_1(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = 0.$$

Въ виду непрерывности функцій u_1, u_2, v_1, v_2

$$\lim \left\{ u_1(x_n, y_n)\,v_2(\bar{x}_n, \bar{y}_n) - u_2(x_n, y_n)\,v_1(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \right\}$$

$$= u_1(x_0, y_0)\,v_2(x_0, y_0) - u_2(x_0, y_0)\,v_1(x_0, y_0).$$

Такимъ образомъ, должно было бы имѣть мѣсто равенство

$$u_1(x_0, y_0)\,v_2(x_0, y_0) - u_2(x_0, y_0)\,v_1(x_0, y_0) = 0,$$

---

[1]) Мы разсматриваемъ величины x, y, какъ прямоугольныя координаты точки на нѣкоторой плоскости E.

[2]) n есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ..., — однако, достаточно большое для того, чтобы квадратъ Q_n весь лежалъ въ области U.

противорѣчащее предположенію.

Мы положимъ теперь

$$\mathfrak{x} = u(x, y),$$

$$\mathfrak{y} = v(x, y)$$

и будемъ разсматривать величины $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, какъ прямоугольныя координаты точки на нѣкоторой плоскости $\mathfrak{E}$.

Оба эти равенства устанавливаютъ нѣкоторый методъ отображенія точекъ области U на плоскости $\mathfrak{E}$. Каждой точкѣ (x, y) области U отвѣчаетъ точка $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ на плоскости $\mathfrak{E}$, координаты которой, соотвѣтственно, равны $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Эта точка носитъ названіе изображенія точки (x, y).

Теорема 2. Различнымъ точкамъ квадрата Q отвѣчаютъ всегда различныя изображенія.

Если точки (x_0, y_0) и $(x_0 + h, y_0 + k)$ квадрата Q имѣютъ одно и то же изображеніе на плоскости $\mathfrak{E}$, то

$$u(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0, y_0),$$

$$v(x_0 + h, y_0 + k) = v(x_0, y_0),$$

такъ что, на основаніи доказанной въ § 111 теоремы о среднемъ значеніи,

$$hu_1(x, y) + ku_2(x, y) = 0,$$

$$hv_1(\bar{x}, \bar{y}) + kv_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

При этомъ

$$x = x_0 + \vartheta h, \quad y = y_0 + \vartheta k, \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

$$\bar{x} = x_0 + \bar{\vartheta} h, \quad \bar{y} = y_0 + \bar{\vartheta} k. \qquad (0 < \bar{\vartheta} < 1)$$

Но изъ приведенныхъ выше двухъ уравненій относительно h, k вытекаетъ, что

$$h\{u_1(x, y)v_2(\bar{x}, \bar{y}) - u_2(x, y)v_1(\bar{x}, \bar{y})\} = 0,$$

$$k\{u_1(x, y)v_2(\bar{x}, \bar{y}) - u_2(x, y)v_1(\bar{x}, \bar{y})\} = 0.$$

Такъ какъ точки (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ лежатъ въ квадратѣ Q [1], то, согласно теоремѣ 1,

[1] Точки (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ лежатъ на отрѣзкѣ, соединяющемъ точки (x_0, y_0) и $(x_0 + h, y_0 + k)$.

$$u_1(x, y)v_2(x, y) - u_2(x, y)v_1(x, y) = 0.$$

Слѣдовательно,

$$h = 0, \quad k = 0.$$

Такимъ образомъ, точки $(x_0\ y_0)$ и $(x_0 + h,\ y_0 + k)$ въ томъ и только въ томъ случаѣ имѣютъ одно и то же изображеніе, если онѣ совпадаютъ.

Обозначимъ символомъ $\mathfrak{B}$ совокупность изображеній $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ точекъ квадрата Q. Далѣе, обозначимъ черезъ $\bar{Q}$ совокупность пограничныхъ точекъ области Q и черезъ $\bar{\mathfrak{B}}$ — совокупность ихъ изображеній. Пусть точка $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ служитъ изображеніемъ точки (x_0, y_0).

Если мы составимъ функцію

$$\{u(x, y) - \mathfrak{x}_0\}^2 + \{v(x, y) - \mathfrak{y}_0\}^2,$$

то она будетъ непрерывна въ области Q, а, слѣдовательно, и въ области $\bar{Q}$. Она имѣетъ въ области $\bar{Q}$ наименьшее значеніе [1]) m^2, неравное нулю. Дѣйствительно, если бы было $m = 0$, то на границѣ области Q существовала бы точка, имѣющая то же изображеніе, что и точка (x_0, y_0), а это невозможно — согласно теоремѣ 2.

Очевидно, m есть наименьшее изъ разстояній точки $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ отъ точекъ области $\bar{\mathfrak{B}}$. Если мы опишемъ вокругъ точки $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ окружность радіусомъ m, то внутри ея не будетъ ни одной точки области $\bar{\mathfrak{B}}$.

Пусть $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ будетъ точка на плоскости $\mathfrak{E}$, отстоящая отъ точки $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ не дальше, чѣмъ на $m/2$. Въ такомъ случаѣ точка $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ отстоитъ отъ точки $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ не дальше, чѣмъ отъ любой точки области $\bar{\mathfrak{B}}$. Такимъ образомъ, если $(\bar{x}, \bar{y})$ есть произвольная точка области $\bar{Q}$, то имѣетъ мѣсто слѣдующее соотношеніе:

$$\{u(\bar{x}, \bar{y}) - \mathfrak{x}'\}^2 + \{v(\bar{x}, \bar{y}) - \mathfrak{y}'\}^2$$
$$\geqq \{u(x_0, y_0) - \mathfrak{x}'\}^2 + \{v(x_0, y_0) - \mathfrak{y}'\}^2.$$

Оно показываетъ, что на границѣ области Q функція

[1]) На каждой сторонѣ квадрата мы имѣемъ дѣло съ непрерывной функціей отъ одной перемѣнной и можемъ поэтому примѣнить теорему § 105-го

$$\omega(x, y) = \{u(x, y) - \mathfrak{x}'\}^2 + \{v(x, y) - \mathfrak{y}'\}^2$$

имѣетъ значенія, которыя не меньше значенія функціи въ центрѣ квадрата Q. Поэтому, разсматривая наименьшее значеніе функціи ω въ области Q,[1]) мы можемъ быть увѣрены въ томъ, что оно достигается функціей въ нѣкоторой точкѣ (x', y') внутри области Q.

Но въ этой точкѣ (x', y'), согласно § 117, должны обращаться въ нуль производныя ω'_x, ω'_y. Такимъ образомъ, должны имѣть мѣсто равенства

$$\{u(x', y') - \mathfrak{x}'\} u_1(x', y') + \{v(x', y') - \mathfrak{y}'\} v_1(x', y') = 0,$$
$$\{u(x', y') - \mathfrak{x}'\} u_2(x', y') + \{v(x', y') - \mathfrak{y}'\} v_2(x', y') = 0.$$

Отсюда же слѣдуетъ, что

$$\{u(x', y') - \mathfrak{x}'\}\ \{u_1(x', y') v_2(x', y') - u_2(x', y') v_1(x', y')\} = 0,$$
$$\{v(x', y') - \mathfrak{y}'\}\ \{u_1(x', y') v_2(x', y') - u_2(x', y') v_1(x', y')\} = 0.$$

Такъ какъ, согласно теоремѣ 1,

$$u_1(x', y') v_2(x', y') - u_2(x', y') v_1(x', y') \gtrless 0,$$

то

$$u(x', y') - \mathfrak{x}' = 0,$$
$$v(x', y') - \mathfrak{y}' = 0,$$

т. е. $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ есть изображеніе точки (x', y') и, слѣдовательно, принадлежитъ области $\mathfrak{B}$.

Если мы положимъ $\delta = m : 2\sqrt{2}$ и построимъ вокругъ точки $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ квадратъ

$$\langle \mathfrak{x}_0 - \delta,\ \mathfrak{x}_0 + \delta;\ \mathfrak{y}_0 - \delta,\ \mathfrak{y}_0 + \delta \rangle,$$

то каждая точка $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, принадлежащая этому квадрату, будетъ точкой области $\mathfrak{B}$.

Итакъ, нами доказана слѣдующая теорема:

Теорема 3. Вокругъ точки $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$, служащей изображеніемъ точки (x_0, y_0), можетъ быть построенъ квадратъ

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \langle \mathfrak{x}_0 - \delta,\ \mathfrak{x}_0 + \delta;\ \mathfrak{y}_0 - \delta,\ \mathfrak{y}_0 + \delta \rangle$$

[1]) Такое значеніе существуетъ согласно § 117.

такого рода, что каждая точка области $\mathfrak{Q}$ будетъ изображеніемъ одной и (согласно теоремѣ 2) только одной точки области Q.

Такимъ образомъ, могутъ быть построены, и притомъ однимъ лишь способомъ, двѣ функціи

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

которыя обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что отображеніе, устанавливаемое равенствами

$$(\mathfrak{A}) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{u}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \\ y = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \end{cases}$$

относитъ къ каждой точкѣ $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ области $\mathfrak{Q}$ именно ту точку (x, y) области Q, которой отвѣчаетъ упомянутая точка $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ въ отображеніи

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = u(x, y), \\ \mathfrak{y} = v(x, y). \end{cases}$$

Отображеніе $\mathfrak{A}$ называютъ обратнымъ относительно отображенія A, систему функцій $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ — обратной относительно системы u, v или же результатомъ обращенія системы функцій u, v.

Теорема 4. Функціи $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ непрерывны въ области $\mathfrak{Q}$.

Мы должны доказать слѣдующее:

Если $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$, $(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2), \ldots$ есть послѣдовательность точекъ области $\mathfrak{Q}$, имѣющая своимъ предѣломъ точку $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, то постоянно

$$\lim \mathfrak{u}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n) = \mathfrak{u}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

$$\lim \mathfrak{v}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n) = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

или

$$\lim x_n = x, \qquad \lim y_n = y,$$

коль скоро черезъ (x_n, y_n) и (x, y) мы обозначимъ изображенія точекъ $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$ и $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ въ отображеніи $\mathfrak{A}$.

Если бы не выполнялось равенство $\lim x_n = x$ [1]), то изъ по-

[1]) Точно такимъ же образомъ опровергается допущеніе, что не выполняется равенство $\lim y_n = y$.

слѣдовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ можно было бы выдѣлить нѣкоторую часть ея $x_1', x_2', x_3', \ldots$, имѣющую отличный отъ x предѣлъ $\bar{x}$. Пусть $\bar{y}$ будетъ одной изъ точекъ сгущенія послѣдовательности $y_1', y_2', y_3', \ldots$[1]). Тогда въ этой послѣдовательности существуетъ часть ея $y_1, y_2, y_3 \ldots$, имѣющая предѣломъ $\bar{y}$.

Изъ соотношеній

$$\lim x_n = \bar{x}, \quad \lim y_n = \bar{y},$$

въ виду непрерывности функцій u, v, вытекаетъ:

$$\lim \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}, \quad \lim \mathfrak{y}_n = \mathfrak{y}.$$

Такъ какъ послѣдовательность $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1), (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2), (\mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_3), \ldots$ есть часть послѣдовательности $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1), (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2), (\mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_3), \ldots$, то

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}.$$

Двумъ различнымъ точкамъ (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ отвѣчаетъ, такимъ образомъ, одно и то же изображеніе. Но это, по теоремѣ 2, невозможно.

§ 124. **Дифференцированіе обратныхъ функцій.** Пусть $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ и $(\mathfrak{x} + \mathfrak{h}, \mathfrak{y} + \mathfrak{k})$ будутъ двѣ произвольныя точки области $\mathfrak{Q}$, а (x, y) и $(x + h, y + k)$ — соотвѣтствующія имъ точки области Q.

Тогда

$$\mathfrak{h} = u(x + h, y + k) - u(x, y),$$

$$\mathfrak{k} = v(x + h, y + k) - v(x, y)$$

или, согласно § 111,

$$\mathfrak{h} = u_1(\xi, \eta) h + u_2(\xi, \eta) k,$$

$$\mathfrak{k} = v_1(\xi, \eta) h + v_2(\xi, \eta) k.$$

При этомъ

$$\xi = x + \vartheta h, \quad \eta = y + \vartheta k, \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

$$\xi = x + \vartheta h, \quad \eta = y + \vartheta k. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

[1]) Соотвѣтственныя части послѣдовательностей указываются соотвѣтственными обозначеніями.

Точки (ξ, η) и (ξ, η) расположены на отрѣзкѣ, соединяющемъ точки (x, y) и $(x+h, y+k)$ и, слѣдовательно, принадлежатъ области Q.

Если мы положимъ

$$D = u_1(\xi, \eta)\, v_2(\xi, \eta) - u_2(\xi, \eta)\, v_1(\xi, \eta),$$

то, согласно теоремѣ 1,

$$D \gtrless 0.$$

Изъ написанныхъ выше уравненій для $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ вытекаетъ, что

$$h = \frac{1}{D}\{v_2(\xi, \eta)\,\mathfrak{h} - u_2(\xi, \eta)\,\mathfrak{k}\},$$

$$k = \frac{1}{D}\{-v_1(\xi, \eta)\,\mathfrak{h} + u_1(\xi, \eta)\,\mathfrak{k}\}.$$

Положивъ

$$\mathfrak{k} = 0 \text{ и } \mathfrak{h} \gtrless 0,$$

находимъ

$$\frac{h}{\mathfrak{h}} = \frac{1}{D}\, v_2(\xi, \eta), \qquad \frac{k}{\mathfrak{h}} = -\frac{1}{D}\, v_1(\xi, \eta).$$

Допустимъ теперь, что $\mathfrak{h}$ стремится къ нулю, между тѣмъ какъ $\mathfrak{k}$ остается равнымъ нулю; тогда, согласно теоремѣ 4 въ § 123,

$$\lim h = 0 \text{ и } \lim k = 0,$$

такъ что

$$\lim \xi = \lim \xi = x,$$
$$\lim \eta = \lim \eta = y,$$

и, вслѣдствіе непрерывности функцій u_1, u_2, v_1, v_2,

$$\lim \frac{h}{\mathfrak{h}} = \frac{v_2(x, y)}{u_1(x, y)\, v_2(x, y) - u_2(x, y)\, v_1(x, y)},$$

$$\lim \frac{k}{\mathfrak{h}} = \frac{-v_1(x, y)}{u_1(x, y)\, v_2(x, y) - u_2(x, y)\, v_1(x, y)}.$$

Этимъ доказано существованіе производныхъ

$$\mathfrak{u}'_{\mathfrak{x}} \text{ и } \mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}}.$$

Точно такимъ же образомъ можно показать, что существуютъ и производныя

$$\mathfrak{u}'_{\mathfrak{y}} \text{ и } \mathfrak{v}'_{\mathfrak{y}}.$$

Положивъ

$$\mathfrak{y} = 0 \text{ и } \mathfrak{x} \gtrless 0,$$

найдемъ, что

$$\lim \frac{h}{\mathfrak{x}} = \frac{-u_2(x, y)}{u_1(x, y)\, v_2(x, y) - u_2(x, y)\, v_1(x, y)},$$

$$\lim \frac{k}{\mathfrak{x}} = \frac{u_1(x, y)}{u_1(x, y)\, v_2(x, y) - u_2(x, y)\, v_1(x, y)}.$$

Такъ какъ функціи u_1, u_2, v_1, v_2 непрерывны въ области Q и выраженіе

$$u_1(x, y)\, v_2(x, y) - u_2(x, y)\, v_1(x, y)$$

отлично отъ нуля въ этой области, то правыя части нашихъ формулъ для $\mathfrak{u}'_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{u}'_{\mathfrak{y}}, \mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}'_{\mathfrak{y}}$ суть непрерывныя функціи отъ x, y въ области Q. Но x, y, въ свою очередь будутъ, согласно теоремѣ 4 въ § 123, непрерывными функціями отъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ въ области $\mathfrak{Q}$. Отсюда вытекаетъ, что производныя $\mathfrak{u}'_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{u}'_{\mathfrak{y}}, \mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}'_{\mathfrak{y}}$ непрерывны въ области $\mathfrak{Q}$ (§ 110).

Разъ мы убѣдились въ существованіи производныхъ $\mathfrak{u}'_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{u}'_{\mathfrak{y}}, \mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}'_{\mathfrak{y}}$, то можно воспользоваться для вычисленія ихъ или дифференціаловъ $d\mathfrak{u}$, $d\mathfrak{v}$ правиломъ дифференцированія сложныхъ функцій.

Изъ равенствъ

$$\mathfrak{x} = u(x, y), \quad \mathfrak{y} = v(x, y),$$

согласно этому правилу, вытекаетъ, что

$$d\mathfrak{x} = u'_x\, dx + u'_y\, dy,$$
$$d\mathfrak{y} = v'_x\, dx + v'_y\, dy,$$

безразлично, будутъ ли независимыми перемѣнныя x, y или $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$; разрѣшая эти равенства относительно dx, dy, получаемъ

$$dx = \frac{v_y'\, d\mathfrak{x} - u_y'\, d\mathfrak{y}}{u_x'\, v_y' - u_y'\, v_x'},$$

$$dy = \frac{-v_x'\, d\mathfrak{x} + u_x'\, d\mathfrak{y}}{u_x'\, v_y' - u_y'\, v_x'}.$$

Если функціи u и v имѣютъ въ области Q непрерывныя производныя до n-го порядка $(n > 1)$, то это же имѣетъ мѣсто и для функцій $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ въ области $\mathfrak{Q}$. Для нахожденія высшихъ производныхъ или высшихъ дифференціаловъ функцій $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ можно снова воспользоваться правиломъ дифференцированія сложныхъ функцій.

Такъ, напримѣръ, мы найдемъ, что

$$d^2\mathfrak{x} = u'_x d^2x + u'_y d^2y + u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dx\,dy + u''_{yy}dy^2,$$
$$d^2\mathfrak{y} = v'_x d^2x + v'_y d^2y + v''_{xx}dx^2 + 2v''_{xy}dx\,dy + v''_{yy}dy^2,$$

или, взявъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ за независимыя перемѣнныя, имѣемъ:

$$0 = u'_x d^2x + u'_y d^2y + u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dx\,dy + u''_{yy}dy^2,$$
$$0 = v'_x d^2x + v'_y d^2y + v''_{xx}dx^2 + 2v''_{xy}dx\,dy + v''_{yy}dy^2.$$

Отсюда можно опредѣлить d^2x и d^2y.

§ 125. **Неявныя функціи.** Пусть функція $F(x, y)$ имѣетъ въ нѣкоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывныя первыя производныя:

$$F'_x(x, y) = F_1(x, y),$$
$$F'_y(x, y) = F_2(x, y).$$

Пусть, сверхъ того,

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \text{но} \quad F_2(x_0, y_0) \gtrless 0.$$

Разсматривая отображеніе

$$(A) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x, \\ \mathfrak{y} = F(x, y), \end{cases}$$

находимъ, что для него выполняются всѣ установленныя въ § 123 условія. Въ настоящемъ случаѣ

$$u(x, y) = x \quad \text{и} \quad v(x, y) = F(x, y)$$

и

$$u_1(x, y)\,v_2(x, y) - u_2(x, y)\,v_1(x, y) = F_2(x, y).$$

Если мы и здѣсь обозначимъ черезъ $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ изображеніе точки (x_0, y_0), то

$$\mathfrak{x}_0 = x_0, \quad \mathfrak{y}_0 = 0.$$

Согласно § 123, вокругъ точекъ (x_0, y_0) и $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ можно построить два квадрата

$$(Q)\quad \langle x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon;\ y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon\rangle$$

и

$$(\mathfrak{Q})\quad \langle \mathfrak{x}_0 - \delta,\ \mathfrak{x}_0 + \delta;\ \mathfrak{y}_0 - \delta,\ \mathfrak{y}_0 + \delta\rangle$$

такого свойства, что каждая точка $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ квадрата $\mathfrak{Q}$ будетъ изображеніемъ одной и только одной точки (x, y) квадрата Q[1]).

Отображеніе $\mathfrak{A}$, въ которомъ къ каждой точкѣ области $\mathfrak{Q}$ относится та именно точка области Q, изображеніемъ которой первая является въ отображеніи A, т. е. отображеніе, обратное A, въ нашемъ случаѣ, очевидно, имѣетъ слѣдующую форму:

$$(\mathfrak{A})\qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}). \end{cases}$$

То обстоятельство, что отображеніе $\mathfrak{A}$ будетъ обратнымъ относительно отображенія A, выражается равенствомъ:

$$\mathfrak{y} = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})),$$

которое имѣетъ мѣсто во всемъ квадратѣ $\mathfrak{Q}$.

Положивъ теперь $\mathfrak{y} = 0$, мы придемъ къ равенству

$$0 = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0)). \quad (\mathfrak{x}_0 - \delta \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_0 + \delta)$$

Если въ интервалѣ $\langle \mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta\rangle$ нѣкоторая функція $\varphi(\mathfrak{x})$ удовлетворяетъ равенству

$$0 = F(\mathfrak{x}, \varphi(\mathfrak{x}))$$

и при этомъ, подобно функціи $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0)$, удовлетворяетъ условію

$$y_0 - \varepsilon \leqq \varphi(\mathfrak{x}) \leqq y_0 + \varepsilon,$$

то во всемъ интервалѣ $\langle \mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta\rangle$

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0).$$

[1]) Такъ какъ здѣсь $\mathfrak{x} = x$, то, очевидно, $\varepsilon \geqq \delta$.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ точки

$$x = \mathfrak{x},\ y = \varphi(\mathfrak{x}) \text{ и } x = \mathfrak{x},\ y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0),$$

лежащія въ квадратѣ Q, въ отображеніи A имѣютъ своимъ изображеніемъ одну и ту же точку $(\mathfrak{x}, 0)$, то онѣ должны совпасть.

Полученный результатъ имѣетъ слѣдующій геометрическій смыслъ.

Если вокругъ точки (x_0, y_0) построить прямоугольникъ

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon\rangle,$$

то въ немъ на каждой прямой $x = \mathfrak{x}$, параллельной оси y-овъ, будетъ лежать одна и только одна точка, удовлетворяющая уравненію

$$F(x, y) = 0,$$

а именно, точка

$$x = \mathfrak{x},\ \ y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0).$$

Такимъ образомъ, покуда ограничиваются разсмотрѣніемъ точекъ прямоугольника

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta;\ \ y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon\rangle,$$

уравненіе $F(x, y) = 0$ оказывается вполнѣ эквивалентнымъ[1]) уравненію $y = \mathfrak{F}(x, 0)$.

Изъ § 124 можно заключить, что производная

$$\mathfrak{F}'_x(x, 0)$$

во всемъ интервалѣ $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ существуетъ и непрерывна.

Для нахожденія этой производной (послѣ того, какъ существованіе ея доказано) можно воспользоваться правиломъ дифференцированія сложныхъ функцій. Изъ равенства

$$F(x, y) = 0 \qquad (y = \mathfrak{F}(x, 0))$$

получаемъ:

$$F'_x dx + F'_y dy = 0,$$

[1]) Т. е. обоимъ уравненіямъ удовлетворяютъ однѣ и тѣ же точки разсматриваемаго прямоугольника.

такъ что

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'}. \qquad (x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta)$$

Если функція $F(x, y)$ въ области Q имѣетъ непрерывныя вторыя производныя, то, принимая x за независимую перемѣнную, получимъ:

$$F''_{xx} dx^2 + 2 F''_{xy} dx\, dy + F''_{yy} dy^2 + F'_y d^2 y = 0,$$

откуда выводится $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Если функція $F(x, y)$ въ области Q имѣетъ непрерывныя производныя до n-го порядка, то это же имѣетъ мѣсто и для функціи $\mathfrak{F}(x, 0)$.

Разсмотрѣнная нами въ § 118 функція, обратная данной функціи $f(x)$, является частнымъ видомъ неявной функціи, — именно, въ этомъ случаѣ

$$F(x, y) = y - f(x).$$

§ 126. **Общая теорема объ обращеніи.** Разсужденія, приведенныя въ § 123, могутъ быть въ совершенно аналогичной формѣ примѣнены къ случаю n функцій отъ n перемѣнныхъ. Мы ограничимся лишь тѣмъ, что укажемъ окончательный результатъ. При этомъ мы будемъ пользоваться понятіемъ объ опредѣлителѣ. Все необходимое изъ теоріи опредѣлителей читатель найдетъ въ приложеніи.

Допустимъ, что функціи

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

въ нѣкоторой окрестности U системы значеній

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \text{[1]}$$

имѣютъ непрерывныя первыя производныя

$$\begin{array}{l}
(u_1)'_{x_1} = u_{11},\ (u_1)'_{x_2} = u_{12}, \ldots,\ (u_1)'_{x_n} = u_{1n},\\
(u_2)'_{x_1} = u_{21},\ (u_2)'_{x_2} = u_{22}, \ldots,\ (u_2)'_{x_n} = u_{2n},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(u_n)'_{x_1} = u_{n1},\ (u_n)'_{x_2} = u_{n2}, \ldots,\ (u_n)'_{x_n} = u_{nn}.
\end{array}$$

[1]) Т. е. для $a_1 - h < x_1 < a_1 + h, \ldots, a_n - h < x_n < a_n + h\ (h > 0)$.

Далѣе, пусть опредѣлитель[1])

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \dots u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} \dots u_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} \dots u_{nn} \end{vmatrix} = D(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

будетъ отличенъ отъ нуля въ точкѣ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Съ помощью равенствъ

$$(A) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \mathfrak{x}_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{x}_n = u_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

къ каждой системѣ значеній $x_1, x_2, \dots, x_n$ въ области U относится нѣкоторая система значеній $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n$. Точку $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n)$ мы будемъ называть изображеніемъ точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (въ отображеніи A). Пусть точка $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n)$ будетъ изображеніемъ точки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Въ такомъ случаѣ вокругъ точки

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

можно построить окрестность

$$(Q) \qquad a_\nu - \varepsilon \leqq x_\nu \leqq a_\nu + \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \dots n; \ \varepsilon > 0)$$

и вокругъ точки

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$$

окрестность

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \mathfrak{a}_\nu - \delta \leqq \mathfrak{x}_\nu \leqq \mathfrak{a}_\nu + \delta \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n; \ \delta > 0)$$

такого свойства, что каждая точка $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n)$ области $\mathfrak{Q}$ будетъ изображеніемъ одной и только одной точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ области Q.

---

[1]) Этотъ опредѣлитель носитъ названіе функціональнаго опредѣлителя функцій $u_1, u_2, \dots, u_n$ по перемѣннымъ $x_1, x_2, \dots, x_n$.

На этомъ основаніи, могутъ быть построены (и притомъ однимъ лишь образомъ) n функцій

$$\mathfrak{u}_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n),\ \mathfrak{u}_2(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n), \ldots, \mathfrak{u}_n(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n)$$

такъ, что отображеніе

$$(\mathfrak{A})\qquad \begin{cases} x_1 = \mathfrak{u}_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n), \\ x_2 = \mathfrak{u}_2(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = \mathfrak{u}_n(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n), \end{cases}$$

относитъ къ каждой точкѣ $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ области $\mathfrak{Q}$ именно ту точку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ области Q, изображеніемъ которой точка $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ является въ отображеніи A.

Отображеніе $\mathfrak{A}$ называютъ обратнымъ относительно отображенія A, систему же функцій $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n$ называютъ обратной относительно системы функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$, или же — результатомъ обращенія послѣдней системы функцій.

Обратныя функціи не только непрерывны въ области $\mathfrak{Q}$, но и имѣютъ въ этой области непрерывныя первыя производныя.

Дифференціалы функцій $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n$ получаютъ, разрѣшая уравненія [1])

$$d\mathfrak{x}_1 = u_{11}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 + \cdots + u_{1n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$d\mathfrak{x}_n = u_{n1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 + \cdots + u_{nn}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx$$

относительно $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Если функціи $u_1, u_2, \ldots, u_n$ имѣютъ въ области Q непрерывныя производныя до n-го порядка, то это же имѣетъ мѣсто и для функцій $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n$ въ области $\mathfrak{Q}$.

§ 127. **Неявныя функціи отъ многихъ перемѣнныхъ и системы неявныхъ функцій.** Мы ограничимся разсмотрѣніемъ

[1]) Мы предполагаемъ область Q выбранной такъ, что функціональный опредѣлитель нигдѣ въ ней не равенъ нулю. Это же мы сдѣлали и въ § 123.

двухъ частныхъ случаевъ съ тою цѣлью, чтобы лучше выяснить сущность вопроса.

1. Допустимъ, что функція $F(x, y, z)$ въ нѣкоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) имѣетъ непрерывныя первыя производныя. Сверхъ того, пусть $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, но $F'_z(x_0, y_0, z_0) \gtrless 0$.

Разсматривая отображеніе

$$(A) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x, \\ \mathfrak{y} = y, \\ \mathfrak{z} = F(x, y, z), \end{cases}$$

находимъ, что въ отношеніи него выполнены всѣ условія теоремы объ обращеніи функціи. Именно,

$$u_1 = x,\ u_2 = y,\ u_3 = F(x, y, z),$$

и функціональный опредѣлитель функцій u_1, u_2, u_3 принимаетъ видъ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = F'_z.$$

Изображеніемъ точки (x_0, y_0, z_0) будетъ при этомъ точка

$$\mathfrak{x}_0 = x_0,\ \mathfrak{y}_0 = y_0,\ \mathfrak{z}_0 = 0.$$

Согласно теоремѣ объ обращеніи, вокругъ точки (x_0, y_0, z_0) можно построить окрестность

$$(Q) \qquad x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon,\ y_0 - \varepsilon \leqq y < y_0 + \varepsilon,$$
$$z_0 - \varepsilon \leqq z \leqq z_0 + \varepsilon$$

и вокругъ точки $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0)$ — окрестность

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \mathfrak{x}_0 - \delta \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_0 + \delta,\ \mathfrak{y}_0 - \delta \leqq \mathfrak{y} \leqq \mathfrak{y}_0 + \delta,$$
$$\mathfrak{z}_0 - \delta \leqq \mathfrak{z} \leqq \mathfrak{z}_0 + \delta$$

такого свойства, что каждая точка $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ области $\mathfrak{Q}$ будетъ изображеніемъ одной и только одной точки (x, y, z) области Q[1]).

[1]) Очевидно, $\varepsilon \geq \delta$.

Отображеніе, обратное A, относящее къ каждой точкѣ области $\mathfrak{Q}$ ту именно точку области Q, изображеніемъ коей она является при отображеніи A, въ нашемъ случаѣ, очевидно, отвѣчаетъ равенствамъ:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y}, \\ z = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}). \end{cases}$$

То обстоятельство, что отображеніе $\mathfrak{A}$ является обратнымъ относительно A, выражается равенствомъ

$$\mathfrak{z} = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})),$$

которое остается вѣрнымъ во всей области $\mathfrak{Q}$.

Такимъ образомъ, въ частности

$$0 = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)),$$

и притомъ во всемъ квадратѣ $\langle \mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta; \mathfrak{y}_0 - \delta, \mathfrak{y}_0 + \delta \rangle$.

Если нѣкоторая функція $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ въ этомъ квадратѣ удовлетворяетъ уравненію

$$0 = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))$$

и она, кромѣ того, подобно функціи $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$, удовлетворяетъ условію

$$z_0 - \varepsilon \leqq \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leqq z_0 + \varepsilon,$$

то

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0).$$

Дѣйствительно, такъ какъ лежащія въ области Q точки

$$x = \mathfrak{x}, \quad y = \mathfrak{y}, \; z = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

и

$$x = \mathfrak{x}, \quad y = \mathfrak{y}, \; z = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$$

имѣютъ своимъ изображеніемъ точку $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$, то онѣ должны совпасть.

Нашему результату можно дать такое геометрическое толкованіе:

Если построить вокругъ точки (x_0, y_0, z_0) параллелепипедъ

$$x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta,\ y_0 - \delta \leqq y \leqq y_0 + \delta,$$

$$z_0 - \varepsilon \leqq z \leqq z_0 + \varepsilon,$$

то въ немъ на каждой прямой

$$x = \mathfrak{x},\ y = \mathfrak{y},$$

параллельной оси z-овъ, лежитъ одна и только одна точка, удовлетворяющая уравненію

$$F(x, y, z) = 0,$$

а именно, точка

$$x = \mathfrak{x},\ y = \mathfrak{y},\ z = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0).$$

Уравненіе $F(x, y, z) = 0$ вполнѣ эквивалентно уравненію $z = \mathfrak{F}(x, y, 0)$, если разсматривать только точки параллелепипеда.

Функція $\mathfrak{F}(x, y, 0)$ имѣетъ въ области $\langle x_0 - \delta,\ x_0 + \delta;\ y_0 - \delta,\ y_0 + \delta\rangle$ непрерывныя первыя производныя, которыя находятся по правилу дифференцированія сложныхъ функцій.

Если функція F въ области Q имѣетъ непрерывныя производныя до n-го порядка, то это же имѣетъ мѣсто относительно функціи $\mathfrak{F}(x, y, 0)$ въ области $\langle x_0 - \delta,\ x_0 + \delta;\ y_0 - \delta,\ y_0 + \delta\rangle$.

2. Положимъ, что функціи $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$ въ нѣкоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) имѣютъ непрерывныя первыя производныя; сверхъ того, пусть будетъ

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0,\quad G(x_0, y_0, z_0) = 0$$

и

$$F'_y(x_0, y_0, z_0)\, G'_z(x_0, y_0, z_0) - F'_z(x_0, y_0, z_0)\, G'_y(x_0, y_0, z_0) \gtrless 0.$$

Отображеніе

$$(A)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x, \\ \mathfrak{y} = F(x, y, z), \\ \mathfrak{z} = G(x, y, z) \end{cases}$$

удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ теоремы объ обращеніи. Именно,

$$u_1 = x, \quad u_2 = F(x, y, z), \quad u_3 = G(x, y, z),$$

а функціональный опредѣлитель функцій u_1, u_2, u_3 принимаетъ видъ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = F'_y G'_z - F'_z G'_y.$$

Изображеніемъ точки (x_0, y_0, z_0) въ этомъ случаѣ будетъ точка

$$\mathfrak{x}_0 = x_0, \quad \mathfrak{y}_0 = 0, \quad \mathfrak{z}_0 = 0.$$

Мы можемъ теперь вновь построить соотвѣтственно вокругъ точекъ (x_0, y_0, z_0) и $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0)$ окрестности, обозначенныя нами черезъ Q и $\mathfrak{Q}$, при чемъ каждая точка области $\mathfrak{Q}$ будетъ служить изображеніемъ одной и только одной точки области Q [1]).

Трансформація, обратная A, очевидно будетъ вида

$$(\mathfrak{A}) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}), \\ z = \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}). \end{cases}$$

То обстоятельство, что она будетъ обратной относительно A, выражается равенствами

$$\mathfrak{y} = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}), \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})),$$

$$\mathfrak{z} = G(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}), \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})),$$

которыя имѣютъ мѣсто во всей области $\mathfrak{Q}$.

Такимъ образомъ, въ частности, имѣемъ:

$$0 = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0, 0), \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, 0, 0)),$$

$$0 = G(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0, 0), \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, 0, 0))$$

во всемъ интервалѣ $\langle \mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta \rangle$.

---

[1]) И въ этомъ случаѣ также $\varepsilon \geq \delta$.

Если въ интервалѣ $\langle \mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta \rangle$ двѣ функціи

$$\varphi(\mathfrak{x}), \quad \psi(\mathfrak{x})$$

удовлетворяютъ равенствамъ

$$0 = F(\mathfrak{x}, \varphi(\mathfrak{x}), \psi(\mathfrak{x})),$$
$$0 = G(\mathfrak{x}, \varphi(\mathfrak{x}), \psi(\mathfrak{x})),$$

и, кромѣ того, подобно функціямъ $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0, 0)$, $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}, 0, 0)$ удовлетворяютъ условіямъ

$$y_0 - \varepsilon \leqq \varphi(\mathfrak{x}) \leqq y_0 + \varepsilon,$$

$$z_0 - \varepsilon \leqq \psi(\mathfrak{x}) \leqq z_0 + \varepsilon,$$

то

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0, 0), \quad \psi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, 0, 0).$$

Дѣйствительно, такъ какъ обѣ лежащія въ области Q точки

$$x = \mathfrak{x}, \quad y = \varphi(\mathfrak{x}), \quad z = \psi(\mathfrak{x})$$

и

$$x = \mathfrak{x}, \quad y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0, 0), \quad z = \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, 0, 0)$$

имѣютъ своимъ изображеніемъ точку $(\mathfrak{x}, 0, 0)$, то онѣ должны совпасть.

Геометрически нашъ результатъ означаетъ слѣдующее:

Если построить вокругъ точки (x_0, y_0, z_0) параллелепипедъ

$$x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta,$$

$$y_0 - \varepsilon \leqq y \leqq y_0 + \varepsilon, \quad z_0 - \varepsilon \leqq z \leqq z_0 + \varepsilon,$$

то въ немъ на каждой плоскости $x = \mathfrak{x}$, параллельной плоскости (y, z), лежитъ одна и только одна точка, удовлетворяющая уравненіямъ

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

а именно, точка

$$x = \mathfrak{x}, \quad y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0, 0), \quad z = \mathfrak{G}(\mathfrak{x}, 0, 0).$$

Такимъ образомъ, система уравненій

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

вполнѣ эквивалентна системѣ уравненій

$$y = \mathfrak{F}(x, 0, 0), \quad z = \mathfrak{G}(x, 0, 0),$$

если имѣются въ виду только точки параллелепипеда.

Функціи $\mathfrak{F}(x, 0, 0)$ и $\mathfrak{G}(x, 0, 0)$ имѣютъ въ интервалѣ $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ непрерывныя первыя производныя. Эти производныя находятся по правилу дифференцированія сложныхъ функцій.

Изъ равенствъ

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

слѣдуетъ:

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0,$$

$$G'_x dx + G'_y dy + G'_z dz = 0.$$

Эти уравненія могутъ быть разрѣшены относительно dy, dz, пока точка (x, y, z) лежитъ въ области Q.

Если функціи F и G имѣютъ въ области Q непрерывныя производныя до n-го порядка, то и y и z имѣютъ въ интервалѣ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ непрерывныя производныя до n-го порядка.

Глава XIII.

Неопредѣленные интегралы.

§ 128. **Опредѣленія.** Если въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ функція $F(x)$ имѣетъ производную $f(x)$ и, слѣдовательно, дифференціалъ $f(x)\,dx$, то $F(x)$ называютъ **первоначальной функціей или интеграломъ** функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$.[1]) Для выраженія этого

[1]) Если $F(x)$ имѣетъ производную $f(x)$ въ (a, b), то мы говоримъ, что $F(x)$ есть интегралъ отъ $f(x)$ въ (a, b).

соотношенія пишутъ

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

($F(x)$ равно интегралу $f(x)\,dx$).

Такимъ образомъ, эта формула означаетъ то же, что и формула

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Если $F_0(x)$, а также и $F(x)$ суть интегралы функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то

$$dF_0(x) = f(x)\,dx, \quad dF(x) = f(x)\,dx,$$

и

$$d\{F(x) - F_0(x)\} = 0.$$

Такимъ образомъ, по § 67 (слѣдствіе), въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ разность $F(x) - F_0(x)$ есть нѣкоторая постоянная C, т. е.

$$F(x) = F_0(x) + C.$$

Наоборотъ, $F_0(x) + C$ всегда будетъ интеграломъ отъ $f(x)$, какова бы ни была постоянная C, ибо

$$d\{F_0(x) + C\} = dF_0(x) = f(x)\,dx.$$

Выраженіе $F_0(x) + C$, въ виду содержащейся въ немъ неопредѣленной постоянной, называютъ *неопредѣленнымъ интеграломъ* отъ $f(x)$.

Каждый интегралъ функціи $f(x)$ можно получить изъ ея неопредѣленнаго интеграла, приписывая частное значеніе *постоянной интеграціи* C.

Интегрировать функцію — значитъ найти ея неопредѣленный интегралъ.

§ 129. **Существованіе интеграла непрерывной функціи.** Положимъ, что функція $f(x)$ *непрерывна* въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Если $\langle \alpha, \beta\rangle$ есть произвольный интервалъ, содержащійся въ $\langle a, b\rangle$, то мы обозначимъ

черезъ $M(\alpha, \beta)$ *наибольшее*,

черезъ $m(\alpha, \beta)$ *наименьшее*

значеніе функціи, встрѣчающееся въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Произведеніе

$$(\beta - \alpha)\, M(\alpha, \beta)$$

мы будемъ обозначать знакомъ $R(\alpha, \beta)$.

Если $\alpha < \gamma < \beta$, то

$$R(\alpha, \beta) \geqq R(\alpha, \gamma) + R(\gamma, \beta).$$

Ибо очевидно, что

$$M(\alpha, \beta) \geqq M(\alpha, \gamma) \quad \text{и} \quad M(\alpha, \beta) \geqq M(\gamma, \beta),$$

а потому и

$$(\gamma - \alpha)\, M(\alpha, \beta) \geqq R(\alpha, \gamma),$$
$$(\beta - \gamma)\, M(\alpha, \beta) \geqq R(\gamma, \beta),$$

откуда путемъ сложенія выводится доказываемое неравенство.

Мы теперь разложимъ интервалъ $\langle a, b\rangle$ на частные интервалы

$$\langle a, x_1\rangle,\ \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{p-1}, b\rangle$$

$(a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{p-1} < b)$ и это разложеніе обозначимъ черезъ $\mathfrak{Z}$. Сумму

$$R(a, x_1) + R(x_1, x_2) + \cdots + R(x_{p-1}, b)$$

мы обозначимъ черезъ

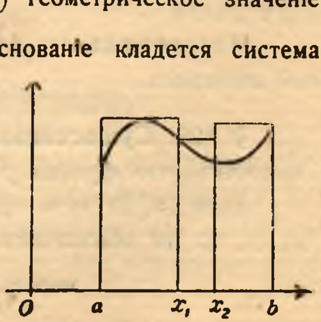
$$\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}),$$

съ цѣлью выразить ея зависимость отъ a, b и $\mathfrak{Z}$.

Фигура 9 показываетъ (при $p = 3$) геометрическое значеніе выраженія $\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ для случая, когда въ основаніе кладется система прямоугольныхъ координатъ.

Положимъ, что разложеніе $\overline{\mathfrak{Z}}$ выводится изъ разложенія $\mathfrak{Z}$ черезъ разложеніе какого-нибудь изъ частныхъ интерваловъ, — напримѣръ, интервала $\langle\alpha, \beta\rangle$ — на двѣ части

$$\langle\alpha, \gamma\rangle \text{ и } \langle\gamma, \beta\rangle \quad (\alpha < \gamma < \beta).$$



Фиг. 9.

Чтобы получить $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\bar{\mathfrak{Z}})$, нужно замѣстить въ выраженіи $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ членъ

$$R(\alpha,\beta) \text{ черезъ } R(\alpha,\gamma)+R(\gamma,\beta).$$

Мы можемъ поэтому быть увѣрены въ томъ, что

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}) \geqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\bar{\mathfrak{Z}}).$$

Такимъ образомъ, $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ не увеличивается при раздѣленіи на двѣ части частнаго интервала разложенія $\mathfrak{Z}$. Примѣняя это замѣчаніе нѣсколько разъ, легко видѣть, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ не увеличивается при переходѣ отъ $\mathfrak{Z}$ къ новому разложенію, получаемому черезъ подраздѣленіе (т. е. черезъ прибавленіе къ старымъ новыхъ точекъ дѣленія).

Послѣдовательность $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ мы будемъ называть цѣпью $\mathfrak{Z}$-овъ, если каждое $\mathfrak{Z}_{n+1}$ выводится черезъ подраздѣленіе изъ $\mathfrak{Z}_n$.

Если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть цѣпь $\mathfrak{Z}$-товъ, то

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_1) \geqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_2) \geqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_3) \geqq \cdots,$$

такъ что

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_1),\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_2),\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_3), \ldots$$

есть убывающая послѣдовательность. Эта послѣдовательность ограничена, ибо для каждаго $\mathfrak{Z}$ выполняются неравенства

$$(b-a)\,m(a,b) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}) \leqq (b-a)\,M(a,b).$$

Изъ § 16 мы можемъ поэтому заключить, что

$$\lim \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_n)$$

существуетъ.

Мы теперь сравнимъ оба выраженія для суммъ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}) \text{ и } \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}').$$

Положимъ, что $\mathfrak{Z}$ имѣетъ p, а $\mathfrak{Z}'$ имѣетъ p' частныхъ интерваловъ. Пусть δ будетъ наибольшая длина частнаго интервала разложенія $\mathfrak{Z}$,[1]) а δ' — наибольшая длина частнаго интервала разложенія $\mathfrak{Z}'$.

Въ отношеніи разложенія $\mathfrak{Z}'$ частные интервалы разложенія $\mathfrak{Z}$ распадаются на 2 класса:

1. такіе, которые лежатъ въ одномъ изъ частныхъ интерваловъ разложенія $\mathfrak{Z}'$;

2. такіе, внутри которыхъ содержится, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ дѣленія разложенія $\mathfrak{Z}'$.

Число частныхъ интерваловъ второго класса, очевидно, не можетъ быть больше, чѣмъ $p'-1$.

Члены $R(\alpha, \beta)$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ мы называемъ членами перваго или второго класса, смотря по тому, будетъ ли (α, β) частный интервалъ перваго или второго класса.

Замѣстимъ въ каждомъ членѣ $R(\alpha, \beta)$, принадлежащемъ ко второму классу, число $M(\alpha, \beta)$ числомъ $m(\alpha, \beta)$. Тогда сумма этихъ членовъ и членовъ перваго класса не будетъ больше, чѣмъ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}').$$

Но предпринятое нами уменьшеніе не больше, чѣмъ

$$(p'-1)\,\delta\{M(a, b)-m(a, b)\}.$$

Поэтому, положивъ $M(a, b)-m(a, b)=\sigma(a, b)$, мы можемъ писать

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}')+(p'-1)\,\delta\,\sigma(a, b).$$

Но на томъ же основаніи

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}') \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})+(p-1)\,\delta'\,\sigma(a, b).$$

---

[1]) Ни одинъ изъ разсматриваемыхъ интерваловъ не долженъ, слѣдовательно, быть больше, чѣмъ δ, и, по крайней мѣрѣ, одинъ долженъ быть равенъ δ. Подъ длиной или величиной интервала разумѣютъ разность $\beta-\alpha$, если α есть его нижняя, а β верхняя граница.

Пусть теперь $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ будетъ цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, имѣющая то свойство, что $\lim \delta_n = 0$.[1]) Такую цѣпь мы будемъ называть особенною цѣпью $\mathfrak{Z}$-въ.

Пусть далѣе $\mathfrak{Z}_1', \mathfrak{Z}_2', \mathfrak{Z}_3', \ldots$ будетъ послѣдовательность разложеній имѣющихъ то свойство, что $\lim \delta_n' = 0$.[1]) Такую последовательность мы будемъ называть особенною послѣдовательностью $\mathfrak{Z}$-въ.

Мы знаемъ, что

$$\lim \overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_n) = \overset{b}{\underset{a}{S}}$$

существуетъ, ибо

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_1),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_2),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_3), \ldots$$

есть ограниченная убывающая послѣдовательность.

Мы знаемъ дальше, что послѣдовательность

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_1'),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_2'),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_3'), \ldots$$

ограничена. Если намъ удастся доказать, что она имѣетъ только одну точку сгущенія, то отсюда будетъ слѣдовать, что она сходится. Пусть же теперь S' будетъ такая точка сгущенія. Тогда изъ нашей послѣдовательности можно выдѣлить такую частную послѣдовательность

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(\overline{\mathfrak{Z}}_1),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(\overline{\mathfrak{Z}}_2),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(\overline{\mathfrak{Z}}_3), \ldots,$$

что

$$\lim \overset{b}{\underset{a}{S}}(\overline{\mathfrak{Z}}_m) = S'.$$

Примѣнимъ теперь къ суммамъ

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(\mathfrak{Z}_n) \text{ и } \overset{b}{\underset{a}{S}}(\overline{\mathfrak{Z}}_m)$$

[1]) $\delta_n(\delta_n')$ есть наибольшая длина частныхъ интерваловъ разложенія $\mathfrak{Z}_n(\mathfrak{Z}_n')$.

найденныя выше неравенства; тогда получимъ:

$$\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_n) - (\bar{p}_m - 1)\,\delta_n\,\sigma(a, b) \leqq \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\bar{\mathfrak{Z}}_m),$$

$$\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\bar{\mathfrak{Z}}_m) - (p_n - 1)\,\bar{\delta}_m\,\sigma(a, b) \leqq \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_n).$$

$\delta_n(\bar{\delta}_m)$ есть наибольшая длина, а $p_n(\bar{p}_m)$ есть число частныхъ интерваловъ въ разложеніи $\mathfrak{Z}_n(\bar{\mathfrak{Z}}_m)$.

Если оставить m неизмѣняемымъ и измѣнять n, давая ему послѣдовательно значенія 1, 2, 3, . . . , то первое неравенство даетъ намъ:

$$\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}} \leqq \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\bar{\mathfrak{Z}}_m).$$

Если оставить n неизмѣняемымъ и измѣнять m, давая ему послѣдовательно значенія 1, 2, 3, . . . , то второе неравенство даетъ намъ:

$$\mathrm{S}' \leqq \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_n).$$

Измѣняя въ этихъ новыхъ неравенствахъ m и n и давая имъ послѣдовательно значенія 1, 2, 3, . . . , мы получимъ:

$$\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}} \leqq \mathrm{S}' \text{ и } \mathrm{S}' \leqq \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}.$$

Поэтому

$$\mathrm{S}' = \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}.$$

Этимъ доказано, что ограниченная послѣдовательность

$$\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_1'),\ \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_2'),\ \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_3'), \ldots$$

имѣетъ единственную точку сгущенія $\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}$. Мы можемъ поэтому написать

$$\lim \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_n') = \underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}$$

и высказать слѣдующее предложеніе:

Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то $\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ сходится и всегда имѣетъ одинъ и тотъ же предѣлъ, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ любую особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Мы знаемъ, что $\mathop{S}\limits_a^b(\mathfrak{Z})$ будетъ постоянно не меньше, чѣмъ $(b-a)\,m(a,b)$, и не больше, чѣмъ $(b-a)\,M(a,b)$. Отсюда слѣдуетъ:

$$(b-a)\,m(a,b) \leqq \mathop{S}\limits_a^b \leqq (b-a)\,M(a,b).$$

А такъ какъ функція

$$(b-a)f(x)$$

непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и въ одномъ мѣстѣ этого интервала имѣетъ значеніе $(b-a)\,m(a,b)$, а въ другомъ мѣстѣ имѣетъ значеніе $(b-a)\,M(a,b)$, то, по § 33, въ $\langle a, b\rangle$ существуетъ мѣсто ξ такого рода, что

$$\mathop{S}\limits_a^b = (b-a)f(\xi).$$

Если $a < c < b$, то

$$\mathop{S}\limits_a^b = \mathop{S}\limits_a^c + \mathop{S}\limits_c^b.$$

Чтобы это доказать, слѣдуетъ только разсмотрѣть особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ: $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$, гдѣ $\mathfrak{Z}_1$ есть разложеніе интервала $\langle a, b\rangle$ на $\langle a, c\rangle$ и $\langle c, b\rangle$. Сумма $\mathop{S}\limits_a^b(\mathfrak{Z}_n)$ распадается на двѣ части, изъ коихъ одна стремится къ $\mathop{S}\limits_a^c$, а другая къ $\mathop{S}\limits_c^b$.

Если положить

$$\mathop{S}\limits_\beta^\alpha = -\mathop{S}\limits_\alpha^\beta \qquad (a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$$

и

$$\mathop{S}\limits_\alpha^\alpha = 0,$$

то, какъ бы ни выбрать x_1, x_2, x_3 въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, всегда будетъ справедлива формула

$$(*) \qquad \mathop{S}\limits_{x_1}^{x_2} + \mathop{S}\limits_{x_2}^{x_3} + \mathop{S}\limits_{x_3}^{x_1} = 0.$$

Точно такъ же

(**) $$\mathop{\mathrm{S}}_{x}^{x+h} = hf(x+\vartheta h), \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

какъ бы ни выбрать x и $x+h$ въ $\langle a, b\rangle$.

Мы разсмотримъ теперь функцію

$$F(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \qquad (a \leqq c \leqq b)$$

и покажемъ, что повсюду въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ она имѣетъ производную $f(x)$.

Если числа x и $x+h$ ($h \gtreqless 0$) лежатъ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ то по формулѣ (*)

$$F(x+h) - F(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x+h} - \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} = \mathop{\mathrm{S}}_{x}^{x+h}$$

и, слѣдовательно, согласно формулѣ (**),

$$F(x+h) - F(x) = hf(x+\vartheta h),$$

а потому, въ виду непрерывности функціи $f(x)$,

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x), \qquad (\lim h = 0)$$

т. е.

$$F'(x) = f(x). \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

Если примѣнить предыдущія разсужденія къ функціи $-f(x)$, то $-m(\alpha, \beta)$ будетъ наибольшее значеніе функціи въ интервалѣ $\langle \alpha, \beta\rangle$; вмѣсто $R(\alpha, \beta)$ появится выраженіе

$$-r(\alpha, \beta) = -(\beta - \alpha)\, m(\alpha, \beta),$$

а вмѣсто

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b}(\mathfrak{Z})$$

выраженіе

$$-\mathop{\mathrm{s}}_{a}^{b}(\mathfrak{Z}) = -\{r(a, x_1) + r(x_1, x_2) + \cdots + r(x_{p-1}, b)\}.$$

Если $\mathfrak{Z}$ будетъ пробѣгать особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-товъ, то $-\mathop{\mathrm{s}}_{a}^{b}(\mathfrak{Z})$, убывая, будетъ стремиться къ предѣлу, который мы обозначимъ черезъ $-\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}$.

Функція

$$\Phi(x) = -\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{s}}} \qquad (\overset{a}{\underset{a}{\mathrm{s}}} = 0)$$

имѣетъ тогда производную $-f(x)$, а $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{s}}}$ имѣетъ производную $f(x)$.

Выраженія $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{S}}}$ и $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{s}}}$ имѣютъ, такимъ образомъ, одну и ту же производную. А такъ какъ они, сверхъ того, равны нулю при $x = a$, то повсюду въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{s}}} = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{S}}},$$

и въ частности

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}} = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}.$$

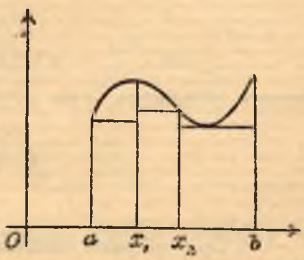
Но, такъ какъ $-\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})$ убывая стремится къ $-\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})$ стремится возрастая къ $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}$, между тѣмъ какъ $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ стремится къ тому же предѣлу убывая.

Такимъ образомъ, для каждаго разложенія $\mathfrak{Z}$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}} \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}),$$

ибо особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-товъ можно начинать съ любого разложенія.

Фигура 10 показываетъ геометрическое значеніе выраженія $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})$. На фигурѣ 9 было показано геометрическое значеніе выраженія $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$.



Фиг. 10.

§ 130. Примѣненіе результатовъ дифференцированія.

1. Положимъ, что степенной рядъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

имѣетъ радіусъ сходимости, отличный отъ нуля. Если положить

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

то въ интервалѣ $(-\rho, \rho)$

$$\int f(x)\,dx = C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по § 90 рядъ

$$a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots$$

имѣетъ тотъ же радіусъ сходимости ρ, что и рядъ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, и въ интервалѣ $(-\rho, \rho)$ первый рядъ имѣетъ производную $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

Если всѣ коэффиціенты, слѣдующіе за a_n, равны нулю, то мы имѣемъ цѣлую раціональную функцію и

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,dx$$

$$= C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Такимъ образомъ, интегралъ цѣлой раціональной функціи n-ой степени есть цѣлая раціональная функція $(n+1)$-ой степени.

2. Если $x > 0$ [1]), то для всякаго значенія n, отличнаго отъ -1,

$$d\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n\,dx. \qquad \text{(ср. § 65)}$$

Такимъ образомъ, при $x > 0$

$$\int x^n\,dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1}. \qquad (n+1 \gtrless 0)$$

[1]) При цѣлыхъ значеніяхъ n нѣтъ надобности дѣлать это ограниченіе; необходимо только исключить значеніе $x = 0$ для $n = -2, -3, \ldots$

Напримѣръ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = C + 2\sqrt{x}.$$

Въ случаѣ $n = -1$ нашъ интегралъ обращается въ $\int \frac{dx}{x}$. Но мы знаемъ, что

$$d \log x = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x} = C + \log x.$$

При $x < 0$ имѣемъ:

$$d \log(-x) = \frac{dx}{x};$$

такимъ образомъ

$$\int \frac{dx}{x} = C + \log(-x).$$

3. Такъ какъ при $a > 0$

$$d \frac{a^x}{\log a} = a^x\, dx,$$

то

$$\int a^x\, dx = C + \frac{a^x}{\log a}.$$

Въ частности

$$\int e^x\, dx = C + e^x.$$

4. Изъ равенствъ

$$d(-\cos x) = \sin x\, dx, \quad d \sin x = \cos x\, dx$$

слѣдуетъ: [1])

$$\int \sin x\, dx = C - \cos x, \quad \int \cos x\, dx = C + \sin x.$$

Изъ равенствъ

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d(-\cot x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$$

[1]) Это можно было бы вывести изъ рядовъ для $\cos x$ и $\sin x$, примѣняя No 1.

вытекаетъ:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = C + \operatorname{tg} x, \int \frac{dx}{\sin^2 x} = C - \cot x.$$

Въ первомъ (второмъ) случаѣ перемѣнная x должна быть ограничена интерваломъ, въ которомъ $\cos x$ $(\sin x)$ не нуль.

5. Въ интервалѣ $(-1, 1)$

$$d(-\operatorname{arc}\cos x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \operatorname{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такимъ образомъ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - \operatorname{arc}\cos x,$$

а также

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + \operatorname{arc}\sin x.$$

Изъ равенствъ

$$d \operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{и} \quad d(-\operatorname{arc}\cot x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

мы заключаемъ, что

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + \operatorname{arc}\operatorname{tg} x,$$

а также, что

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C - \operatorname{arc}\cot x.$$

Суммы $\operatorname{arc}\cos x + \operatorname{arc}\sin x$ и $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\cot x$ суть величины постоянныя. Легко найти, что каждая изъ нихъ равна $\pi/2$. Слѣдуетъ только принять въ соображеніе, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{и} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. Въ § 65 мы нашли, что

$$d \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Такимъ образомъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = C + \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

7. Мы разсматриваемъ интервалъ, въ которомъ функція $f(x)$ повсюду остается положительной и имѣетъ производную. Въ такомъ случаѣ въ этомъ интервалѣ (по § 65)

$$d \log f(x) = \frac{f'(x)\,dx}{f(x)},$$

такъ что

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = C + \log f(x).$$

Такъ, напримѣръ, если въ разсматриваемомъ интервалѣ $\sin x$ остается положительнымъ, то

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = C + \log \sin x;$$

точно такъ же

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = C - \log \cos x$$

въ случаѣ, когда $\cos x$ остается положительнымъ въ этомъ интервалѣ.

§ 131. **Способы упрощенія интеграловъ.** 1. Если c есть постоянная, то

$$\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx. \qquad (c \gtreqless 0)$$

Доказательство: [1])

$$d(c F(x)) = c\,d F(x).$$

2. $$\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Доказательство: [1])

$$d\{F(x) + G(x)\} = dF(x) + dG(x).$$

3. Если функціи $f'(x)$, $g'(x)$ и $\int g(x) f'(x)\,dx$ существуютъ, то

$$f(x) g(x) - \int g(x) f'(x)\,dx$$

имѣетъ производную

$$f(x) g'(x) + f'(x) g(x) - g(x) f'(x) = f(x) g'(x).$$

---

[1]) Мы предполагаемъ, что интегралы $\int f(x)\,dx$ и $\int g(x)\,dx$ существуютъ, и обозначаемъ ихъ соотвѣтственно черезъ $F(x)$ и $G(x)$.

Такимъ образомъ,

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx,$$

или короче:

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

Это есть правило интегрированія по частямъ. При помощи его нахожденіе интеграла

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx$$

приводится къ нахожденію (иногда болѣе простого) интеграла

$$\int g(x)\,f'(x)\,dx$$

4. Положимъ, что $F(u)$ имѣетъ въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$ производную $F'(u) = \varphi(u)$ и $f(x)$ имѣетъ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ производную $f'(x)$. Положимъ, сверхъ того, что всѣ значенія функціи $f(x)$ лежатъ въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$. Тогда, по § 64,

$$dF(f(x)) = \varphi(f(x))\,f'(x)\,dx,$$

такъ что

$$F(f(x)) = \int \varphi(f(x))\,f'(x)\,dx.$$

Но, съ другой стороны,

$$F(u) = \int \varphi(u)\,du;$$

поэтому, въ силу равенства $u = f(x)$,

$$\int \varphi(u)\,du = \int \varphi(f(x))\,f'(x)\,dx.$$

Эта формула показываетъ, какъ производится преобразованіе интеграла, т. е. какъ ввести въ интегралъ новую перемѣнную. Замѣщаютъ u черезъ $f(x)$, а du черезъ $f'(x)\,dx$. [1])

---

[1]) Если бы для обозначенія интеграла употребляли не символъ $\int f(x)\,dx$, а $\int f(x)$, то это преобразованіе не выражалось бы такъ просто. Въ выборѣ символа $\int f(x)\,dx$ мы имѣемъ проявленіе геніальной идеи Лейбница.

Если мы можемъ вычислить $\int \varphi(u)\,du$, то, положивъ въ результатѣ $u = f(x)$, мы получимъ интегралъ

$$\int \varphi(f(x))\,f'(x)\,dx.$$

§ 132. **Примѣры.** 1. Опредѣлить $\int \frac{dx}{\sin x}$. Перемѣнная x ограничена интерваломъ, въ которомъ $\sin x$ остается положительнымъ. Имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}.$$

Но

$$\frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right),$$

такъ что

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$$
$$= C + \frac{1}{2}\log(1-\cos x) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x),$$

или въ виду того, что

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \quad 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2},$$

имѣемъ, наконецъ:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = C + \log \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Такъ какъ

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

то $\sin x$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ есть величина положительная, ибо мы предполагаемъ, что $\sin x$ остается положительнымъ.

Чтобы вычислить $\int \frac{dx}{\cos x}$, слѣдуетъ положить $x = -\frac{\pi}{2} + u$ тогда

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{\sin u} = C + \log \operatorname{tg}\frac{u}{2},$$

такъ что

$$\int \frac{dx}{\cos x} = C + \log \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Интегрируя по частямъ, найдемъ:

$$\int e^{-x} x\, dx = -e^{-x} x + \int e^{-x} dx,$$

$$\int e^{-x} x^2 dx = -e^{-x} x^2 + 2\int e^{-x} x\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int e^{-x} x^n dx = -e^{-x} x^n + n\int e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\int e^{-x} x^n dx = -e^{-x}\{x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!\} + C,$$

такъ что, положивъ

$$x^n = f(x),$$

имѣемъ:

$$\int e^{-x} f(x)\, dx = -e^{-x}\{f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\} + C.$$

Эта формула остается справедливой и въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ есть произвольная цѣлая раціональная функція n-ой степени.

3. Для вычисленія интеграла

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx \qquad (-1 < x < 1)$$

мы полагаемъ

$$\arccos x = u.$$

Тогда

$$x = \cos u, \quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{(1-\cos u)^2}{\sin^2 u}, \quad dx = -\sin u\, du.$$

Такъ какъ $0 < u < \pi$ (по опредѣленію функцій $\arccos$) и, слѣдовательно, $\sin u > 0$, то

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1-\cos u}{\sin u}.$$

Наконецъ,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int (\cos u - 1)\, du = C + \sin u - u,$$

или

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = C + \sqrt{1-x^2} - \arc\cos x.$$

4. Чтобы найти интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^m}, \qquad (x-a \gtrless 0)$$

гдѣ $f(x)$ есть цѣлая раціональная функція, а m—цѣлое положительное число, слѣдуетъ положить

$$x - a = u.$$

Тогда

$$f(x) = f(a+u) = f(a) + \frac{u}{1!}f'(a) + \frac{u^2}{2!}f''(a) + \cdots$$

и

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^m} = f(a)\int \frac{du}{u^m} + \frac{f'(a)}{1!}\int \frac{du}{u^{m-1}} + \frac{f''(a)}{2!}\int \frac{du}{u^{m-2}} + \cdots.$$

Всѣ интегралы въ правой части могутъ быть найдены.

§ 133. **Интегрированіе раціональныхъ функцій.** Пусть $g(x)$ будетъ цѣлая раціональная функція, которая можетъ быть представлена въ видѣ произведенія только различныхъ множителей типа

$$x - c, \qquad (c\text{-постоянная})$$

такъ что

$$g(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$$

и $c_i \gtrless c_k$ $(i \gtrless k)$.

Уже Лейбницъ (въ 1702 году) далъ методъ интегрированія дроби

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

гдѣ $f(x)$ есть произвольная цѣлая раціональная функція.

Исходятъ изъ замѣчанія, что изъ равенствъ

$$l = x - a,\ m = x - b,\ n = x - c, \ldots$$

вытекаетъ равенство

$$m - l = a - b,$$

а отсюда дѣленіемъ на lm получаютъ:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{a-b}{lm},$$

или

$$\frac{1}{lm} = \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m},$$

гдѣ α, β суть постоянныя.

Умноживъ обѣ части на $1/n$, получаютъ:

$$\frac{1}{lmn} = \frac{\alpha}{ln} + \frac{\beta}{mn},$$

и, слѣдовательно, на основаніи уже найденной формулы разложенія (примѣняемой къ дробямъ $1/ln$ и $1/mn$),

$$\frac{1}{lmn} = \frac{\alpha'}{l} + \frac{\beta'}{m} + \frac{\gamma'}{n},$$

при чемъ α', β', γ' суть постоянныя, и т. д.

Такимъ образомъ ясно, что существуетъ разложеніе слѣдующаго вида:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{\alpha_1}{x-c_1} + \frac{\alpha_2}{x-c_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x-c_n},$$

гдѣ числители $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть постоянныя.

Эти постоянныя могутъ быть опредѣлены слѣдующимъ образомъ: по приведеніи всѣхъ дробей къ одному знаменателю $g(x)$ имѣемъ:

$$\frac{\alpha_1}{x-c_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x-c_n} = \frac{G(x)}{g(x)},$$

гдѣ $G(x)$ есть выраженіе вида

$$A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \cdots + A_{n-2} x + A_{n-1}.$$

Положивъ

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0, \ldots,\ A_{n-2} = 0,\ A_{n-1} = 1,$$

получаютъ систему n линейныхъ уравненій для n неизвѣстныхъ постоянныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Для опредѣленія величинъ α можно поступать и такъ: имѣемъ, напримѣръ,

$$\frac{x-c_1}{g(x)} = \alpha_1 + (x-c_1)\left(\frac{\alpha_2}{x-c_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x-c_n}\right),$$

или

$$\frac{1}{(x-c_2)\ldots(x-c_n)} = \alpha_1 + (x-c_1)\left(\frac{\alpha_2}{x-c_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x-c_n}\right).$$

Приближая x къ предѣлу c_1, находимъ:

$$\alpha_1 = \frac{1}{(c_1-c_2)(c_1-c_3)\ldots(c_1-c_n)}.$$

На основаніи же формулы разложенія для $1 : g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu f(x)}{x-c_\nu},$$

такъ что

$$\int \frac{f(x)\,dx}{g(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \int \frac{f(x)\,dx}{x-c_\nu}.$$

Такимъ образомъ, остается только вычислить интегралы типа

$$\int \frac{f(x)\,dx}{x-c}.$$

Съ этимъ же вычисленіемъ мы познакомились въ § 132, No 4.

Лейбницъ разобралъ также и тотъ случай, когда знаменатель раціональной функціи имѣетъ видъ:

$$g(x) = (x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_n)^{k_n}$$

$$(c_i \gtrless c_k, \text{ если } i \gtrless k)$$

и $k_1, k_2, \ldots, k_n$ суть произвольныя цѣлыя положительныя числа, $(n > 1)$.

Положивъ

$$l_i = x - c_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

мы можемъ написать

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_1 l_2}\,\frac{1}{\bar{g}(x)},$$

но

$$\frac{1}{l_1 l_2} = \frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2}, \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \text{— постоянныя})$$

такъ что

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{\alpha_1}{l_1\,\bar{g}(x)} + \frac{\alpha_2}{l_2\,\bar{g}(x)}.$$

Въ правой части первымъ знаменателемъ служитъ выраженіе

$$l_1^{k_1} l_2^{k_2-1} l_3^{k_3} \ldots l_n^{k_n},$$

вторымъ — выраженіе

$$l_1^{k_1-1} l_2^{k_2} l_3^{k_3} \ldots l_n^{k_n}.$$

Всякій разъ одинъ изъ показателей уменьшенъ, слѣдовательно, на 1. Этотъ способъ можно примѣнять дальше, пока еще имѣются два различныхъ линейныхъ множителя. Такимъ образомъ приходятъ къ разложенію дроби $1 : g(x)$ на дроби вида

$$\frac{\gamma}{(x-c)^m},$$

такъ что

$$\int \frac{f(x)\,dx}{g(x)}$$

становится суммой интеграловъ вида

$$\gamma \int \frac{f(x)\,dx}{(x-c)^m}.$$

Эти же интегралы мы умѣемъ вычислить (ср. § 132).

Лейбницъ разсматривалъ, наконецъ, и тотъ случай, когда знаменатель не разлагается на одни только линейные множители. Въ этомъ случаѣ, какъ тому учитъ Алгебра, функція $g(x)$ можетъ быть разложена на множителей второй и первой степени, т. е. на множителей вида

$$x^2 + ax + b\,[1] \qquad (a,\ b\text{-постоянныя})$$

и вида

$$x - c. \qquad (c\text{-постоянная})$$

Лейбницъ не зналъ еще этой теоремы. Ему поэтому не удалось, напримѣръ, вычислить

$$\int \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

[1]) Если бы имѣло мѣсто соотношеніе $a^2 - 4b \geq 0$, то трехчленъ $x^2 + ax + b$ разлагался бы на два множителя вида $x - c$. Мы должны поэтому принять, что $4b - a^2 > 0$. Тогда $x^2 + ax + b$, будучи равно $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$, имѣетъ только положительныя значенія.

и онъ думалъ, что эта функція не можетъ быть выражена черезъ извѣстныя функціи. Онъ пытался даже доказать, что выраженіе $x^4 + a^4$ не можетъ быть разложено на два квадратныхъ множителя.

Если $L(x)$ есть произведеніе линейныхъ, а $Q(x)$ есть произведеніе квадратныхъ множителей функціи $g(x)$, то $1/L(x)$ есть сумма членовъ вида

$$\frac{\gamma}{(x-c)^m},$$

такъ что наша раціональная функція есть сумма членовъ вида

$$R(x) = \frac{f(x)}{Q(x)(x-c)^m}.$$

Но

$$Q(x) = Q(c) + (x-c)\,Q_1(x), \text{ [1]}$$

или

$$Q(c) = Q(x) - (x-c)\,Q_1(x),$$

при чемъ $Q_1(x)$ означаетъ цѣлую раціональную функцію.

Такъ какъ $Q(c) > 0$, то мы можемъ писать

$$R(x) = \frac{f(x)}{Q(c)}\,\frac{Q(x)-(x-c)\,Q_1(x)}{Q(x)(x-c)^m},$$

такъ что

$$R(x) = \frac{f(x)}{Q(c)(x-c)^m} - \frac{f_1(x)}{Q(x)(x-c)^{m-1}}. \text{ [2]}$$

Мы умѣемъ вычислить интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x-c)^m},$$

а къ дроби

$$R_1(x) = \frac{f_1(x)}{Q(x)(x-c)^{m-1}}$$

мы можемъ примѣнить тотъ же методъ приведенія и т. д., пока,

---

[1]) Это, если угодно, можетъ быть выведено изъ формулы Тэйлора.
[2]) $f_1(x) = f(x)\,Q_1(x) : Q(c)$.

наконецъ, кромѣ извѣстныхъ интеграловъ, намъ нужно будетъ вычислить еще только интегралъ вида

$$\int \frac{F(x)\,dx}{Q(x)}.\ [1])$$

Если q_1, q_2 суть два различныхъ множителя функціи $Q(x)$, такъ что

$$q_1 = x^2 + a_1 x + b_1,$$
$$q_2 = x^2 + a_2 x + b_2,$$

то для дроби $1/q_1 q_2$ существуетъ формула разложенія, которая можетъ оказать тѣ же услуги, что и прежняя формула для $1/lm$.

Въ случаѣ $a_1 = a_2$

$$q_2 - q_1 = b_2 - b_1, \qquad (b_1 - b_2 \gtrless 0)$$

такъ что

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{b_2 - b_1}{q_1 q_2},$$

или

$$\frac{1}{q_1 q_2} = \frac{\beta_1}{q_1} + \frac{\beta_2}{q_2},$$

при чемъ $\beta_1 = -\beta_2 = 1 : (b_2 - b_1)$.

Въ случаѣ $a_1 \gtrless a_2$

$$\frac{x(q_2 - q_1)}{a_2 - a_1} = x^2 + \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} x$$

будетъ выраженіемъ второй степени, какъ и q_1 и q_2. Мы пишемъ

$$\frac{x(q_2 - q_1)}{a_2 - a_1} = x^2 + a_3 x + b_3 = q_3.$$

Но

$$(a_2 - a_3) q_1 + (a_3 - a_1) q_2 + (a_1 - a_2) q_3$$

есть постоянная c, потому что члены, содержащіе x^2 и x, уничтожаются. Эта постоянная отлична отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, вставивъ вмѣсто q_3 его выраженіе, мы получимъ:

$$(a_2 - a_3 + x) q_1 + (a_3 - a_1 - x) q_2 = c.$$

[1]) $F(x)$ есть цѣлая раціональная функція.

Если бы было $c = 0$, то при $x = a_3 - a_2$ должно было бы быть

$$(a_3 - a_1 - x) q_2 = 0,$$

или, принимая въ соображеніе, что первый множитель приводится къ выраженію $a_2 - a_1 \gtreqless 0$, мы имѣли бы $q_2 = 0$, что невозможно (ср. подстрочное примѣчаніе на стр. 208).

Теперь мы имѣемъ

$$\frac{a_2 - a_3 + x}{q_2} + \frac{a_3 - a_1 - x}{q_1} = \frac{c}{q_1 q_2},$$

или

$$\frac{1}{q_1 q_2} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{q_1} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{q_2},$$

гдѣ

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = 1/c \quad \text{и} \quad \beta_1 = (a_3 - a_1)/c, \; \beta_2 = (a_2 - a_3)/c.$$

Въ случаѣ $a_1 = a_2$ формула разложенія имѣетъ тотъ же видъ, что и вышеприведенная. Только въ этомъ случаѣ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Пока въ цѣлой функціи $Q(x)$ еще будутъ содержаться два различныхъ множителя второй степени, можно будетъ съ помощью нашей формулы разложенія привести интегралъ $\int \frac{F(x)\,dx}{Q(x)}$ къ двумъ интеграламъ, въ которыхъ знаменатели подъинтегральныхъ функцій будутъ содержать меньше однимъ квадратнымъ множителемъ. Мы приходимъ, такимъ образомъ, окончательно къ интегралу вида

$$\int \frac{G(x)\,dx}{(x^2 + ax + b)^m}.$$

При этомъ $G(x)$ есть цѣлая раціональная функція, m—положительное цѣлое число и $4b - a^2 > 0$.

При

$$x + \frac{a}{2} = u, \quad b - \frac{a^2}{4} = h^2,$$

$$\int \frac{G(x)\,dx}{(x^2 + ax + b)^m} \quad \text{переходитъ въ} \quad \int \frac{H(u)\,du}{(u^2 + h^2)^m}.$$

Этотъ новый интегралъ распадается на нѣкоторое число слагаемыхъ, и, если отвлечься отъ постояннаго множителя, то одни слагаемыя будутъ типа

$$\int \frac{u^{2\nu}\,du}{(u^2+h^2)^m},$$

а другія будутъ типа

$$\int \frac{u^{2\nu+1}du}{(u^2+h^2)^m},$$

$(\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$.

Если введемъ новую перемѣнную $u^2 = t$, то второй интегралъ преобразуется въ интегралъ

$$\frac{1}{2}\int \frac{t^\nu\,dt}{(t+h^2)^m},$$

который мы умѣемъ вычислить.

Что касается перваго интеграла, то слѣдуетъ замѣтить, что

$$u^{2\nu} = (u^2+h^2-h^2)^\nu = (u^2+h^2)^\nu - \binom{\nu}{1}(u^2+h^2)^{\nu-1}h^2 + \cdots \pm h^{2\nu}.$$

Согласно съ этимъ первый интегралъ будетъ линейной комбинаціей интеграловъ

$$\int \frac{du}{u^2+h^2}, \int \frac{du}{(u^2+h^2)^2}, \ldots, \int \frac{du}{(u^2+h^2)^m},$$

при чемъ не принимается, быть можетъ, во вниманіе нѣкоторая раціональная часть. Но для $p > 1$

$$\left(\frac{u}{(u^2+h^2)^{p-1}}\right)' = \frac{1}{(u^2+h^2)^{p-1}} - \frac{2(p-1)u^2}{(u^2+h^2)^p}$$
$$= \frac{-2p+3}{(u^2+h^2)^{p-1}} + \frac{2(p-1)h^2}{(u^2+h^2)^p},$$

такъ что

$$\frac{u}{(u^2+h^2)^{p-1}} = -(2p-3)\int \frac{du}{(u^2+h^2)^{p-1}} + 2(p-1)h^2\int \frac{du}{(u^2+h^2)^p},$$

или

$$\int \frac{du}{(u^2+h^2)^p} = \frac{2p-3}{(2p-1)h^2}\int \frac{du}{(u^2+h^2)^{p-1}} + \frac{1}{2(p-1)h^2}\,\frac{u}{(u^2+h^2)^{p-1}}.$$

Сообразно съ этимъ интегралъ

$$\int \frac{du}{(u^2+b^2)^p} \qquad (p>1)$$

приводится къ интегралу

$$\int \frac{du}{(u^2+b^2)^{p-1}};$$

такъ что окончательно остается только

$$\int \frac{du}{u^2+b^2}.$$

Этотъ же интегралъ равенъ

$$C+\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{u}{b}.$$

Замѣчаніе. Въ нашемъ интегрированіи мы обходимся исключительно раціональными функціями, функціей log и функціей arctg. Такимъ образомъ, эти функціи достаточны для интегрированія всѣхъ раціональныхъ функцій.

§ 134. **Интегралъ** $\int \mathfrak{R}(x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_k})\,dx$. Мы обозначаемъ черезъ $\mathfrak{R}$ раціональную операцію. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_k$ будутъ раціональныя числа. [1])

Положимъ, что по приведеніи всѣхъ r къ одному знаменателю

$$r_1=\frac{n_1}{n},\ r_2=\frac{n_2}{n},\ldots,\ r_k=\frac{n_k}{n}.$$

Если теперь положить

$$x=t^n, \text{ такъ что } dx=nt^{n-1}dt,$$

то нашъ интегралъ преобразуется въ интегралъ

$$\int \mathfrak{R}(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_k})\,nt^{n-1}dt,$$

гдѣ $n\mathfrak{R}(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_k})\,t^{n-1}$ есть цѣлая раціональная функція.

---

[1]) Перемѣнную x, а затѣмъ и перемѣнную t мы ограничимъ положительными значеніями.

§ 135. **Интегралъ $\int \mathfrak{R}(x, \sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2})\,dx$.**[1] Если положить

$$y=\sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2},$$

то это уравненіе будетъ представлять одну половину кривой второго порядка. Пусть (x_0, y_0) будетъ одна изъ точекъ этой половины. Тогда всякая прямая, проходящая черезъ точку (x_0, y_0), т. е. всякая прямая

$$y-y_0=(x-x_0)\,t,$$

пересѣкаетъ кривую въ одной точкѣ. Полагая въ равенствѣ

$$y^2=a_0x^2+2a_1x+a_2$$

$y=y_0+t(x-x_0)$, найдемъ, что (для $x \gtrless x_0$)

$$2y_0t+(x-x_0)t^2=a_0(x+x_0)+2a_1,$$

такъ что

$$x-x_0=\frac{-2(a_0x_0+a_1)+2y_0t}{a_0-t^2}=r(t)$$

и

$$y-y_0=\frac{-2(a_0x_0+a_1)t+2y_0t^2}{a_0-t^2}=s(t).$$

Здѣсь координаты точки кривой выражаются раціональными функціями $r(t)$ и $s(t)$ параметра t. Такая кривая называется раціональной. Такимъ образомъ, кривыя второго порядка суть раціональныя кривыя.

На этомъ основана возможность превращенія интеграла

$$\int \mathfrak{R}(x, \sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2})\,dx$$

въ интегралъ отъ раціональной функціи.

А именно: введя новую перемѣнную t, получаютъ интегралъ

$$\int \mathfrak{R}(r(t), s(t))\,r'(t)\,dt,$$

[1]) Мы находимся въ интервалѣ, гдѣ $a_0x^2+2a_1x+a_2$ совсѣмъ не бываетъ отрицательнымъ; x_0 есть частное значеніе изъ этого интервала, а $y_0=\sqrt{a_0x_0^2+2a_1x_0+a_2}$.

и

$$\Re\left(r(t),\ s(t)\right) r'(t)$$

есть раціональная функція.

Замѣчанія. Если $a_2 \geqq 0$ то мы можемъ положить $x_0 = 0$, $y_0 = \sqrt{a_2}$. Тогда

$$x = \frac{2t\sqrt{a_2} - 2a_1}{a_0 - t^2},\quad y = \frac{a_0\sqrt{a_2} - 2a_1 \ + t_2\sqrt{a_2}}{a_0 - t^2},$$

$$dx = 2\,\frac{a_0\sqrt{a_2} - 2a_1 t + t^2\sqrt{a_2}}{(a_0 - t^2)^2}.$$

Если $a_2 < 0$, то

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$$

будетъ отрицательнымъ при $x = 0$ и положительнымъ въ интервалѣ, въ которомъ мы интегрируемъ. Поэтому существуетъ такое значеніе x_0, что

$$y_0^2 = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 + a_2 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ

$$x = x_0 - \frac{2(a_0 x_0 + a_1)}{a_0 - t^2},\quad y = -\frac{2(a_0 x_0 + a_1)\,t}{a_0 - t^2},$$

$$dx = -\frac{4(a_0 x_0 + a_1)\,t\,dt}{(a_0 - t^2)^2}.$$

Для $a_0 x_0 + a_1 = 0$ мы имѣли бы

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = a_0 (x - x_0)^2$$

и

$$\sqrt{a_0 (x - x_0)^2} = \pm (x - x_0)\sqrt{a_0},$$

такъ что функція $\Re\left(x,\ \sqrt{a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2}\right)$ была бы раціональной.

Если кривая не будетъ конечной, то точку $(x_0,\ y_0)$ можно взять безконечно удаленной. Прямыя

$$y - y_0 = (x - x_0)\,t$$

становятся тогда параллельными одной изъ двухъ прямыхъ [1])

---

[1]) Въ случаѣ $a_0 < 0$ кривая будетъ конечной. Ея уравненіе можно написать въ видѣ $-a_0\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + y^2 = a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}$.

$$y = x\sqrt{a_0} \quad \text{и} \quad y = -x\sqrt{a_0}.$$

Поэтому мы полагаемъ, напримѣръ,

$$y = x\sqrt{a_0} + t.$$

Тогда

$$a_0 x^2 + 2xt\sqrt{a_0} + t^2 = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2,$$

такъ что

$$x = \frac{-a_2 + t^2}{2a_1 - 2t\sqrt{a_0}}.$$

Перемѣнныя x, y опять становятся раціональными функціями отъ t.

§ 136. **Интегрированіе биномныхъ дифференціаловъ.** Пусть a, b будутъ постоянныя, а m, p, q раціональныя числа. Тогда выраженіе

$$x^p (a + bx^m)^q$$

называютъ биномнымъ дифференціаломъ. Уже Ньютонъ занимался интегрированіемъ такихъ дифференціаловъ.

Мы полагаемъ

$$J = \int x^p (a + bx^m)\, dx.$$

Введя новую перемѣнную

$$a + bx^m = t,$$

получимъ

$$J = \frac{1}{mb}\int t^q \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m} - 1} dt.$$

Если

$$\frac{p+1}{m}$$

есть цѣлое число, то выраженіе

$$t^q \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m} - 1}$$

составляется раціонально изъ t и t^q. Такимъ образомъ, мы имѣемъ интегралъ того типа, о которомъ была рѣчь въ § 134. Чтобы выполнить интегрированіе, полагаютъ

$$t = u^n,$$

гдѣ n есть знаменатель числа q. Тогда интегралъ

$$J = \int u^{qn}\left(\frac{u^n - a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m} - 1} nu^{n-1}\,du$$

дѣлается интеграломъ раціональной функціи.

J можно писать и такъ:

$$J = \int x^{p+mq}(b + a x^{-m})^q\,dx = \int x^{p_1}(b + a x^{m_1})^{q_1}\,dx,$$

при чемъ

$$p_1 = p + mq,\quad m_1 = -m,\quad q_1 = q.$$

Интегрированіе, какъ мы знаемъ, удается, если

$$\frac{p_1 + 1}{m_1} = -\frac{p + mq + 1}{m} = -\left(\frac{p+1}{m} + q\right)$$

или

$$\frac{p+1}{m} + q$$

есть цѣлое число.

J можно поэтому преобразовать въ интегралъ раціональной функціи, если одно изъ двухъ чиселъ

$$\frac{p+1}{m},\quad \frac{p+1}{m} + q$$

будетъ цѣлымъ.

Преобразованіе

$$x = z^k$$

обращаетъ J въ

$$k\int z^{(p+1)k-1}(a + bz^{mk})^q\,dz = k\int z^{p_1}(a + bz^{m_1})^q\,dz.$$

Если привести p и m къ одному знаменателю и положить его равнымъ k, то числа p_1 и m_1 будутъ цѣлыми.

Если бы и q было цѣлымъ числомъ, то мы имѣли бы интегралъ раціональной функціи.

J можно также преобразовать въ интегралъ раціональной функціи, если q есть цѣлое число.

Наши результаты легче всего выразить, если предварительно привести интегралъ J къ виду

$$J = \int t^p (a + bt)^q \, dt.\ ^{1)}$$

Тогда справедливо слѣдующее утвержденіе: J можно преобразовать въ интегралъ раціональной функціи, если одно изъ трехъ чиселъ

$$p,\ q,\ p + q$$

будетъ цѣлымъ. Къ этому результату пришелъ уже Ньютонъ.

§ 137. **Интегралъ $\int \Re(\cos x, \sin x)\, dx$.** Такой интегралъ всегда можно преобразовать въ интегралъ раціональной функціи. Сообразно съ теоремами сложенія для $\sin x$ и $\cos x$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

или

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}},$$

ибо $\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$.

Если же $\cos \frac{x}{2} \gtrless 0$, то мы можемъ раздѣлить числителя и знаменателя на $\cos^2 \frac{x}{2}$ и тогда мы получаемъ

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2},$$

при чемъ

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Если x ограничить интерваломъ $(-\pi, \pi)$, то

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t,$$

---

[1]) Чтобы достигнуть этого, примѣняютъ преобразованіе $x^m = t$.

такъ что

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

и нашъ интегралъ преобразуется въ

$$\int \Re\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Но

$$\Re\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$$

есть раціональная функція отъ t, потому что $\Re$ означаетъ раціональную операцію. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, интегралъ раціональной функціи.

По этой методѣ можно, напримѣръ, очень легко вычислить

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

А именно

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = C + \log t,$$

такъ что

$$\int \frac{dx}{\sin x} = C + \log \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Если функція $\Re(u,\ v)$ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что

$$\Re(-u,\ -v) = \Re(u,\ v),$$

то мы можемъ выразить $\Re(\cos x,\ \sin x)$ раціонально черезъ

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}},\quad \sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}},$$

такъ что при $\cos x \gtrless 0$,

$$\cos x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin x = \frac{\pm t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Поэтому $\Re(\cos x,\ \sin x)$ составляется раціонально изъ t и $\sqrt{1+t^2}$. Это будетъ дробь вида

$$\Re = \frac{A(t) + B(t)\sqrt{1+t^2}}{A_1(t) + B_1(t)\sqrt{1+t^2}},$$

гдѣ A, A_1, B, B_1 обозначаютъ раціональныя функціи.

Умноживъ числителя и знаменателя на

$$A_1(t) - B_1(t)\sqrt{1+t^2},$$

получаемъ:

$$R(t) + S(t)\sqrt{1+t^2}.$$

при чемъ $R(t)$ и $S(t)$ суть раціональныя функціи отъ t.

Теперь

$$\Re(-\cos x, -\sin x) = \Re(\cos x, \sin x).$$

Но $-\cos x$, $-\sin x$ получаются соотвѣтственно изъ $\cos x$, $\sin x$ посредствомъ замѣщенія $\sqrt{1+t^2}$ черезъ $-\sqrt{1+t^2}$; поэтому

$$R(t) + S(t)\sqrt{1+t^2} = R(t) - S(t)\sqrt{1+t^2},$$

т. е. $S(t) = 0$ и

$$\Re(\cos x, \sin x) = R(t).$$

Если ограничить x интерваломъ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Поэтому нашъ интегралъ будетъ

$$\int \frac{R(t)\,dt}{1+t^2}.$$

Свойство

$$\Re(-\cos x, -\sin x) = \Re(\cos x, \sin x)$$

можно выразить, принимая во вниманіе формулы

$$\cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \sin(x+\pi) = -\sin x,$$

слѣдующимъ образомъ:

$$\Re(\cos x, \sin x)$$

есть функція отъ x съ періодомъ π.

Такъ, напримѣръ, въ силу равенства $\operatorname{tg} x = t$, интегралъ

$$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$$

переходитъ въ

$$\int \frac{dt}{a + bt^2}.$$

§ 138. **Интегралъ $\int \cos^m x \sin^n x \, dx$.** Положимъ, что m и n суть цѣлыя числа. Такимъ образомъ, нашъ интегралъ есть частный случай разсмотрѣннаго въ § 137 общаго интеграла и можетъ быть преобразованъ въ интегралъ раціональной функціи. Его можно также написать въ формѣ интеграла биномнаго дифференціала. Если, напримѣръ, положить

$$\sin^2 x = t, \text{ такъ что } \cos^2 x = 1 - t$$

то мы будемъ имѣть интегралъ.

$$\frac{1}{2}\int t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} dt.$$

Три числа p, q, $p+q$, о которыхъ говорится въ § 136, будутъ здѣсь

$$\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m+n-2}{2}.$$

Одно изъ нихъ навѣрное будетъ цѣлымъ, такъ что мы и на этомъ пути можемъ констатировать приводимость нашего интеграла къ интегралу раціональной функціи.

Мы теперь выведемъ формулы приведенія, которыя позволяютъ уменьшить по возможности абсолютныя значенія чиселъ m и n.

Къ интегралу

$$J_{m,n} = \int \cos^{m-1} x \cdot \sin^n x \cos x \, dx$$

можно примѣнить интегрированіе по частямъ. Предполагая, что $n + 1 \gtrless 0$, находимъ:

$$J_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} J_{m-2,\, n+2}.$$

Точно такъ же изъ равенства

$$J_{m,n} = \int \cos^m x \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx$$

въ предположенiи, что $m+1 \gtreqqless 0$, при помощи интегрированiя по частямъ выведемъ, что

$$J_{m,n} = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} J_{m+2,\, n-2}.$$

Но

$$J_{m-2,\, n+2} = \int \cos^{m-2} x \sin^{n+2} x \, dx = \int \cos^{m-2} x \sin^n x \,(1 - \cos^2 x)\, dx$$
$$= J_{m-2,\, n} - J_{m,n}$$

и

$$J_{m+2,\, n-2} = \int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x \, dx = \int \cos^m x \sin^{n-2} x \,(1 - \sin^2 x)\, dx$$
$$= J_{m,\, n-2} - J_{m,n}.$$

Такимъ образомъ, (предполагая, что $m+n \gtreqqless 0$) мы можемъ вышеприведенныя формулы написать и такъ:

$$J_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,\, n}$$

и

$$J_{m,n} = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} J_{m,\, n-2}.$$

Если замѣстить m черезъ $m+2$ въ первой формулѣ и опредѣлить изъ нея $J_{m,n}$, то придемъ къ равенству

$$J_{m,n} = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} J_{m+2,\, n}. \qquad (m+1 \gtreqqless 0).$$

Подобнымъ же образомъ изъ второй формулы получимъ:

$$J_{m,n} = \frac{\cos^{m+1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} J_{m,\, n+2}. \qquad (n+1 \gtreqqless 0).$$

Съ помощью этихъ формулъ приведенiя приходимъ окончательно къ девяти интеграламъ

$$J_{0,0};\ J_{1,1};\ J_{-1,-1};\ J_{0,1};\ J_{0,-1};\ J_{1,0};\ J_{1,-1};\ J_{-1,0};\ J_{-1,1}.$$

Но

$$J_{0,0} = \int dx = C + x,\ J_{0,1} = \int \sin x\, dx = C - \cos x,$$

$$J_{1,0} = \int \cos x\, dx = C + \sin x.$$

Далѣе

$$J_{1,-1} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = C + \log \sin x,$$

$$J_{-1,1} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = C - \log \cos x,$$

$$J_{0,-1} = \int \frac{dx}{\sin x} = C + \log \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$J_{-1,0} = \int \frac{dx}{\cos x} = C + \log \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Всѣ эти интегралы уже раньше были нами найдены.

Оба недостающихъ еще интеграла $J_{1,1}$, $J_{-1,-1}$ также опредѣляются непосредственно. Именно,

$$J_{1,1} = \int \cos x \sin x\, dx = \tfrac{1}{4} \int \sin (2x)\, d(2x) = C - \tfrac{1}{4} \cos 2x$$

и

$$J_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int \frac{d(2x)}{\sin (2x)} = C + \log \operatorname{tg} x.$$

§ 139. **Интегралъ**

$$\int \frac{dx}{A\cos x + B\sin x}.$$

Вмѣсто преобразованія этого интеграла по общимъ методамъ, даннымъ въ § 137, можно поступать и слѣдующимъ образомъ:

Лемма. Если изъ двухъ чиселъ A и B одно не нуль, то можно найти такое число x_0, что

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin x_0,\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos x_0.$$

Такъ какъ $B : \sqrt{A^2+B^2}$ принадлежитъ интервалу $\langle -1, 1\rangle$, т. е. интервалу, въ которомъ опредѣлена функція $\arccos x$, то

$$\arccos\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \xi$$

есть число въ интервалѣ $\langle 0, \pi\rangle$. Поэтому $\sin\xi \geqq 0$ и $\sin(-\xi) \leqq 0$. Смотря по тому, будетъ ли $A \geqq 0$ или $A \leqq 0$, мы полагаемъ [1])

$$x_0 = \xi \text{ или } x_0 = -\xi.$$

Тогда устанавливаемыя формулы навѣрно будутъ справедливы.

Согласно вышеприведенной леммѣ, мы можемъ такъ написать нашъ интегралъ:

$$\int\frac{dx}{A\cos x + B\sin x} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\int\frac{dx}{\cos x\sin x_0 + \sin x\cos x_0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\int\frac{d(x+x_0)}{\sin(x+x_0)}.$$

Такимъ образомъ,

$$\int\frac{dx}{A\cos x + B\sin x} = C + \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\log\operatorname{tg}\frac{x+x_0}{2}.$$

При помощи нашей леммы интегралъ

$$\int\frac{dx}{A\sin x + B\cos x + C}$$

принимаетъ видъ

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\int\frac{dx}{\cos(x-x_0)+c}. \quad \left(c = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

Положивъ $x - x_0 = 2u$, мы должны будемъ разсмотрѣть интегралъ

$$\int\frac{du}{\cos 2u + c}.$$

Такъ какъ

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u \quad\text{и}\quad 1 = \cos^2 u + \sin^2 u,$$

то

$$\int\frac{du}{\cos 2u + c} = \int\frac{du}{(c+1)\cos^2 u + (c-1)\sin^2 u}.$$

[1]) Число x_0 принадлежитъ интервалу $\langle -\pi, \pi\rangle$. Одну изъ двухъ границъ можно исключить и потребовать, напримѣръ, чтобы было $-\pi \leqq x_0 < \pi$. Тогда число x_0 опредѣлено однозначно.

Изъ § 137 мы уже знаемъ какъ найти этотъ интегралъ.

Интегралъ

$$\int \frac{dx}{a_0 \cos^2 x + 2\, a_1 \cos x \sin x + a_2 \sin^2 x}$$

равенъ

$$\int \frac{dx}{a_1 \sin 2x + \frac{a_0 - a_2}{2} \cos 2x + \frac{a_0 + a_2}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{A \sin u + B \cos u + C}.$$

$$\left(u = 2x, \quad A = a_1, \quad B = \frac{a_0 - a_2}{2}, \quad C = \frac{a_0 + a_2}{2}\right)$$

§ 140. **Интегралы**

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx, \int e^{ax} \sin bx\, dx. \quad (a \gtrless 0,\ b \gtrless 0)$$

Интегрированіемъ по частямъ мы получаемъ въ первомъ случаѣ

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

а во второмъ

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Такимъ образомъ, положивъ

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = F, \int e^{ax} \sin bx\, dx = G,$$

имѣемъ:

$$a F - b G = e^{ax} \cos bx,$$

$$b F + a G = e^{ax} \sin bx.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$F = \frac{(a \cos bx + b \sin bx)\, e^{ax}}{a^2 + b^2},$$

$$G = \frac{(-b \cos bx + a \sin bx)\, e^{ax}}{a^2 + b^2}.$$

§ 141. **Интегралъ**

$$\int(\arcsin x)^m dx. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Положимъ

$$\arcsin x = u.$$

Тогда

$$\int(\arcsin x)^m dx = \int u^m \cos u\,du.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int u^m \cos u\,du = u^m \sin u - m\int u^{m-1} \sin u\,du,$$

$$\int u^{m-1} \sin u\,du = -u^{m-1}\cos u + (m-1)\int u^{m-2}\cos u\,du$$

и т. д., пока не придемъ къ одному изъ интеграловъ

$$\int \cos u\,du \quad \text{или} \quad \int \sin u\,du.$$

§ 142. **Интегралы**

$$\int x^m \arcsin x\,dx, \int x^m \operatorname{arctg} x\,dx. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int x^m \arcsin x\,dx = \frac{x^{m+1}\arcsin x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ мы умѣемъ уже находить (по § 135).

Точно такъ же черезъ интегрированіе по частямъ во второмъ случаѣ находимъ:

$$\int x^m \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^{m+1}\operatorname{arctg} x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}dx}{1+x^2}.$$

$\int\frac{x^{m+1}dx}{1+x^2}$ мы умѣемъ находить.

Глава XIV.

Опредѣленные интегралы.

§ 143. **Опредѣленіе.** Допустимъ, какъ и въ § 129, что функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Подъ $\mathfrak{Z}$ мы разумѣемъ разложеніе интервала $\langle a, b\rangle$ на p частныхъ интерваловъ

$$\langle a, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{p-1}, b\rangle$$

$$(a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < b),$$

и вообще обозначаемъ соотвѣтственно черезъ $m(\alpha, \beta)$ и $M(\alpha, \beta)$ наименьшее и наибольшее значеніе функціи $f(x)$ въ $\langle \alpha, \beta\rangle$. Мы составляемъ далѣе выраженія

$$\mathop{\mathrm{s}}_a^b(\mathfrak{Z}) = (x_1 - a)\, m(a, x_1) + (x_2 - x_1)\, m(x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + (b - x_{p-1})\, m(x_{p-1}, b)$$

и

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b(\mathfrak{Z}) = (x_1 - a)\, M(a, x_1) + (x_2 - x_1)\, M(x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + (b - x_{p-1})\, M(x_{p-1}, b).$$

Въ § 129 было показано, что они стремятся къ общему предѣлу, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Этотъ предѣлъ обозначаютъ знакомъ

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{„интегралъ отъ } a \text{ до } b\ f(x)\,dx\text{“})$$

и называютъ опредѣленнымъ интеграломъ. Интервалъ $\langle a, b\rangle$ называется промежуткомъ интегрированія.

Такъ какъ $\mathop{\mathrm{s}}_a^b(\mathfrak{Z})$ приближается къ интегралу возрастая, а $\mathop{\mathrm{S}}_a^b(\mathfrak{Z})$—убывая, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, то

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}).$$

Пусть ξ_1 будетъ произвольное значеніе изъ интервала $\langle a, x_1\rangle$, ξ_2 — произвольное значеніе изъ $\langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \xi_p$ — произвольное значеніе изъ $\langle x_{p-1}, b\rangle$, и положимъ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{Z}) = (x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \cdots + (b - x_{p-1}) f(\xi_p).$$

Тогда

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{Z}) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}).$$

Если, слѣдовательно, $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то

$$\lim \overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{Z}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

§ 144. Прямое вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ.

1. Исходя изъ вышеуказаннаго опредѣленія, мы вычислимъ

$$\int_0^b e^x\,dx \qquad (b > 0).$$

Съ этою цѣлью мы дѣлимъ интервалъ $\langle 0, b\rangle$ на p равныхъ частей

$$\langle 0, \frac{b}{p}\rangle, \quad \langle \frac{b}{p}, \frac{2b}{p}\rangle, \ldots, \quad \langle \frac{(p-1)b}{p}, b\rangle.$$

Тогда

$$\overset{b}{\underset{0}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}) = \frac{b}{p}\left(e^0 + e^{\frac{b}{p}} + e^{\frac{2b}{p}} + \cdots + e^{\frac{(p-1)b}{p}}\right)$$

и

$$\overset{b}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}) = \frac{b}{p}\left(e^{\frac{b}{p}} + e^{\frac{2b}{p}} + \cdots + e^{\frac{pb}{p}}\right) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})\, e^{\frac{b}{p}}.$$

Но геометрическая прогрессія

$$e^0 + e^{\frac{b}{p}} + e^{\frac{2b}{p}} + \cdots + e^{\frac{(p-1)b}{p}}$$

имѣетъ сумму

$$\frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{p}} - 1}.$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{b}{p}\,\frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{p}} - 1} \leqq \int_0^b e^x\,dx \leqq \frac{b}{p}\,\frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{p}} - 1}\,e^{\frac{b}{p}}.$$

Если теперь p пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$, то $\lim e^{\frac{b}{p}} = 1$ и

$$\lim \frac{e^{\frac{b}{p}} - 1}{\frac{b}{p}} = \log e = 1,$$

такъ что

$$\int_0^b e^x\,dx = e^b - 1.$$

2. Пусть будетъ $0 < a < b$ и положимъ, что требуется вычислить интегралъ

$$\int_a^b \frac{dx}{x}.$$

Мы полагаемъ

$$x_p = \sqrt[p]{\frac{b}{a}}$$

и выбираемъ $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ слѣдующимъ образомъ:

$$x_1 = a x_p,\quad x_2 = x_1 x_p, \ldots,\quad x_{p-1} = x_{p-2} x_p,$$

т. е.

$$x_1 = a x_p,\quad x_2 = a x_p^2, \ldots,\quad x_{p-1} = a x_p^{p-1}.$$

Тогда

$$x_1 - a = a(\varkappa_p - 1),$$
$$x_2 - x_1 = x_1(\varkappa_p - 1),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$b - x_{p-1} = x_{p-1}(\varkappa_p - 1),$$

такъ что

$$\mathop{\mathrm{s}}_a^b(\mathfrak{Z}) = (\varkappa_p - 1)\left(\frac{a}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_{p-1}}{b}\right) = p(\varkappa_p - 1)\frac{1}{\varkappa_p}$$

и

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b(\mathfrak{Z}) = (\varkappa_p - 1)\left(\frac{a}{a} + \frac{x_1}{x_1} + \cdots + \frac{x_{p-1}}{x_{p-1}}\right) = p(\varkappa_p - 1),$$

вслѣдствіе чего

$$p(\varkappa_p - 1)\frac{1}{\varkappa_p} \leqq \int_a^b \frac{dx}{x} \leqq p(\varkappa_p - 1).$$

А такъ какъ $\lim \varkappa_p = 1$ и

$$\lim p(\varkappa_p - 1) = \lim p\left(\sqrt[p]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \log\frac{b}{a},$$

то

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a.$$

§ 145. **Обобщеніе понятія объ интегралѣ.** Мы опредѣлили опредѣленный интегралъ только для того случая, когда функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ интегрированія $\langle a, b\rangle$.

Отбросимъ теперь это предположеніе.

Пусть $\mathfrak{Z}$ будетъ разложеніе интервала $\langle a, b\rangle$ на частные интервалы

$$\langle a, x_1\rangle,\ \langle x_1, x_2\rangle,\ \ldots,\ \langle x_{p-1}, b\rangle.$$
$$(a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b).$$

Пусть ξ_1 будетъ произвольное значеніе изъ $\langle a, x_1\rangle$, ξ_2 — произвольное значеніе изъ $\langle x_1, x_2\rangle$, ..., ξ_p — произвольное значеніе изъ $\langle x_{p-1}, b\rangle$.

Какъ и въ § 143, мы обозначимъ сумму

$$(x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \cdots + (b - x_{p-1})f(\xi_p)$$

черезъ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{Z})$$

и будемъ ее называть выраженіемъ $\mathfrak{S}$. Если мы имѣемъ послѣдовательность $\mathfrak{S}$-въ, т. е. послѣдовательность выраженій $\mathfrak{S}$, и если соотвѣтствующая послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ будетъ **особенной** (ср. § 129), то и послѣдовательность $\mathfrak{S}$-въ мы будемъ называть **особенной**.

Функцію $f(x)$ мы будемъ называть **интегрируемой**, если каждая особенная послѣдовательность $\mathfrak{S}$-въ сходится.

Предложеніе 1. Если функція $f(x)$ интегрируема въ промежуткѣ $\langle a, b \rangle$, то всѣ особенныя послѣдовательности $\mathfrak{S}$-въ имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots \text{ и } \overline{\mathfrak{S}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_2, \overline{\mathfrak{S}}_3, \ldots$$

суть особенныя послѣдовательности $\mathfrak{S}$-въ, то такою же послѣдовательностью будетъ и

$$\mathfrak{S}_1, \overline{\mathfrak{S}}_1, \mathfrak{S}_2, \overline{\mathfrak{S}}_2, \mathfrak{S}_3, \overline{\mathfrak{S}}_3, \ldots$$

Такимъ образомъ, эта послѣдовательность сходится. Всѣ частныя послѣдовательности сходящейся послѣдовательности имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ, а потому въ частности

$$\lim \mathfrak{S}_n = \lim \overline{\mathfrak{S}}_n.$$

Общій предѣлъ особенныхъ послѣдовательностей $\mathfrak{S}$-въ обозначаютъ символомъ

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{„интегралъ отъ } a \text{ до } b\ f(x)\,dx\text{“})$$

и называютъ **определеннымъ интеграломъ**.

Предложеніе 2. Если

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

существуетъ[1]), то каждому положительному ε можно противопоставить такое положительное δ, что каждое выраженіе

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{Z}),$$

въ которомъ частные интервалы меньше, чѣмъ δ, отличается отъ $\int_a^b f(x)\,dx$ меньше, чѣмъ на ε.

Если бы число ε_0 (> 0) было исключеніемъ изъ этой теоремы, т. е. если бы ему нельзя было противопоставить никакого числа δ, обладающаго указаннымъ свойствомъ, то и числа $\delta = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) не обладали бы этимъ свойствомъ. Существовало бы поэтому выраженіе

$$\mathfrak{S}_n = \overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{Z}_n),$$

которое отличалось бы отъ $\int_a^b f(x)\,dx$, по крайней мѣрѣ, на ε_0, между тѣмъ какъ всѣ частные интервалы разложенія $\mathfrak{Z}_n$ были бы меньше, чѣмъ $1/n$. Тогда послѣдовательность $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots$ была бы особенною послѣдовательностью $\mathfrak{S}$-въ, которая не стремится къ предѣлу $\int_a^b f(x)\,dx$.

Слѣдствіе. Если функція $f(x)$ интегрируема въ $\langle a, b\rangle$, то существуетъ число A такого рода, что во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$

$$|f(x)| < A.$$

Функцію, абсолютныя значенія которой въ нѣкоторомъ интервалѣ постоянно остаются меньше опредѣленной постоянной, мы называемъ ограниченной въ этомъ интервалѣ.

---

[1]) Это означаетъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ $\langle a, b\rangle$.

Функція, интегрируемая въ $\langle a, b\rangle$, будетъ поэтому ограниченной въ $\langle a, b\rangle$.

Въ самомъ дѣлѣ, по предыдущей теоремѣ,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \mathop{\mathfrak{S}}_a^b(\mathfrak{Z}) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0)$$

коль скоро всѣ частные интервалы разложенія $\mathfrak{Z}$ меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа δ. Эти неравенства сохраняются, если нѣкоторое разложеніе $\mathfrak{Z}$ обладаетъ этимъ свойствомъ и если, измѣняя произвольно ξ_ν въ интервалѣ $\langle x_{\nu-1}, x_\nu\rangle$ [1]), мы сохраняемъ постоянныя значенія для остальныхъ ξ. Если ξ_ν есть нѣкоторое значеніе изъ интервала $\langle x_{\nu-1}, x_\nu\rangle$, то существуютъ два числа, между которыми постоянно лежитъ число

$$(x_\nu - x_{\nu-1}) f(\xi_\nu),$$

а, слѣдовательно, существуютъ и два числа, между которыми постоянно находится $f(\xi_\nu)$. Такимъ образомъ, функція $f(x)$ ограничена въ каждомъ интервалѣ $\langle x_{\nu-1}, x_\nu\rangle$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, p)$, а, слѣдовательно, и въ $\langle a, b\rangle$.

§ 146. **Верхняя и нижняя граница ограниченнаго числового множества.** Пусть $\mathfrak{M}$ будетъ система чиселъ, которыя всѣ лежатъ между A и B. Совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ распадается тогда на два класса, а, именно, на числа, которыя больше каждаго изъ чиселъ $\mathfrak{M}$, и на числа, которымъ это свойство не принадлежитъ. Каждое раціональное число, которое больше, чѣмъ B (меньше, чѣмъ A), принадлежитъ къ первому (ко второму) классу. Установленное здѣсь подраздѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ явно образуетъ сѣченіе. Пусть M будетъ опредѣляемое имъ число. Легко убѣдиться въ томъ, что ни одно изъ чиселъ системы $\mathfrak{M}$ не превосходитъ M, между тѣмъ какъ всякое меньшее число $\mathrm{M} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ этимъ свойствомъ уже не обладаетъ.

---

[1]) Мы полагаемъ $a = x_0$, $b = x_p$.

Если мы положимъ $\varepsilon = 1/n$, то въ $\mathfrak{M}$ найдется число x_n, удовлетворяющее неравенствамъ

$$M - \frac{1}{n} < x_n \leqq M.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim x_n = M.$$

Такимъ образомъ, существуетъ послѣдовательность, состоящая исключительно изъ чиселъ $\mathfrak{M}$ и имѣющая предѣлъ M. Конечно, числа x_n не должны всѣ непремѣнно быть различными.[1])

Точно такъ же легко вывести существованіе такого числа μ, что ни одно изъ чиселъ системы $\mathfrak{M}$ не будетъ меньше, чѣмъ μ. между тѣмъ какъ въ $\mathfrak{M}$ постоянно будутъ такія числа, которыя меньше, чѣмъ $\mu + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Существуетъ послѣдовательность, которая состоитъ только изъ чиселъ системы $\mathfrak{M}$ и которая имѣетъ предѣлъ μ.

μ называютъ **нижней**, а M **верхней границей** множества $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}_1$ есть часть множества $\mathfrak{M}$, а μ_1 — нижняя, M_1 — верхняя граница множества $\mathfrak{M}_1$, то

$$\mu \leqq \mu_1 \leqq M_1 \leqq M.$$

§ 147. Монотонныя послѣдовательности, имѣющія предѣлъ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существуетъ, то въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функція $f(x)$ ограничена (ср. § 145). Значенія функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$ образуютъ поэтому ограниченное множество чиселъ. Нижнюю границу этого множества мы обозначимъ черезъ $\mu(a, b)$, верхнюю границу — черезъ $M(a, b)$. Если $\langle \alpha, \beta\rangle$ есть частный интервалъ интервала $\langle a, b\rangle$, то

$$\mu(a, b) \leqq \mu(\alpha, \beta) \leqq M(\alpha, \beta) \leqq M(a, b).$$

Мы разсмотримъ теперь разложеніе $\mathfrak{Z}$ интервала $\langle a, b\rangle$ и составимъ оба выраженія

[1]) Если, напримѣръ, $\mathfrak{M}$ состоитъ только изъ числа x, то всѣ x_n равны x.

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}) = (x_1 - a)\,\mathrm{M}(a,\ x_1) + (x_2 - x_1)\,\mathrm{M}(x_1,\ x_2) + \cdots$$
$$\cdots + (b - x_{p-1})\,\mathrm{M}(x_{p-1},\ b)$$

и

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}) = (x_1 - a)\,\mu(a,\ x_1) + (x_2 - x_1)\,\mu(x_1,\ x_2) + \cdots$$
$$\cdots + (b - x_{p-1})\,\mu(x_{p-1},\ b).$$

Ясно, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ представляютъ соотвѣтственно нижнюю и верхнюю границу суммъ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{Z}) = (x_1 - a)\,f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,f(\xi_2) + \cdots + (b - x_{p-1})\,f(\xi_p),$$
$$(a \leqq \xi_1 \leqq x_1,\ x_1 \leqq \xi_2 \leqq x_2,\ \ldots,\ x_{p-1} \leqq \xi_p \leqq b)$$

относящихся къ разложенію $\mathfrak{Z}$. Въ ряду этихъ суммъ содержится поэтому послѣдовательность

$$\mathfrak{S}_1,\ \mathfrak{S}_2,\ \mathfrak{S}_3,\ \ldots,\ \text{имѣющая предѣлъ}\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}),$$

а равно и послѣдовательность

$$\mathfrak{s}_1,\ \mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{s}_3,\ \ldots,\ \text{имѣющая предѣлъ}\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}).$$

Но, согласно предложенію 2,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \mathfrak{S}_n\right| < \varepsilon,\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx - \mathfrak{s}_n\right| < \varepsilon,$$

коль скоро всѣ частные интервалы разложенія $\mathfrak{Z}$ меньше, чѣмъ δ. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})\right| \leqq \varepsilon,\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx - \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})\right| \leqq \varepsilon.$$

Если $\mathfrak{Z}$ будетъ пробѣгать особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ: $\mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2,\ \mathfrak{Z}_3,\ \ldots$, то почти всѣ $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}_n)$, $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_n)$ будутъ лежать между

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \quad \text{и} \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Это же, въ виду того, что ε есть произвольное положительное число, означаетъ, что

$$\lim \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}_n) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \lim \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть особенная цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, то послѣдовательность

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}_1),\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}_2),\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}_3), \ldots \text{ возрастаетъ,}$$

а послѣдовательность

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_1),\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_2),\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}_3), \ldots \text{ убываетъ.}$$

Такъ какъ, исходя изъ любого разложенія, можно составить особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, то постоянно

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z}) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z}).$$

Въ частности же

$$(b-a)\,\mu(a,\, b) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)\,\mathrm{M}(a,\, b).$$

§ 148. **Верхній и нижній интегралъ ограниченной функціи.** Если функція $f(x)$ ограничена въ интервалѣ $\langle a,\, b\rangle$, то оба выраженія $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$ имѣютъ смыслъ. Если же теперь $\mathfrak{Z}$ будетъ пробѣгать особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{s}}}(\mathfrak{Z})$ будетъ пробѣгать возрастающую, а $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(\mathfrak{Z})$—убывающую послѣдовательность. Обѣ послѣдовательности ограничены, такъ какъ всѣ ихъ члены не меньше, чѣмъ $(b-a)\mu(a, b)$, и не больше, чѣмъ $(b-a)\mathrm{M}(a, b)$. Предѣлъ первой послѣдовательности обозначается черезъ

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Его называютъ **нижнимъ** интеграломъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Предѣлъ второй послѣдовательности называется **верхнимъ** интеграломъ функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$ и обозначается черезъ

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Ясно, что всегда

$$\underline{\int_a^b} f(x\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Можно доказать, что получатся тѣ же предѣлы, если $\mathfrak{Z}$ будетъ пробѣгать любую особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Это доказательство ведется вполнѣ сходно съ тѣмъ, которое дано въ § 129. Нужно только постоянно замѣщать m черезъ μ и M черезъ M.

Когда верхній и нижній интегралъ равны другъ другу, то каждый изъ нихъ равенъ интегралу

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Мы видимъ, что $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ тогда и только тогда, когда функція $f(x)$ ограничена въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

§ 149. **Среднее колебаніе ограниченной функціи.** Разность

$$\mathrm{M}(a, b)-\mu(a, b),$$

т. е. разность между верхней и нижней границей, называютъ колебаніемъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Мы обозначимъ его черезъ $\sigma(a, b)$. Легко убѣдится въ томъ, что $\sigma(a, b)$ есть верхняя граница значеній $|f(x)-f(\bar{x})|$ $(a \leqq x \leqq b,\ a \leqq \bar{x} \leqq b)$.

Если взять разложеніе $\mathfrak{Z}$ и составить

$$\sigma(\mathfrak{Z}) = \frac{(x_1-a)\,\sigma(a, x_1) + (x_2-x_1)\,\sigma(x_1, x_2) + \cdots + (b-x_{p-1})\,\sigma(x_{p-1}, b)}{b-a},$$

то это число не будетъ ни меньше наименьшаго, ни больше наибольшаго изъ чиселъ

$$\sigma(a, x_1),\ \sigma(x_1, x_2), \ldots \sigma(x_{p-1}, b).$$

Это, какъ говорятъ, есть среднее этихъ чиселъ. Число $\sigma(\mathfrak{Z})$ называютъ среднимъ колебаніемъ функціи $f(x)$ въ частныхъ интервалахъ разложенія $\mathfrak{Z}$.

Если $\mathfrak{Z}$ будетъ пробѣгать особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то $\sigma(\mathfrak{Z})$ будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу σ, а именно

$$\sigma = \frac{1}{b-a}\left\{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right\}.$$

Число σ называютъ среднимъ колебаніемъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

§ 150. **Критерій интегрируемости.** Мы можемъ теперь высказать слѣдующій критерій интегрируемости: интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ тогда и только тогда, когда въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функція $f(x)$ ограничена и имѣетъ среднее колебаніе, равное нулю

Чтобы узнать, имѣетъ ли функція $f(x)$, ограниченная въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, среднее колебаніе, равное нулю, слѣдуетъ только взять какую-либо послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ: $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ и опредѣлить, будетъ ли

$$\lim \sigma(\mathfrak{Z}_n) = 0$$

Этотъ критерій можно выразить и такъ: интегралъ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существуетъ тогда и только тогда, когда въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$ функція $f(x)$ ограничена и каждому положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое разложеніе $\mathfrak{Z}$ интервала $\langle a,\ b\rangle$, что $\sigma(\mathfrak{Z})$ меньше, чѣмъ ε.

Съ помощью этого критерія можно убѣдиться въ томъ, что изъ существованія интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

слѣдуетъ существованіе интеграла

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

$(a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$.

Точно такъ же изъ существованія интеграловъ

$$\int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx, \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx, \ldots \int\limits_{a_{p-1}}^{b} f(x)\,dx$$

$$(a < a_1 < \cdots < a_{p-1} < b)$$

вытекаетъ существованіе интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Изъ даннаго въ § 145 опредѣленія опредѣленнаго интеграла выводится, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{a_{p-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

Мы будемъ принимать, что

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx \qquad (a < b)$$

всегда равенъ

$$-\int_a^b f(x)\,dx.$$

и что

$$\int_a^a f(x)\,dx$$

всегда равенъ нулю. Тогда справедливо слѣдующее предложенiе:

Если $c_1, c_2, \ldots, c_p$ суть какiя угодно числа и интегралы

$$\int_{c_\nu}^{c_{\nu+1}} f(x)\,dx \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p-1)$$

существуютъ, то существуетъ также интегралъ

$$\int_{c_1}^{c_p} f(x)\,dx,$$

и

$$\int_{c_1}^{c_p} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{p-1} \int_{c_\nu}^{c_{\nu+1}} f(x)\,dx.$$

§ 151. **Монотонныя функцiи.** Если $f(x)$ есть монотонная функцiя въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то существуетъ $\int_a^b f(x)\,dx$.

Раньше всего непосредственно усматривается, что функцiя $f(x)$ ограничена. Чтобы убѣдиться въ томъ, что среднее колебанiе равно нулю, слѣдуетъ разложить интервалъ $\langle a, b\rangle$ на p равныхъ частныхъ интерваловъ $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, при чемъ

$$x_\nu = a + \frac{\nu(b-a)}{p} \cdot (\nu = 0, 1, \ldots, p)$$

Тогда [1])

$$\sigma(x_{\nu-1}, x_\nu) = \pm\{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\}$$

[1]) Мы должны писать $+$ или $-$, смотря по тому, будетъ ли функцiя $f(x)$ возрастающая или убывающая.

и

$$\sigma(\mathfrak{Z}) = \pm \frac{b-a}{p}\{f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots$$
$$\cdots+f(x_p)-f(x_{p-1})\} = \pm\frac{b-a}{p}\{f(b)-f(a)\}.$$

Если будемъ p приписывать значенія $1, 2, 3, \ldots$, то $\mathfrak{Z}$ будетъ пробѣгать особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, и ясно, что

$$\lim \sigma(\mathfrak{Z}) = 0.$$

Мы будемъ называть функцію $f(x)$ частично монотонной въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, если послѣдній можно разложить на конечное число такихъ частныхъ интерваловъ

$$\langle a, a_1\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \ldots, \langle a_{p-1}, b\rangle$$
$$(a < a_1 < \cdots < a_{p-1} < b),$$

что въ каждомъ изъ нихъ функція $f(x)$ будетъ монотонной.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ интегралы

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx, \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx, \ldots, \int_{a_{p-1}}^{b} f(x)\,dx$$

существуютъ, то существуетъ и

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

§ 152. Интегралы $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx$, $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ и $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$. 1. Если интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ и } \int_a^b g(x)\,dx$$

существуютъ, то существуютъ также интегралы

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx \quad \text{и} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Такъ какъ функціи $f(x)$ и $g(x)$ обѣ ограничены въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$, то и функціи

$$f(x)+g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\,g(x)$$

ограничены. Именно, изъ неравенствъ

$$|f(x)| \leqq A \quad \text{и} \quad |g(x)| \leqq A$$

слѣдуетъ, что

$$|f(x)+g(x)| \leqq 2A \quad \text{и} \quad |f(x)\,g(x)| \leqq A^2.$$
$$(a \leqq x \leqq b)$$

Мы полагаемъ

$$\varphi(x)=f(x)+g(x) \quad \text{и} \quad \psi(x)=f(x)\,g(x).$$

Тогда

$$|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})| \leqq |f(x)-f(\bar{x})| + |g(x)-g(\bar{x})|$$

и

$$|\psi(x)-\psi(\bar{x})| = |f(x)\{g(x)-g(\bar{x})\}+g(\bar{x})\{f(x)-f(\bar{x})\}|$$
$$\leqq A\{|f(x)-f(\bar{x})|+|g(x)-g(\bar{x})|\}.$$

Поэтому, если обозначить черезъ σ_1, σ_2, σ, σ' колебанія функцій $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ въ частномъ интервалѣ $\langle x,\ \bar{x}\rangle$ интервала $\langle a,\ b\rangle$, то будемъ имѣть:

$$\sigma \leqq \sigma_1+\sigma_2, \quad \sigma' \leqq A(\sigma_1+\sigma_2).$$

Отсюда легко выводится, что среднее колебаніе функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$ будетъ равно нулю, если это же имѣетъ мѣсто относительно функцій $f(x)$ и $g(x)$.

Что изъ существованія интеграловъ $\int_a^b f\,dx$ и $\int_a^b g\,dx$ вытекаетъ существованіе интеграла $\int_a^b (f+g)\,dx$, можно прямо вывести изъ опредѣленія, даннаго въ § 145. Вмѣстѣ съ этимъ мы найдемъ теперь, что

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

Изъ того же опредѣленія можно точно такъ же заключить, что

$$\int_a^b c f\,dx = c\int_a^b f\,dx$$

(c-постоянная), если $\int_a^b f\,dx$ существуетъ.

2. Если $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ и въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ нижняя граница функціи $|f(x)|$ есть положительная величина, то существуетъ и $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$.

Если въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$

$$|f(x)| > B > 0,$$

то

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{B}.$$

Далѣе,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(\bar{x})}\right| \leqq \frac{1}{B^2}\left|f(x) - f(\bar{x})\right|.$$

Поэтому, обозначивъ соотвѣтственно черезъ σ и σ' колебанія функцій $f(x)$ и $1:f(x)$ въ частномъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, мы будемъ имѣть

$$\sigma' \leqq \frac{\sigma}{B^2}.$$

Отсюда вытекаетъ, что среднее колебаніе функціи $1:f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ равно нулю, если то же имѣетъ мѣсто относительно функціи $f(x)$.

§ 153. **Интегралъ $\int_a^b |f(x)|\,dx$.** Если функція $f(x)$ ограничена въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то то же относится и къ функціи $|f(x)|$. Имѣемъ, далѣе,

$$\big|\,|f(x)|-|f(\bar{x})|\,\big| \leqq |f(x)-f(\bar{x})|,$$

такъ что

$$\sigma' \leqq \sigma,$$

если σ есть колебаніе функціи $f(x)$, а σ'—колебаніе функціи $|f(x)|$ въ частномъ интервалѣ интервала $\langle a, b\rangle$. Отсюда видно, что среднее колебаніе функціи $|f(x)|$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ будетъ нулемъ, если среднее колебаніе функціи $f(x)$ исчезаетъ.

Такимъ образомъ, если существуетъ $\int_a^b f(x)\,dx$, то существуетъ также $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Обратное невѣрно. Если представить себѣ, что функція $f(x)$ для всѣхъ раціональныхъ значеній x равна 1, а для всѣхъ ирраціональныхъ значеній x равна -1, то функція будетъ неинтегрируемой. Въ самомъ дѣлѣ, нижній интегралъ равенъ $-(b-a)$, а верхній равенъ $b-a$. Напротивъ, функція $|f(x)|$, будучи постоянно равна 1, интегрируема.

Если $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ, то постоянно

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, слѣдуетъ принять въ соображеніе, что абсолютная величина выраженія

$$(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots+(b-x_{p-1})f(\xi_p)$$

не больше, чѣмъ

$$(x_1-a)|f(\xi_1)|+(x_2-x_1)|f(\xi_2)|+\cdots+(b-x_{p-1})|f(\xi_p)|$$
$$(a<x_1<\cdots<x_{p-1}<b).$$

§ 154. **Функціи съ ограниченной варіаціей.** Составимъ разложеніе $\mathfrak{Z}$ интервала $\langle a, b\rangle$ на частные интервалы

$$\langle a, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{p-1}, b\rangle$$
$$(a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b)$$

и положимъ

$$|f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(b) - f(x_{p-1})| = V(\mathfrak{Z}).$$

Если эти числа $V(\mathfrak{Z})$ образуютъ ограниченное множество, если, слѣдовательно, существуетъ число A, которое постоянно больше, чѣмъ $V(\mathfrak{Z})$, какъ бы мы при этомъ ни выбирали разложеніе $\mathfrak{Z}$, то мы говоримъ, что $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей.

Если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей, то она ограничена. Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства

$$|f(a) - f(x)| + |f(x) - f(b)| < A,$$

въ виду неравенствъ

$$|f(a) - f(x)| \geqq |f(x)| - |f(a)|$$

и

$$|f(x) - f(b)| \geqq |f(x)| - |f(b)|,$$

слѣдуетъ, что

$$2|f(x)| < A + |f(a)| + |f(b)|. \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей, то среднее колебаніе функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ равно нулю.

Чтобы доказать это, мы разлагаемъ интервалъ $\langle a, b\rangle$ на равныя части и полагаемъ

$$x_\nu = a + \frac{\nu}{p}(b - a). \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p)$$

Нужно только показать, что

$$\sigma_p = \frac{1}{p}\{\sigma(x_0, x_1) + \sigma(x_1, x_2) + \cdots + \sigma(x_{p-1}, x_p)\}$$

стремится къ нулю, когда p пробѣгаетъ послѣдовательность 1, 2, 3, ... Но

$$\sigma(x_0, x_1) + \sigma(x_1, x_2) + \cdots + \sigma(x_{p-1}, x_p)$$

есть верхняя граница суммы

$$|f(\xi_1) - f(\bar{\xi}_1)| + |f(\xi_2) - f(\bar{\xi}_2)| + \cdots + |f(\xi_p) - f(\bar{\xi}_p)|.$$
$$(x_{\nu-1} \leqq \xi_\nu < \bar{\xi}_\nu \leqq x_\nu).$$

Но эта сумма не больше, чѣмъ

$$|f(\xi_1) - f(\bar{\xi}_1)| + |f(\bar{\xi}_1) - f(\xi_2)| + |f(\xi_2) - f(\bar{\xi}_2)|$$
$$+ \cdots + |f(\xi_p) - f(\bar{\xi}_p)|\,^{*)}$$

и, слѣдовательно, навѣрное меньше, чѣмъ A. Отсюда вытекаетъ, что

$$\sigma(x_0, x_1) + \sigma(x_1, x_2) + \cdots + \sigma(x_{p-1}, x_p) \leqq A$$

и

$$\sigma_p \leqq \frac{A}{p};$$

поэтому

$$\lim \sigma_p = 0.$$

Изъ предыдущаго можно заключить, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ всегда существуетъ, если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей.

Въ этомъ можно убѣдиться и другимъ способомъ, а именно, можно доказать слѣдующую теорему:

Функцію $f(x)$, которая въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ имѣетъ ограниченную варіацію, можно представить въ видѣ суммы двухъ функцій, монотонныхъ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Если $\mathfrak{Z}$ есть произвольное разложеніе интервала $\langle a, b\rangle$ и $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ суть точки дѣленія $(a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b)$, то

$$\sum(\mathfrak{Z}) = \sigma(a, x_1) + \sigma(x_1, x_2) + \cdots + \sigma(x_{p-1}, b) \leqq A.$$

Верхнюю границу чиселъ $\sum(\mathfrak{Z})$ мы обозначимъ черезъ $\sum\limits_a^b$.

---

[1]) Ибо всѣ слагаемыя первой суммы содержатся въ послѣдней и эта не имѣетъ отрицательныхъ слагаемыхъ.

Если $a < c < b$, то

$$\sum_a^c + \sum_c^b = \sum_a^b.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\sum\limits_a^c$ есть верхняя граница суммы

$$\sum\nolimits_1 (\mathfrak{Z}_1) = \sigma(a, y_1) + \sigma(y_1, y_2) + \cdots + \sigma(y_{m-1}, c)$$
$$(a < y_1 < \cdots < y_{m-1} < c)$$

и $\sum\limits_c^b$ есть верхняя граница суммы

$$\sum\nolimits_2 (\mathfrak{Z}_2) = \sigma(c, z_1) + \sigma(z_1, z_2) + \cdots + \sigma(z_{n-1}, b).$$
$$(c < z_1 < \cdots < z_{n-1} < b).$$

Но

$$\sum\nolimits_1 (\mathfrak{Z}_1) + \sum\nolimits_2 (\mathfrak{Z}_2)$$

есть выраженіе типа $\sum(\mathfrak{Z})$. Наоборотъ, выраженіе $\sum(\mathfrak{Z})$ либо само есть сумма $\sum_1(\mathfrak{Z}_1) + \sum_2(\mathfrak{Z}_2)$, либо превращается въ такую сумму послѣ введенія новой точки дѣленія c, такъ что, сдѣлавъ это, имѣемъ:

$$\sum(\mathfrak{Z}) \leqq \sum\nolimits_1(\mathfrak{Z}_1) + \sum\nolimits_2 (\mathfrak{Z}_2).$$

Комплексъ чиселъ $\sum(\mathfrak{Z})$ и комплексъ чиселъ $\sum_1(\mathfrak{Z}_1) + \sum_2(\mathfrak{Z}_2)$ находятся, такимъ образомъ, въ слѣдующемъ соотношеніи. Если взять число изъ одного изъ этихъ комплексовъ, то оно никогда не будетъ превосходить всѣхъ чиселъ другого комплекса. Отсюда же вытекаетъ, что верхнія границы обоихъ комплексовъ равны. Если теперь положить [1])

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_a^x + f(x)\Big) \text{ и } \psi(x) = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_a^x - f(x)\Big),$$

то обѣ эти функціи будутъ **возрастающими** въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Въ самомъ дѣлѣ, если $a \leqq x < x + h \leqq b$, то

---

[1]) $\sum\limits_a^a$ мы будемъ полагать равнымъ нулю.

$$\sum_x^{x+h} \geqq |f(x+h)-f(x)|,$$

такъ что

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\tfrac{1}{2}\sum_x^{x+h}+\tfrac{1}{2}\{f(x+h)-f(x)\}\geqq 0$$

и

$$\psi(x+h)-\psi(x)=\tfrac{1}{2}\sum_x^{x+h}-\tfrac{1}{2}\{f(x+h)-f(x)\}\geqq 0.$$

Такъ какъ

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x),$$

то мы имѣемъ функцію $f(x)$ въ видѣ разности друхъ возрастающихъ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функцій [1]) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, или въ видѣ разности двухъ убывающихъ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функцій [1]) $-\psi(x)$ и $-\varphi(x)$, или въ видѣ суммы двухъ монотонныхъ функцій $\varphi(x)$ и $-\psi(x)$.

Существованіе интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ вытекаетъ теперь изъ § 151 и § 152.

§ 155. **Непрерывныя функціи.** Мы уже знаемъ изъ § 129, что $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ, если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Но мы можемъ это также доказать при помощи нашего критерія интегрируемости, указаннаго въ § 150.

Что функція $f(x)$ ограничена, мы знаемъ изъ § 105. Намъ сверхъ этого нужна еще теорема о равномѣрной непрерывности, которая выражается такъ:

Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то для каждаго положительнаго ε можно указать такое разложеніе $\langle a, b\rangle$ на конечное число частныхъ интерваловъ, что въ каждомъ частномъ интервалѣ колебаніе функціи $f(x)$ будетъ меньше, чѣмъ ε.

---

[1]) *Къ каждой функціи мы можемъ прибавить* одну и ту же постоянную C. Мы можемъ C выбрать такъ, чтобы функціи были положительными въ $\langle a, b\rangle$.

Для каждаго положительнаго ε можно будетъ поэтому указать такое разложеніе $\mathfrak{Z}$, что всѣ числа

$$\sigma(a, x_1),\ \ \sigma(x_1, x_2),\ \ldots,\ \ \sigma(x_{p-1}, b)$$

будутъ меньше, чѣмъ ε. Но тогда и $\sigma(\mathfrak{Z}) < \varepsilon$, и указанный въ § 150 критерій интегрируемости выполненъ.

Мы докажемъ отъ противнаго предложеніе о равномѣрной непрерывности. Если бы это предложеніе не было вѣрнымъ, то нѣкоторое положительное ε, пусть это будетъ ε_0, представляло бы исключеніе.

Мы разлагаемъ теперь интервалъ $\langle a, b\rangle$ на p частей. Тогда, по крайней мѣрѣ, въ одномъ изъ частныхъ интерваловъ колебаніе должно быть больше или равно ε_0. Если $f(x_p)$ есть наибольшее, а $f(\bar{x}_p)$ наименьшее значеніе функціи въ этомъ частномъ интервалѣ, то

$$f(x_p) - f(\bar{x}_p) \geqq \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad |x_p - \bar{x}_p| \leqq \frac{b-a}{p}.$$

Пусть теперь $y_1, y_2, y_3, \ldots$ будетъ сходящаяся часть послѣдовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots$ соотвѣтствующая часть послѣдовательности $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$. Если положить $\lim y_n = y$, то и $\lim \bar{y}_n = y$, такъ какъ $|y_1 - \bar{y}_1|, |y_2 - \bar{y}_2|, |y_3 - \bar{y}_3|, \ldots$ есть часть стремящейся къ нулю послѣдовательности $\frac{b-a}{1}, \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{3}, \ldots$.

Изъ равенствъ же

$$\lim y_n = y \quad \text{и} \quad \lim \bar{y}_n = y$$

вслѣдствіе непрерывности вытекаетъ, что

$$\lim f(y_n) = f(y) \quad \text{и} \quad \lim f(\bar{y}_n) = f(y),$$

такъ что

$$\lim \{ f(y_n) - f(\bar{y}_n) \} = 0,$$

а между тѣмъ постоянно выполняется неравенство

$$f(y_n) - f(\bar{y}_n) \geqq \varepsilon_0.$$

§ 156. **Опредѣленный и неопредѣленный интегралъ.**

Если интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ и $F'(x) = f(x)$ во всемъ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$, то вѣрна будетъ формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Если мы разложимъ интервалъ $\langle a,\ b\rangle$ на интервалы

$$\langle a,\ x_1\rangle,\ \langle x_1,\ x_2\rangle,\ \ldots,\ \langle x_{p-1},\ b\rangle,$$
$$(a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b),$$

то по § 67

$$F(x_1) - F(a) = (x_1 - a)f(\xi_1), \qquad (a < \xi_1 < x_1)$$
$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)f(\xi_2), \qquad (x_1 < \xi_2 < x_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$F(b) - F(x_{p-1}) = (b - x_{p-1})f(\xi_p). \quad (x_{p-1} < \xi_p < b)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$F(b) - F(a) = \mathop{\mathfrak{S}}_a^b(\mathfrak{Z}),$$

если только мы, какъ въ § 143, положимъ

$$(x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \cdots + (b - x_{p-1})f(\xi_p) = \mathop{\mathfrak{S}}_a^b(\mathfrak{Z}).$$

Если теперь $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то

$$F(b) - F(a) = \lim \mathop{\mathfrak{S}}_a^b(\mathfrak{Z}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Для разности $F(b) - F(a)$ употребляютъ обозначеніе

$$(F(x))_a^b.$$

Такимъ образомъ, зная неопредѣленный интегралъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, можно вычислить опредѣленный интегралъ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если онъ существуетъ.

Оба разсмотрѣнные въ § 144 примѣра $\int\limits_0^b e^x\,dx$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ легко разрѣшаются этимъ путемъ.

§ 157. **Функція $\int\limits_a^x f(x)\,dx$.** Положимъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и c есть число изъ $\langle a, b\rangle$. Разсмотримъ функцію

$$F(x)=\int\limits_c^x f(x)\,dx.$$

1. Функція $F(x)$ непрерывна въ $\langle a, b\rangle$. Если $\lim x_n = x$, то

$$F(x_n)=\int\limits_c^{x_n} f(x)\,dx=\int\limits_c^x f(x)\,dx+\int\limits_x^{x_n} f(x)\,dx$$

и

$$F(x_n)=F(x)+\int\limits_x^{x_n} f(x)\,dx.$$

Если мы обозначимъ черезъ K верхнюю границу функціи $|f(x)|$ въ $\langle a, b\rangle$, то [1])

$$\left|\int\limits_x^{x_n} f(x)\,dx\right| \leqq |x-x_n|\,K,$$

такъ что

$$\lim\int\limits_x^{x_n} f(x)\,dx=0,$$

[1]) Имѣемъ: $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ (§ 153) и $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqq (b-a)K$.

т. е.

$$\lim F(x_n) = F(x).$$

2. $F(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей. А именно, для $a < a_1 < \cdots < a_{p-1} < b$

$$|F(a) - F(a_1)| + |F(a_1) - F(a_2)| + \cdots + |F(a_{p-1}) - F(b)|$$

$$= \left|\int_a^{a_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx\right| + \cdots + \left|\int_{a_{p-1}}^{b} f(x)\,dx\right| \leqq (b-a)K.$$

Разложеніе функціи $F(x)$ на два монотонныхъ слагаемыхъ выполняется здѣсь очень просто. Полагаютъ

$$\varphi(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Тогда существуютъ оба интеграла

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad \int_a^b \psi(x)\,dx,$$

ибо $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ (ср. § 152 и § 153). Такъ какъ въ цѣломъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$

$$\varphi(x) \geqq 0 \text{ и } \psi(x) \geqq 0,$$

то обѣ функціи

$$\Phi(x) = \int_c^x \varphi(x)\,dx \quad \text{и} \quad \Psi(x) = \int_c^x \psi(x)\,dx$$

будутъ возрастающими. Въ самомъ дѣлѣ, (для $a \leqq x < x+h \leqq b$)

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} \varphi(x)\,dx \geqq 0,$$

$$\Psi(x+h) - \Psi(x) = \int_x^{x+h} \psi(x)\,dx \geqq 0.^{1})$$

---

[1]) Если $f(x) \geqq 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$ $(a < b)$. Это вытекаетъ изъ опредѣленія, даннаго въ § 145.

Но

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

поэтому

$$F(x) = \Phi(x) - \Psi(x).$$

Если $f(x) \geqq 0$ (или $f(x) \leqq 0$) во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то $\Psi(x) = 0$ (соотвѣтственно $\Phi(x) = 0$).

3. **Если функція $f(x)$ непрерывна въ точкѣ x, то въ этой точкѣ**

$$F'(x) = f(x).$$

Если $\lim x_n = x$ $(x_n \gtrless x)$, то

$$\lim \mu(x, x_n) = f(x) \quad \text{и} \quad \lim \mathrm{M}(x, x_n) = f(x).$$

Если бы, напримѣръ, равенство $\lim \mu(x, x_n) = f(x)$ не выполнялось, то существовала бы частная послѣдовательность $\mu(x, \bar{x}_1)$, $\mu(x, \bar{x}_2)$, $\mu(x, \bar{x}_3), \ldots$, которая стремилась бы къ предѣлу G, отличному отъ $f(x)$. Но въ интервалѣ $(x, \bar{x}_n)$ есть такая точка x_n', что

$$\mu(x, \bar{x}_n) \leqq f(x_n') \leqq \mu(x, \bar{x}_n) + \frac{1}{n}.$$

Сообразно съ этимъ $\lim f(x_n') = G$, а между тѣмъ должно быть $\lim f(x_n') = f(x)$.

Принявъ въ соображеніе, что

$$\mu(x, x_n) \leqq \frac{1}{x_n - x} \int_x^{x_n} f(x)dx \leqq \mathrm{M}(x, x_n),$$

найдемъ, что

$$\lim \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \lim \frac{1}{x_n - x} \int_x^{x_n} f(x)\,dx = f(x).$$

Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то $F(x)$ имѣетъ повсюду въ $\langle a, b\rangle$ производную $f(x)$. Если $\Phi(x)$ есть какой-либо интегралъ функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$\int_c^x f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

и $C = -\Phi(c)$, такъ какъ лѣвая часть есть нуль при $x = c$. Такимъ образомъ,

$$\int_c^x f(x)\,dx = (\Phi(x))_c^x,$$

какъ это намъ уже извѣстно изъ § 156.

§ 158. **Интегрируемыя разрывныя функціи.** $\int_a^b f(x)\,dx$ существуетъ, если функція $f(x)$ ограничена въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и имѣетъ только ограниченное число точекъ разрыва.

Интервалъ $\langle a, b\rangle$ распадается на конечное число такихъ частныхъ интерваловъ $\langle \alpha, \beta\rangle$, что функція $f(x)$ непрерывна внутри $\langle \alpha, \beta\rangle$. Для насъ достаточно будетъ показать, что $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ существуетъ (ср. § 150).

Съ этою цѣлью мы выбираемъ числа α' и β' такъ, что

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$$

и

$$\frac{(\alpha' - \alpha)\,\sigma(\alpha, \beta) + (\beta - \beta')\,\sigma(\alpha, \beta)}{\beta - \alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$$

($\varepsilon > 0$). Мы далѣе разлагаемъ (α', β') такъ, чтобы въ каждомъ частномъ интервалѣ колебаніе функціи $f(x)$ было меньше, чѣмъ $\varepsilon/2$.[1]) Тогда мы имѣемъ такое разложеніе $\mathfrak{Z}$ интервала $\langle \alpha, \beta\rangle$, для котораго

$$\sigma(\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$$

Поэтому, согласно критерію § 150, $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ существуетъ.

[1]) Это по § 155 возможно, такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна въ $\langle \alpha', \beta'\rangle$.

Мы можемъ написать

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx. \qquad (\alpha < \gamma < \beta)$$

Если теперь $\lim \alpha_n = \alpha\,(\alpha < \alpha_n < \gamma)$ и $\lim \beta_n = \beta\,(\gamma < \beta_n < \beta)$, то по § 157

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \lim \int_{\alpha_n}^\gamma f(x)\,dx$$

и

$$\int_\gamma^\beta f(x)\,dx = \lim \int_\gamma^{\beta_n} f(x)\,dx,$$

такъ что

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx.$$

Такимъ образомъ, интегралъ разрывной функціи $f(x)$ можетъ быть представленъ, какъ предѣлъ суммы интеграловъ непрерывной функціи.

§ 159. **Интегрированіе по частямъ.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ будутъ непрерывныя функціи въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Положимъ

$$F(x) = A + \int_a^x f(x)\,dx, \quad G(x) = B + \int_a^x g(x)\,dx$$

(A, B суть постоянныя).

Тогда $F(x)$ и $G(x)$, а, слѣдовательно, и произведенія

$$f(x)\,G(x) \text{ и } g(x)\,F(x).$$

также будутъ непрерывны въ $\langle a, b\rangle$ (по § 157).

Но
$$(F(x)\,G(x))' = f(x)\,G(x) + g(x)\,F(x),$$
такъ что, по § 156,
$$(F(x)\,G(x))_a^b = \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,F(x)\,dx,$$
или
$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = (F(x)\,G(x))_a^b - \int_a^b G(x)\,f(x)\,dx.$$
Это есть формула интегрированія по частямъ.

Она останется вѣрной, если потребовать только, чтобы функціи $f(x)$ и $g(x)$ были интегрируемы въ $\langle a, b\rangle$.

Именно, если $a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b$ и если положить $a = x_0$, $b = x_p$, то будемъ имѣть
$$(F(x)\,G(x))_a^b = \sum_{\nu=1}^{p} \{F(x_\nu)\,G(x_\nu) - F(x_{\nu-1})\,G(x_{\nu-1})\}$$
$$= \sum G(x_\nu)\{F(x_\nu) - F(x_{\nu-1})\} + \sum F(x_{\nu-1})\{G(x_\nu) - G(x_{\nu-1})\},$$
или
$$(F(x)\,G(x))_a^b = \sum G(x_\nu)\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\,dx + \sum F(x_{\nu-1})\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g(x)\,dx,$$
Пусть σ_ν будетъ колебаніе функціи $f(x)$ и $\bar{\sigma}_\nu$ — колебаніе функціи $g(x)$ въ $\langle x_{\nu-1}, x_\nu\rangle$. Тогда [1])
$$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\,dx = (x_\nu - x_{\nu-1})\{f(x_\nu) + \vartheta_\nu\,\sigma_\nu\},$$
$$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g(x)\,dx = (x_\nu - x_{\nu-1})\{g(x_{\nu-1}) + \bar{\vartheta}_\nu\,\bar{\sigma}_\nu\}$$

[1]) Если $a \leqq c \leqq b$, то оба числа $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ и $\varphi(c)(b-a)$ не будутъ меньше, чѣмъ $(b-a)\,\mu$, и не будутъ больше, чѣмъ $(b-a)\,M$, и, слѣдовательно, будутъ различаться не больше, чѣмъ на $(b-a)\,\sigma$. Черезъ μ, M, σ мы обозначаемъ соотвѣтственно: нижнюю границу, верхнюю границу и колебаніе функціи $\varphi(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

и ϑ_ν, $\bar{\vartheta}_\nu$ принадлежатъ интервалу $\langle -1,\ 1\rangle$.

Обозначимъ наибольшее значеніе функціи $|F(x)|$ черезъ $\overline{M}$, наибольшее значеніе функціи $|g(x)|$ черезъ M. Тогда

$$(F(x)\,G(x))_a^b = \sum G(x_\nu) f(x_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$$
$$+ \sum F(x_{\nu-1})\, g(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) + \rho$$

и

$$|\rho| < \overline{M} \sum \sigma_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) + M \sum \bar{\sigma}_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Пробѣгая теперь особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ, найдемъ, что

$$\lim \sum G(x_\nu) f(x_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = \int_a^b f(x)\, G(x)\, dx,$$

$$\lim \sum F(x_{\nu-1})\, g(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) = \int_a^b g(x)\, F(x)\, dx$$

и

$$\lim \rho = 0,$$

и получимъ ту же формулу, что и въ случаѣ непрерывныхъ функцій $f(x)$ и $g(x)$.

§ 160. **Примѣненія.** 1. Положимъ, что въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$ функцію $f(x)$ можно дифференцировать n разъ и что функція $f^{(n)}(x)$ интегрируема въ $\langle a,\ b\rangle$.

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\,dx$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}\,dx,$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_a^b f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}\,dx$$

$$= -\frac{f^{(n-2)}(a)(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!}\int_a^b f^{(n-2)}(x)(b-x)^{n-3}\,dx,$$

. . . .

$$\frac{1}{1!}\int_a^b f''(x)(b-x)\,dx = -\frac{f'(a)(b-a)}{1!} + \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Наконецъ,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ, что

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

при чемъ для R_n имѣемъ выраженіе

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\,dx.$$

Полученная формула есть не что иное, какъ формула Тэйлора (ср. § 74), и вмѣстѣ съ этимъ мы получили новую форму остатка.

2. Для вычисленія интеграла

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

можно пользоваться интегрированіемъ по частямъ. При $m > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = -(\sin^{m-1}x\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx,$$

а такъ какъ

$$(\sin^{m-1}x\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Пользуясь тѣмъ, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, найдемъ, что

$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx,$$

или

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Въ случаѣ $m - 2 > 1$ имѣемъ:

$$J_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} J_{m-4},$$

и такъ дальше.

Въ случаѣ четнаго m послѣднимъ будетъ равенство

$$J_2 = \frac{1}{2} J_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2},$$

такъ что

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\,\frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Въ случаѣ нечетнаго m послѣднимъ будетъ равенство

$$J_3 = \frac{2}{3} J_1 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2}{3},$$

такъ что

$$J_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

§ 161. **Преобразованіе опредѣленнаго интеграла.** Положимъ, что функція $\varphi(u)$ будетъ монотонной въ $\langle \alpha, \beta \rangle$ и что функція $\varphi'(u)$ интегрируема. Мы положимъ

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$$

и допустимъ, что

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

существуетъ. Если

$$\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{p-1} < \beta,$$

$\alpha = \alpha_0$, $\beta = \alpha_p$ и

$$x_\nu = \varphi(\alpha_\nu), \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p)$$

то, по § 67,

$$x_\nu - x_{\nu-1} = (\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1})\,\varphi'(\beta_\nu), \qquad (\alpha_{\nu-1} < \beta_\nu < \alpha_\nu)$$

и

$$\xi_\nu = \varphi(\beta_\nu)$$

несомнѣнно лежитъ въ $\langle x_{\nu-1}, x_\nu\rangle$.

Пусть δ_p будетъ наибольшая длина частнаго интервала $\langle\alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu\rangle$ и K—верхняя граница функціи $|\varphi'(u)|$ въ $\langle\alpha, \beta\rangle$. Тогда всѣ интервалы $\langle x_{\nu-1}, x_\nu\rangle$ будутъ меньше, чѣмъ $K\delta_p$. Особенной послѣдовательности $\mathfrak{Z}$-въ интервала $\langle\alpha, \beta\rangle$ соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ интервала $\langle a, b\rangle$. Основываясь на этомъ замѣчаніи, легко убѣдиться въ томъ, что функція $f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$ интегрируема въ $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Если теперь пробѣжимъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ интервала $\langle\alpha, \beta\rangle$, то найдемъ, что

$$\lim \sum f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Съ другой же стороны,

$$f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = f(\varphi(\beta_\nu))\,\varphi'(\beta_\nu)(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}),$$

такъ что

$$\lim \sum f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = \lim \sum f(\varphi(\beta_\nu))\,\varphi'(\beta_\nu)(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}),$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du. \qquad (\alpha = \varphi(a),\ \beta = \varphi(b))$$

Если фукнція $\varphi(u)$ частично*) монотонна въ $\langle\alpha, \beta\rangle$, а функція $\varphi'(u)$ интегрируема въ $\langle\alpha, \beta\rangle$, то предыдущая формула все еще вѣрна. Нужно только требовать, чтобы функція $f(x)$ была интегрируема въ интервалѣ $\langle A, B\rangle$, при чемъ A означаетъ наименьшее, а B наибольшее значеніе функціи $\varphi(u)$ въ $\langle\alpha, \beta\rangle$. Доказываютъ эту формулу, разлагая $\langle\alpha, \beta\rangle$ на интервалы монотонности[1]) функціи $\varphi(u)$ и примѣняя полученный уже результатъ къ каждому изъ этихъ интерваловъ.

§ 162. **Двѣ теоремы о среднемъ значеніи.** 1. Положимъ, что функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, и что въ немъ функція $\varphi(x)$ никогда не бываетъ отрицательной. Если мы обозначимъ черезъ μ нижнюю, а черезъ M верхнюю границу функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$, то будемъ имѣть

$$\mu\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqq \mathsf{M}\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mathfrak{m}\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

гдѣ $\mathfrak{m}$ есть число изъ интервала $\langle\mu, \mathsf{M}\rangle$.

Эту формулу называютъ первой теоремой о среднемъ значеніи. Мы знаемъ, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \lim\sum f(\xi_\nu)\varphi(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

и что

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim\sum \varphi(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

если пробѣгается особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. А такъ какъ $\varphi(x) \geqq 0$, то

$$\begin{aligned}\mu\sum\varphi(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) &\leqq \sum f(\xi_\nu)\varphi(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})\\ &\leqq \mathsf{M}\sum\varphi(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).\end{aligned}$$

*) См. § 151.

[1]) Т. е. на интервалы, въ которыхъ функція $\varphi(u)$ монотонна.

Отсюда вытекаетъ предыдущая теорема о среднемъ значеніи.

Такъ какъ при выборѣ чиселъ ξ можно избѣжать границъ a и b, то подъ μ и M можно также разумѣть соотвѣтственно нижнюю и верхнюю границу функціи $f(x)$ въ (a, b). Если функція $f(x)$ непрерывна въ $\langle a, b\rangle$, то мы можемъ положить

$$\mathfrak{m} = f(\xi) \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

и имѣемъ тогда

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

Если функція $\varphi(x)$ также непрерывна въ $\langle a, b\rangle$ и внутри интервала $\langle a, b\rangle$ постоянно $\varphi(x) > 0$, то къ функціямъ

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{и} \quad G(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

можно примѣнить теорему § 70. Поэтому

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = \frac{f(\xi)\,\varphi(\xi)}{\varphi(\xi)} = f(\xi),$$

или

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

и на этотъ разъ мы знаемъ, что

$$a < \xi < b.$$

Примѣненіе. Въ § 160 мы для остатка формулы Тэйлора нашли равенство

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)\,(b-x)^{n-1}\,dx.$$

Если функцiя $f^{(n)}(x)$ непрерывна въ $\langle a, b\rangle$, то первая теорема о среднемъ значенiи даетъ:

$$\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\,dx = f^{(n)}(\xi)\int_a^b (b-x)^{n-1}\,dx.$$

Но

$$\int (b-x)^{n-1}\,dx = -\frac{(b-x)^n}{n} + C,$$

такъ что

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi). \qquad (a < \xi < b)$$

Это есть Лагранжева форма остатка.

Остатокъ въ формѣ Коши получится, если написать

$$\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\,dx = f^{(n)}(\xi)(b-\xi)^{n-1}\int_a^b dx$$

$$= f^{(n)}(\xi)(b-\xi)^{n-1}(b-a). \qquad (a < \xi < b)$$

Такъ какъ можно положить

$$\xi = a + \vartheta(b-a), \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

то находимъ теперь, что

$$R_n = \frac{(b-a)^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\vartheta(b-a)).$$

2. Положимъ, что функцiя $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, а $\varphi(x)$ есть функцiя убывающая въ $\langle a, b\rangle$. Пусть, наконецъ, будетъ

$$\psi(a) = 1, \quad \psi(b) = 0.$$

Если тогда

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} < x_p \qquad (x_0 = a,\ x_p = b)$$

и если μ_k обозначаетъ нижнюю, M_k верхнюю границу, а σ_k колебанiе функцiи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, то (по § 147)

$$\sum \mu_k (x_k - x_{k-1}) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \sum \mathrm{M}_k (x_k - x_{k-1}).$$

Но если ξ_k принадлежитъ интервалу $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, то точно такъ же найдемъ, что

$$\sum \mu_k (x_k - x_{k-1}) \leqq \sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum \mathrm{M}_k (x_k - x_{k-1}).$$

Такимъ образомъ, интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ можетъ быть представленъ суммой

$$\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

съ ошибкою, которая не превышаетъ числа

$$D = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k (x_k - x_{k-1}).$$

Ошибка, съ которою сумма

$$\sum_{\kappa=1}^{q} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (q = 1, 2, \ldots, p)$$

представляетъ интегралъ

$$\int_a^{x_q} f(x)\,dx,$$

по большей мѣрѣ равна

$$\sum_{\kappa=1}^{q} \sigma_k (x_k - x_{k-1})$$

и, слѣдовательно, не больше, чѣмъ D.[1])

Прежде, чѣмъ пойти дальше, мы должны будемъ доказать такъ называемую лемму **Абеля**. Она гласитъ:

Если

$$\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_p \geqq 0$$

[1]) Слѣдуетъ принять во вниманіе, что $\sigma_k \geqq 0$, а $x_k - x_{\kappa-1} > 0$.

и $u_1, u_2, \ldots, u_p$ суть какія-либо числа, то постоянно

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \cdots + \varepsilon_p u_p = \varepsilon_1 \mathfrak{M}(u_1, u_1 + u_2, \cdots, u_1 + u_2 + \cdots + u_p).$$

Черезъ $\mathfrak{M}(u_1, u_1 + u_2, \cdots, u_1 + u_2 + \cdots + u_p)$ мы обозначаемъ число, которое не меньше наименьшаго и не больше наибольшаго изъ чиселъ

$$u_1, u_1 + u_2, \cdots, u_1 + u_2 + \cdots + u_p.$$

Положивъ

$$s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, \cdots, s_p = u_1 + u_2 + \cdots + u_p,$$

найдемъ, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \cdots + \varepsilon_p u_p &= \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 (s_2 - s_1) + \cdots + \varepsilon_p (s_p - s_{p-1}) \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 + \cdots + (\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) s_{p-1} + \varepsilon_p s_p. \end{aligned}$$

Если s есть наименьшее, а S—наибольшее изъ чиселъ $s_1, s_2, \ldots, s_p$, то, принимая во вниманіе, что согласно предположенію

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqq 0, \ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \geqq 0, \cdots, \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p \geqq 0, \ \varepsilon_p \geqq 0,$$

имѣемъ:

$$\begin{gathered} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s \leqq (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 \leqq (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S, \\ (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s \leqq (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 \leqq (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) S, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) s \leqq (\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) s_{p-1} \leqq (\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) S, \\ \varepsilon_p s \leqq \varepsilon_p s_p \leqq \varepsilon_p S. \end{gathered}$$

Отсюда же путемъ сложенія выведемъ, что

$$\varepsilon_1 s \leqq (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 + \cdots + (\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) s_{p-1} + \varepsilon_p s_p \leqq \varepsilon_1 S,$$

чѣмъ лемма Абеля и доказана.

Эту лемму мы можемъ теперь примѣнить къ суммѣ

$$\sum_{\kappa=1}^{p} f(\xi_\kappa) \psi(\xi_\kappa) (x_\kappa - x_{\kappa-1}).$$

Если положить

$$\varepsilon_\kappa = \psi(\xi_\kappa) \quad \text{и} \quad u_\kappa = f(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}),$$

то условія леммы будутъ выполнены. Полагая $\xi_1 = a$ (такъ что $\varepsilon_1 = \psi(a) = 1$), выводимъ изъ нея, что

$$\sum_{\kappa=1}^{p} f(\xi_\kappa)\psi(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}) = \mathfrak{M}\left(\sum_{\kappa=1}^{1} f(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}), \cdots, \sum_{\kappa=1}^{p} f(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1})\right).$$

Изъ § 157 мы знаемъ, что функція

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

непрерывна въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$. Пусть

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx$$

будетъ ея наибольшее, а

$$\int_a^{\bar\eta} f(x)\,dx$$

наименьшее ея значеніе въ $\langle a,\ b\rangle$.

Такъ какъ при $q = 1, 2, \ldots, p$

$$\int_a^{x_q} f(x)\,dx - D \leqq \sum_{\kappa=1}^{q} f(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \leqq \int_a^{x_q} f(x)\,dx + D,$$

то и

$$\int_a^{\bar\eta} f(x)\,dx - D \leqq \sum_{\kappa=1}^{q} f(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \leqq \int_a^{\eta} f(x)\,dx + D.$$

Отсюда же слѣдуетъ, что

$$\int_a^{\bar\eta} f(x)\,dx - D \leqq \sum_{\kappa=1}^{p} f(\xi_\kappa)\,\psi(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \leqq \int_a^{\eta} f(x)\,dx + D.$$

Если пробѣжать особенную послѣдовательность разложеній, то будемъ имѣть:

$$\lim \sum_{\kappa=1}^{p} f(\xi_\kappa)\psi(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}) = \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx$$

и

$$\lim D = \lim \sum_{\kappa=1}^{p} \sigma_\kappa (x_\kappa - x_{\kappa-1}) = 0.$$

Такимъ образомъ,

$$\int_a^{\bar{\eta}} f(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx \leqq \int_a^{\eta} f(x)\,dx.$$

Такъ какъ интегралъ $\int_a^x f(x)\,dx$ непрерывенъ въ $\langle a, b\rangle$, то въ этомъ интервалѣ имѣется такое ξ, что

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Этотъ результатъ можно обобщить.

Положимъ, что $\chi(x)$ есть убывающая (но не постоянная) функція въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Если теперь положить

$$\psi(x) = \frac{\chi(x) - \chi(b)}{\chi(a) - \chi(b)},$$

то функція $\psi(x)$ будетъ убывающей въ $\langle a, b\rangle$ и, сверхъ того,

$$\psi(a) = 1, \quad \psi(b) = 0.$$

Поэтому, если $f(x)$ есть функція, интегрируемая въ $\langle a, b\rangle$, то всѣ условія нашихъ предыдущихъ разсужденій будутъ выполнены и

$$\int_a^b f(x)\frac{\chi(x) - \chi(b)}{\chi(a) - \chi(b)}\,dx = \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Отсюда же вытекаетъ равенство

$$\int_a^b f(x)\chi(x)\,dx = \chi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + \chi(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

$$(a \leqq \xi \leqq b)$$

Эту формулу называютъ второй теоремой о среднемъ значеніи.

Если функція $F(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, и если другая функція $G(x)$ совпадаетъ съ $F(x)$ во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ за исключеніемъ одного только мѣста, то и функція $G(x)$ интегрируема въ $\langle a, b\rangle$ и при томъ

$$\int_a^b G(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Убѣдившись[1]) въ справедливости этого замѣчанія, легко тотчасъ же вывести, что можно измѣнить значенія функціи $F(x)$ въ конечномъ числѣ мѣстъ безъ того, чтобы интегралъ $\int_a^b F(x)\,dx$ пересталъ существовать и измѣнилъ свое значеніе.

Въ формулѣ второй теоремы о среднемъ значеніи мы теперь замѣнимъ

$$\chi(a) \text{ черезъ } A \text{ и } \chi(b) \text{ черезъ } B,$$

выбравъ, однако, при этомъ A и B такъ, чтобы измѣненная функція $\chi(x)$ все еще была монотонной въ $\langle a, b\rangle$. Тогда $\int_a^b f(x)\chi(x)\,dx$ остается неизмѣннымъ. Въ крайнемъ случаѣ измѣняется ξ, и мы имѣемъ:

$$\int_a^b f(x)\chi(x)\,dx = A\int_a^\xi f(x)\,dx + B\int_\xi^b f(x)\,dx.$$
$$(a \leqq \xi \leqq b)$$

Если въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функція $\chi(x)$ убываетъ и нигдѣ не имѣетъ отрицательнаго значенія, то мы можемъ положить $B=0$ и получаемъ тогда

$$\int_a^b f(x)\chi(x)\,dx = A\int_a^\xi f(x)\,dx.$$
$$(a \leqq \xi \leqq b, \quad A \geqq \chi(a).)$$

---

[1]) Это прямо вытекаетъ изъ даннаго въ § 145 опредѣленія опредѣленнаго интеграла.

Если въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функція $\chi(x)$ возрастаетъ и нигдѣ не имѣетъ отрицательнаго значенія, то мы можемъ положить $A=0$ и получаемъ тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\chi(x)\,dx = B\int\limits_\xi^b f(x)\,dx.$$

$$(a \leqq \xi \leqq b,\ \ B \geqq \chi(b).)$$

§ 163. **Интегралъ**

$$J_n = \int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Подъ n разумѣется положительное цѣлое число и $h>0$.

Символъ $\frac{\sin nx}{x}$ не имѣетъ смысла при $x=0$. Мы условимся, чтобы при $x=0$ онъ обозначалъ число n. Тогда функція $\frac{\sin nx}{x}$ будетъ повсюду непрерывна, такъ какъ при $x \gtreqless 0$

$$\frac{\sin nx}{x} = n - \frac{n^3x^2}{3!} + \frac{n^5x^4}{5!} - \cdots,$$

а стоящій въ правой части степенной рядъ повсюду непрерывенъ.

Положивъ $nx=u$, получимъ (по § 161)

$$J_n = \int\limits_0^{nh} \frac{\sin u}{u} du,$$

такъ что

$$J_n - J_\nu = \int\limits_{\nu h}^{nh} \frac{\sin u}{u} du.$$

Мы будемъ предполагать, что $n>\nu$, и примѣнимъ вторую теорему о среднемъ значеніи къ послѣднему интегралу. Въ интервалѣ $\langle \nu h, nh\rangle$ функція $\frac{1}{u}$ будетъ положительной и убывающей. Во второй теоремѣ о среднемъ значеніи можно поэтому принять

$$A = \frac{1}{\nu h} \ \text{ и } \ B = 0.$$

Тогда мы получаемъ

$$\int_{\nu h}^{nh}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{1}{\nu h}\int_{\nu h}^{\xi}\sin u\,du.\qquad (\nu h\leqq\xi\leqq nh)$$

Но

$$\int_{\nu h}^{\xi}\sin u\,du=-(\cos u)_{\nu h}^{\xi}=\cos\nu h-\cos\xi,$$

такъ что

$$|J_n-J_\nu|\leqq\frac{2}{\nu h},$$

ибо по своимъ абсолютнымъ величинамъ $\cos\nu h$ и $\cos\xi$ не превосходятъ 1.

Если ε есть положительное число, то индексъ ν можно выбрать такъ, что $2/\nu h<\varepsilon$. Тогда при $n>\nu$

$$|J_n-J_\nu|<\varepsilon.$$

По § 27 отсюда можно заключить что $\lim J_n$ существуетъ.

§ 164. Интегралы

$$A_n=\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \quad\text{и}\quad B_n=\int_a^b f(x)\sin nx\,dx.$$

Положимъ, что функцiя $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$. Мы покажемъ, что тогда

$$\lim A_n=0 \quad\text{и}\quad \lim B_n=0.$$

Интервалъ $\langle a,\ b\rangle$ можно разложить на такiе частные интервалы

$$\langle x_{\nu-1},\ x_\nu\rangle,\qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

что

$$D=\sum\sigma_\nu(x_\nu-x_{\nu-1})<\frac{\varepsilon}{2}$$

($\varepsilon>0$). При этомъ σ_ν означаетъ колебанiе функцiи $f(x)$ въ $\langle x_{\nu-1},\ x_\nu\rangle$.

Но

$$A_n = \sum\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \sum f(x_{\nu-1})\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\cos nx\,dx + \sum\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\{f(x)-f(x_{\nu-1})\}\cos nx\,dx$$

и

$$B_n = \sum\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \sum f(x_{\nu-1})\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\sin nx\,dx + \sum\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\{f(x)-f(x_{\nu-1})\}\sin nx\,dx.$$

Отсюда можно вывести соотношенiе

$$|A_n| \leqq \frac{2}{n}\sum|f(x_{\nu-1})| + D,$$

и точно такъ же

$$|B_n| \leqq \frac{2}{n}\sum|f(x_{\nu-1})| + D.$$

Если выбрать k такъ, что

$$\frac{2}{k}\sum|f(x_{\nu-1})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то при $n \geqq k$

$$|A_n| < \varepsilon \text{ и } |B_n| < \varepsilon.$$

А это означаетъ, что $\lim A_n = \lim B_n = 0$.

§ 165. Вычисленiе

$$\lim\int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Такъ какъ по § 164

$$\lim\int\limits_b^{b'} \frac{\sin nx}{x}\,dx = 0,$$

если числа h, h' оба больше нуля, то $\lim \int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx$ совершенно не зависитъ отъ того, какое положительное значеніе имѣетъ h.

Мы можемъ поэтому ограничиться разсмотрѣніемъ предѣла

$$\lim \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Для $0 < x \leqq \frac{1}{2}\pi$ функція

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

непрерывна. Такъ какъ функція

$$\frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x^2 - \frac{x^4}{3!} + \cdots} = -x\,\frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}$$

имѣетъ предѣлъ 0 для значеній x, приближающихся къ нулю, то $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ будетъ функціей, непрерывной при $x = 0$, если мы припишемъ безсодержательному при $x = 0$ символу значеніе нуль.

Тогда по § 164

$$\lim \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \sin nx\,dx = 0,$$

такъ что

$$\lim \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \lim \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Чтобы найти этотъ предѣлъ, достаточно разсмотрѣть частную последовательность. Мы разсмотримъ частную послѣдовательность, соотвѣтствующую нечетнымъ индексамъ.

Мы исходимъ изъ замѣчанія, что

$$\cos(p-1)\varphi - 2\cos p\varphi + \cos(p+1)\varphi = 2(\cos\varphi - 1)\cos p\varphi.$$

Эта формула при

$$u_p = \cos(p-1)\varphi - \cos p\varphi,$$

обращается въ

$$u_{p+1} - u_p = 2(1-\cos\varphi)\cos p\varphi.$$

Мы пишемъ теперь слѣдующую цѣпь равенствъ:

$$u_1 = 1 - \cos\varphi,$$

$$u_2 - u_1 = 2(1-\cos\varphi)\cos\varphi,$$

$$u_3 - u_2 = 2(1-\cos\varphi)\cos 2\varphi,$$

$$\cdots\quad\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{p+1} - u_p = 2(1-\cos\varphi)\cos p\varphi.$$

Отсюда вытекаетъ, что

$$\frac{1}{2}u_{p+1} = \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos p\varphi\right)(1-\cos\varphi);$$

поэтому, въ случаѣ $\cos\varphi < 1$,

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos p\varphi = \frac{\cos p\varphi - \cos(p+1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)}.$$

Такъ какъ

$$\cos(p+1)\varphi = \cos\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right),$$

$$\cos p\varphi = \cos\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{1}{2}\varphi\right),$$

то

$$\cos p\varphi - \cos(p+1)\varphi = 2\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)\varphi\,\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

такъ что

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos p\varphi = \frac{\sin\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Если мы ограничимъ φ интерваломъ $\langle 0, \pi\rangle$, то $\sin\frac{1}{2}\varphi$ будетъ нулемъ только при $\varphi = 0$. Если же приписать символу

$$\frac{\sin\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

значенiе $p + \frac{1}{2}$ при $\varphi = 0$, то формула вѣрна и при $\varphi = 0$.

Въ интегралѣ

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\,dx$$

мы можемъ поэтому положить

$$\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x} = 2\left(\frac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2px\right).$$

Но отсюда слѣдуетъ:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} dx + \sum_{\nu=1}^{p} 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\nu x\,dx.$$

А такъ какъ

$$2\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\nu x\,dx = \frac{1}{\nu}\left(\sin 2\nu x\right)_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0,$$

то

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь мы можемъ заключить, что

$$\lim \int\limits_0^{h} \frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (h > 0)$$

Мы присоединимъ сюда еще одно замѣчанiе объ интегралѣ

$$\int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Если $h \leqq \frac{\pi}{n}$, то

$$0 < \int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx \leqq \int\limits_0^{\pi/n} \frac{\sin nx}{x}\,dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du.\text{[1]}$$

При $h > \frac{\pi}{n}$ напишемъ:

$$\int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/n} \frac{\sin nx}{x}\,dx + \int\limits_{\pi/n}^{h} \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + \int\limits_{\pi}^{nh} \frac{\sin u}{u}\,du\text{[1]}$$

и примѣнимъ ко второму интегралу въ правой части вторую теорему о среднемъ значенiи. По этой теоремѣ (если положить $A = \frac{1}{\pi}$, $B = 0$)

$$\int\limits_{\pi}^{nh} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\xi} \sin u\,du = -\frac{1}{\pi}(1 + \cos\xi).$$

Отсюда, въ виду соотношенiя $|\cos\xi| \leqq 1$,

$$\left|\int\limits_{\pi}^{nh} \frac{\sin u}{u}\,du\right| \leqq \frac{2}{\pi}.$$

Если положить

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + \frac{2}{\pi} = G,$$

то постоянно

---

[1]) $u = nx$

$$\left|\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx\right| \leqq G.$$

При $0 \leqq h' \leqq h$, въ виду равенства

$$\int_{h'}^h \frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx - \int_0^{h'} \frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

постоянно имѣетъ мѣсто соотношенiе

$$\left|\int_h^{h'} \frac{\sin nx}{x}\,dx\right| \leqq 2\,G.$$

§ 166. **Интегралъ Дирихле.** Положимъ, что функцiя $f(x)$ монотонна въ интервалѣ $\langle 0,\ h\rangle$ и непрерывна въ точкѣ $x = 0$.

Мы разлагаемъ интегралъ

$$\mathfrak{D}_n = \int_0^h f(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

называемый интеграломъ Дирихле (Dirichlet), слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{D}_n = \int_0^{h'} + \int_{h'}^h . \qquad (0 < h' < h)$$

Къ первой части мы примѣняемъ вторую теорему о среднемъ значенiи, по которой

$$\int_0^{h'} f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = f(0)\int_0^{h''} \frac{\sin nx}{x}\,dx + f(h')\int_{h''}^{h'} \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

$(0 \leqq h'' \leqq h')$. Тогда

$$\mathfrak{D}_n = \{f(h') - f(0)\}\int_{h''}^{h'} \frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_{h'}^h f(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx +$$

$$+ f(0)\int_0^{h'} \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

и

$$\mathfrak{D}_n - \frac{\pi}{2} f(0) = \mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n + \mathfrak{C}_n,$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}_n = \{f(h') - f(0)\} \int\limits_{h''}^{h'} \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

$$\mathfrak{B}_n = \int\limits_{h'}^{h} f(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

$$\mathfrak{C}_n = f(0) \left(\int\limits_{0}^{h} \frac{\sin nx}{x}\, dx - \frac{\pi}{2} \right).$$

Такъ какъ

$$|\mathfrak{A}_n| \leqq 2G |f(h') - f(0)|$$

и при h', приближающемся къ нулю,

$$\lim f(h') = f(0),$$

то h' можно выбрать такъ, чтобы было

$$2G |f(h') - f(0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\varepsilon > 0)$$

Тогда для всѣхъ значеній индекса n

$$|\mathfrak{A}_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если h' выбрано указаннымъ образомъ, то по § 164 и § 165 (когда n пробѣгаетъ послѣдовательность 1, 2, 3, . . .)

$$\lim \mathfrak{B}_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim \mathfrak{C}_n = 0.$$

Поэтому почти для всѣхъ значеній индекса n

$$|\mathfrak{B}_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\mathfrak{C}_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$\left|\mathfrak{D}_n - \frac{\pi}{2} f(0)\right| \leqq |\mathfrak{A}_n| + |\mathfrak{B}_n| + |\mathfrak{C}_n| < \varepsilon.$$

А это обозначаетъ, что

$$\lim \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0). \qquad (h > 0)$$

Если функція $f(x)$ монотонна въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$, но не непрерывна при $x = 0$, то формула принимаетъ другой видъ.

Пусть, напримѣръ, функція $f(x)$ будетъ возрастающей въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$ и

$$h_1 > h_2 > h_3 > \cdots, \quad \lim h_n = 0.$$

Тогда послѣдовательность

$$f(h_1), f(h_2), f(h_3), \ldots$$

убываетъ и ограничена, такъ что

$$\lim f(h_n)$$

существуетъ. Мы обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ f_0.

Если $h'_1, h'_2, h'_3, \ldots$ есть послѣдовательность, состоящая изъ однихъ только положительныхъ членовъ и имѣющая предѣлъ нуль, то для каждаго h_n' существуетъ такое h_m, что $h_m < h_n'$, вслѣдствіе чего $f(h_m) \leqq f(h_n')$. Отсюда же слѣдуетъ, что $f_0 \leqq f(h_n')$. Если предложено положительное число ε, то мы можемъ выбрать $f(h_\nu)$ такъ, что $f(h_\nu) < f_0 + \varepsilon$. А такъ какъ почти всѣ h_n' лежатъ между 0 и h_ν, то почти всѣ $f(h_n')$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$f_0 \leqq f(h_n') < f_0 + \varepsilon.$$

А это означаетъ, что

$$\lim f(h_n') = f_0.$$

Если мы теперь замѣнимъ $f(0)$ черезъ f_0, то функцiя $f(x)$ будетъ непрерывна въ точкѣ $x = 0$ и останется возрастающей въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$;

$$\int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx$$

сохраняетъ свое значенiе.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ

$$\lim \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f_0, \qquad (h > 0)$$

и при этомъ

$$f_0 = \lim f(x)$$

для положительныхъ значенiй x, приближающихся къ нулю.

Если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$ есть функцiя съ ограниченной варiацiей, то, какъ мы знаемъ, можно выбрать въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$ двѣ возрастающiя функцiи $\varphi(x)$, $\psi(x)$ такъ, что во всемъ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

По предыдущему имѣемъ теперь:

$$\lim \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \varphi_0,$$

$$\lim \int_0^h \psi(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \psi_0;$$

слѣдовательно

$$\lim \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2}(\varphi_0 - \psi_0) = \frac{\pi}{2} f_0.$$

При этомъ f_0 есть предѣлъ функцiи $f(x)$ для положительныхъ значенiй x, приближающихся къ нулю.

Мы говоримъ, что $f(x)$ есть функція съ ограниченной варіаціей вправо отъ $x=0$, если можно выбрать такое положительное число δ, что $f(x)$ есть функція съ ограниченной варіаціей въ интервалѣ $\langle 0, \delta \rangle$

Употребляя это выраженіе, мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

Если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$ есть функція интегрируемая и съ ограниченной варіаціей вправо отъ $x=0$, то

$$\lim \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f_0. \qquad (h > 0)$$

Дѣйствительно,

$$\int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^\delta + \int_\delta^h .$$

Предѣлъ первой части есть $\frac{\pi}{2} f_0$, предѣлъ же второй части, по § 164, равенъ нулю.

§ 167. **Теорема П. Дю Буа-Реймона объ интегралѣ Дирихле.** Въ § 159 мы доказали формулу

$$(F(x)\, G(x))_a^b = \int_a^b f(x)\, G(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, F(x)\, dx.$$

Было предположено, что функціи $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$, и что

$$F(x) = A + \int_a^x f(x)\, dx, \quad G(x) = B + \int_a^x g(x)\, dx.$$

Эту формулу мы примѣнимъ теперь къ интегралу

$$\int_0^{h'} f(x) \frac{\sin nx}{x} dx, \qquad (0 < h' < h)$$

при чемъ мы сначала будемъ требовать отъ функціи $f(x)$, чтобы она была интегрируема въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$.

Предварительно замѣтимъ, что для $x \gtreqless 0$

$$\left(\frac{\sin nx}{x}\right)' = \frac{nx\cos nx - \sin nx}{x^2} = -\frac{1}{3}n^3x + \cdots.$$

Въ точкѣ $x=0$ мы полагаемъ выраженіе $\frac{\sin nx}{x}$ равнымъ n. Такимъ образомъ, въ этой точкѣ производною будетъ

$$\lim \frac{1}{x}\left(\frac{\sin nx}{x} - n\right) = \lim\left(-\frac{1}{6}n^3x + \cdots\right) = 0.$$
$$(\lim x = 0)$$

Приписавъ символу

$$\frac{nx\cos nx - \sin nx}{x^2}$$

значеніе 0 при $x=0$, мы имѣемъ передъ собою повсюду непрерывную функцію, которая равна производной отъ $\frac{\sin nx}{x}$, такъ что

$$\frac{\sin nx}{x} = n + \int_0^x \frac{nx\cos nx - \sin nx}{x^2}\,dx.$$

Въ формулѣ интегрированія по частямъ мы можемъ, такимъ образомъ, положить $a=0$, $b=h'$ и

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx, \quad g(x) = \frac{nx\cos nx - \sin nx}{x^2}, \quad G(x) = \frac{\sin nx}{x}.$$

Тогда она даетъ:

$$\int_0^{h'} f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = F(h')\frac{\sin nh'}{h'} - \int_0^{h'} \frac{nx\cos nx - \sin nx}{x^2}F(x)\,dx.$$

Если мы припишемъ выраженію

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx$$

какое-либо значеніе при $x=0$, то функція

$$\mathfrak{F}(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx$$

будетъ ограничена[1]) въ интервалѣ $\langle 0,\ h\rangle$. Она, сверхъ того, будетъ непрерывна въ $\langle 0,\ h\rangle$, если не принимать во вниманіе точки $x=0$. Поэтому функція $\mathfrak{F}(x)$ интегрируема въ $\langle 0,\ h\rangle$. (§ 158).

При помощи $\mathfrak{F}(x)$ правая часть нашей вышеприведенной формулы можетъ быть написана такъ:

$$\mathfrak{F}(h')\sin nh'-\int_0^{h'}\mathfrak{F}(x)\,n\cos nx\,dx+\int_0^{h'}\mathfrak{F}(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Но

$$\sin nh'=\int_0^{h'} n\cos nx\,dx.$$

Такимъ образомъ,

$$\int_0^{h'} f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx=\int_0^{h'}\mathfrak{F}(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_0^{h'}\{\mathfrak{F}(h')-\mathfrak{F}(x)\}\,n\cos nx\,dx.$$

Мы предположимъ теперь, что $\mathfrak{F}(x)$ есть функція съ ограниченной варіаціей въ интервалѣ $\langle 0,\ h\rangle$. Тогда можно выбрать въ $\langle 0,\ h\rangle$ такія двѣ возрастающія функціи $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, что во всемъ интервалѣ $\langle 0,\ h\rangle$

$$\mathfrak{F}(x)=\Phi(x)-\Psi(x).$$

Такъ какъ функціи $\Phi(h')-\Phi(x)$ и $\Psi(h')-\Psi(x)$ убываютъ и нигдѣ не имѣютъ отрицательныхъ значеній, то по второй теоремѣ о среднемъ значеніи

$$\int_0^{h'}\{\Phi(h')-\Phi(x)\}\,n\cos nx\,dx=\{\Phi(h')-\Phi_0\}\sin n\xi,$$

[1]) Нужно принять во вниманіе, что функція $f(x)$ ограничена въ интервалѣ $\langle 0,\ h\rangle$.

$$\int_0^{h'} \{\Psi(h') - \Psi(x)\} n \cos nx\,dx = \{\Psi(h') - \Psi_0\} \sin n\xi,$$

такъ что

$$\int_0^{h'} \{\mathfrak{F}(h') - \mathfrak{F}(x)\} n \cos nx\,dx = \{\Phi(h') - \Phi_0\} \sin n\xi$$

$$+ \{\Psi(h') - \Psi_0\} \sin n\xi.$$

Абсолютная величина правой части не больше, чѣмъ

$$|\Phi(h') - \Phi_0| + |\Psi(h') - \Psi_0|.$$

Подъ Φ_0, Ψ_0 мы понимаемъ соотвѣтственно предѣлы функцій $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ для положительныхъ значеній x, приближающихся къ нулю. Поэтому для $\lim h' = 0$

$$\lim \{|\Phi(h') - \Phi_0| + |\Psi(h') - \Psi_0|\} = 0,$$

и мы можемъ выбрать h' такъ, что

$$|\Phi(h') - \Phi_0| + |\Psi(h') - \Psi_0| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для всѣхъ значеній индекса n

$$\left| \int_0^{h'} \{\mathfrak{F}(h') - \mathfrak{F}(x)\} n \cos nx\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если написать теперь, что

$$\int_0^{h} f(x) \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}_0 = \left\{ \int_0^{h'} \mathfrak{F}(x) \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}_0 \right\}$$

$$+ \int_0^{h'} \{\mathfrak{F}(h') - \mathfrak{F}(x)\} n \cos nx\,dx + \int_{h'}^{h} f(x) \frac{\sin nx}{x} dx,$$

то первый и послѣдній членъ правой части имѣютъ предѣлъ нуль, когда n пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$, такъ что абсолютныя величины этихъ членовъ будутъ меньше, чѣмъ $\frac{\varepsilon}{3}$, а абсолютная величина выраженія

$$\int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}_0$$

будетъ меньше, чѣмъ ε почти для всѣхъ значеній индекса n.

Это означаетъ, что

$$\lim \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}_0.$$

Мы можемъ поэтому высказать слѣдующую теорему:

Если функція $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$ и

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(x)\, dx$$

есть функція съ ограниченной варіаціей вправо отъ $x = 0$, то имѣетъ мѣсто равенство

$$\lim \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}_0. \qquad (h > 0)$$

При этомъ $\mathfrak{F}_0$ есть предѣлъ функціи $\mathfrak{F}(x)$ для положительныхъ значеній x, приближающихся къ нулю.

Эта теорема П. Дю Буа-Реймона (P. du Bois-Reymond) содержитъ въ себѣ, какъ частный случай, теорему, доказанную въ § 166. А именно, можно показать, что $\mathfrak{F}(x)$ есть функція съ ограниченной варіаціей вправо отъ $x = 0$, коль скоро $f(x)$ имѣетъ это свойство.

§ 168. **Другое выраженіе теоремы Дю Буа-Реймона.** Если функція $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle 0, h \rangle$, то, интегрируя по частямъ, найдемъ, что для $h \geqq x > 0$

$$\left(\frac{1}{u} \int_0^u f(u)\, du\right)_x^h = \int_x^h \frac{f(u)}{u} du - \int_x^h \left(\frac{1}{u^2} \int_0^u f(u)\, du\right) du,$$

т. е.

$$\mathfrak{F}(h)-\mathfrak{F}(x)=\int_x^h\{f(u)-\mathfrak{F}(u)\}\frac{du}{u},$$

или

$$\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{F}(h)+\int_x^h\{\mathfrak{F}(u)-f(u)\}\frac{du}{u}.$$

Если $\mathfrak{F}(x)$ въ интервалѣ $\langle 0,\ h\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей, то существуетъ число A такого рода, что

$$|\mathfrak{F}(0)-\mathfrak{F}(x_1)|+|\mathfrak{F}(x_1)-\mathfrak{F}(x_2)|+\cdots+|\mathfrak{F}(x_{p-1})-\mathfrak{F}(h)|<A$$
$$(0<x_1<\cdots<x_{p-1}<h),$$

какъ бы ни разлагать $\langle 0,\ h\rangle$ на частные интервалы. Поэтому и

$$|\mathfrak{F}(x_1)-\mathfrak{F}(x_2)|+\cdots+|\mathfrak{F}(x_{p-1})-\mathfrak{F}(x_p)|<A. \qquad (x_p=h)$$

Положивъ для краткости

$$\frac{\mathfrak{F}(u)-f(u)}{u}=\mathfrak{G}(u)$$

и обозначивъ черезъ σ_ν колебаніе функціи $\mathfrak{G}(u)$ въ интервалѣ $\langle x_{\nu-1},\ x_\nu\rangle$, найдемъ, что

$$\mathfrak{F}(x_{\nu-1})-\mathfrak{F}(x_\nu)=\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\mathfrak{G}(u)\,du=(x_\nu-x_{\nu-1})(\mathfrak{G}(\xi_\nu)+\vartheta_\nu\sigma_\nu).$$

При этомъ ξ_ν есть произвольное значеніе изъ интервала $\langle x_{\nu-1}, x_\nu\rangle$, а ϑ_ν — значеніе изъ интервала $\langle -1,\ 1\rangle$.

Изъ послѣдняго равенства мы можемъ заключить, что

$$|\mathfrak{F}(x_{\nu-1})-\mathfrak{F}(x_\nu)|\geqq(x_\nu-x_{\nu-1})\{|\mathfrak{G}(\xi_\nu)|-\sigma_\nu\};$$
$$(\nu=2,3,\ldots p)$$

поэтому

$$\sum_{\nu=2}^{p}(x_\nu-x_{\nu-1})|\mathfrak{G}(\xi_\nu)|-\sum_{\nu=2}^{p}(x_\nu-x_{\nu-1})\sigma_\nu<A.$$

Оставляя x_1 неизмѣненнымъ, найдемъ, что для особенной послѣдовательности $\mathfrak{Z}$-въ, получаемой при дѣленіи интервала $\langle x_1, h\rangle$,

$$\lim\sum_{\nu=2}^{p}(x_\nu - x_{\nu-1})\,\sigma_\nu = 0,$$

$$\lim\sum_{\nu=2}^{p}(x_\nu - x_{\nu-1})\,|\,\mathfrak{G}(\xi_\nu)\,| = \int_{x_1}^{h}|\,\mathfrak{G}(u)\,|\,du,$$

и что для $0 < x < h$

$$\int_{x}^{h}|\,\mathfrak{G}(u)\,|\,du \leqq A.$$

Такимъ образомъ, функція

$$X(x) = \int_{x}^{h}|\,\mathfrak{G}(u)\,|\,du$$

ограничена въ интервалѣ $(0, h)$.

Если это условіе выполнено, то можно, наоборотъ, показать, что $\mathfrak{F}(x)$ въ интервалѣ $\langle 0, h\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей.

А именно, тогда обѣ функціи

$$\Phi(x) = \mathfrak{F}(h) + \int_{x}^{h}\frac{|\,\mathfrak{G}(u)\,| + \mathfrak{G}(u)}{2}\,du$$

и

$$\Psi(x) = \int_{x}^{h}\frac{|\,\mathfrak{G}(u)\,| - \mathfrak{G}(u)}{2}\,du$$

будутъ ограниченными и убывающими. Если онѣ постоянно больше, чѣмъ B, и если мы положимъ, что

$$\Phi(0) = \Psi(0) = B,$$

то онѣ будутъ убывающими въ интервалѣ $\langle 0, h\rangle$. Если же положить $\mathfrak{F}(0) = 0$, то ихъ разность будетъ равна $\mathfrak{F}(x)$, такъ что $\mathfrak{F}(x)$ въ интервалѣ $\langle 0, h\rangle$ будетъ функціей съ ограниченной варіаціей. [1])

[1]) Это свойство сохраняется при всякомъ другомъ предположеніи относительно $\mathfrak{F}(0)$

Мы можемъ поэтому дать теоремѣ Дю Буа-Реймона слѣдующее выраженіе:

Если въ интервалѣ $\langle 0, h\rangle$, $h > 0$, функція $f(x)$ интегрируема, а функція

$$X(x) = \int_x^h \left| \frac{f(u)}{u} - \frac{1}{u^2} \int_0^u f(u)\, du \right| du$$

ограничена въ $(0, h)$, то

$$\lim \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}_0.$$

При этомъ $\mathfrak{F}_0$ есть предѣлъ выраженія $\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\, dx$ при положительномъ x, стремящемся къ нулю. При сдѣланныхъ здѣсь предположеніяхъ этотъ предѣлъ всегда существуетъ.

Если при $x = 0$ функція $f(x)$ непрерывна, то $\mathfrak{F}_0 = f(0)$. (ср. § 157).

Примѣненіе. Положимъ, что въ интервалѣ $\langle 0, h\rangle$, $h > 0$, функція $f(x)$ интегрируема и имѣетъ производную въ точкѣ $x = 0$.

Для даннаго ε (> 0) можно выбрать положительное число δ такъ, что въ интервалѣ $(0, \delta)$

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| < \varepsilon.$$

Если бы, въ самомъ дѣлѣ, въ интервалѣ $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, можно было постоянно найти такое число x_n, для котораго

$$\left| \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} - f'(0) \right| \geqq \varepsilon,$$

то равенство

$$\lim \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = f'(0)$$

не могло бы имѣть мѣста.

Такимъ образомъ, функція $\frac{f(u) - f(0)}{u}$ ограничена въ $(0, \delta)$, а, слѣдовательно, и въ $(0, h)$. То же справедливо и для функцій $\mathfrak{G}(u)$ и $X(x)$. Дѣйствительно,

$$\mathfrak{G}(u) = \frac{f(u) - f(0)}{u} - \frac{1}{u^2}\int\limits_0^u \frac{f(u) - f(0)}{u} u\,du,$$

и по первой теоремѣ о среднемъ значеніи

$$\int\limits_0^u \frac{f(u) - f(0)}{u} u\,du = \mathfrak{m}\int\limits_0^u u\,du = \mathfrak{m}\frac{u^2}{2},$$

при чемъ $\mathfrak{m}$ не меньше нижней и не больше верхней границы функціи $\frac{f(u) - f(0)}{u}$.

Такимъ образомъ, согласно предыдущей теоремѣ,

$$\lim \int\limits_0^h f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Тотъ же результатъ получается, если въ интервалѣ $\langle 0, h\rangle$ функція $f(x)$ интегрируема и если при надлежащемъ выборѣ положительнаго числа k функція

$$\frac{f(x) - f(0)}{x^k}$$

ограничена въ интервалѣ $(0, h)$.

Замѣчаніе. Такъ какъ

$$\lim \int\limits_0^h f(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\sin nx\,dx = 0, \qquad (0 < h < \pi)$$

если мы примемъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ $\langle 0, h\rangle$, то

$$\lim \int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x} f(x)\,dx = \lim \int\limits_0^h \frac{\sin nx}{\sin x} f(x)\,dx,$$

въ предположеніи, что этотъ предѣлъ существуетъ.

Глава XV.

Интегрированіе безконечныхъ рядовъ.

§ 169. **Ряды функцій.** Пусть $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots$ будетъ послѣдовательность функцій, которыя опредѣлены въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Положимъ сверхъ того, что безконечный рядъ

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

сходится для каждаго значенія x изъ $\langle a, b\rangle$. Мы говоримъ тогда, что этотъ рядъ сходится въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Его сумму мы обозначимъ черезъ $U(x)$, такъ что

$$U(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

$(a \leqq x \leqq b)$.

Степенные ряды образуютъ частный видъ рядовъ функцій.

§ 170. **Не всегда можно интегрировать почленно.** Старые аналитики, не долго думая, выводили изъ равенства

$$U(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

равенство

$$\int_a^b U(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots$$

Такимъ образомъ, они при интегрированіи безконечнаго ряда функцій поступали точно такъ же, какъ при интегрированіи суммы p функцій.

Мы можемъ на примѣрѣ показать, что этотъ способъ приводитъ иногда къ ложнымъ результатамъ.

Если положить

$$u_n(x) = nxe^{-nx^2} - (n-1)\,xe^{-(n-1)x^2},$$

то n-ая частная сумма $s_n(x)$ ряда $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$ будетъ равна nxe^{-nx^2}. При $x=0$ она равна нулю. При $x \gtrless 0$ ея абсолютная величина равна [1])

$$\frac{n\,|\,x\,|}{e^{n x^2}} < \frac{n\,|\,x\,|}{\frac{n^2 x^4}{2}} = \frac{2}{n\,|\,x\,|^3},$$

такъ что $\lim s_n(x) = 0$.

Такимъ образомъ, при каждомъ значеніи x

$$0 = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

Интегрируя безъ оговорокъ, мы нашли бы, что

$$0 = \int_0^1 u_1(x)\,dx + \int_0^1 u_2(x)\,dx + \int_0^1 u_3(x)\,dx + \cdots$$

Но

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(e^{-nx^2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right);$$

поэтому

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left(e^{-(n-1)} - e^{-n}\right).$$

Сообразно съ этимъ n-ая частная сумма ряда

$$\int_0^1 u_1(x)\,dx + \int_0^1 u_2(x)\,dx + \int_0^1 u_3(x)\,dx + \cdots$$

выражается черезъ

$$\tfrac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right)$$

и имѣетъ предѣлъ $1:2$.

Мы пришли, такимъ образомъ, къ абсурдному равенству $0 = \frac{1}{2}$.

---

[1]) Слѣдуетъ принять въ соображеніи, что $e^{nx^2} = 1 + \frac{nx^2}{1} + \frac{n^2x^4}{1\cdot 2} + \cdots$, такъ что $e^{nx^2} > \frac{n^2x^4}{2}$.

§ 171. **Равномѣрная сходимость.** Положимъ, что рядъ

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$$

сходится въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Если мы положимъ

$$R_n(x)=u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots,$$

то при не измѣняющемся x $(a \leqq x \leqq b)$

$$\lim R_n(x)=0,$$

ибо

$$U(x)-s_{n-1}(x)=R_n(x) \quad \text{и} \quad \lim s_{n-1}(x)=U(x).$$

Но можетъ, однако, случиться, что свойство $\lim R_n(x)=0$ сохраняется и въ томъ случаѣ, когда x не остается неизмѣняемымъ, а измѣняетъ съ возрастаніемъ индекса свое положеніе въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Въ этомъ случаѣ мы будемъ говорить, что рядъ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Мы можемъ формулировать это опредѣленіе такъ:

Рядъ $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$ называется **равномѣрно сходящимся** въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ [1], если онъ сходится въ $\langle a, b\rangle$ [2] и при томъ $\lim R_n(x_n)=0$, какъ бы ни была выбрана послѣдовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ въ $\langle a, b\rangle$.

Въ примѣрѣ, разсмотрѣнномъ въ § 170,

$$R_n(x)=-(n-1)\,x e^{-(n-1)x^2}.$$

Положивъ $x_n=1:\sqrt{n-1}$, $n>1$, получимъ:

$$R_n(x_n)=-\sqrt{n-1}\,e^{-1},$$

и ни въ какомъ случаѣ не будетъ $\lim R_n(x_n)=0$. Поэтому рядъ не будетъ равномѣрно сходиться въ интервалѣ $\langle 0, 1\rangle$, въ которомъ мы интегрировали.

Сходящійся въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ рядъ

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$$

[1] (или въ какой-либо другой области $\mathfrak{B}$).

[2] (соотв. въ $\mathfrak{B}$).

будетъ равномѣрно сходиться въ $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда почти всѣ члены послѣдовательности

$$|R_1(x)|,\ |R_2(x)|,\ |R_3(x)|, \ldots$$

будутъ во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ меньше, чѣмъ ε, какъ бы при этомъ ни было выбрано положительное число ε.

Легко видѣть, что это условіе достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, если оно выполнено, то въ каждой послѣдовательности

$$|R_1(x_1)|,\ |R_2(x_2)|,\ |R_3(x_3)|, \ldots$$

почти всѣ члены меньше, чѣмъ ε, т. е. $\lim R_n(x_n) = 0$ для каждой послѣдовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, взятой изъ интервала $\langle a, b\rangle$.

Если это условіе не выполнено и существуетъ, слѣдовательно, нѣкоторое исключительное ε, — пусть это будетъ ε_0, — то неограниченное число членовъ послѣдовательности уже не будетъ меньше, чѣмъ ε_0, во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Возможно поэтому выбрать $x_1, x_2, x_3, \ldots$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ такъ, что неограниченное множество членовъ послѣдовательности $|R_1(x_1)|,\ |R_2(x_2)|,\ |R_3(x_3)|, \ldots$ будетъ не меньше, чѣмъ ε_0. Но тогда рядъ $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$ не будетъ равномѣрно сходиться въ $\langle a, b\rangle$.

§ 172. **Теоремы о равномѣрно сходящихся рядахъ.**

1. Если въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ сходится равномѣрно какъ рядъ $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$, такъ и рядъ $v_1(x)+v_2(x)+v_3(x)+\cdots$, то равномѣрно сходится и рядъ

$$u_1(x)+v_1(x)+u_2(x)+v_2(x)+\cdots.$$

Если положить

$$R_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots$$

и

$$\bar{R}_n(x) = v_n(x) + v_{n+1}(x) + \cdots,$$

то въ новомъ ряду нечетными остатками $\mathrm{P}_1(x)$, $\mathrm{P}_3(x), \ldots$ будутъ

$$R_1(x)+\bar{R}_1(x),\ R_2(x)+\bar{R}_2(x), \ldots$$

а четными остатками $\mathrm{P}_2(x)$, $\mathrm{P}_4(x), \ldots$ будутъ

$$R_2(x)+\bar{R}_1(x), \quad R_3(x)+\bar{R}_2(x), \ldots$$

Если $x_1, x_2, x_3, \ldots$ есть послѣдовательность, содержащаяся въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то

$$\lim R_n(x_{2n-1}) = \lim \bar{R}_n(x_{2n-1}) = 0$$

и

$$\lim R_{n+1}(x_{2n}) = \lim \bar{R}_n(x_{2n}) = 0.$$

Такимъ образомъ,

$$\lim \mathrm{P}_{2n-1}(x_{2n-1}) = \lim R_n(x_{2n-1}) + \lim \bar{R}_n(x_{2n-1}) = 0$$

и

$$\lim \mathrm{P}_{2n}(x_{2n}) = \lim R_{n+1}(x_{2n}) + \lim \bar{R}_n(x_{2n}) = 0,$$

а потому и

$$\lim \mathrm{P}_n(x_n) = 0.$$

2. Если рядъ $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и если функцiя $\varphi(x)$ ограничена въ $\langle a, b\rangle$, то и рядъ

$$u_1(x)\varphi(x)+u_2(x)\varphi(x)+u_3(x)\varphi(x)+\cdots$$

сходится равномѣрно въ $\langle a, b\rangle$.

Положивъ $\mathrm{P}_n(x)=u_n(x)\varphi(x)+u_{n+1}(x)\varphi(x)+\cdots$ и $R_n(x) = u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots$, имѣемъ:

$$\mathrm{P}_n(x) = R_n(x)\varphi(x).$$

Если M есть верхняя граница функцiи $|\varphi(x)|$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то

$$|\mathrm{P}_n(x)| \leqq \mathrm{M}\,|R_n(x)|.$$

Такимъ образомъ, изъ равенства $\lim R_n(x_n) = 0$ вытекаетъ, что $\lim \mathrm{P}_n(x_n) = 0$.

3. Если рядъ $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и каждая функцiя $u_n(x)$ интегрируема въ $\langle a, b\rangle$, то и сумма ряда интегрируема въ $\langle a, b\rangle$.

Мы выберемъ число ν такъ, чтобы во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ выполнялось неравенство $|R_\nu(x)| < \varepsilon$. Тогда

$$U(x) = u_1(x) + \cdots + u_{\nu-1}(x) + R_\nu(x)$$

есть сумма ν функцій, которыя ограничены въ $\langle a, b\rangle$; слѣдовательно, и функція $U(x)$ также ограничена въ $\langle a, b\rangle$.

Чтобы убѣдиться въ интегрируемости функціи $U(x)$, слѣдуетъ принять во вниманіе, что среднее колебаніе суммы ν функцій никогда не бываетъ больше, чѣмъ сумма среднихъ колебаній слагаемыхъ. [1])

Такимъ образомъ, среднее колебаніе функціи $U(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ не больше, чѣмъ среднее колебаніе функціи $R_\nu(x)$, ибо каждая функція $u_n(x)$, будучи интегрируемой, имѣетъ среднее колебаніе, равное нулю. А такъ какъ функція $R_\nu(x)$ постоянно лежитъ между $-\varepsilon$ и ε, то ея среднее колебаніе не больше, чѣмъ 2ε. Среднее колебаніе функціи $U(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ будетъ поэтому меньше, чѣмъ 2ε, т. е. оно равно нулю, ибо ε было произвольно выбранное положительное число.

Мы не желаемъ оставить безъ указанія то обстоятельство, что въ предыдущемъ доказательствѣ требуется меньше, чѣмъ равномѣрная сходимость. Требуется только, чтобы каждому положительному ε можно было противопоставить остатокъ, который по своей абсолютной величинѣ былъ бы меньше, чѣмъ ε, во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Это свойство принадлежитъ разсмотрѣнному въ § 170 ряду, который сходится неравномѣрно, ибо въ немъ $R_1(x)$ равно нулю.

Въ своемъ превосходномъ Cours d'analyse (T. I, стр. 406) Г. Гурса (Goursat) даетъ такое опредѣленіе *равномѣрной сходимости*, въ которомъ требуется только, чтобы для каждаго положительнаго ε можно было указать **одинъ** остатокъ, котораго абсолютная величина во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ меньше, чѣмъ ε. По этому опредѣленію рядъ, разсмотрѣнный въ § 170, былъ бы равномѣрно сходящимся.

Г. Гурса доказываетъ также теорему, которую мы приводимъ

[1]) Это вытекаетъ изъ того, что колебаніе суммы никогда не бываетъ больше, чѣмъ сумма колебаній слагаемыхъ,

въ No. 4. При его опредѣленіи равномѣрной сходимости эта теорема прямо ложна (ср. § 170).

4. Если рядъ $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и каждое $u_n(x)$ интегрируемо въ $\langle a, b\rangle$, то

$$\int_a^b (u_1(x)+u_2(x)+\cdots)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots$$

Слѣдовательно, интегралъ такого ряда находятъ, интегрируя почленно.

Изъ No. 3 мы знаемъ, что функція $U(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Точно такъ же и функція $R_n(x)$ интегрируема въ $\langle a, b\rangle$. Если ε есть данное положительное число, то по абсолютной величинѣ почти всѣ $R_n(x)$ меньше, чѣмъ ε, во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Поэтому почти для всѣхъ значеній индекса n

$$\left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right| < \varepsilon(b-a),$$

т. е.

$$\left|\int_a^b U(x)\,dx - \sum_{\nu=1}^{n-1}\int_a^b u_\nu(x)\,dx\right| < \varepsilon(b-a).$$

Но это означаетъ, что

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n-1}\int_a^b u_\nu(x)\,dx = \int_a^b U(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b U(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots.$$

Равномѣрная сходимость есть достаточное, но отнюдь не необходимое условіе для того, чтобы можно было интегрировать почленно.

Это мы видимъ на рядѣ

$$(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots,$$

который въ интервалѣ $\langle 0,\ 1\rangle$, хотя и сходится, но не равномѣрно. Что этотъ рядъ сходится не равномѣрно, видно изъ того, что при $0 \leqq x < 1$

$$R_n(x) = x^{n-1}.$$

Если положить $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, то будетъ

$$R_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1},$$

такъ что

$$\lim R_n(x_n) = \frac{1}{e},$$

между тѣмъ какъ при равномѣрной сходимости должно было бы быть $\lim\ R_n(x_n) = 0$.

Несмотря на это, нашъ рядъ можно интегрировать почленно. Сумма $U(x)$ ряда

для $0 \leqq x < 1$ равна 1; для $x = 1$ равна нулю.

Такимъ образомъ,

$$\int_0^1 U(x)\,dx = 1.$$

Съ другой стороны,

$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx - \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Почленное интегрированіе ряда приводитъ, такимъ образомъ, къ ряду

$$\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots;$$

n-ая частная сумма этого ряда равна $1 - \dfrac{1}{n+1}$ и имѣетъ предѣлъ 1.

Такимъ образомъ, сумма ряда дѣйствительно равна $\int_0^1 U dx$.

5. Если рядъ $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и если каждое $u_n(x)$ непрерывно

въ точкѣ x_0, лежащей въ $\langle a, b\rangle$, то и сумма $U(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ непрерывна въ точкѣ x_0.

Мы должны показать, что изъ равенства $\lim x_n = x_0$ (всѣ x_n суть числа изъ интервала $\langle a, b\rangle$) всегда слѣдуетъ, что $\lim U(x_n) = U(x_0)$.

Мы выбираемъ ν такъ, что $|R_\nu(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Если мы положимъ $u_1(x) + \cdots + u_{\nu-1}(x) = s_{\nu-1}(x)$, то функція $s_{\nu-1}(x)$, какъ сумма $\nu - 1$ функцій, непрерывныхъ въ точкѣ x_0, будетъ непрерывна въ точкѣ x_0. Почти всѣ $s_{\nu-1}(x_n)$ будутъ поэтому отличаться отъ $s_{\nu-1}(x_0)$ меньше, чѣмъ на $\frac{1}{3}\varepsilon$. Такъ какъ

$$U(x_n) - U(x_0) = s_{\nu-1}(x_n) - s_{\nu-1}(x_0) + R_\nu(x_n) - R_\nu(x_0),$$

то почти для всѣхъ значеній индекса n

$$|U(x_n) - U(x_0)| < \varepsilon.$$

А это означаетъ, что $\lim U(x_n) = U(x_0)$.

Если рядъ $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и если каждый членъ $u_n(x)$ непрерывенъ въ $\langle a, b\rangle$, то и сумма $U(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ непрерывна въ $\langle a, b\rangle$.

Въ частномъ случаѣ эту теорему можно обратить. А именно:

6. Сходящійся въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ рядъ, члены котораго суть непрерывныя, неотрицательныя функціи, имѣетъ непрерывную сумму тогда и только тогда, когда онъ сходится равномѣрно.

Намъ нужно доказать только необходимость указаннаго здѣсь условія.

Если сумма $U(x)$ непрерывна, то въ силу непрерывности функцій $u_n(x)$ и всѣ остатки $R_n(x)$ будутъ непрерывными. Каждый остатокъ $R_n(x)$ имѣетъ наибольшее значеніе $R_n(\xi_n)$, и ясно, что

$$R_1(\xi_1) \geqq R_2(\xi_2) \geqq R_3(\xi_3) \geqq \cdots,$$

ибо $R_n(\xi_n) \geqq R_n(\xi_{n+1}) \geqq R_{n+1}(\xi_{n+1})$. Сверхъ того, $R_n(\xi_n) \geqq 0$.

Намъ нужно показать, что $\lim R_n(\xi_n) = 0$.

Въ послѣдовательности $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ есть сходящаяся часть. Соединяя надлежащимъ образомъ въ выраженіи $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$ рядомъ стоящіе члены въ группы, мы можемъ привести вопросъ къ разсмотрѣнію того случая, когда сама послѣдовательность $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ сходится. Пусть будетъ $\lim \xi_n = \xi$. Тогда, вслѣдствіе непрерывности функціи $U(x)$,

$$\lim R_\nu(\xi_n) = R_\nu(\xi).$$

Такъ какъ для $n > \nu$

$$R_\nu(\xi_n) \geqq R_n(\xi_n),$$

то

$$\lim R_\nu(\xi_n) = R_\nu(\xi) \geqq \lim R_n(\xi_n).$$

Это справедливо при $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ Но когда ν пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$, то $R_\nu(\xi)$ приближается къ нулю, такъ что и $\lim R_n(\xi_n) = 0$.

7. Если возможно выбрать постоянныя $A_1, A_2, A_3, \ldots$ такъ, что рядъ $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$ сходится и если во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ выполняются неравенства

$$|u_1(x)| \leqq A_1, \quad |u_2(x)| \leqq A_2, \quad |u_3(x)| \leqq A_3, \ldots,$$

то рядъ

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| + |u_3(x)| + \cdots$$

сходится равномѣрно въ $\langle a, b\rangle$.

Легко видѣть, что рядъ сходится. Чтобы убѣдиться въ равномѣрной сходимости, слѣдуетъ замѣтить, что

$$|u_n(x)| + |u_{n+1}(x)| + \cdots \leqq A_n + A_{n+1} + \cdots.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, какъ бы ни выбирать въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ послѣдовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$,

$$\lim \{ |u_n(x_n)| + |u_{n+1}(x_n)| + \cdots \} = 0.$$

Если рядъ $|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots$ сходится въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ равномѣрно, то это же относится и къ ряду $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$. Ибо

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots| \leqq |u_n(x)| + |u_{n+1}(x)| + \cdots.$$

Примѣненіе. Пусть $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ будетъ степенной рядъ, котораго радіусъ сходимости ρ отличенъ отъ нуля. Если интервалъ $\langle a, b\rangle$ лежитъ въ интервалѣ $(-\rho, \rho)$, то рядъ $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots$ сходится въ $\langle a, b\rangle$ равномѣрно. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ выбрать въ $(-\rho, \rho)$ такой интервалъ $\langle -r, r\rangle$, чтобы интервалъ $\langle a, b\rangle$ заключался въ интервалѣ $\langle -r, r\rangle$. Тогда во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$

$$|a_nx^n| \leqq |a_n| r^n.$$

Такъ какъ рядъ $|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\cdots$ сходится, то рядъ $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots$, а вмѣстѣ съ нимъ и рядъ a_0+a_1x+ $+a_2x^2+\cdots$ сходится въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ равномѣрно.

Поэтому, положивъ внутри интервала сходимости

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$

найдемъ, что

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\cdots.$$

Рядъ

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

имѣетъ тотъ же кругъ сходимости, что и рядъ $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$.

Положивъ внутри интервала сходимости

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$

находимъ, что

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx = a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=f(x)-a_0.$$

Такъ какъ функція $\varphi(x)$ непрерывна внутри интервала сходимости, то отсюда слѣдуетъ, что $f'(x)=\varphi(x)$, т. е.

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots.$$

Этотъ результатъ намъ уже извѣстенъ.

8. Пусть $a_1+a_2+a_3+\cdots$ будетъ сходящійся рядъ, и положимъ, что $f(x)$ есть функція, которая убываетъ при $x\geqq 0$, но никогда не бываетъ отрицательной. Тогда рядъ

$$a_1f(x)+a_2f(2x)+a_3f(3x)+\cdots$$

сходится равномѣрно при $x \geqq 0$.

Такъ какъ по предположенію

$$f(x) \geqq f(2x) \geqq f(3x) \geqq \cdots$$

и $f(px) \geqq 0$, то къ ряду

$$a_{\nu+1} f((\nu+1)x) + \cdots + a_{\nu+p} f((\nu+p)x)$$

мы можемъ примѣнить лемму Абеля и заключить, что въ нашемъ ряду [1])

$$s_{\nu+p} - s_\nu = f((\nu+1)x)\mathfrak{M}(a_{\nu+1}, a_{\nu+1}+a_{\nu+2}, \ldots, a_{\nu+1}+a_{\nu+2}+\cdots+a_{\nu+p}),$$

т. е.

$$s_{\nu+p} - s_\nu = f((\nu+1)x)\mathfrak{M}(\sigma_{\nu+1}-\sigma_\nu, \sigma_{\nu+2}-\sigma_\nu, \cdots, \sigma_{\nu+p}-\sigma_\nu).$$

При надлежащемъ выборѣ числа ν величины $\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}, \sigma_{\nu+2}, \cdots$ будутъ отличаться отъ σ меньше, чѣмъ на $\varepsilon/2$, а, слѣдовательно, другъ отъ друга меньше, чѣмъ на ε.

Тогда при $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$|s_{\nu+p} - s_\nu| \leqq f(0)\varepsilon.$$

Въ послѣдовательности $s_1, s_2, s_3, \ldots$ существуетъ поэтому членъ s_ν, отъ котораго почти всѣ остальные члены отличаются меньше, чѣмъ на $\varepsilon f(0)$. Если принять во вниманіе, что ε есть произвольно выбранное положительное число, то ясно, что критерій Коши (§ 27) выполненъ и что $\lim s_n$ существуетъ. Этимъ доказана сходимость ряда $a_1 f(x) + a_2 f(2x) + \cdots$

Но изъ вышеприведеннаго неравенства вытекаетъ, что

$$|R_{\nu+1}(x)| \leqq f(0)\varepsilon,$$

когда p пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \cdots$.

Во всемъ разсужденіи число ν можетъ быть замѣщено лю-

[1]) n-ую частную сумму ряда $a_1 f(x) + a_2 f(2x) + \cdots$ мы обозначаемъ черезъ s_n, а n-ую частную сумму ряда $a_1 + a_2 + \cdots$ черезъ σ_n. Наконецъ, мы полагаемъ $a_1 + a_2 + \cdots = \sigma$.

бымъ большимъ числомъ. Такимъ образомъ, и

$$|R_{\nu+2}(x)| \leqq f(0)\,\varepsilon$$

и т. д. Поэтому почти всѣ остатки имѣютъ то свойство, что при $x \geqq 0$ ихъ абсолютныя величины не превосходятъ числа $f(0)\,\varepsilon$. Но это означаетъ, что рядъ $a_1 f(x) + a_2 f(2x) + \cdots$ сходится равномѣрно при $x \geqq 0$.

Положимъ, что при $x \geqq 0$ функція $F(x)$ будетъ монотонной и, сверхъ того, ограниченной, т. е. положимъ, что можно выбрать число A такъ, чтобы всѣ значенія функціи заключались въ интервалѣ $\langle F(0), A\rangle$. Тогда функція

$$f(x) = \frac{F(x) - A}{F(0) - A}$$

при $x \geqq 0$ будетъ убывать и никогда не будетъ отрицательной. Такимъ образомъ, рядъ $a_1 f(x) + a_2 f(2x) + \cdots$ будетъ равномѣрно сходиться при $x \geqq 0$. Это свойство сохранится, если умножить рядъ на постоянную $F(0) - A$ и затѣмъ прибавить $A(a_1 + a_2 + \cdots)$. Поэтому и рядъ

$$a_1 F(x) + a_2 F(2x) + a_3 F(3x) + \cdots$$

будетъ равномѣрно сходиться при $x \geqq 0$

Примѣры. 1. Если положить $\varphi(0) = 1$, то функція

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

будетъ повсюду имѣть непрерывную производную $\varphi'(x)$.

А именно, при $x \gtrless 0$

$$\varphi'(x) = 2\,\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

При $x = 0$ производная будетъ

$$\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 1}{x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^3} = -\frac{1}{3}x + \cdots,$$

такъ что
$$\varphi'(0) = 0.$$

Что производная $\varphi'(x)$ непрерывна при $x \geqq 0$, видно изъ выраженія для $\varphi'(x)$. Непрерывность же при $x = 0$ слѣдуетъ изъ того, что при x, стремящемся къ нулю, $\frac{\sin x}{x}$ имѣетъ предѣлъ 1, между тѣмъ какъ $(x\cos x - x\sin x) : x^2$ имѣетъ предѣлъ нуль. Въ самомъ дѣлѣ,
$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{1}{3}x + \cdots$$

Но
$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(x)\,dx$$
и
$$\int_0^x \varphi'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^x \{|\varphi'(x)| + \varphi'(x)\}\,dx - \tfrac{1}{2}\int_0^x \{|\varphi'(x)| - \varphi'(x)\}\,dx.$$

При $x \geqq 0$ каждый изъ двухъ интеграловъ въ правой части возрастаетъ и никогда не бываетъ отрицательнымъ. Сверхъ того, оба эти интеграла не больше, чѣмъ
$$\int_0^x |\varphi'(x)|\,dx.$$

Если удастся показать, что эта функція ограничена, то этимъ будетъ показано, что и оба эти интегралы будутъ ограничены.

Написавъ
$$\varphi'(x) = \frac{2\sin x\cos x}{x^2} - \frac{2\sin^2 x}{x^3},$$
находимъ, что при $x \geqq 1$
$$|\varphi'(x)| < \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} < \frac{4}{x^2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что
$$\int_1^x |\varphi'(x)|\,dx \leqq 4\int_1^x \frac{dx}{x^2} = 4\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 4 \qquad (x \geqq 1)$$

и

$$\int_0^x |\varphi'(x)|\,dx < 4 + \int_0^1 |\varphi'(x)|\,dx. \qquad (x \geqq 0)$$

Такимъ образомъ, $\varphi(x)$ есть сумма двухъ функцій, а именно

$$F(x) = \varphi(0) + \tfrac{1}{2}\int_0^x \{\,|\varphi'(x)| + \varphi'(x)\,\}\,dx$$

и

$$G(x) = -\tfrac{1}{2}\int_0^x \{\,|\varphi'(x)| - \varphi'(x)\,\}\,dx,$$

которыя монотонны и ограничены при $x \geqq 0$.

А такъ какъ ряды

$$a_1 F(x) + a_2 F(2x) + \cdots \text{ и } a_1 G(x) + a_2 G(2x) + \cdots$$

сходятся равномѣрно при $x \geqq 0$, то то же относится и къ ряду

$$a_1\{F(x) + G(x)\} + a_2\{F(2x) + G(2x)\} + \cdots.$$

Этимъ мы доказали слѣдующее предложеніе, которое будетъ намъ полезно впослѣдствіи.

Если рядъ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ сходится, то сходится равномѣрно[1]) и рядъ

$$a_1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + a_2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + a_3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 + \cdots$$

для всѣхъ значеній x.

Такъ какъ функція $\left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^2$ непрерывна въ точкѣ $x = 0$, если только мы ей припишемъ значеніе 1 при $x = 0$, то изъ равномѣрной сходимости ряда мы можемъ заключить, что для значеній x, стремящихся къ нулю,

$$\lim\left\{a_1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + a_2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + a_3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 + \cdots\right\}$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

---

[1]) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ есть четная функція. Поэтому рядъ сходится равномѣрно какъ при $x \geqq 0$, такъ и при $x \leqq 0$.

2. Если рядъ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ сходится, то и рядъ

$$a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle 0, 1 \rangle$.

Достаточно показать, что рядъ сходится равномѣрно при $0 < t \leqq 1$, ибо при $t = 0$ всѣ остатки равны нулю.

Допустивъ, что $0 < t \leqq 1$ и положивъ

$$t = e^{-x}, \quad \text{такъ что} \quad x = \log \frac{1}{t},$$

находимъ, что $x \geqq 0$.

Теперь нашъ рядъ имѣетъ видъ

$$a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} + a_3 e^{-3x} + \cdots,$$

т. е.

$$a_1 f(x) + a_2 f(2x) + a_3 f(3x) + \cdots,$$

при чемъ

$$f(x) = e^{-x}.$$

Но эта функція убываетъ и никогда не становится отрицательной при $x \geqq 0$.

Поэтому рядъ $a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} + \cdots$ сходится равномѣрно при $x \geqq 0$, рядъ же $a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ сходится равномѣрно при $0 < t \leqq 1$, а, слѣдовательно, и въ интервалѣ $\langle 0, 1 \rangle$.

Если степенной рядъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

сходится равномѣрно при $x = x_0$ ($x_0 \gtreqless 0$), то онъ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle 0, x_0 \rangle$ (теорема Абеля).

Положимъ $x = tx_0$; тогда степенной рядъ приметъ видъ

$$a_0 + a_1 x_0 t + a_2 x_0^2 t^2 + \cdots.$$

Изъ сходимости ряда $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots$, согласно съ предыдущимъ, вытекаетъ равномѣрная сходимость ряда $a_0 + a_1 x_0 t + a_2 x_0^2 t^2 + \cdots$ для $0 \leqq t \leqq 1$, т. е. равномѣрная сходимость ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ въ интервалѣ $\langle 0, x_0 \rangle$.

Рядъ

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

сходится при $x=1$. Онъ сходится поэтому равномѣрно въ интервалѣ $\langle 0, 1\rangle$. Но при $|x|<1$

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

Если x стремится къ 1, то лѣвая часть имѣетъ предѣлъ $\log 2$, правая же (ср. No 5) стремится къ предѣлу $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$. Такимъ образомъ,

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots.$$

§ 173. **Тригонометрическіе ряды.** Подъ тригонометрическимъ [1]) рядомъ разумѣютъ рядъ вида

$$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots.$$

Мы примемъ, что рядъ сходится для всѣхъ значеній x и обозначимъ его сумму черезъ $U(x)$.

Уже Эйлеръ (Euler) зналъ, въ какой зависимости стоятъ коэффиціенты a, b къ функціи $U(x)$. Онъ изъ равенства

$$U(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots$$

выводитъ равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}U(x)\,dx=\pi a_0+\sum\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

Такъ какъ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\left(\frac{\sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi}=0 \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=-\left(\frac{\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi}=0,$$

[1]) $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$ называются тригонометрическими функціями.

то предыдущее равенство даетъ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\,dx.$$

Чтобы опредѣлить a_p и b_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, онъ умножаетъ рядъ соотвѣтственно на $\cos px$ и $\sin px$ и вновь интегрируетъ отъ $-\pi$ до $+\pi$. Такимъ образомъ, получается

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos px\,dx = \tfrac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\,dx +$$

$$+\sum\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos px\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos px\,dx\right)$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\sin px\,dx = \tfrac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\,dx +$$

$$+\sum\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin px\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin px\,dx\right).$$

Но

$$2\cos nx\cos px = \cos(n+p)x + \cos(n-p)x,$$

$$2\sin nx\sin px = \cos(n-p)x - \cos(n+p)x,$$

$$2\cos nx\sin px = \sin(n+p)x - \sin(n-p)x,$$

$$2\sin nx\cos px = \sin(n+p)x + \sin(n-p)x.$$

Отсюда въ случаѣ $n \gtreqless p$ слѣдуетъ:

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos px\,dx = \left(\frac{\sin(n+p)x}{n+p}\right)_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{\sin(n-p)x}{n-p}\right)_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin px\,dx = \left(\frac{\sin(n-p)x}{n-p}\right)_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{\sin(n+p)x}{n+p}\right)_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin px\,dx = -\left(\frac{\cos(n+p)x}{n+p}\right)_{-\pi}^{\pi}+\left(\frac{\cos(n-p)x}{n-p}\right)_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos px\,dx = -\left(\frac{\cos(n+p)x}{n+p}\right)_{-\pi}^{\pi}-\left(\frac{\cos(n-p)x}{n-p}\right)_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Въ случаѣ $n=p$ находимъ:

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cos px\,dx = \left(\frac{\sin 2px}{2p}\right)_{-\pi}^{\pi}+2\pi=2\pi,$$

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\sin px\,dx = 2\pi-\left(\frac{\sin 2px}{2p}\right)_{-\pi}^{\pi}=2\pi,$$

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\sin px\,dx = -\left(\frac{\cos 2px}{2p}\right)_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Сообразно съ этимъ въ первомъ ряду равны нулю всѣ члены, кромѣ члена πa_p, а во второмъ—всѣ члены, кромѣ члена πb_p, такъ что

$$a_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(x)\cos px\,dx,\quad b_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(x)\sin px\,dx.$$

Если въ формулѣ для a_p замѣнить p нулемъ, то получимъ формулу для a_0. Это простое соотношеніе имѣетъ мѣсто по той причинѣ, что первый членъ ряда мы обозначили черезъ $\frac{1}{2}a_0$.

Противъ этого Эйлерова пріема слѣдуетъ возразить, что въ немъ безъ оговорокъ пользуются почленнымъ интегрированіемъ. Если разсматриваемый рядъ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$, то пріемъ совершенно правиленъ. Этотъ случай имѣетъ мѣсто, напримѣръ, если рядъ

$$|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\cdots$$

сходится. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ для каждаго x

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqq |a_n| + |b_n|,$$

откуда, на основанiи No. 7 § 172-го, можно придти къ заключенiю о равномѣрной сходимости.

§ 174. **Ряды Фурье.** Мы принимаемъ, что функцiя $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi \rangle$. Числа

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px\, dx \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px\, dx \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

мы называемъ постоянными Фурье (Fourier) функцiи $f(x)$, а тригонометрическiй рядъ

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots,$$

котораго коэффицiенты суть постоянныя Фурье функцiи $f(x)$, мы будемъ называть рядомъ Фурье функцiи $f(x)$.

Результатъ, полученный въ § 173, можно выразить тогда слѣдующимъ образомъ: Если въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi \rangle$ тригонометрическiй рядъ сходится равномѣрно, то онъ есть рядъ Фурье своей суммы.

§ 175. **Частныя суммы ряда Фурье.** Если вставить вмѣсто a_p и b_p ихъ интегральныя выраженiя

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos pu\, du, \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin pu\, du,$$

то выйдетъ:

$$a_p \cos px + b_p \sin px = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\cos pu \cos px + \sin pu \sin px)\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos p(u-x)\,du,$$

и рядъ Фурье будетъ имѣть видъ:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(u-x)\,du$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos 2(u-x)\,du + \cdots$$

Мы знаемъ, что интегралы не измѣнятся, если мы припишемъ функціи $f(x)$ значеніе $f(-\pi)$ въ точкѣ $x=\pi$. Сдѣлавъ это, мы можемъ распространить опредѣленіе функціи $f(x)$ на любыя значенія x, подчинивъ ее требованію, чтобы при всѣхъ значеніяхъ x было

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Геометрически это сводится къ тому, что мы послѣдовательно передвигаемъ на 2π параллельно оси x-овъ вправо и влѣво кривую, изображающую уравненіе $y=f(x)$ въ интервалѣ $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

Такимъ образомъ, функція $f(x)$ опредѣлена теперь для всѣхъ значеній x и имѣетъ періодъ 2π. Такъ какъ мы считаемъ функцію $f(x)$ интегрируемой въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$, то новая функція $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ.

Замѣчаніе. Если функція $\varphi(u)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ и имѣетъ періодъ 2π, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a+u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\,du,$$

какъ бы ни выбрать число a; въ самомъ дѣлѣ, положивъ $a+u=v$, имѣемъ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a+u)\,du = \int_{a-\pi}^{a+\pi} \varphi(v)\,dv = \int_{a-\pi}^{a+\pi} \varphi(u)\,du.$$

Но послѣднiй интегралъ равенъ суммѣ

$$\int_{a-\pi}^{-\pi}\varphi(u)\,du+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\,du+\int_{\pi}^{a+\pi}\varphi(u)\,du.$$

Остается только показать, что

$$\int_{-\pi}^{a-\pi}\varphi(u)\,du=\int_{\pi}^{a+\pi}\varphi(u)\,du.$$

Это немедленно удается при помощи подстановки $v=u+2\pi$.

На основанiи приведеннаго замѣчанiя мы можемъ теперь написать рядъ Фурье такъ:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\cos u\,du$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\cos 2u\,du+\cdots;$$

p-ая частная сумма имѣетъ видъ:

$$s_p^{\pi}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos(p-1)u\right\}f(x+u)\,du.$$

Но по § 165 [1])

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos(p-1)u=\frac{\cos(p-1)u-\cos pu}{2(1-\cos u)}.$$

Такимъ образомъ,

$$s_p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\cos(p-1)u-\cos pu}{1-\cos u}\,du.\quad(p=1,2,3,\ldots)$$

Замѣтимъ также, что изъ равенствъ

[1]) При $u=0$ мы должны правую часть положить равной $p-\frac{1}{2}$.

$$s_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{1-\cos u}{1-\cos u}\,du,$$

$$s_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\cos u-\cos 2u}{1-\cos u}\,du,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\cos(p-1)u-\cos pu}{1-\cos u}\,du$$

вытекаетъ, что

$$\frac{s_1(x)+s_2(x)+\cdots+s_p(x)}{p}=\frac{1}{2\pi p}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{1-\cos pu}{1-\cos u}\,du.$$

§ 176. **Рядъ Фурье функціи съ ограниченной варіаціей.** Формулу для $s_p(x)$ можно по § 165 написать и такъ:

$$s_p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(p-\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

Если воспользоваться разложеніемъ

$$\int_{-\pi}^{\pi}=\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}$$

и ввести новую перемѣнную v, положивъ въ первомъ интегралѣ $v=-\frac{1}{2}u$, а во второмъ $v=\frac{1}{2}u$, то получимъ:

$$s_p(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{f(x-2v)+f(x+2v)}{2}\,\frac{\sin(2p-1)v}{\sin v}\,dv.$$

Это такой же интегралъ, какой мы разсматривали въ § 166. Изъ полученныхъ тамъ результатовъ мы можемъ вывести слѣдующее:

Если функція $f(u)$, интегрируемая въ интервалѣ $\langle-\pi,\pi\rangle$, имѣетъ ограниченную варіацію какъ слѣва, такъ и справа отъ точки $u = x$,[1]) то существуетъ $\lim s_p(x)$, т. е. рядъ Фурье сходится въ точкѣ x. Его сумма равна

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

гдѣ $f(x-0)$ и $f(x+0)$ означаютъ соотвѣтственно предѣлы функцій $f(x-h)$ и $f(x+h)$ для положительныхъ значеній h, стремящихся къ нулю.

Если функція $f(x)$ имѣетъ ограниченную варіацію въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$, то рядъ Фурье[2]) имѣетъ сумму $\frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$ при всякомъ значеніи x.

Мы сдѣлаемъ въ этомъ мѣстѣ замѣчаніе о функціяхъ съ ограниченной варіацией.

Если $f(x)$ есть функція съ ограниченной варіацией справа отъ a и слѣва отъ b $(a < b)$, а также и справа и слѣва отъ каждой точки x между a и b,[3]) то $f(x)$ есть функція съ ограниченной варіацией въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Если бы функція $f(x)$ не была функціей съ ограниченной варіацией въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то она также не была бы функціей съ ограниченной варіацией, по крайней мѣрѣ, въ одномъ изъ двухъ интерваловъ $\langle a, \frac{a+b}{2}\rangle$, $\langle \frac{a+b}{2}, b\rangle$, напримѣръ, въ $\langle a_1, b_1\rangle$, а также и въ одной половинѣ $\langle a_2, b_2\rangle$ интервала $\langle a_1, b_1\rangle$ и т. д. Если x_0 есть общій предѣлъ для величинъ a_n и b_n, то либо влѣво, либо вправо отъ x_0 функція $f(x)$ не была бы функціей съ ограниченной варіацией.

§ 177. **Теорема Липшица.** Результатъ, полученный въ § 176, по существу принадлежитъ Дирихле (1829). Липшицъ (Lipschitz)

---

[1]) Въ этомъ именно случаѣ функціи $f(x-2v)$, $f(x+2v)$, а, слѣдовательно, и функція $\frac{1}{2}\{f(x-2v)+f(x+2v)\}$, имѣютъ ограниченную варіацію вправо отъ $v=0$. Въ случаѣ $x = \pm\pi$ слѣдуетъ имѣть въ виду, что $f(u+2\pi) = f(u)$.

[2]) Постоянныя Фурье существуютъ, такъ какъ по § 154 функція $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$.

[3]) Когда нужно установить, будетъ ли $f(x)$ функція съ ограниченной варіацией справа и слѣва отъ x_0, то можно предварительно замѣнить $f(x_0)$ какимъ-либо другимъ значеніемъ.

установилъ слѣдующую теорему (хотя и не въ такомъ общемъ видѣ), которую можно доказать при помощи § 168.

Если существуетъ положительное число k такого рода, что при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ A и B обѣ функцiи

$$\varphi(v) = \frac{f(x+v)-A}{v^k}, \quad \psi(v) = \frac{f(x-v)-B}{v^k} \qquad (v>0)$$

ограничены, то рядъ Фурье сходится въ точкѣ x и имѣетъ сумму, равную $\frac{1}{2}(A+B)$. [1])

Очевидно,

$$A = f(x+0), \quad B = f(x-0).$$

Рядъ Фурье сходится, напримѣръ, въ каждомъ мѣстѣ x, гдѣ существуетъ производная $f'(x)$ (ср. § 168), и его сумма равна $f(x)$. [1])

§ 178. **Теорема объ однозначности.** Если два тригонометрическихъ ряда сходятся повсюду и имѣютъ одну и ту же сумму, то они тождественны.

Или выражаясь иначе:

Если при каждомъ значенiи x

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \cdots = 0,$$

то всѣ a_n и всѣ b_n равны нулю.

Пусть x_0 будетъ произвольное число. Такъ какъ, въ силу сходимости ряда,

$$\lim(a_n\cos nx_0 + b_n\sin nx_0) = 0,$$

то послѣдовательность

$$\frac{1}{2}a_0,\ a_1\cos x_0 + b_1\sin x_0,\quad a_2\cos 2x_0 + b_2\sin 2x_0, \cdots,$$

члены которой мы по порядку обозначимъ черезъ $A_0, A_1, A_2, \ldots,$

[1]) Конечно, предполагается, что функцiя $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$. Въ случаѣ $x = \pm\pi$ слѣдуетъ замѣтить, что $f(u+2\pi) = f(u)$.

навѣрно ограничена. Существуетъ, слѣдовательно, такое число A что $|A_n| < A$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$

Но, складывая равенства

$$0 = \frac{1}{2} a_0 + \{ a_1 \cos (x_0 + x) + b_1 \sin (x_0 + x) \} + \{ a_2 \cos 2 (x_0 + x) + b_2 \sin 2 (x_0 + x) \} + \cdots$$

и

$$0 = \frac{1}{2} a_0 + \{ a_1 \cos (x_0 - x) + b_1 \sin (x_0 - x) \} + \{ a_2 \cos 2 (x_0 - x) + b_2 \sin 2 (x_0 - x) \} + \cdots,$$

находимъ:

$$0 = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots.$$

Это равенство пригодно для всякаго x. Но мы теперь знаемъ, что по абсолютной величинѣ коэффиціенты A_n меньше, чѣмъ A.

Рядъ

$$-\frac{A_0 x^2}{2} + \frac{A_1 \cos x}{1^2} + \frac{A_2 \cos 2x}{2^2} + \frac{A_3 \cos 3x}{3^2} + \cdots$$

сходится равномѣрно въ каждомъ интервалѣ (ср. § 172), ибо

$$\left| \frac{A_n \cos nx}{n^2} \right| < \frac{A}{n^2},$$

и рядъ

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

сходится [1]). Сумма $\varphi(x)$ перваго ряда будетъ поэтому повсюду непрерывна, такъ какъ его члены непрерывны.

А такъ какъ

$$\cos n (x + 2h) + \cos n (x - 2h) - 2 \cos nx$$
$$= 2 (\cos 2nh - 1) \cos nx = -4 \sin^2 nh \cos nx,$$

---

[1]) Рядъ $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots$, т. е. рядъ $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots$, сходится и $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$; поэтому сходится и рядъ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$, а потому сходится также рядъ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$

то при $h \gtrless 0$

$$-\frac{\varphi(x+2h)+\varphi(x-2h)-2\varphi(x)}{(2h)^2}=A_0+A_1\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2+$$
$$+A_2\cos 2x\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2+\cdots.$$

въ виду сходимости ряда $A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots$ мы можемъ здѣсь примѣнить теорему, изложенную въ No. 8 § 172-го, и заключить, что для значенiй h, стремящихся къ нулю,

$$-\lim\frac{\varphi(x+2h)+\varphi(x-2h)-2\varphi(x)}{(2h)^2}$$
$$=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots=0.$$

По теоремѣ Шварца, приведенной въ § 106, мы можемъ отсюда заключить, что

$$\varphi(x)=\alpha x+\beta$$

(α, β суть постоянныя).

Мы имѣемъ, такимъ образомъ,

$$\frac{A_0}{2}x^2+\alpha x+\beta=\frac{A_1\cos x}{1^2}+\frac{A_2\cos 2x}{2^2}+\frac{A_3\cos 3x}{3^2}+\cdots.$$

при замѣщенiи x на $-x$ правая часть остается неизмѣняемой. Поэтому должно быть $\alpha=0$.

При $x=0$ и при $x=2\pi$ правая часть имѣетъ одно и то же значенiе; поэтому необходимо $A_0=0$, такъ что имѣетъ мѣсто равенство

$$0=-\beta+\frac{A_1\cos x}{1^2}+\frac{A_2\cos 2x}{2^2}+\frac{A_3\cos 3x}{3^2}+\cdots$$

Такъ какъ этотъ тригонометрическiй рядъ сходится равномѣрно, то для коэффицiентовъ вѣрны формулы Эйлера. Коэффицiенты должны поэтому быть равны нулю, ибо сумма ряда равна нулю.

Этимъ мы показали, что

$$a_0=0 \quad \text{и} \quad a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0=0$$

(при $n=1,2,3,\ldots$), при чемъ x_0 означаетъ любое число.

Такимъ образомъ, при каждомъ значенiи x

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0.$$

Дифференцируя, получаемъ отсюда

$$-a_n \sin nx + b_n \cos nx = 0.$$

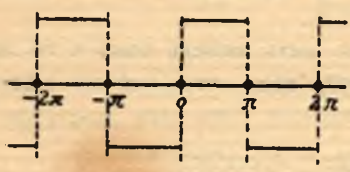
Имѣемъ, слѣдовательно,

$$a_n = (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos nx$$
$$- (-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \sin nx = 0,$$
$$b_n = (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \sin nx$$
$$+ (-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \cos nx = 0.$$

§ 179. **Примѣры.** 1. Положимъ, что функцiя $f(x)$ опредѣлена въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi \rangle$ слѣдующимъ образомъ:

$$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0,$$
$$f(x) = -c \text{ (при } -\pi < x < 0),$$
$$f(x) = +c \text{ (при } 0 < x < \pi).$$

Подчиняя функцiю $f(x)$ требованiю $f(x + 2\pi) = f(x)$, мы распространяемъ опредѣленiе на всѣ значенiя x. Кривая изображенiя функцiи $f(x)$ указана на фигурѣ 11.



Фиг. 11.

По § 176 рядъ Фурье въ этомъ случаѣ сходится и его сумма постоянна равна $f(x)$.

Вычислимъ постоянныя Фурье.

Мы получаемъ

$$\pi a_p = -c \int_{-\pi}^{0} \cos px\,dx + c \int_{0}^{\pi} \cos px\,dx = 0,$$

$$\pi b_p = -c \int_{-\pi}^{0} \sin px\,dx + c \int_{0}^{\pi} \sin px\,dx$$

$$= 2c\int_0^\pi \sin px\,dx = -2c\left(\frac{\cos px}{p}\right)_0^\pi.$$

Для четнаго p будетъ $b_p = 0$; напротивъ, для нечетнаго p будетъ $\pi b_p = \frac{4c}{p}$, такъ что $b_p = \frac{4c}{p\pi}$.

Такимъ образомъ, при $c = \frac{\pi}{4}$ рядъ Фурье принимаетъ видъ

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots.$$

Онъ сходится для каждаго значенія x и представляетъ изображенную на фигурѣ 11 функцію $\left(\text{для случая } c = \frac{\pi}{4}\right)$.

При $x = \frac{\pi}{2}$ мы вновь находимъ рядъ Лебница.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

(ср. § 122).

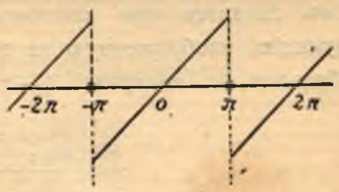
2. Пусть функція $f(x)$ имѣетъ указанную на фигурѣ 12 кривую изображенія, такъ что

$$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0,$$

и пусть въ интервалѣ $(-\pi, \pi)$ будетъ

$$f(x) = cx$$

Пусть, далѣе, будетъ $f(x+2\pi) = f(x)$.



Фиг. 12.

По § 176 рядъ Фурье постоянно сходится и сумма его равна $f(x)$.

Что касается постоянныхъ Фурье, то

$$\pi a_p = c\int_{-\pi}^{\pi} x\cos px\,dx, \quad \pi b_p = c\int_{-\pi}^{\pi} x\sin px\,dx,$$

или

$$\pi a_p = c\int\limits_{-\pi}^{0} x\cos px\,dx + c\int\limits_{0}^{\pi} x\cos px\,dx = 0.$$

$$\pi b_p = c\int\limits_{-\pi}^{0} x\sin px\,dx + c\int\limits_{0}^{\pi} x\sin px\,dx = 2c\int\limits_{0}^{\pi} x\sin px\,dx.$$

Но

$$\int\limits_{0}^{\pi} x\sin px\,dx = -\left(\frac{x\cos px}{p}\right)_0^{\pi} + \frac{1}{p}\int\limits_{0}^{\pi}\cos px\,dx = -\frac{\pi\cos p\pi}{p}.$$

Такимъ образомъ,

$$b_1 = \frac{2c}{1}, \quad b_2 = -\frac{2c}{2}, \quad b_3 = \frac{2c}{3}, \ldots$$

и рядъ Фурье при $c = \frac{1}{2}$ принимаетъ видъ

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots.$$

Онъ сходится при каждомъ значенiи x и представляетъ собою функцiю, изображенную на фигурѣ 12 (для случая $c = \frac{1}{2}$). Такимъ образомъ, въ интервалѣ $(-\pi, \pi)$

$$\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots.$$

3. Въ заключенiе мы станемъ искать рядъ Фурье функцiи $\cos kx$. Мы полагаемъ поэтому

$$f(x) = \cos kx \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

и требуемъ, сверхъ того, чтобы было $f(x+2\pi) = f(x)$. Изъ § 176 и слѣдующихъ мы можемъ заключить, что рядъ Фурье повсюду сходится и имѣетъ сумму $f(x)$.

Исключимъ тривіальный случай, когда k есть цѣлое число; тогда

$$\pi a_p = \int_{-\pi}^{0} \cos kx \cos px dx + \int_{0}^{\pi} \cos kx \cos px dx$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} \cos kx \cos px dx,$$

$$\pi b_p = \int_{-\pi}^{0} \cos kx \sin px dx + \int_{0}^{\pi} \cos kx \sin px dx = 0.$$

Далѣе,

$$2\cos kx \cos px = \cos(p-k)x + \cos(p+k)x,$$

такъ что

$$\pi a_p = \left(\frac{\sin(p-k)x}{p-k}\right)_0^{\pi} + \left(\frac{\sin(p+k)x}{p+k}\right)_0^{\pi}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{p+k}\right) - \left(\frac{1}{p-k}\right)\right\} \sin k\pi \cos p\pi,$$

или

$$\pi a_p = \frac{2k \sin k\pi}{k^2 - p^2} \cos p\pi. \qquad (p = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Такимъ образомъ, при $-\pi \leqq x \leqq \pi$ имѣетъ мѣсто формула:

$$\cos kx = \frac{\sin k\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{k} - \frac{2k\cos x}{k^2 - 1^2} + \frac{2k\cos 2x}{k^2 - 2^2} - \cdots\right\}.$$

Такъ какъ $\sin k\pi \gtreqless 0$, то, положивъ $x = \pi$, находимъ:

$$\pi \cot k\pi = \frac{1}{k} + \frac{2k}{k^2 - 1^2} + \frac{2k}{k^2 - 2^2} + \cdots.$$

§ 180. **Теорема Фейера.** Положимъ, что функція $f(x)$ непрерывна при каждомъ значеніи x и имѣетъ періодъ 2π.

Мы будемъ заниматься не сходимостью ряда Фурье, а среднимъ ариѳметическимъ его первыхъ p частныхъ суммъ.

Какъ мы нашли въ § 175, это среднее равно

$$\mathfrak{m}_p(x) = \frac{1}{2\pi p}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{1-\cos pu}{1-\cos u}\,du,$$

или равно

$$\frac{1}{2\pi p}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\left(\frac{\sin p\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du.$$

Составимъ разложенiе

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}$$

и въ первый интегралъ справа введемъ новую перемѣнную $-\frac{u}{2} = v$, а во второй—новую перемѣнную $\frac{u}{2} = v$. Тогда

$$\mathfrak{m}_p(x) = \frac{1}{\pi p}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \{f(x-2v)+f(x+2v)\}\left(\frac{\sin pv}{\sin v}\right)^2 dv.$$

Если $f(x)=1$, то всѣ частныя суммы ряда Фурье равны 1, такъ что и $\mathfrak{m}_p(x) = 1$. Такимъ образомъ,

$$1 = \frac{2}{p\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{\sin pv}{\sin v}\right)^2 dv,$$

и разность $\mathfrak{m}_p(x) - f(x)$ можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\mathfrak{m}_p(x) - f(x) = \frac{1}{\pi p}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\{f(x-2v)+f(x+2v)-2f(x)\}\left(\frac{\sin pv}{\sin v}\right)^2 dv.$$

Если дано положительное число ε, то мы можемъ теперь выбрать положительное число δ такъ, [1]) что наибольшее значенiе выраженiя

---

[1]) $\delta < \frac{1}{2}\pi$.

$$|f(x-2v)+f(x+2v)-2f(x)|$$
$$(0 \leqq v \leqq \delta)$$

меньше, чѣмъ ε. Тогда абсолютная величина интеграла

$$\frac{1}{\pi p}\int_0^\delta \{f(x-2v)+f(x+2v)-2f(x)\}\left(\frac{\sin pv}{\sin v}\right)^2 dv.$$

меньше, чѣмъ

$$\frac{\varepsilon}{\pi p}\int_0^\delta \left(\frac{\sin pv}{\sin v}\right)^2 dv < \frac{\varepsilon}{\pi p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{\sin pv}{\sin v}\right)^2 dv = \frac{\varepsilon}{2},$$

при $p = 1, 2, 3, \ldots$.

Если обозначить черезъ M наибольшее значенiе, которое $|f(x)|$ вообще принимаетъ[1]), то абсолютная величина интеграла

$$\frac{1}{\pi p}\int_\delta^{\frac{1}{2}\pi} \{f(x-2v)+f(x+2v)-2f(x)\}\left(\frac{\sin pv}{\sin v}\right)^2 dv$$

будетъ меньше, чѣмъ

$$\frac{3M}{\pi p}\int_\delta^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dv}{\sin^2 v} < \frac{3M}{2p\sin^2\delta}.$$

Если, слѣдовательно,

$$p > \frac{3M}{\varepsilon \sin^2\delta},$$

то абсолютная величина послѣдняго интеграла меньше, чѣмъ $\frac{\varepsilon}{2}$, и абсолютная величина разности $\mathfrak{m}_p(x) - f(x)$ меньше, чѣмъ ε, каково бы ни было x.

[1]) Такое значенiе существуетъ въ силу непрерывности и перiодичности.

Это означаетъ, что

$$\lim \mathfrak{m}_p(x) = f(x).$$

Однако, мы доказали больше. Мы знаемъ не только то, что при каждомъ x

$$f(x) = \mathfrak{m}_1(x) + \{\mathfrak{m}_2(x) - \mathfrak{m}_1(x)\} + \{\mathfrak{m}_3(x) - \mathfrak{m}_2(x)\} + \cdots, \text{[1]}$$

но мы знаемъ также, что этотъ рядъ **равномѣрно сходится для всѣхъ значеній** x.

Это есть теорема **Фейера** (**Fejer**).

Члены предыдущаго ряда суть конечныя тригонометрическія выраженія, т. е. выраженія вида

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x +$$
$$+ b_2 \sin 2x + \cdots + a_p \cos px + b_p \sin px.$$

Непрерывную функцію съ періодомъ 2π можно, слѣдовательно, разложить въ равномѣрно сходящійся рядъ конечныхъ тригонометрическихъ выраженій.

§ 181. **Примѣненіе.** Пусть $f(x)$ будетъ функція, непрерывная въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, $a < b$. Мы беремъ число c, которое больше, чѣмъ b, и составляемъ линейную въ интервалѣ $\langle b, c\rangle$ функцію, которая при $x = b$ имѣетъ значеніе $f(b)$ и при $x = c$—значеніе $f(a)$. Эта функція вмѣстѣ съ функціей $f(x)$ представляетъ непрерывную въ интервалѣ $\langle a, c\rangle$ функцію $F(x)$, имѣющую то свойство, что

$$F(a) = F(c).$$

Если мы положимъ

$$x = \frac{a+c}{2} + \frac{(c-a)\,u}{2\pi},$$

то $F(x)$ превратится въ функцію $\Phi(u)$, непрерывную въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$ и имѣющую то свойство, что

$$\Phi(-\pi) = \Phi(\pi).$$

---

[1]) p-ая частная сумма этого ряда есть $\mathfrak{m}_p(x)$.

Требуя, чтобы равенство $\Phi(u+2\pi)=\Phi(u)$ выполнялось, мы можемъ распространить эту функцію на всѣ значенія u. Такъ какъ она непрерывна и имѣетъ періодъ 2π, то къ ней примѣнима теорема, приведенная въ концѣ § 180. Существуетъ равномѣрно сходящійся рядъ

$$T_1(u)+T_2(u)+T_3(u)+\cdots$$

конечныхъ тригонометрическихъ выраженій, имѣющій сумму $\Phi(u)$.

Функціи $\cos pu$ и $\sin pu$ $(p=1,2,3,\ldots)$ могутъ быть разложены въ постоянно сходящіеся степенные ряды. То же относится къ конечному тригонометрическому выраженію, а потому и къ выраженію

$$\mathfrak{T}_p(u)=T_1(u)+T_2(u)+\cdots+T_p(u).$$

Степенной рядъ, въ который разлагается функція $\mathfrak{T}_p(u)$, сходится равномѣрно (§ 172) въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$. Если ε_p есть положительное число, то въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi)$ абсолютныя величины почти всѣхъ остатковъ будутъ меньше, чѣмъ ε_p. Отнявъ такой остатокъ отъ $\mathfrak{T}_p(u)$, мы получаемъ цѣлую раціональную функцію $\mathfrak{G}_p(u)$, которая во всемъ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$ удовлетворяетъ неравенству

$$|\mathfrak{T}\ (u)-\mathfrak{G}_p(u)|<\varepsilon_p.$$

Если распорядиться такъ, чтобы $\lim \varepsilon_p=0$, положивъ, напримѣръ, $\varepsilon_p=\left(\frac{1}{2}\right)^p$, то рядъ

$$\mathfrak{G}_1(u)+\{\mathfrak{G}_2(u)-\mathfrak{G}_1(u)\}+\{\mathfrak{G}_3(u)-\mathfrak{G}_2(u)\}+\cdots$$

будетъ имѣть сумму, равную $\lim \mathfrak{T}_p(u)=\Phi(u)$.

Члены этого ряда суть раціональныя функціи, и рядъ сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$. Ибо почти всѣ остатки, т. е. почти всѣ разности $\Phi(u)-\mathfrak{G}_p(u)$ отличаются отъ соотвѣтственныхъ разностей $\Phi(u)-\mathfrak{T}_p(u)$ меньше, чѣмъ на $\frac{\varepsilon}{2}$, и притомъ во всемъ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$. А такъ какъ абсолютныя величины почти всѣхъ разностей $\Phi(u)-\mathfrak{T}_p(u)$ въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$ меньше, чѣмъ

$\frac{\varepsilon}{2}$, то въ интервалѣ $\langle -\pi, \pi\rangle$ почти всѣ $\Phi(u) - \mathfrak{S}_p(u)$ по абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ ε.

Если замѣстить u черезъ

$$2\pi\left(x - \frac{a+c}{2}\right) : (c-a),$$

то функціи $\mathfrak{S}_1(u)$, $\mathfrak{S}_2(u) - \mathfrak{S}_1(u)$, $\mathfrak{S}_3(u) - \mathfrak{S}_2(u)$, ... становятся цѣлыми раціональными функціями $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$, $\cdots$. Рядъ

$$G_1(x) + G_2(x) + G_3(x) + \cdots$$

сходится равномѣрно въ интервалѣ $\langle a, c\rangle$ и имѣетъ сумму $F(x)$. Въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ его сумма равна, слѣдовательно, $f(x)$.

Этимъ мы доказали слѣдующую принадлежащую Вейерштрассу теорему:

Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то существуетъ рядъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій, который въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ сходится равномѣрно и имѣетъ сумму $f(x)$.

Глава XVI.

Несобственные интегралы.

§ 182. **Несобственные интегралы съ конечнымъ промежуткомъ интегрированія.** Положимъ, что функція $f(x)$ не интегрируема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, но интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$, $a < \beta < b$.

Неинтегрируемость функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ можетъ въ этомъ случаѣ обусловливаться только тѣмъ, что функція $f(x)$ не ограничена въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Дѣйствительно, если бы функція $f(x)$ была ограничена въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то мы прежде всего могли бы взять для β значеніе, столь близкое къ b, что было бы

$$(b-\beta)\sigma(a, b) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ а потому и } (b-\beta)\sigma(\beta, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затѣмъ, въ виду интегрируемости функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$, мы могли бы такъ разложить интервалъ $\langle a, \beta\rangle$ на частные интервалы $\langle a, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{p-1}, \beta\rangle$, что выполнялось бы неравенство

$$(x_1 - a)\,\sigma(a, x_1) + (x_2 - x_1)\,\sigma(x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + (\beta - x_{p-1})\,\sigma(x_{p-1}, \beta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно во всякомъ случаѣ, что указанный въ § 150 критерій интегрируемости былъ бы выполненъ.

Можетъ случиться, что

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \qquad (a < \beta < b)$$

постоянно стремится къ предѣлу, когда β стремится къ b. Этотъ предѣлъ не зависитъ тогда отъ способа приближенія β къ b. А именно, если

$$\lim \beta_n = b \quad \text{и} \quad \lim \bar\beta_n = b,$$

то и послѣдовательность $\beta_1, \bar\beta_1, \beta_2, \bar\beta_2, \ldots$ стремится къ b, такъ что послѣдовательность

$$\int_a^{\beta_1} f(x)\,dx, \int_a^{\bar\beta_1} f(x)\,dx, \int_a^{\beta_2} f(x)\,dx, \int_a^{\bar\beta_2} f(x)\,dx, \ldots$$

сходится. Всѣ ея частныя послѣдовательности имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ. Поэтому въ частности

$$\lim \int_a^{\beta_n} f(x)\,dx = \lim \int_a^{\bar\beta_n} f(x)\,dx.$$

Если предѣлъ

$$\lim \int_a^\beta f(x)\,dx \qquad (a < \beta < b, \ \lim \beta = b)$$

существуетъ, то его обозначаютъ знакомъ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

и называютъ несобственнымъ интеграломъ.

Если функція $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то также (ср. § 157).

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Мы хотимъ также вкратцѣ остановиться на случаѣ [1]), когда функція $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle \alpha, b\rangle$, $a < \alpha < b$, но не въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. И здѣсь неинтегрируемость въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ обусловливается тѣмъ, что функція $f(x)$ не ограничена въ $\langle a, b\rangle$.

Если предѣлъ

$$\lim \int_\alpha^b f(x)\,dx \qquad (a < \alpha < b,\ \lim \alpha = a)$$

существуетъ, то его обозначаютъ знакомъ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

и называютъ несобственнымъ интеграломъ.

Символъ $\int_a^b f(x)\,dx$ употребляютъ также въ слѣдующемъ, болѣе общемъ случаѣ:

Интервалъ $\langle a, b\rangle$ можно разложить на конечное число частныхъ интерваловъ $\langle \alpha, \beta\rangle$ такимъ образомъ, что функція $f(x)$ интегрируема либо въ каждомъ интервалѣ $\langle \alpha, \beta\rangle$, либо въ каждомъ интервалѣ $\langle \alpha', \beta\rangle$, $\alpha < \alpha' < \beta$, либо въ каждомъ интервалѣ $\langle \alpha, \beta'\rangle$, $\alpha < \beta' < \beta$.

---

[1]) Этотъ случай сводится къ другому положеніемъ $x = -u$.

Полагаютъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

въ случаѣ, если собственные или несобственные интегралы

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

существуютъ

§ 183. **Примѣръ.** Пусть μ будетъ положительное число, отличное отъ 1. Тогда функція

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\mu}$$

интегрируема въ каждомъ интервалѣ

$$\langle a, \beta\rangle. \qquad (a < \beta < b)$$

Напротивъ, въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ [1]) функція $f(x)$ неинтегрируема, ибо въ этомъ интервалѣ она не ограничена.

Теперь

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = -\left(\frac{(b-x)^{1-\mu}}{1-\mu}\right)_a^\beta = \frac{(b-a)^{1-\mu}-(b-\beta)^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Если $\mu < 1$, то

$$\lim \int_a^\beta f(x)\,dx = \frac{(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu}. \qquad (\lim \beta = b)$$

Если, напротивъ, $\mu > 1$, то предѣлъ не существуетъ.

Въ случаѣ $\mu = 1$

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = -(\log(b-x))_a^\beta = \log(b-a) - \log(b-\beta).$$

---

[1]) Слѣдуетъ представить себѣ, что значеніе $f(b)$ какимъ-нибудь образомъ установлено.

И здѣсь $\lim \int_a^\beta f(x)\,dx$ не существуетъ.

Несобственный интегралъ

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu} \qquad (a < b,\ \mu > 0)$$

существуетъ тогда и только тогда, когда $\mu < 1$.

Въ случаѣ $\mu \leqq 0$ мы будемъ имѣть собственный интегралъ.

Точно такъ же несобственный интегралъ

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} \qquad (a < b)$$

существуетъ тогда и только тогда, когда $\mu < 1$.

§ 184. **Случаи, въ которыхъ несобственный интегралъ существуетъ.** Предположимъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$ но не въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Тогда и функція $|f(x)|$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$. Можетъ теперь случиться, что

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

существуетъ. Въ этомъ случаѣ существуетъ и

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

А именно, при $a \leqq x < b$

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x \frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx - \int_a^x \frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx.$$

Оба интеграла въ правой части суть функціи возрастающія, но ограниченныя, ибо ни одна изъ нихъ не больше, чѣмъ $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Поэтому существуютъ предѣлы

$$\lim \int\limits_a^\beta \frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx \quad \text{и} \quad \lim \int\limits_a^\beta \frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx,$$

а, слѣдовательно, и предѣлъ

$$\lim \int\limits_a^\beta f(x)\,dx, \quad \text{т. е.} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 1. Положимъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$, $a<\beta<b$, но не въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Если тогда между 0 и 1 существуетъ число μ такого рода, что функція

$$\varphi(x)=(b-x)^\mu f(x)$$

ограничена въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то существуетъ несобственный интегралъ

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Обозначивъ черезъ K верхнюю границу функціи $|\varphi(x)|$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, имѣемъ при $a \leqq x < b$

$$|f(x)| \leqq \frac{K}{(b-x)^\mu}.$$

А такъ какъ

$$K\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu}$$

существуетъ, то существуетъ и [1])

---

[1]) Ибо интегралъ $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ возрастаетъ и ограниченъ ($a \leqq x < b$).

$$\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

а, слѣдовательно, и

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 2. Положимъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$, $a<\beta<b$, но не въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Если тогда существуетъ не меньшее 1 число μ такого рода, что функція

$$\varphi(x) = (b-x)^{\mu} f(x)$$

имѣетъ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ положительную нижнюю границу[1]), то несобственный интегралъ

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

не существуетъ.

Если k есть нижняя граница функціи $\varphi(x)$, то при $a \leqq x < b$

$$f(x) > \frac{k}{(b-x)^{\mu}}.$$

Если бы существовалъ интегралъ

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

то долженъ былъ бы существовать и интегралъ

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}.$$

Это, однако, невозможно, такъ какъ $\mu \geqq 1$.

---

[1]) или отрицательную верхнюю границу. При замѣщеніи $f(x)$ черезъ $-f(x)$ одинъ случай переходитъ въ другой.

Теоремы, подобныя предыдущимъ, имѣютъ мѣсто, когда функція $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle \alpha, b\rangle$, но не въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

§ 185. **Связь съ неопредѣленнымъ интеграломъ.** Пусть $f(x)$ будетъ функція, интегрируемая въ каждомъ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$, $a<\beta<b$, и положимъ, что въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ существуетъ функція $F(x)$, имѣющая при $a \leqq x < b$ производную $f(x)$ и непрерывная въ точкѣ b.

Тогда, по § 156,

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(a).$$

А такъ какъ при $\lim \beta = b$

$$\lim F(\beta) = F(b),$$

ибо функція $F(x)$ непрерывна въ точкѣ b, то

$$\lim \int_a^\beta f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (F(x))_a^b.$$

Такимъ образомъ, одна и та же формула имѣетъ мѣсто какъ для собственнаго, такъ и для несобственнаго интеграла.

Подобнымъ же образомъ можно доказать слѣдующее: пусть $f(x)$ и $g(x)$ будутъ функціи, интегрируемыя въ каждомъ интервалѣ $\langle a, \beta\rangle$, $a<\beta<b$. Пусть, далѣе, будетъ

$$F(x) = A + \int_a^x f(x)\,dx, \quad G(x) = B + \int_a^x g(x)\,dx.$$

Тогда

$$(F(x)\,G(x))_a^b = \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,F(x)\,dx,$$

въ предположенiи, что оба интеграла въ правой части существуютъ. Подъ $F(b)\,G(b)$ слѣдуетъ здѣсь понимать предѣлъ произведенiя $F(x)\,G(x)$ при $\lim x = b$. A, B суть произвольныя постоянныя.

Примѣръ. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Здѣсь $F(x) = 2\sqrt{x}$. Эта функцiя имѣетъ производную $\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $0 < x$ и непрерывна въ точкѣ $x = 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\right)_0^1 = 2.$$

§ 186. **Эйлеровъ интегралъ перваго рода.** Интегралъ

$$B(p,\,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

всегда имѣетъ смыслъ, если

$$p > 0 \quad \text{и} \quad q > 0.$$

Его называютъ Эйлеровымъ интеграломъ перваго рода.

При $p \geqq 1$ и $q \geqq 1$ мы имѣемъ передъ собою собственный интегралъ. Въ противномъ случаѣ $B(p,\,q)$ есть несобственный интегралъ, который, однако, по § 184 существуетъ. Это есть предѣлъ собственнаго интеграла

$$\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon'} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \qquad (\varepsilon > 0,\ \varepsilon' > 0)$$

если оба числа ε и ε' стремятся къ нулю. Такимъ образомъ,

$$B(p,\,q) = \lim \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon'} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

$$(\varepsilon > 0,\ \varepsilon' > 0,\ \lim \varepsilon = 0,\ \lim \varepsilon' = 0)$$

Преобразованiе $x = 1 - y$ даетъ:

$$\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon'} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int\limits_{\varepsilon'}^{1-\varepsilon} y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy,$$

такъ что

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Выраженіе $B(p, q)$ остается, такимъ образомъ, неизмѣннымъ при перестановкѣ p и q или, какъ говорятъ, оно симметрично по отношенію къ p и q.

Интегрируя по частямъ (ср. § 185), находимъ, что при $q > 1$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \left(\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\right)_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx$$

$$= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

т. е.

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p, q-1).$$

Эту формулу можно примѣнять съ цѣлью уменьшенія q, пока q остается больше 1. Такъ какъ $B(p, q) = B(q, p)$, то при $p > 1$ имѣетъ мѣсто равенство

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1, q).$$

Можно поэтому уменьшать также и p, пока оно остается больше 1.

Если q есть цѣлое число, то

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}\cdot\frac{q-2}{p+q-2}\cdots\frac{1}{p+1}B(p, 1).$$

А такъ какъ

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}dx = \left(\frac{x^p}{p}\right)_0^1 = \frac{1}{p},$$

то

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}\cdot\frac{q-2}{p+q-2}\cdots\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{p}.$$

Если и p есть цѣлое число, то можно написать:

$$B(p, q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Эта формула пригодна и въ томъ случаѣ, когда p или q или оба числа p и q равны 1, въ предположеніи, что 0! означаетъ 1.

§ 187. **Несобственные интегралы съ безконечнымъ промежуткомъ интегрированія.**[1] Пусть $f(x)$ будетъ функція, интегрируемая въ каждомъ интервалѣ $\langle a, x\rangle$, $x > a$. Если въ этомъ случаѣ интегралъ

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

при безконечномъ возрастаніи x постоянно стремится къ нѣкоторому предѣлу, то его обозначаютъ черезъ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

и называютъ несобственнымъ интеграломъ.

Выраженіе „x безконечно возрастаетъ" или „становится положительной безконечностью" означаетъ (ср. § 43): „x пробѣгаетъ такую послѣдовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, что почти всѣ члены этой послѣдовательности будутъ больше **каждаго** числа".

Къ приведенному опредѣленію мы должны присоединить еще слѣдующее замѣчаніе. Предѣлъ интеграла будетъ одинъ и

[1]) Эти несобственные интегралы могутъ быть преобразованы въ интегралы, разсмотрѣнные выше, и наоборотъ. Положимъ $a > b$ и сдѣлаемъ подстановку $u = \frac{1}{x-b}$. Тогда $\int_a^x f(x)\,dx$ переходитъ въ интегралъ $\int_u^\beta \varphi(u)\,du$, при чемъ $\varphi(u) = f\left(b + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}$, $\beta = 1:(a-b)$. Интегралъ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ существуетъ тогда и только тогда, когда существуетъ $\int_0^\beta \varphi(u)\,du$.

тотъ же, какимъ бы образомъ x ни возрастало безконечно. Если безконечно возрастающая перемѣнная x пробѣгаетъ одинъ разъ послѣдовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а другой разъ — послѣдовательность $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$, то, пробѣгая послѣдовательность $\bar{x}_1, x_1, \bar{x}_2, x_2, \bar{x}_3, x_3, \ldots$, перемѣнная также будетъ безконечно возрастать. Поэтому послѣдовательность

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx,\ \int_a^{\bar{x}_1} f(x)\,dx,\ \int_a^{x_2} f(x)\,dx,\ \int_a^{\bar{x}_2} f(x)\,dx, \ldots$$

сходится. Такъ какъ всѣ ея части имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ, то

$$\lim \int_a^{\bar{x}_n} f(x)\,dx = \lim \int_a^{x_n} f(x)\,dx.$$

Вполнѣ аналогично опредѣляютъ интегралъ

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx.$$

Если функція $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle x, a\rangle$, $x < a$, и интегралъ

$$\int_x^a f(x)\,dx$$

при безконечно возрастающемъ $-x$ постоянно стремится къ нѣкоторому предѣлу, то его обозначаютъ черезъ $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Если оба интеграла

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

существуютъ, то ихъ сумму обозначаютъ черезъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Этотъ интегралъ есть предѣлъ интеграла

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} f(x)\,dx$$

при безконечно возрастающемъ $\bar{x}$ и безконечно возрастающемъ $-\underline{x}$.

§ 188. **Примѣры.** Пусть μ будетъ число, отличное отъ единицы. Мы займемся разысканіемъ условій, при которыхъ интегралъ

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} \qquad (a > 0)$$

существуетъ.

Здѣсь

$$\int_a^x \frac{dx}{x^\mu} = \left(\frac{x^{1-\mu}}{1-\mu}\right)_a^x = \frac{x^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{a^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Въ случаѣ $\mu < 1$ число $x^{1-\mu}$ безконечно возрастаетъ одновременно съ x, такъ что интегралъ не имѣетъ никакого предѣла.

Напротивъ, въ случаѣ $\mu > 1$, онъ имѣетъ предѣлъ $a^{1-\mu} : (\mu - 1)$. Если $\mu = 1$, то

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \log x - \log a,$$

и при безграничномъ возрастаніи x интегралъ не имѣетъ никакого предѣла.

Несобственный интегралъ

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} \qquad (a > 0)$$

существуетъ тогда и только тогда, когда $\mu > 1$.

§ 189. **Случаи, въ которыхъ несобственный интегралъ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ существуетъ.** 1. Пусть $f(x)$ будетъ функція, интегрируемая въ каждомъ интервалѣ $\langle a, x\rangle$, $x > a$. Если интегралъ

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

существуетъ, то существуетъ и интегралъ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

При сдѣланныхъ предположеніяхъ интегралы

$$\int_a^\infty \frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx, \text{ и } \int_a^\infty \frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx$$

существуютъ, такъ какъ функціи

$$\int_a^x \frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx, \quad \int_a^x \frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx$$

суть функціи возрастающія и ограниченныя (а именно обѣ не больше, чѣмъ $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$).

Существуетъ, слѣдовательно, и интегралъ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim \int_a^x \frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx - \lim \int_a^x \frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx.$$

Если при $x \geqq a$ постоянно

$$|f(x)| \leqq \varphi(x),$$

то изъ существованія интеграла $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ слѣдуетъ существованіе интеграла $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, ибо $\int_a^x |f(x)|\,dx$ есть функція возрастающая и ограниченная (она не больше, чѣмъ $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$).

Теорема 1. Пусть $f(x)$ будетъ функція, интегрируемая въ каждомъ интервалѣ $\langle a, x\rangle$, $x > a > 0$. Если существуетъ превосходящее 1 число μ такого рода, что функція

$$x^\mu f(x)$$

ограничена при $x \geqq a$, то существуетъ интегралъ

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Если при $x \geqq a$

$$|x^\mu f(x)| < A,$$

то

$$|f(x)| < \frac{A}{x^\mu}.$$

А такъ какъ

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\mu},$$

существуетъ, то существуютъ также интегралы

$$\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx \quad \text{и} \int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ будетъ функція, интегрируемая въ каждомъ интервалѣ $\langle a, x\rangle$, $x > a > 0$. Если существуетъ не превосходящее 1 число μ такого рода, что нижняя граница функціи $x^\mu f(x)$ будетъ положительной,[1]) то

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$$

не существуетъ.

---

[1]) или верхняя граница отрицательной.

Въ самомъ дѣлѣ, если при $x \geqq a$

$$x^\mu f(x) \geqq A > 0,$$

то отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{A}{x^\mu} \leqq f(x).$$

Такимъ образомъ, изъ существованія интеграла

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

вытекало бы существованіе интеграла

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}.$$

Этотъ интегралъ, однако, не существуетъ, такъ какъ $\mu \leqq 1$.

2. Положимъ, что функція $\varphi(x)$ монотонна при $x \geqq a$ и стремится къ нулю при безграничномъ возрастаніи x. Пусть $f(x)$ будетъ функція, интегрируемая въ каждомъ интервалѣ $\langle a, x\rangle$, $x > a$. Положимъ, наконецъ, что функція

$$\int_a^x f(x)\,dx \qquad (x \geqq a)$$

ограничена. При этихъ предположеніяхъ существуетъ интегралъ

$$\int_a^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Пусть x безконечно возрастаетъ, пробѣгая послѣдовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Намъ нужно показать, что послѣдовательность

$$\int_a^{x_1} f(x)\,\varphi(x)\,dx,\ \int_a^{x_2} f(x)\,\varphi(x)\,dx,\ \int_a^{x_3} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \ldots$$

сходится.

Допустимъ, что при $x \geqq a$

$$\left|\int_a^x f(x)\,dx\right| < A.$$

Такъ какъ $\lim \varphi(x_n) = 0$, то мы можемъ выбрать число ν такъ, чтобы выполнялось неравенство

$$|\varphi(x_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Почти всѣ x_n больше, чѣмъ x_ν. Но если $x_n > x_\nu$, то къ интегралу

$$\int_a^{x_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx - \int_a^{x_\nu} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{x_\nu}^{x_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

можно примѣнить вторую теорему о среднемъ значенiи. Такъ какъ функцiя $\varphi(x)$ монотонно стремится къ нулю, то она остается монотонной въ интервалѣ $\langle x_\nu, x_n\rangle$, если замѣнить $\varphi(x_n)$ нулемъ. Тогда вторая теорема о среднемъ значенiи приводитъ къ равенству

$$\int_{x_\nu}^{x_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(x_\nu)\int_{x_\nu}^{\zeta_n} f(x)\,dx. \qquad (x_\nu \leqq \zeta_n \leqq x_n)$$

$\int\limits_{x_\nu}^{\zeta_n} f(x)\,dx$, какъ разность интеграловъ $\int\limits_a^{\zeta_n} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{x_\nu} f(x)\,dx$, будетъ по абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ $2A$, такъ что при всѣхъ значенiяхъ индекса n

$$\left|\int_a^{x_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx - \int_a^{x_\nu} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

На основанiи критерiя Коши (§ 27) существуетъ, слѣдовательно,

$$\lim \int_a^{x_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Примѣръ. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \quad (a > 0)$ существуетъ.[1]) Въ самомъ дѣлѣ, здѣсь $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ и $f(x) = \sin x$. Далѣе, интегралъ

$$\int\limits_a^x f(x)\,dx = \int\limits_a^x \sin x\,dx = \cos a - \cos x$$

по своей абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ 2. Такимъ образомъ, всѣ условія предыдущей теоремы выполнены.

Легко опредѣлить значеніе интеграла. Мы знаемъ, что

$$\lim \int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad (h > 0)$$

когда n пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$. Положивъ $nx = u$, имѣемъ:

$$\int\limits_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx = \int\limits_0^{nh} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

Такимъ образомъ,

$$\lim \int\limits_0^{nh} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Если $\alpha > 0$ и если $x = \alpha y$, то

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{\alpha y} \frac{\sin \alpha y}{y}\,dy. \qquad (x > 0)$$

---

[1]) Достаточно доказать существованіе интеграла $\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \ (a > 0)$

Отсюда при $\alpha > 0$ слѣдуетъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому при $\alpha < 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = -\frac{\pi}{2}.$$

При $\alpha = 0$ имѣемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = 0.$$

§ 190. **Связь съ неопредѣленнымъ интеграломъ.** Допустимъ, что функцiя $F(x)$ при $x \geqq a$ имѣетъ производную $f(x)$ и что функцiя $f(x)$ интегрируема въ каждомъ интервалѣ $\langle a, x\rangle$, $x > a$. Тогда при $x \geqq a$

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a),$$

и $\int_a^\infty f(x)\, dx$ существуетъ тогда и только тогда, когда $F(x)$ при безконечно возрастающемъ x стремится къ нѣкоторому предѣлу $F(\infty)$. Если этотъ предѣлъ $F(\infty)$ существуетъ, то

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = F(\infty) - F(a) = (F(x))_a^\infty.$$

Такъ, напримѣръ,

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = -(e^{-x})_0^\infty = 1.$$

Положимъ, что функцiи $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы въ интервалѣ $\langle a, x\rangle$ и что

$$F(x) = A + \int_a^x f(x)\, dx, \quad G(x) = B + \int_a^x g(x)\, dx.$$

Тогда, предполагая, что интегралы

$$\int_a^\infty f(x)\,G(x)\,dx,\quad \int_a^\infty g(x)\,F(x)\,dx$$

и предѣлы $F(\infty)$ и $G(\infty)$ существуютъ, мы будемъ имѣть:

$$(F(x)\,G(x))_0^\infty = \int_a^\infty f(x)\,G(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,F(x)\,dx.$$

§ 191. **Эйлеровъ интегралъ второго рода.** Эйлеровымъ интеграломъ второго рода называютъ интегралъ

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx.$$

$\Gamma(p)$ называютъ также функціей гамма.

Этотъ интегралъ существуетъ, коль скоро существуютъ оба интеграла

$$\int_0^1 e^{-x}\,x^{p-1}\,dx \quad \text{и} \int_1^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx.$$

Второй интегралъ существуетъ, каково бы ни было число p, ибо

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

такъ что при $x > 0$

$$e^x > \frac{x^k}{k!}. \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Если взять число k, большее, чѣмъ p, то будемъ имѣть:

$$e^{-x}\,x^{p-1} < \frac{k!}{x^\mu}. \qquad (\mu = k - p + 1)$$

Такъ какъ $\mu > 1$, то существуетъ

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\mu}, \text{ а, слѣдовательно, и } \int_1^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx.$$

Согласно теоремамъ 1 и 2, изложеннымъ въ § 184, интегралъ

$\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx$ существуетъ тогда и только тогда, когда $p>0$.

Поэтому интегралъ для $\Gamma(p)$ также существуетъ тогда и только тогда, когда $p>0$.

Интегрируя по частямъ, находимъ, что при $p>1$ (ср. § 185 и § 190)

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = -\left(e^{-x}x^{p-1}\right)_0^\infty + (p-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{p-2}dx,$$

т. е.

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1). \qquad (p>1)$$

Если p есть положительное цѣлое число, то эта формула даетъ:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots 1\cdot\Gamma(1).$$

А такъ какъ

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -\left(e^{-x}\right)_0^\infty = 1,$$

то

$$\Gamma(p) = (p-1)!$$

Эта формула примѣнима и при $p=1$, если положить $0!=1$.

§ 192. **Эйлеровы интегралы, какъ предѣлы произведеній.**[1]) Въ § 186 мы имѣли формулу

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1). \qquad (p>0,\, q>1)$$

Если въ ней замѣстить q черезъ $q+1,\ q+2,\ldots,\ q+k-1$, то получатся формулы:

---

[1]) Ср. «Дифференціальное и интегральное исчисленіе» Дженокки-Пеано (Genocchi-Peano) (нѣмецкій переводъ Bohlmann'a) и монографію о функціи гамма Годефруа (Godefroys).

$$B(p, q) = \frac{p+q}{q} B(p, q+1),$$

$$B(p, q+1) = \frac{p+q+1}{q+1} B(p, q+2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B(p, q+k-1) = \frac{p+q+k-1}{q+k-1} B(p, q+k),$$

а отсюда слѣдуетъ, что для $p > 0$, $q > 0$ и $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$B(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k-1)}{q(q+1)\cdots(q+k-1)} B(p, q+k).$$

Мы заключимъ теперь $B(p, q+k)$ между двумя предѣлами. Пусть m будетъ такое цѣлое число, что $m \leqq q < m+1$.

Въ интервалѣ (0, 1) имѣютъ тогда мѣсто неравенства

$$(1-x)^{m+k-1} \geqq (1-x)^{q+k-1} > (1-x)^{m+k},$$

такъ что

$$B(p, m+k) \geqq B(p, q+k) > B(p, m+k+1)$$

$$= \frac{m+k}{p+m+k} B(p, m+k);$$

поэтому

$$B(p, q+k) = \lambda B(p, m+k),$$

и

$$\frac{m+k}{p+m+k} < \lambda \leqq 1.$$

Такъ какъ $m+k$ есть цѣлое число, то по § 186

$$B(p, m+k) = \frac{m+k-1}{p+m+k-1} \cdot \frac{m+k-2}{p+m+k-2} \cdots \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p}.$$

Итакъ [1]),

$$B(p, q) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (k-1)(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k-1)}{p(p+1)\cdots(p+k-1)\, q(q+1)\cdots(q+k-1)} \cdot$$

$$\frac{k(k+1)\cdots(m+k-1)\lambda}{(p+k)(p+k+1)\cdots(p+m+k-1)}.$$

Если k безгранично возрастаетъ, то

$$\lim \lambda = 1, \text{ ибо } \lim \frac{m+k}{p+m+k} = 1.$$

[1]) Въ случаѣ $m = 0$ вторымъ множителемъ будетъ только число λ.

Точно такъ же

$$\lim \frac{k(k+1)\cdots(m+k-1)}{(p+k)(p+k+1)\cdots(p+m+k-1)} = 1.$$

Поэтому

$$B(p,q) = \lim \frac{(k-1)!\,(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k-1)}{p(p+1)\cdots(p+k-1)\,q(q+1)\cdots(q+k-1)}.$$

Принявъ въ соображеніе, что

$$1 - \frac{pq}{(p+\nu)(q+\nu)} = \frac{\nu(p+q+\nu)}{(p+\nu)(q+\nu)}$$

$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, можно предыдущей формулѣ дать слѣдующій видъ:

$$B(p,q) =$$

$$\frac{p+q}{pq} \lim \left\{ \left(1 - \frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right) \cdots \left(1 - \frac{pq}{(p+k-1)(q+k-1)}\right) \right\}.$$

Вмѣсто этого пишутъ обыкновенно:

$$B(p,q) = \frac{p+q}{pq}\left(1 - \frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right)\left(1 - \frac{pq}{(p+2)(q+2)}\right)\cdots$$

и правую часть называютъ **сходящимся безконечнымъ произведеніемъ**.

Мы хотимъ теперь получить безконечное произведеніе для $\Gamma(p)$.

Въ интегралѣ

$$\int_\varepsilon^a e^{-x} x^{p-1}\,dx \qquad (0 < \varepsilon < a)$$

положимъ $x = ku\,(k > 0)$. Тогда

$$\int_\varepsilon^a e^{-x} x^{p-1}\,dx = k^p \int_{\varepsilon'}^{a'} e^{-ku} u^{p-1}\,du. \qquad (\varepsilon = k\varepsilon',\ a = ka')$$

Если сначала приближать ε' къ нулю, а затѣмъ безконечно увеличивать a', то получимъ:

$$\Gamma(p) = k^p \int_0^\infty e^{-ku} u^{p-1}\,du. \qquad (p > 0)$$

Теперь ясно, что

$$\Gamma(p) > k^p \int_0^1 e^{-ku} u^{p-1}\, du.$$

Но въ интервалѣ (0, 1)

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \cdots < 1 + u + u^2 + \cdots = \frac{1}{1-u};$$

поэтому

$$e^{-u} > 1 - u \quad \text{и} \quad e^{-ku} > (1-u)^k.$$

Слѣдовательно,

$$\Gamma(p) > k^p \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^k\, du = k^p B(p, k+1).$$

Такъ какъ при $u > 0$

$$e^u > 1 + u, \quad \text{такъ что} \quad e^{-u} < \frac{1}{1+u}, \quad e^{-ku} < \frac{1}{(1+u)^k}, \text{[1]}$$

то

$$\Gamma(p) < k^p \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\, du}{(1+u)^k}.$$

Введемъ въ интегралъ

$$\int_\varepsilon^a \frac{u^{p-1}\, du}{(1+u)^k} \qquad (0 < \varepsilon < a)$$

частное $u:(1+u) = z$ въ качествѣ новой перемѣнной, т. е. положимъ $u = z:(1-z)$. При этомъ получимъ:

$$\int_\varepsilon^a \frac{u^{p-1}\, du}{(1+u)^k} = \int_{\varepsilon'}^{a'} z^{p-1}(1-z)^{k-p-1}\, dz \cdot \left(\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'},\ a = \frac{a'}{1-a'}\right).$$

Если сначала приближать ε' къ нулю, а затѣмъ a' къ единицѣ, то выйдетъ:

$$\Gamma(p) < k^p B(p, k-p).$$

---

[1]) Слѣдующій интегралъ существуетъ, если $k > p$. Въ самомъ дѣлѣ, $u^{p-1}:(1+u)^k$ меньше, чѣмъ $u^{p-1}:u^k = 1:u^{k-p+1}$. $(u > 0)$

Замѣстивъ здѣсь k черезъ $k+p+1$, получаютъ для $\Gamma(p)$ два неравенства: *)

$$k^p B(p, k+1) < \Gamma(p) < (k+p+1)^p B(p, k+1).$$

Такимъ образомъ,

$$\Gamma(p) = \lambda k^p B(p, k+1)$$

и

$$1 < \lambda < \left(1 + \frac{p+1}{k}\right)^p.$$

Мы ограничимъ теперь k цѣлыми значеніями. Такъ какъ по § 186

$$B(p, k+1) = \frac{k}{p+k} \cdot \frac{k-1}{p+k-1} \cdots \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p},$$

то

$$\Gamma(p) = k^p \frac{1 \cdot 2 \cdots k \cdot \lambda}{p(p+1) \cdots (p+k)}.$$

Когда k безгранично возрастаетъ, то $\lim \lambda = 1$; поэтому

$$\Gamma(p) = \lim \frac{k^p \cdot k!}{p(p+1) \cdots (p+k)}. \qquad (p > 0)$$

Такъ какъ

$$k = \frac{2 \cdot 3 \cdots k}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k-1}\right),$$

и, слѣдовательно,

$$k^p = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^p \left(1 + \frac{1}{2}\right)^p \cdots \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^p,$$

то

$$\frac{k^p\, k!}{p(p+1) \cdots (p+k)} = \frac{1}{p\left(1 + \frac{p}{k}\right)} \frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^p \left(1 + \frac{1}{2}\right)^p \cdots \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^p}{\left(1 + \frac{p}{1}\right)\left(1 + \frac{p}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{p}{k-1}\right)}$$

и, такъ какъ $\lim \left(1 + \frac{p}{k}\right) = 0$, то

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^p}{1 + \frac{p}{1}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^p}{1 + \frac{p}{2}} \cdots \frac{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^p}{1 + \frac{p}{k-1}} \right\}, \quad (p > 0)$$

---

*) Первое изъ нихъ уже получено раньше.

или, какъ обыкновенно пишутъ,

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^p}{1+\frac{p}{1}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^p}{1+\frac{p}{2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^p}{1+\frac{p}{3}} \cdots$$

Такъ какъ $\Gamma(p)$ не нуль, то изъ нашаго перваго предѣльнаго соотношенія для $\Gamma(p)$ слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = \lim \left\{ \frac{1}{k^p} \frac{p(p+1)\cdots(p+k)}{1\cdot 2\cdots k} \right\}.$$

Мы положимъ теперь

$$\sigma_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k},$$

и будемъ писать:

$$\frac{1}{k^p} \frac{p(p+1)\cdots(p+k)}{1\cdot 2\cdots k}$$

$$= p\left(\frac{e^{\sigma_k}}{k}\right)^p \left\{\left(1+\frac{p}{1}\right)e^{-\frac{p}{1}}\right\}\left\{\left(1+\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}}\right\}\cdots\left\{\left(1+\frac{p}{k}\right)e^{-\frac{p}{k}}\right\}.$$

Можно показать, что $e^{\sigma_k} : k$ стремится къ нѣкоторому предѣлу при безконечномъ возрастаніи k. А именно, логариѳмъ этого частнаго равенъ

$$\sigma_k - \log k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \log k.$$

Но при $x > 0$

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

такъ что

$$\log k = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{k-1}^k \frac{dx}{x},$$

и потому

$$\sigma_k - \log k = 1 + \left(\frac{1}{2} - \int_1^2 \frac{dx}{x}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}\right).$$

Всѣ разности, заключенныя въ скобки, будутъ отрицательными, такъ какъ

$$\int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} > \frac{1}{\nu+1}. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Поэтому $\sigma_k - \log k$ убываетъ съ возрастаніемъ k, ибо число отрицательныхъ частей возрастаетъ.

Но, съ другой стороны, выраженіе

$$\sigma_k - \log k = \left(\frac{1}{1} - \int_1^2 \frac{dx}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}\right) + \frac{1}{k}$$

будетъ положительнымъ, такъ какъ

$$\int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Такимъ образомъ, $\sigma_k - \log k$ стремится къ нѣкоторому предѣлу. Его обозначаютъ черезъ C и называютъ **Эйлеровой постоянной**. Частное $e^{\sigma_k} : k$ имѣетъ предѣлъ e^C.

Сообразно съ этимъ имѣемъ для $1 : \Gamma(p)$ формулу:

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p e^{Cp} \left\{\left(1 + \frac{p}{1}\right) e^{-\frac{p}{1}}\right\} \left\{\left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{-\frac{p}{2}}\right\} \left\{\left(1 + \frac{p}{3}\right) e^{-\frac{p}{3}}\right\} \cdots$$

Она принадлежитъ **Вейерштрассу**.

§ 193. **О безконечныхъ произведеніяхъ.** Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots$ будетъ числовая послѣдовательность; составимъ произведеніе

$$p_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n).$$

Если $\lim p_n$ существуетъ и равенъ p, то пишутъ

$$p = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \cdots$$

и говорятъ, что безконечное произведеніе $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots$ сходится и имѣетъ значеніе p.

Мы сначала разсмотримъ безконечное произведеніе $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots$, въ которомъ ни одно изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ не будетъ отрицательнымъ. Въ этомъ случаѣ

$$p_1 \leqq p_2 \leqq p_3 \leqq \cdots,$$

и вопросъ только въ томъ, будетъ ли послѣдовательность $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ограниченной или неограниченной. Вычисливъ p_n, получаемъ:

$$1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\cdots+a_1 a_2\cdots a_n,$$

и потому

$$a_1+a_2+\cdots+a_n < p_n.$$

Отсюда мы можемъ заключить, что сходимость безконечнаго произведенія $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots$ влечетъ за собой сходимость безконечнаго ряда $a_1+a_2+a_3+\cdots$. Но и обратное справедливо. А именно,

$$1+a_1 < e^{a_1},\ 1+a_2 < e^{a_2}, \ldots,\ 1+a_n < e^{a_n};$$

слѣдовательно,

$$p_n < e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Поэтому, если $a_1+a_2+a_3+\cdots = A$, то

$$p_n < e^A.$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ слѣдующую теорему:

Безконечное произведеніе

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots \quad (a_n \geqq 0)$$

сходится тогда и только тогда, когда рядъ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots$$

сходится.

Если безконечное произведеніе $(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3)\cdots$ получается изъ безконечнаго произведенія $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots$ черезъ перемѣщеніе множителей, то первое также сходится и оба имѣютъ одно и тоже значеніе. Каждому частному произведенію

$$\bar{p}_m = (1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_m)$$

соотвѣтствуетъ частное произведеніе

$$p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$$

такого рода, что $\bar{p}_m \leqq p_n$. Нужно только позаботиться о томъ, чтобы p_n содержало въ себѣ всѣхъ множителей произведенія $\bar{p}_m$. Поэтому $\bar{p}_m \leqq p$. Такимъ образомъ, $\lim \bar{p}_m = \bar{p}$ существуетъ и $\bar{p} \leqq p$. Перемѣнивъ роли обоихъ безконечныхъ произведеній находимъ, что $p \leqq \bar{p}$. Отсюда слѣдуетъ, что $p = \bar{p}$.

Разсмотримъ теперь безконечное произведеніе $(1 + u_1)(1 + u_2)$ $(1 + u_3) \cdots$ и положимъ, что рядъ

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$$

сходится. Такъ какъ $\lim |u_n| = 0$, то почти всѣ $|u_n|$ будутъ меньше, чѣмъ $1/2$. Выберемъ число ν такъ, чтобы каждое изъ чиселъ $|u_\nu|$, $|u_{\nu+1}|$, $|u_{\nu+2}|, \ldots$ было меньше, чѣмъ $1/2$, и остановимся на безконечномъ произведеніи

$$(1 + u_\nu)(1 + u_{\nu+1})(1 + u_{\nu+2}) \cdots.$$

Каждый множитель $(1 + u_n)$ этого произведенія можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\frac{1 + a_n}{1 + b_n},$$

при чемъ

$$0 \leqq a_n \leqq 2|u_n| \text{ и } 0 \leqq b_n \leqq 2|u_n|.$$

Въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно положить:

$$\text{въ случаѣ } u_n \geqq 0 \qquad a_n = u_n, \; b_n = 0,$$

$$\text{въ случаѣ } u_n < 0 \qquad a_n = 0, \; b_n = -\frac{u_n}{1 + u_n}.\text{[1]}$$

Но

$$(1 + u_\nu)(1 + u_{\nu+1}) \cdots (1 + u_n) = \frac{(1 + a_\nu)(1 + a_{\nu+1}) \cdots (1 + a_n)}{(1 + b_\nu)(1 + b_{\nu+1}) \cdots (1 + b_n)}.$$

---

[1]) Такъ какъ $|1 + u_n| \geqq 1 - |u_n| > \frac{1}{2}$, то и во второмъ случаѣ на самомъ дѣлѣ $|b_n| \leqq 2|u_n|$.

Какъ числитель, такъ и знаменатель стремятся къ предѣлу (который не меньше 1).[1]) Поэтому

$$(1+u_\nu)(1+u_{\nu+1})\cdots(1+u_n)$$

также имѣетъ предѣлъ[2]) и то же относится къ произведенію

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n).$$

Такимъ образомъ, безконечное произведеніе $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots$ сходится.

Такъ какъ значеніе произведенія $(1+u_\nu)(1+u_{\nu+1})(1+u_{\nu+2})\ldots$ отлично отъ нуля, то произведеніе $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots$ равно нулю только тогда, когда равенъ нулю одинъ изъ множителей $1+u_1$, $1+u_2$, ..., $1+u_{\nu-1}$.

Если безконечное произведеніе $(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots$ получается изъ безконечнаго произведенія $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots$ черезъ перемѣщеніе множителей послѣдняго, то первое сходится и оба имѣютъ одно значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, къ произведенію $(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots$ можно придти, перемѣстивъ сначала въ выраженіи $(1+u_\nu)(1+u_{\nu+1})(1+u_{\nu+2})\ldots$ надлежащимъ образомъ множителей и переставивъ затѣмъ конечное число множителей во всемъ произведеніи. Первая операція приводится къ тому, чтобы въ произведеніи $(1+a_\nu)(1+a_{\nu+1})(1+a_{\nu+2})\ldots$ совершить надлежащее перемѣщеніе множителей и сдѣлать соотвѣтствующее перемѣщеніе въ выраженіи $(1+b_\nu)(1+b_{\nu+1})(1+b_{\nu+2})\ldots$ Эти произведенія остаются при этомъ сходящимися и сохраняютъ свои значенія. То же относится, слѣдовательно, и къ произведенію $(1+u_\nu)(1+u_{\nu+1})\cdot$ $\cdot(1+u_{\nu+2})\ldots$ Что черезъ перемѣщеніе конечнаго числа множителей ничто не измѣняется ни въ сходимости, ни въ значеніи безконечнаго произведенія, само собой понятно.

Полученные результаты мы выразимъ въ формѣ слѣдующаго предложенія:

---

[1]) Слѣдуетъ принять въ соображеніе, что ряды $a_\nu+a_{\nu+1}+\cdots$ и $b_\nu+b_{\nu+1}+\cdots$ сходятся, такъ какъ $0\leqq a_n\leqq 2\,|u_n|$, $0\leqq b_n\leqq 2\,|u_n|$.

[2]) Этотъ предѣлъ есть частное чиселъ $(1+a_\nu)(1+a_{\nu+1})\cdots$ и $(1+b_\nu)(1+b_{\nu+1})\cdots$

Если $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots$ есть сходящійся рядъ, то сходится и безконечное произведеніе

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots$$

Оно равно нулю только тогда, когда исчезаетъ одинъ изъ его множителей. При измѣненіи порядка множителей безконечное произведеніе остается сходящимся и сохраняетъ свое значеніе.

Легко убѣдиться въ томъ, что безконечное произведеніе, найденное для $B(p,q)$, сходится, коль скоро p и q не принимаютъ значеній $0, -1, -2, \ldots$

Безконечное произведеніе для $1:\Gamma(p)$ сходится при каждомъ значеніи p. Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ Тэйлора

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}e^{\vartheta x}. \qquad (0<\vartheta<1)$$

Сообразно съ этимъ

$$\left(1+\frac{p}{k}\right)e^{-\frac{p}{k}} = \left(1+\frac{p}{k}\right)\left(1-\frac{p}{k}+\frac{1}{2}\frac{p^2}{k^2}e^{-\vartheta_k\frac{p}{k}}\right),$$

$$(0<\vartheta_k<1)$$

т. е.

$$\left(1+\frac{p}{k}\right)e^{-\frac{p}{k}} = 1-\frac{p^2}{k^2}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\vartheta_k\frac{p}{k}}\right)+\frac{1}{2}\frac{p^3}{k^3}e^{-\vartheta_k\frac{p}{k}} = 1+u_k.$$

Такъ какъ, очевидно,

$$|u_k| < \frac{p^2}{k^2}\left(1+\frac{1}{2}e^{|p|}\right)+\frac{1}{2}\frac{p^3}{k^3}e^{|p|},$$

то рядъ $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots$ сходится [1]).

§ 194. **Зависимость между Эйлеровыми интегралами перваго и второго рода.** По § 192 для безконечно возрастающаго k

---

[1]) Слѣдуетъ принять во вниманіе, что ряды $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$ и $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots$ сходятся.

$$\Gamma(p) = \lim \frac{k^p k!}{p(p+1)\cdots(p+k)}, \qquad (p>0)$$

$$\Gamma(q) = \lim \frac{k^q k!}{q(q+1)\cdots(q+k)}, \qquad (q>0)$$

$$\Gamma(p+q) = \lim \frac{k^{p+q} k!}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k)}.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \lim \frac{k!\,(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k)}{p(p+1)\cdots(p+k)\; q(q+1)\cdots(q+k)}.$$

Но по § 192 этотъ предѣлъ равенъ $B(p,q)$.

Такимъ образомъ, каждый Эйлеровъ интегралъ перваго рода можно выразить при посредствѣ функціи Γ:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

При $p = q = \frac{1}{2}$

$$\Gamma(p+q) = \Gamma(1) = 1,$$

и легко вывести, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Этотъ интегралъ легко найти, какъ это слѣдуетъ изъ § 136. Всего проще этотъ интегралъ вычисляется слѣдующимъ образомъ.

Вводятъ новую перемѣнную

$$u = \arcsin\sqrt{x} \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\int_{u_0}^{u_1} du = 2(u_1 - u_0).$$

При этомъ

$$0 < u_0 < u_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x_0 = \sin^2 u_0, \; x_1 = \sin^2 u_1.$$

При приближеніи u_0 къ 0 и u_1 къ $\pi/2$

$$\lim x_0 = 0, \; \lim x_1 = 1,$$

такъ что

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \pi.$$

Такъ какъ $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$, то

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

т. е.

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}.$$

Если въ интегралѣ

$$\int_\varepsilon^a e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad (0 < \varepsilon < a)$$

сдѣлать преобразованіе $x = u^2$, то получимъ:

$$\int_\varepsilon^a e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_{\varepsilon'}^{a'} e^{-u^2}\,du.$$

Приближая сначала ε' къ нулю и увеличивая затѣмъ a' безконечно, получимъ:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Этотъ интегралъ, играющій роль въ исчисленіи вѣроятностей, называютъ интеграломъ Пуассона (Poisson).

§ 195. **Интегральный признакъ сходимости безконечныхъ рядовъ.** Положимъ, что функція $f(x)$ убываетъ и остается положительной при $x \geqq a$. Разсмотримъ безконечный рядъ

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots$$

Такъ какъ въ интервалѣ $\langle a+p-1,\ a+p\rangle$, $p=1, 2, 3, \ldots$,

$$f(a+p-1) \geqq f(x) \geqq f(a+p),$$

то

$$f(a+p-1) \geqq \int\limits_{a+p-1}^{a+p} f(x)\,dx \geqq f(a+p).$$

Положивъ

$$f(a)+f(a+1)+\cdots+f(a+p-1)=s_p,$$

мы найдемъ отсюда, что

$$s_p \geqq \int\limits_a^{a+p} f(x)\,dx$$

и

$$s_p \leqq f(a)+\int\limits_a^{a+p-1} f(x)\,dx.$$

Если рядъ сходится, вслѣдствіе чего $\lim s_p = s$ существуетъ, то изъ перваго неравенства вытекаетъ, что возрастающая функція

$$\int\limits_a^x f(x)\,dx$$

ограничена. Дѣйствительно, если x есть нѣкоторое число ($\geqq a$), то можно выбрать цѣлое число p такъ, что $a+p>x$. Тогда

$$\int\limits_a^x f(x)\,dx < \int\limits_a^{a+p} f(x)\,dx < s \qquad (\text{ибо } s_p < s).$$

Такимъ образомъ, въ случаѣ сходимости ряда существуетъ интегралъ

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Обратное утвержденіе также справедливо. Если этотъ интегралъ существуетъ, то

$$s_p \leqq f(a)+\int\limits_a^{a+p-1} f(x)\,dx < f(a)+\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Поэтому возрастающая послѣдовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ограничена, и $\lim s_p$ существуетъ.

Сообразно съ этимъ будетъ вѣрна слѣдующая теорема Коши.

Пусть $f(x)$ будетъ функція, которая убываетъ и остается положительной при $x \geqq a$. Тогда рядъ

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\cdots$$

сходится или расходится, смотря по тому, существуетъ ли или не существуетъ интегралъ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Примѣры. 1. Рядъ

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots \qquad (\mu \geqq 0)$$

принимаетъ видъ

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots,$$

если положить

$$f(x)=\frac{1}{x^\mu}.$$

Функція $f(x)$, будучи убывающей и положительной при $x \geqq 1$, удовлетворяетъ, слѣдовательно, вышеуказаннымъ требованіямъ.

По теоремѣ Коши, разсматриваемый рядъ сходится или расходится, смотря по тому, существуетъ ли или не существуетъ интегралъ

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\mu}.$$

Но этотъ интегралъ, какъ мы знаемъ, существуетъ тогда и только тогда, когда $\mu > 1$.

Такимъ образомъ, рядъ $\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots$ сходится, если $\mu>1$, и расходится, если $\mu \leqq 1$.

2. Рядъ

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu}+\frac{1}{3(\log 3)^\mu}+\frac{1}{4(\log 4)^\mu}+\cdots$$

принимаетъ видъ

$$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots,$$

если положить

$$f(x)=\frac{1}{x(\log x)^{\mu}}\cdot \qquad (\mu \geqq 0)$$

Функцiя $f(x)$ убываетъ и остается положительной при $x \geqq 2$. Мы можемъ, слѣдовательно, и здѣсь примѣнить теорему Коши, такъ что все приводится къ тому, существуетъ ли или не существуетъ интегралъ

$$\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{\mu}}\cdot$$

Введя новую перемѣнную $z=\log x$, находимъ, что

$$\int\limits_{2}^{x}\frac{dx}{x(\log x)^{\mu}}=\int\limits_{\log 2}^{z}\frac{dz}{z^{\mu}}\cdot$$

При безграничномъ возрастанiи x возрастаетъ безконечно и z.

$\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{\mu}}$ существуетъ поэтому тогда и только тогда, когда существуетъ $\int\limits_{\log 2}^{\infty}\frac{dz}{z^{\mu}}$, т. е. тогда и только тогда, когда $\mu > 1$.

Разсматриваемый рядъ сходится, слѣдовательно, при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leqq 1$.

3. Если имѣется въ виду рядъ

$$\frac{1}{3\log 3(\log\log 3)^{\mu}}+\frac{1}{4\log 4(\log\log 4)^{\mu}}+\cdots, \qquad (\mu \geqq 0)$$

то

$$f(x)=\frac{1}{x\log x(\log\log x)^{\mu}}\cdot$$

При $x \geqq 3$ эта функцiя убываетъ и остается положительной. Введя новую перемѣнную $z = \log x$, находимъ, что

$$\int_3^x \frac{dx}{x \log x (\log \log x)^\mu} = \int_{\log 3}^z \frac{dz}{z (\log z)^\mu}.$$

Отсюда можно вывести, что интегралъ

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x \log x (\log \log x)^\mu}$$

существуетъ тогда и только тогда, когда $\mu > 1$.

Такимъ образомъ, разсматриваемый рядъ сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leqq 1$.

Этотъ рядъ примѣровъ можно, очевидно, безгранично продолжать.

Сообразно съ вышеизложеннымъ, всѣ ряды

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2 \log 2 \log \log 2} + \frac{1}{3 \log 3 \log \log 3} + \frac{1}{4 \log 4 \log \log 4} + \cdots,$$

. . . .

расходятся.

Сумму p членовъ перваго ряда мы обозначимъ черезъ A_p, второго ряда—черезъ B_p, третьяго ряда черезъ $C_p, \ldots$

Тогда оказывается, что

$$\lim \frac{B_p}{A_p} = 0, \quad \lim \frac{C_p}{B_p} = 0, \cdots$$

Говорятъ поэтому, что второй рядъ расходится слабѣе перваго, третiй—слабѣе второго и т. д.

Если имѣемъ 2 расходящихся ряда

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots$$

и

$$g(a)+g(a+1)+g(a+2)+\cdots,$$

гдѣ $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяютъ требованiямъ теоремы Коши, и если s_p есть p-ая частная сумма перваго, а $\bar{s}_p$ есть p-ая частная сумма второго ряда, то

$$s_p \leqq f(a)+\int_a^{a+p-1} f(x)\,dx < f(a)+\int_a^{a+p} f(x)\,dx,$$

$$\bar{s}_p \geqq \int_a^{a+p} g(x)\,dx;$$

поэтому

$$\frac{s_p}{\bar{s}_p} \leqq \frac{f(a)}{\int_a^{a+p} g(x)\,dx}+\frac{\int_a^{a+p} f(x)\,dx}{\int_a^{a+p} g(x)\,dx}.$$

Если $\frac{s_p}{\bar{s}_p}$ есть одно изъ частныхъ $\frac{B_p}{A_p}$, $\frac{C_p}{B_p}$, ... [1]), то $f(x):g(x)$ приближается къ нулю, убывая при безконечномъ возрастанiи x.

Что въ такомъ случаѣ

$$\lim \frac{s_p}{\bar{s}_p}=0,$$

можно показать слѣдующимъ образомъ.

Пусть будетъ $a<a'<a+p$. Тогда по первой теоремѣ о среднемъ значенiи

$$\int_{a'}^{a+p} f(x)\,dx=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\int_{a'}^{a+p} g(x)\,dx. \qquad (a'<\xi<a+p)$$

Поэтому

$$\int_{a'}^{a+p} f(x)\,dx<\frac{f(a')}{g(a')}\int_{a'}^{a+p} g(x)\,dx$$

---

[1]) Слѣдуетъ представить себѣ, что въ обоихъ предложенныхъ рядахъ опущены первые k членовъ, такъ что всѣ члены имѣютъ положительный знакъ.

и

$$\frac{s_p}{\bar{s}_p} < \frac{f(a) + \int\limits_a^{a'} f(x)\,dx}{\int\limits_a^{a+p} g(x)\,dx} + \frac{f(a')}{g(a')}.$$

Если выбрать a' такъ, что

$$\frac{f(a')}{g(a')} < \frac{\varepsilon}{2},$$

то почти при всѣхъ значеніяхъ индекса p

$$\frac{s_p}{\bar{s}_p} < \varepsilon,$$

ибо

$$\lim \frac{f(a) + \int\limits_a^{a'} f(x)\,dx}{\int\limits_a^{a+p} g(x)\,dx} = 0.$$

Впрочемъ, каждому расходящемуся ряду съ положительными членами соотвѣтствуетъ другой такой же рядъ, который расходится слабѣе перваго.

Если $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ есть расходящійся рядъ съ положительными членами и s_p есть его p-ая частная сумма, то и

$$\sqrt{s_1} + (\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}) + (\sqrt{s_3} - \sqrt{s_2}) + \cdots$$

есть расходящійся рядъ съ положительными членами, но онъ расходится слабѣе перваго, такъ какъ

$$\lim \frac{\sqrt{s_p}}{s_p} = \lim \frac{1}{\sqrt{s_p}} = 0.$$

Когда имѣются два сходящихся ряда съ положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{и} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

то говорятъ, что второй сходится слабѣе перваго, если

$$\lim \frac{r_p}{\bar{r}_p} = 0.$$

При этомъ

$$r_p = u_p + u_{p+1} + \cdots \quad \text{и} \quad \bar{r}_p = v_p + v_{p+1} + \cdots$$

Каждому сходящемуся ряду съ положительными членами соотвѣтствуетъ такой же рядъ, который сходится слабѣе перваго.

Если $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ есть сходящійся рядъ съ положительными членами и $r_p = u_p + u_{p+1} + \cdots$ есть его p-ый остатокъ, то

$$(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}) + (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}) + \cdots,$$

очевидно, есть сходящійся рядъ съ положительными членами. Но онъ сходится слабѣе перваго, ибо его p-ый остатокъ равенъ $\sqrt{r_p}$ и

$$\lim \frac{r_p}{\sqrt{r_p}} = \lim \sqrt{r_p} = 0.$$

Глава XVII.

Геометрическія примѣненія опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 196. **Вычисленіе площадей.** Пусть $f(x)$ будетъ функція, интегрируемая въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ и не имѣющая отрицательныхъ значеній. Кривая $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ лежитъ тогда цѣликомъ съ одной стороны оси x-овъ [1]).

Мы опустимъ перпендикуляры изъ концовъ кривой на ось x-въ и разсмотримъ часть плоскости $\mathfrak{A}$, ограниченную этими обоими перпендикулярами, осью x-овъ и кривой [2]).

---

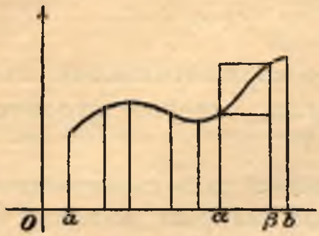
[1]) x, y означаютъ прямоугольныя координаты.

[2]) Эта часть плоскости состоитъ изъ точекъ

$$x = a + \vartheta(b - a), \quad y = \bar{\vartheta} f(x),$$

гдѣ $0 \leqq \vartheta$, $\bar{\vartheta} \leqq 1$.

Возьмемъ какое-либо разложеніе $\mathfrak{Z}$ основанія разсматриваемой части плоскости, т. е. интервала $\langle a, b \rangle$, и возставимъ въ точкахъ дѣленія перпендикуляры къ оси x-овъ; часть плоскости $\mathfrak{A}$ разлагается тогда на нѣкоторое число однородныхъ частей.



Фиг. 13.

Пусть $\langle \alpha, \beta \rangle$ будетъ частный интервалъ интервала $\langle a, b \rangle$ и пусть $\mu(\alpha, \beta)$ будетъ нижняя, а $M(\alpha, \beta)$—верхняя граница функціи $f(x)$ въ $\langle \alpha, \beta \rangle$. Расположенная надъ $\langle \alpha, \beta \rangle$ часть площади $\mathfrak{A}$, очевидно, не больше прямоугольника

$$(\beta - \alpha) M(\alpha, \beta)$$

и не меньше прямоугольника

$$(\beta - \alpha) \mu(\alpha, \beta).$$

Поэтому часть $\mathfrak{A}$ не больше, чѣмъ

$$S(\mathfrak{Z}) = \sum (\beta - \alpha) M(\alpha, \beta)$$

и не меньше, чѣмъ

$$s(\mathfrak{Z}) = \sum (\beta - \alpha) \mu(\alpha, \beta),$$

при чемъ суммованіе распространяется на всѣ частные интервалы разложенія $\mathfrak{Z}$.

Если теперь $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то обѣ суммы $s(\mathfrak{Z})$ и $S(\mathfrak{Z})$ стремятся къ предѣлу

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Поэтому и

$$\mathfrak{A} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Противъ приведенныхъ разсужденій можно возразить, что въ нихъ говорится о площади $\mathfrak{A}$, которая не была предварительно опредѣлена.

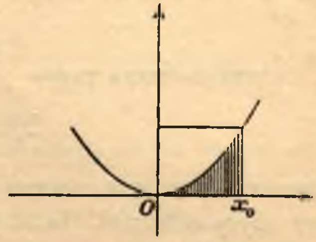
Если хотятъ избѣгнуть этого упрека, то нужно о п р е д ѣ л и т ь площадь, какъ общій предѣлъ суммъ $s(\mathfrak{Z})$ и $S(\mathfrak{Z})$ для случая, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность разложеній.

§ 197. **Примѣры.** [1]) 1. Кривая

$$y = \frac{x^2}{2p} \qquad (0 \leqq x \leqq x_0)$$

есть дуга параболы. Площадь $\mathfrak{A}$ заштрихованной на фигурѣ части равна

$$\frac{1}{2p}\int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{1}{2p}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{x_0} = \frac{1}{3}x_0 y_0.$$



Фиг. 14.

Такимъ образомъ, дуга параболы дѣлитъ въ отношеніи $1:2$ прямоугольникъ, опредѣляемый точкою (x_0, y_0) и осями.

2. Кривая

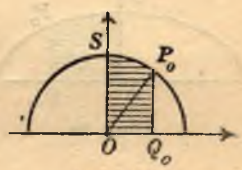
$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \leqq x \leqq a)$$

есть полукругъ. Площадь заштрихованной на фигурѣ части плоскости выражается черезъ

$$\int_0^{x_0} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

или черезъ

$$a^2 \int_0^{u_0} \sqrt{1 - u^2}\, du, \qquad (x_0 = a u_0)$$



Фиг. 15.

если положить $x = au$.

Но интегрированіе по частямъ даетъ:

$$\int \sqrt{1 - u^2}\, du = u\sqrt{1 - u^2} + \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= u\sqrt{1 - u^2} - \int \sqrt{1 - u^2}\, du + \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}};$$

поэтому

$$2\int \sqrt{1 - u^2}\, du = u\sqrt{1 - u^2} + \arcsin u + C.$$

---

[1]) x, y повсюду означаютъ прямоугольныя координаты.

Слѣдовательно,

$$2\int_0^{u_0}\sqrt{1-u^2}\,du = u_0\sqrt{1-u_0^{\,2}}+\arcsin u_0 = \frac{x_0 y_0}{a^2}+\arcsin\frac{x_0}{a},$$

и искомая площадь равна

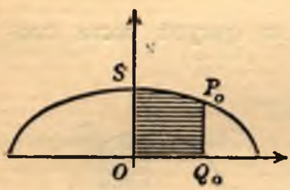
$$\frac{x_0 y_0}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x_0}{a}.$$

Площадь полукруга, такимъ образомъ, равна $\frac{1}{2}\pi a^2$, а площадь цѣлаго круга есть πa^2. Число π есть, слѣдовательно, площадь круга, котораго радіусъ равенъ 1.

3. Кривая

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (-a\leqq x\leqq a)$$

есть половина эллипса. Площадь заштрихованной на фигурѣ части плоскости равна



Фиг. 16.

$$\frac{b}{a}\int_0^{x_0}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x_0 y_0}{2}+\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x_0}{a}.$$

Площадь всего эллипса, выражаемаго уравненіемъ

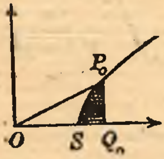
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

равна поэтому πab.

4. Кривая

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (x\geqq a)$$

есть дуга гиперболы. Мы вычислимъ площадь заштрихованной на фигурѣ части плоскости. Эта площадь равна



Фиг. 17.

$$\frac{b}{a}\int_a^{x_0}\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Поэтому

$$2\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Чтобы найти интегралъ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, слѣдуетъ ввести новую переменную, опредѣляемую равенствомъ

$$x + \sqrt{x^2 - a^2} = u.$$

Тогда

$$dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{u\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = du,$$

такъ что

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{du}{u}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = C + \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

Такимъ образомъ, площадь разсматриваемой части плоскости есть

$$\frac{x_0 y_0}{2} - \frac{ab}{2} \log \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}.$$

5. Эллиптическій секторъ и гиперболическій секторъ. Въ No. 3 и No. 4 площадь треугольника OQ_0P_0 равна $\frac{1}{2}x_0 y_0$. Отсюда слѣдуетъ, что площадь эллиптическаго сектора OSP_0 равна

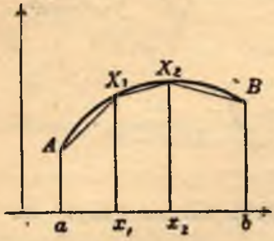
$$\frac{ab}{2} \arcsin \frac{x_0}{a},$$

и что площадь гиперболическаго сектора OSP_0 равна

$$\frac{ab}{2} \log \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}.$$

§ 198. **Вычисленіе длинъ дугъ.** Мы опредѣлимъ, что слѣдуетъ разумѣть подъ длиною дуги кривой

$$y = f(x) \quad (a \leqq x \leqq b).$$



Фиг. 18.

Разлагаемъ интервалъ $\langle a, b\rangle$ на частные интервалы

$$\langle a, x_1\rangle,\ \langle x_1, x_2\rangle,\ \dots,\ \langle x_{p-1}, b\rangle,$$
$$(a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b)$$

и это разложеніе называемъ разложеніемъ $\mathfrak{Z}$. Точки кривой, коихъ абсциссы суть

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, b,$$

пусть будутъ

$$A, X_1, X_2, \dots, X_{p-1}, B.$$

Длину ломанной линіи $A\,X_1\,X_2 \dots X_{p-1}B$ мы обозначаемъ черезъ $l(\mathfrak{Z})$.

Можетъ случиться, что $l(\mathfrak{Z})$ всегда стремится къ предѣлу, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Въ этомъ случаѣ $l(\mathfrak{Z})$ имѣетъ постоянно одинъ и тотъ же предѣлъ [1]). Его называютъ длиною разсматриваемой дуги, а дугу называютъ спрямляемой [2]).

Каждое разложеніе $\mathfrak{Z}$ можно сдѣлать первымъ членомъ цѣпи $\mathfrak{Z}$-въ. Если же $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, то $l(\mathfrak{Z})$ пробѣгаетъ возрастающую послѣдовательность. Поэтому, обозначивъ черезъ l длину разсматриваемой нами дуги кривой, мы будемъ постоянно имѣть

$$l(\mathfrak{Z}) \leqq l.$$

Отсюда мы можемъ заключить, что $f(x)$ есть функція съ ограниченной варіаціей въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, когда l существуетъ.

Въ самомъ дѣлѣ [3])

$$l(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}.$$

---

[1]) Если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \dots$ и $\overline{\mathfrak{Z}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_3, \dots$ суть особенныя послѣдовательности $\mathfrak{Z}$-въ, то и $\mathfrak{Z}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_1, \mathfrak{Z}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \dots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

[2]) Говорятъ также, что функція $f(x)$ спрямляема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

[3]) Мы полагаемъ $a = x_0$, $b = x_p$ и $f(x_\nu) = y_\nu$.

Такъ какъ

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2} > \sqrt{(y_\nu - y_{\nu-1})^2} = |y_\nu - y_{\nu-1}|,$$

то

$$\sum_{\nu=1}^{r} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| < l.$$

Но это обозначаетъ, что $f(x)$ есть функція съ **ограниченной варіаціей** въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Далѣе, въ случаѣ существованія l должно выполняться еще другое условіе. Пусть x_0 будетъ точка между a и b, $\mathfrak{Z}$—такое разложеніе интервала $\langle a, b\rangle$, въ которомъ x_0 не встрѣчается, какъ точка дѣленія, и положимъ, что $\langle \alpha, \beta\rangle$ есть частный интервалъ, въ которомъ лежитъ x_0. Введя x_0, какъ точку дѣленія, мы получимъ разложеніе $\bar{\mathfrak{Z}}$. Теперь ясно, что

$$l(\bar{\mathfrak{Z}}) - l(\mathfrak{Z}) = \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + \{f(x_0) - f(\alpha)\}^2}$$
$$+ \sqrt{(x_0 - \beta)^2 + \{f(x_0) - f(\beta)\}^2} - \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \{f(\beta) - f(\alpha)\}^2}.$$

Если $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то

$$\lim \{l(\bar{\mathfrak{Z}}) - l(\mathfrak{Z})\} = l - l = 0.$$

Съ другой стороны, [1])

$$\lim \{l(\bar{\mathfrak{Z}}) - l(\mathfrak{Z})\} = |f(x_0) - f(x_0 - 0)| + |f(x_0) - f(x_0 + 0)|$$
$$- |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|.$$

Сообразно съ этимъ должно быть:

$$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| = |f(x_0 + 0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_0 - 0)|$$

Изъ равенства же

$$|A - B| = |A - C| + |C - B|$$

слѣдуетъ, что C содержится въ интервалѣ $\langle A, B\rangle$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы C лежало внѣ интервала $\langle A, B\rangle$, то одно изъ двухъ чиселъ $|A - C|$ и $|C - B|$ было бы больше, чѣмъ $|A - B|$.

[1]) Предѣлы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ существуютъ, ибо $f(x)$ можно представить въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, какъ сумму двухъ монотонныхъ функцій.

Такимъ образомъ, функція $f(x)$ имѣетъ то свойство, что $f(x_0)$ постоянно принадлежитъ интервалу $\langle f(x_0-0),\ f(x_0+0)\rangle$ $(a<x_0<b)$. Разности

$$f(x_0-0)-f(x_0),\ f(x_0+0)-f(x_0)$$

никогда поэтому не имѣютъ одинаковаго знака.

Если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей, которая, сверхъ того, имѣетъ только-что указанное свойство, то дуга кривой $y=f(x)$, $a\leqq x\leqq b$, спрямляема.

Такъ какъ $f(x)$ есть функція съ ограниченной варіаціей въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то существуетъ такое число K, что

$$\sum|f(\beta)-f(\alpha)|<K,$$

какъ бы мы ни разлагали интервалъ $\langle a, b\rangle$ на частные интервалы $\langle\alpha, \beta\rangle$. Но

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}\leqq\beta-\alpha+|f(\beta)-f(\alpha)|.$$

Поэтому постоянно

$$l(\mathfrak{Z})<b-a+K.$$

Пусть l будетъ верхняя граница числовой послѣдовательности, составленной изъ всѣхъ чиселъ $l(\mathfrak{Z})$. Тогда существуетъ такое разложеніе $\overline{\mathfrak{Z}}$, что

$$l(\overline{\mathfrak{Z}})>l-\frac{\varepsilon}{2}$$

$(\varepsilon>0)$. Теперь мы покажемъ, что

$$\lim l(\mathfrak{Z}_n)=l,$$

если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ представляетъ какую-либо особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ то почти всѣ разложенія $\mathfrak{Z}_n$ имѣютъ то свойство, что въ каждомъ частномъ интервалѣ содержится не больше одной точки дѣленія изъ разложенія $\overline{\mathfrak{Z}}$. Мы оставляемъ въ сторонѣ остальныя $\mathfrak{Z}_n$.

Черезъ $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ мы обозначаемъ разложеніе, которое получается изъ разложенія $\mathfrak{Z}_n$ присоединеніемъ точекъ дѣленія разложенія $\overline{\mathfrak{Z}}$. Тогда

$$l(\overline{\mathfrak{Z}}_n)\geqq l(\overline{\mathfrak{Z}})>l-\frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$l(\bar{\mathfrak{Z}}_n) \geqq l(\mathfrak{Z}_n).$$

Если $\bar{x}$ есть точка дѣленія въ разложеніи $\bar{\mathfrak{Z}}$, содержащаяся въ частномъ интервалѣ $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ разложенія $\mathfrak{Z}_n$, то

$$\begin{aligned} & l(\bar{\mathfrak{Z}}_n) - l(\mathfrak{Z}_n) \\ = & \sum \Big\{ \sqrt{(\bar{x}-\alpha_n)^2 + [f(\bar{x}) - f(\alpha_n)]^2} + \sqrt{(\bar{x}-\beta_n)^2 + [f(\bar{x}) - f(\beta_n)]^2} \\ & - \sqrt{(\alpha_n - \beta_n)^2 + [f(\alpha_n) - f(\beta_n)]^2} \Big\}, \end{aligned}$$

при чемъ суммованіе распространяется на всѣ частные интервалы этого рода. Но эта сумма стремится къ предѣлу нуль, ибо выраженіе

$$\begin{aligned} \sum \{ |f(\bar{x}) - f(\bar{x}-0)| + |f(\bar{x}) - f(\bar{x}+0)| \\ - |f(\bar{x}-0) - f(\bar{x}+0)| \} \end{aligned}$$

равно нулю.

Поэтому почти для всѣхъ $\mathfrak{Z}_n$

$$l(\bar{\mathfrak{Z}}_n) - l(\mathfrak{Z}_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и изъ неравенства

$$l(\bar{\mathfrak{Z}}_n) > l - \frac{\varepsilon}{2}$$

слѣдуетъ, что

$$l(\mathfrak{Z}_n) > l - \varepsilon.$$

Такъ какъ, сверхъ того,

$$l(\mathfrak{Z}_n) \leqq l,$$

то почти всѣ $l(\mathfrak{Z}_n)$ лежатъ въ интервалѣ $\langle l-\varepsilon, l \rangle$, т. е.

$$\lim l(\mathfrak{Z}_n) = l.$$

Если $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$ есть непрерывная функція съ ограниченной варіаціей, то условія предыдущей теоремы выполнены. Въ самомъ дѣлѣ, въ силу непрерывности

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \qquad (a < x_0 < b)$$

§ 199. **Свойства длины дуги.** Если функція $f(x)$ спрямляема въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$, то она спрямляема также въ каждой части

$\langle\alpha, \beta\rangle$ интервала $\langle a, b\rangle$. Ибо оба характеристическихъ условія спрямляемости выполнены въ части $\langle\alpha, \beta\rangle$, если они выполнены во всемъ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Длину дуги

$$y = f(x) \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta)$$

мы обозначимъ черезъ $l(\alpha, \beta)$. Ясно, что $l(\alpha, \beta)$ не меньше, чѣмъ $\beta - \alpha$.

При $a < c < b$

$$l(a, b) = l(a, c) + l(c, b).$$

Въ этомъ убѣждаются, разсматривая особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ интервала $\langle a, b\rangle$, начинающуюся съ разложенія интервала $\langle a, b\rangle$ на части $\langle a, c\rangle$ и $\langle c, b\rangle$.

Изъ вышеприведеннаго свойства слѣдуетъ, что $l(a, x)$ есть функція **возрастающая**[1]) въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, такъ что

$$l(a, x) < l(a, x + h). \qquad (a \leqq x < x + h \leqq b)$$

Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то и $l(a, x)$ есть функція, непрерывная въ $\langle a, b\rangle$. Достаточно доказать непрерывность функціи $l(a, x)$ или $l(x, b) = l(a, b) - l(a, x)$ при $x = a$ и $x = b$. Въ самомъ дѣлѣ, если $a < c < b$, то въ интервалѣ $\langle c, b\rangle$

$$l\langle a, x\rangle = l\langle a, c\rangle + l\langle c, x\rangle.$$

Если извѣстно, что функціи $l(a, x)$, $a \leqq x \leqq c$, и $l(c, x)$, $c \leqq x \leqq b$, непрерывны въ точкѣ c, то этимъ обезпечена непрерывность функціи $l(a, x)$ въ точкѣ c.

Чтобы доказать непрерывность функціи $l(x, b)$ въ точкѣ b, мы поступимъ такъ:

Пусть x_0 будетъ значеніе между a и b и пусть $\mathfrak{Z}$ обозначаетъ разложеніе интервала $\langle x_0, b\rangle$ на частные интервалы

$$\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots \langle x_{p-1}, b\rangle$$

$(x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b)$. Выраженіе

---

[1]) Мы полагаемъ разъ навсегда: $l(a, a) = 0$.

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + \{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\}^2} \qquad (b = x_p)$$

будемъ обозначать черезъ

$$\overset{b}{\underset{x_0}{l}}(\mathfrak{Z}).$$

Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ интервала $\langle x_0, b\rangle$, то

$$\lim \overset{b}{\underset{x_0}{l}}(\mathfrak{Z}) = l(x_0, b).$$

Но мы предположили, что функцiя $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Такъ какъ

$$\lim x_{p-1} = b,$$

то

$$\lim \sqrt{(x_p - x_{p-1})^2 + \{f(x_p) - f(x_{p-1})\}^2}$$

$$= \lim \sqrt{(b - x_{p-1})^2 + \{f(b) - f(x_{p-1})\}^2} = 0;$$

слѣдовательно,

$$\lim \sum_{\nu=1}^{p-1} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + \{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\}^2} = l(x_0, b).$$

Поэтому при надлежащемъ выборѣ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b)$

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + \{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\}^2} > l(x_0, b) - \varepsilon$$

$$> l(b-0, b) - \varepsilon$$

$(\varepsilon > 0)$. На томъ же основанiи при надлежащемъ выборѣ чиселъ $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{q-1}$ $(x_{p-1} < x_p < \cdots < x_{q-1} < b)$

$$\sum_{\nu=p}^{q-1} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + \{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\}^2} > l(x_{p-1}, b) - \varepsilon$$

$$> l(b-0, b) - \varepsilon.$$

и т. д.

Если бы было $l(b-0,\ b)>0$, то мы могли бы положить $l(b-0,\ b)=2\varepsilon$. Тогда безконечный рядъ

$$\sum\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+\{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})\}^2}\qquad(\nu=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

расходился бы, такъ какъ рядъ $\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\cdots$ расходится. Но и рядъ

$$\sum|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|\qquad(\nu=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

расходился бы. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\sqrt{(x_{\nu-1}-x_\nu)^2+\{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})\}^2}$$
$$\leqq x_{\nu-1}-x_\nu+|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|,$$

такъ что сходимость суммы $\sum|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|$ влечетъ за собою сходимость суммы $\sum\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+\{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})\}^2}$ [1]).

Но расходимость суммы $\sum|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|$ противорѣчитъ предположенію, что $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$ есть функція съ ограниченной варіаціей. Въ самомъ дѣлѣ, n-ая частная сумма ряда не больше, чѣмъ

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|+|f(a)-f(x_0)|+|f(x_n)-f(b)|$$
$$(a<x_0<\cdots<x_n<b).$$

Но всѣ эти суммы меньше нѣкотораго постояннаго числа K.

Сообразно съ этимъ должно быть $l(b-0,\ b)=0$. Поэтому $l(x,\ b)$ есть непрерывная функція при $x=b$. То же относится и къ функціи $l(a,\ x)$.

Совершенно такъ же доказывается, что функція $l(a,\ x)$ непрерывна въ точкѣ a.

Такимъ образомъ, въ случаѣ непрерывности функціи $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$ функція $l(a,\ x)$ будетъ непрерывной и возрастающей въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$. Въ интервалѣ $\langle a,\ b\rangle$ функція $l(a,\ x)$ принимаетъ одинъ и только одинъ разъ каждое значеніе λ, удовлетворяющее неравенствамъ

$$0\leqq\lambda\leqq l(a,\ b).$$

[1]) $\Sigma(x_\nu-x_{\nu-1})$ есть сходящійся рядъ съ положительными членами.

§ 200. Длина дуги, выраженная опредѣленнымъ интеграломъ. Положимъ, что въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функція $f(x)$ имѣетъ производную $f'(x)$ и что $f'(x)$ есть функція, интегрируемая въ $\langle a, b\rangle$. Что при этихъ предположеніяхъ существуетъ $l(a, b)$, можно вывести изъ того, что въ силу существованія производной $f'(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ функція $f(x)$ непрерывна, а въ силу равенства

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)\,dx \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

она имѣетъ ограниченную варіацію (ср. § 157).

Но можно прямо доказать существованіе числа $l(a, b)$. Если $a = x_0$, $b = x_p$ и

$$a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b,$$

то при помощи теоремы о среднемъ значеніи, приведенной въ § 67, выраженіе

$$l(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + \{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\}^2}$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$l(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sqrt{1 + [f'(\xi_\nu)]^2}. \qquad (x_{\nu-1} < \xi_\nu < x_\nu)$$

Такъ какъ функція $f'(x)$ должна быть интегрируемой въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, то (по § 152) и функція

$$\varphi(x) = 1 + [f'(x)]^2$$

интегрируема въ $\langle a, b\rangle$. Но

$$\sqrt{\varphi(x)} \leqq \varphi(x).$$

Такимъ образомъ, $\sqrt{\varphi(x)}$ есть функція, ограниченная въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, ибо это же свойство принадлежитъ функціи $\varphi(x)$.

Далѣе,

$$\sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{\varphi(x')} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{\sqrt{\varphi(x)} + \sqrt{\varphi(x')}},$$

такъ что

$$\left|\sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{\varphi(x')}\right| \leqq \frac{1}{2}\left|\varphi(x) - \varphi(x')\right|,$$

ибо $\varphi(x) \geqq 1$, $\varphi'(x) \geqq 1$. Обозначивъ черезъ $\sigma(\alpha, \beta)$ колебаніе функціи $l(x)$, черезъ $\bar{\sigma}(\alpha, \beta)$ колебаніе функціи $\sqrt{\varphi(x)}$ въ интервалѣ (α, β), мы будемъ имѣть:

$$\bar{\sigma}(\alpha, \beta) \leqq \frac{1}{2}\sigma(\alpha, \beta).$$

Поэтому среднее колебаніе функціи $\sqrt{\varphi(x)}$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ такъ же, какъ и среднее колебаніе функціи $\varphi(x)$, равно нулю.

Такимъ образомъ, функція $\sqrt{\varphi(x)}$ интегрируема въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

Поэтому, если $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то

$$l(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p}(x_\nu - x_{\nu-1})\sqrt{\varphi(\xi_\nu)}$$

стремится къ предѣлу l, а именно:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Положивъ $f(x) = y$ и, слѣдовательно, $f'(x)\,dx = dy$, можно написать эту формулу еще проще такъ:

$$l = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Если функція $f'(x)$ непрерывна [1]), то функція

$$\int_a^x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

имѣетъ дифференціалъ

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Его называютъ *дифференціаломъ дуги* кривой $y = f(x)$.

§ 201. **Длины дугъ, выражаемыя несобственнымъ интеграломъ.** Положимъ, что $f(x)$ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ есть непрерыв-

[1]) Тогда и функція $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ непрерывна.

ная функція съ ограниченной варіаціей, имѣющая производную повсюду между a и b. Пусть $[f'(x)]^2$ будетъ функція, интегрируемая въ каждомъ интервалѣ $\langle a', b' \rangle$, $a < a' < b' < b$, но не въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$.

Тогда, по § 200,

$$l(a', b') = \int_{a'}^{b'} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Если a' стремится къ a и b' къ b, то $l(a', b')$ стремится къ $l(a, b)$. Существуетъ, слѣдовательно, несобственный интегралъ

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

который имѣетъ значеніе $l(a, b)$.

§ 202. **Примѣры.** 1. Длина $l(0, x_0)$ дуги параболы

$$y = \frac{x^2}{2p} \qquad (0 \leqq x \leqq x_0)$$

опредѣляется слѣдующей формулой:

$$l(0, x_0) = \int_0^{x_0} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ:

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} - \int \frac{\frac{x^2}{p^2}\, dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}}$$

$$= x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} - \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}},$$

такъ что

$$2\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}}.$$

Полагая $x = pz$, имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}} = p \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = p \log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right).$$

Наконецъ,

$$l(0, x_0) = \frac{x_0\sqrt{x_0^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{x_0+\sqrt{x_0^2+p^2}}{p}.$$

2. Длина φ_0 дуги круга

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad (x_0 \leqq x \leqq 1, -1 \leqq x_0)$$

выражается несобственнымъ интеграломъ, существованіе котораго можно предвидѣть по § 201, а именно:

$$\varphi_0 = \int_{x_0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, при $-1 < x < 1$

$$dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad dx^2 + dy^2 = \frac{dx}{1-x^2}.$$

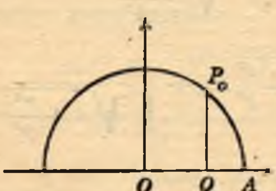
Такъ какъ въ интервалѣ $\langle -1, 1 \rangle$ функція $\arccos x$ непрерывна и при $-1 < x < 1$ имѣетъ производную $-1 : \sqrt{1-x^2}$, то

$$\varphi_0 = -(\arccos x)\Big|_{x_0}^{1},$$

т. е.

$$\varphi_0 = \arccos x_0, \text{ такъ что } x_0 = \cos\varphi_0;$$

$\arccos x_0 = \pi$ при $x_0 = -1$, такъ что π есть длина полукруга радіуса 1. Поэтому $0 \leqq \varphi_0 \leqq \pi$.



Фиг. 19.

Такъ какъ въ интервалѣ $(0, \pi)$ функція $\sin x$ остается положительной, то изъ равенства $x_0 = \cos\varphi_0$ мы можемъ заключить, что

$$y_0 = \sqrt{1-x_0^2} = \sin\varphi_0.$$

Этимъ раскрывается связь функцій косинусъ и синусъ съ кругомъ единицы (т. е. кругомъ, радіусъ котораго равенъ 1).

Въ элементарной математикѣ эта связь является точкой отправленія.

На фигурѣ 19 пусть будетъ $\overline{OA}=1$. Тогда $\overline{OQ_0}=\cos\varphi_0$, $\overline{QP_0}=\sin\varphi_0$ и φ_0 есть длина дуги AP_0.

Длина дуги

$$J=\sqrt{a^2-x^2} \qquad (x_0 \leqq x \leqq a, -a \leqq x_0)$$

равна

$$a\int_{x_0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

или

$$a\int_{u_0}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \qquad (x=au)$$

Положивъ

$$\int_{u_0}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\varphi_0,$$

найдемъ, что разсматриваемая дуга равна $a\varphi_0$.

φ_0 есть соотвѣтственная дуга на кругѣ единицы. Ее находятъ, соединяя концы разсматриваемой дуги круга съ центромъ.

Уголъ, который образуютъ другъ съ другомъ двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ O, измѣряется въ высшемъ анализѣ дугою, которую онѣ опредѣляютъ на кругѣ единицы центра O. Сообразно съ этимъ прямой уголъ равенъ $\frac{\pi}{2}$, а выпрямленный уголъ равенъ π.

По вышеизложенному длина дуги круга радіуса a равна числу a, помноженному на соотвѣтственный центральный уголъ.

3. Длина дуги эллипса

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq x_0,\ x_0 \leqq a)$$

равна

$$\int_{0}^{x_0}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx.$$

Мы примемъ, что $a > b > 0$, и положимъ

$$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = k\text{ [1]}.$$

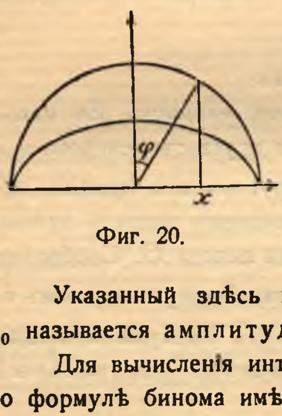
Тогда $0 < k < 1$, и предыдущій интегралъ равенъ

$$\int_0^{x_0} \sqrt{\frac{a^2-k^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-k^2x^2)}}{a^2-x^2}\,dx.$$

Интегралъ имѣетъ форму

$$\int_\alpha^\beta \mathfrak{R}\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx,$$

гдѣ $P(x)$ есть цѣлая раціональная функція четвертой степени. $\mathfrak{R}$ означаетъ раціональную операцію. Такіе интегралы называются **эллиптическими**. Они дали поводъ къ построенію обширной теоріи.



Фиг. 20.

Мы теперь упростимъ найденный нами для дуги эллипса интегралъ, введя новую перемѣнную

$$\arcsin \frac{x}{a} = \varphi.$$

При этомъ интегралъ преобразуется въ

$$a \int_0^{\varphi_0} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Указанный здѣсь интегралъ обозначаютъ знакомъ $E(k, \varphi_0)$; φ_0 называется **амплитудой**, а k — **модулемъ** интеграла.

Для вычисленія интеграла $E(k, \varphi_0)$ можно поступить такъ: [2]) по формулѣ бинома имѣемъ: [3])

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} =$$

$$1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi - \cdots$$

---

[1]) k есть численный эксцентриситетъ эллипса.

[2]) Этотъ способъ представляется особенно цѣлесообразнымъ при весьма маломъ k.

[3]) Нужно принять во вниманіе, что $k^2\sin^2\varphi \leqq k^2 < 1$.

Рядъ, находящійся въ правой части, сходится равномѣрно при всѣхъ значеніяхъ φ (ср. § 172, No. 7), ибо абсолютныя величины его членовъ меньше соотвѣтственныхъ членовъ сходящагося ряда

$$1+k^2+k^4+\cdots$$

По § 172, No 4, имѣемъ, слѣдовательно:

$$E(k,\varphi_0)=\int_0^{\varphi_0} d\varphi-\frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi_0}\sin^2\varphi\, d\varphi-\frac{1}{2\cdot 4}k^4\int_0^{\varphi_0}\sin^4\varphi\, d\varphi-\cdots$$

Въ частности (ср. § 160)

$$E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2-\cdots\right\}.$$

Вмѣсто $E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$ пишутъ обыкновенно $E(k)$. Тогда $aE(k)$ есть длина дуги четвертой части нашего эллипса.

4. Разсмотримъ геометрическое мѣсто точки P, которой разстоянія отъ двухъ постоянныхъ точекъ F и F' имѣютъ постоянное произведеніе.

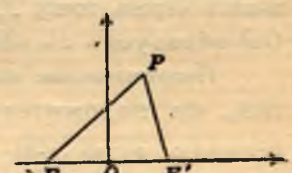
За ось x-въ мы примемъ прямую, соединяющую обѣ постоянныя точки; за начало—середину отрѣзка FF', а ось y-въ возьмемъ перпендикулярной къ оси x-въ.

Тогда условія, наложенныя на точку P, выражаются уравненіемъ

$$\{(x-c)^2+y^2\}\{(x+c)^2+y^2\}=a^4,$$

или

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=a^4.$$



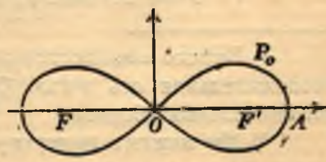
Фиг. 21.

Въ случаѣ $a=c$ мы получаемъ такъ называемую лемнискату (фиг. 22). Ея уравненіе имѣетъ видъ:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0.$$

Уравненіе значительно упрощается при переходѣ къ полярнымъ координатамъ.

Съ полярными координатами мы уже встрѣчались. Мы знаемъ изъ § 136, что въ случаѣ $x^2+y^2>0$ можно найти (и при томъ однимъ только способомъ) такое число φ, что



Фиг. 22.

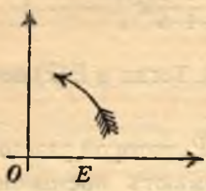
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi. \qquad (-\pi \leqq \varphi < \pi)$$

Это число φ и число $r = \sqrt{x^2+y^2}$ суть полярныя координаты точки (x, y). Для начала r равно нулю, а φ остается неопредѣленнымъ.

r есть разстоянiе отъ начала и называется радiусомъ-векторомъ; φ есть уголъ, образуемый радiусомъ-векторомъ съ положительною осью x-въ [1]).

Мы должны еще кое-что сказать объ измѣренiи этого угла.

Положительную ось x-въ можно вращать около начала въ двухъ различныхъ направленiяхъ. Одно изъ нихъ мы называемъ положительнымъ. На фигурѣ оно отмѣчено стрѣлкой. Чтобы измѣрить вращенiе, мы принимаемъ во вниманiе дугу круга, описываемую точкою E оси абсциссъ, отстоящей отъ O на разстоянiи 1. Длину этой дуги круга мы снабжаемъ знакомъ $+$ при положительномъ вращенiи и знакомъ $-$, когда вращенiе происходитъ въ отрицательную сторону.



Фиг. 23.

Если послѣ вращенiя на уголъ φ положительная ось x-въ проходитъ черезъ точку P, отличную отъ O, то мы говоримъ, что OP образуетъ съ положительною осью x-въ уголъ φ.

Положительное направленiе вращенiя обыкновенно выбираютъ такъ, что положительная ось y-въ образуетъ съ положительною осью x-въ уголъ $\frac{\pi}{2}$.

Если теперь ввести полярныя координаты въ уравненiе лемнискаты, т. е. положить

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

то получимъ:

$$r^4 - 2r^2c^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

или [2])

$$r^2 - 2c^2\cos 2\varphi = 0 \quad \text{или} \quad r = a\sqrt{\cos 2\varphi}. \qquad (a = c\sqrt{2})$$

---

[1]) Вмѣсто «положительной половины оси x-въ» мы кратко говоримъ «положительная ось x-въ». Она составляется изъ точекъ, имѣющихъ положительныя абсциссы.

[2]) Мы можемъ вычеркнуть множитель r^2, такъ какъ и новое уравненiе удовлетворяется при $r=0$, а именно, когда $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Есла φ возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{4}$, то величины r и $x = r\cos\varphi$ убываютъ отъ a до 0; при этомъ описывается дуга AP_0O.

Обозначимъ черезъ s длину дуги AP_0 лемнискаты. Пусть r_0, φ_0 будутъ полярныя координаты, а x_0, y_0 — Декартовы координаты точки P_0. Тогда

$$s = \int_{x_0}^{a} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Введя теперь новую перемѣнную φ, получаемъ:

$$dx = d(r\cos\varphi) = -r\sin\varphi d\varphi + \cos\varphi dr,$$

$$dy = d(r\sin\varphi) = r\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi dr;$$

поэтому

$$dx^2 + dy^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2,$$

а такъ какъ

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \text{и} \quad dr = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi,$$

то

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 d\varphi^2}{\cos 2\varphi}.$$

Такимъ образомъ,

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = -\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.\ ^{1)}$$

Интегралъ имѣетъ теперь видъ:

$$s = a\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}.$$

Такъ какъ $\varphi_0 \leqq \frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\varphi \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{поэтому} \quad \sqrt{2}\sin\varphi \leqq 1.$$

Мы можемъ, слѣдовательно, положить

$$\psi = \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right).$$

Тогда

$$d\psi = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}$$

[1]) Такъ какъ $dx > 0$*), то $d\varphi < 0$.

*) При измѣненіи x отъ x_0 до a.

и

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\psi, \quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi};$$

поэтому

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}}. \qquad (\sin\psi_0 = \sqrt{2}\sin\varphi_0)$$

Обыкновенно интегралъ

$$\int\limits_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \qquad (k^2 < 1)$$

обозначаютъ [1]) черезъ

$$F(k, \psi_0);$$

поэтому

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \psi_0\right).$$

Для вычисленія величины $F(k, \psi_0)$ существуетъ прекрасный способъ Гаусса (Gauss), состоящій въ слѣдующемъ.

Положимъ, что требуется вычислить [2]) интегралъ

$$\int\limits_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}}, \qquad (a > b > 0)$$

гдѣ $0 \leqq \psi_0 \leqq \frac{\pi}{2}$.

Введемъ новую перемѣнную φ, связанную [3]) съ ψ соотношеніемъ

$$\sin\psi = \frac{2a\sin\varphi}{a + b + (a - b)\sin^2\varphi}.$$

Тогда

$$\cos\psi d\psi = a\cdot\frac{a + b - (a - b)\sin^2\varphi}{\{a + b + (a - b)\sin^2\varphi\}^2}2\cos\varphi d\varphi,$$

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2\sin^2\varphi}}{a + b + (a - b)\sin^2\varphi}\cos\varphi,$$

$$\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi} = a\cdot\frac{a + b - (a - b)\sin^2\varphi}{a + b + (a - b)\sin^2\varphi},$$

[1]) $F(k, \psi_0)$ есть эллиптическій интегралъ. Въ этомъ убѣждаемся непосредственно, введя новую перемѣнную $\sin\psi = u$.

[2]) Чтобы имѣть $F(k, \psi_0)$, нужно положить $a = 1$, $b = \sqrt{1 - k^2}$.

[3]) Если φ возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, то и ψ возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$.

такъ что

$$\frac{d\psi}{\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\varphi + ab\sin^2\varphi}}$$

и

$$\int_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi}}$$

$$\left(a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}\right).$$

Введя новую перемѣнную χ, связанную съ φ соотношеніемъ

$$\sin\varphi = \frac{2a_1\sin\chi}{a_1 + b_1 + (a_1 - b_1)\sin^2\chi},$$

будемъ имѣть:

$$\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\chi_0}\frac{d\chi}{\sqrt{a_2^2\cos^2\chi + b_2^2\sin^2\chi}}$$

$$\left(a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}\right)$$

и т. д.

Если $\alpha > \beta > 0$, то постоянно

$$\alpha > \frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta} > \beta.$$

Изъ этого замѣчанія можно вывести, что при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{n-1} > a_n > b_n > b_{n-1}. \qquad (a_0 = a, \ b_0 = b)$$

Поэтому послѣдовательности $a, a_1, a_2, \ldots$ и $b, b_1, b_2, \ldots$ будутъ монотонными и ограниченными. Существуетъ, слѣдовательно, $\lim a_n$ и $\lim b_n$. Такъ какъ

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

то

$$\lim a_n = \frac{1}{2}(\lim a_{n-1} + \lim b_{n-1}) = \frac{1}{2}(\lim a_n + \lim b_n),$$

т. е.

$$\lim a_n = \lim b_n.$$

Гауссъ называетъ этотъ общій предѣлъ величинъ a_n и b_n **ариѳметически-геометрическимъ среднимъ** и обозначаетъ его черезъ $\mu(a, b)$. При $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_n < \mu(a, b) < a_n.$$

Допустимъ, что вышеуказанный способъ преобразованія продолженъ до интеграла

$$\int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\omega + b_n^2 \sin^2\omega}}$$

Такъ какъ, очевидно, [1])

$$\frac{\omega_0}{a_n} < \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\omega + b_n^2 \sin^2\omega}} < \frac{\omega_0}{b_n},$$

то и

$$\frac{\omega_0}{a_n} < \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi}} < \frac{\omega_0}{b_n}.$$

Легко убѣдиться въ томъ, что

$$\psi_0 \geqq \varphi_0 \geqq \chi_0 \geqq \ldots.$$

Положительныя числа $\psi_0, \varphi_0, \chi_0, \ldots$ образуютъ поэтому убывающую послѣдовательность. Пусть λ будетъ предѣлъ этой послѣдовательности. Тогда обѣ послѣдовательности

$$\frac{\psi_0}{a}, \frac{\varphi_0}{a_1}, \frac{\chi_0}{a_2}, \ldots \quad \text{и} \quad \frac{\psi_0}{b}, \frac{\varphi_0}{b_1}, \frac{\chi_0}{b_2}, \ldots$$

имѣютъ предѣлъ

$$\lambda : \mu(a, b).$$

Такимъ образомъ,

$$\int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi}} = \frac{\lambda}{\mu(a, b)}.$$

---

[1]) Слѣдуетъ принять во вниманіе, что $b_n^2 < a_n^2 \cos^2\omega + b_n^2 \sin^2\omega < a_n^2$.

Въ случаѣ $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ всѣ величины $\varphi_0, \chi_0, \ldots$ равны $\frac{\pi}{2}$; поэтому и $\lambda = \frac{\pi}{2}$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}} = \frac{\pi}{2\mu(a, b)}.$$

§ 203. Длины дугъ пространственныхъ кривыхъ. Пусть $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ будутъ функцiи, дифференцируемыя въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$. Положимъ, что производныя $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$ интегрируемы въ $\langle\alpha, \beta\rangle$ и что функцiя $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2$ имѣетъ положительную нижнюю границу въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Если положить

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

и разсматривать x, y, z, какъ прямоугольныя декартовы координаты, то каждому значенiю t изъ интервала $\langle\alpha, \beta\rangle$ будетъ соотвѣтствовать точка въ пространствѣ. Совокупность этихъ точекъ мы называемъ кривой въ пространствѣ.

Положивъ $\alpha < t_1 < \cdots < t_{p-1} < \beta$ и соединивъ прямою точку

$$x = f(t_{\nu-1}), \quad y = g(t_{\nu-1}), \quad z = h(t_{\nu-1})$$

съ точкой

$$x = f(t_\nu), \quad y = g(t_\nu), \quad z = h(t_\nu),$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, p; \; t_0 = \alpha, \; t_p = \beta)$$

мы получимъ вписанную въ кривую ломанную линiю.

Длину этой ломанной мы назовемъ $l(\mathfrak{Z})$, обозначая при этомъ черезъ $\mathfrak{Z}$ употребленное нами разложенiе интервала $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Мы покажемъ, что $l(\mathfrak{Z})$ стремится къ нѣкоторому предѣлу l, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ какую-либо особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Этотъ предѣлъ мы называемъ длиной дуги кривой[1]).

Для $l(\mathfrak{Z})$ получается выраженiе

$$l(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} \sqrt{\{f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})\}^2 + \{g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})\}^2 + \{h(t_\nu) - h(t_{\nu-1})\}^2},$$

[1]) Здѣсь можно произвести изслѣдованiе, подобное тому, какое было сдѣлано въ § 198. Мы оставляемъ это читателю.

или, по примѣненіи теоремы о среднемъ значеніи,

$$l(\mathfrak{Z}) = \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{[f'(\alpha_\nu)]^2 + [f'(\beta_\nu)]^2 + [f'(\gamma_\nu)]^2}.$$
$$(t_{\nu-1} < \alpha_\nu,\ \beta_\nu,\ \gamma_\nu < t_\nu)$$

Мы обозначимъ теперь черезъ

a_ν, b_ν, c_ν нижнія границы

и черезъ

A_ν, B_ν, C_ν верхнія границы

функцій

$$[f'(t)]^2,\ [g'(t)]^2,\ [h'(t)]^2$$

въ интервалѣ $\langle t_{\nu-1}, t_\nu\rangle$. Тогда

$$\sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{a_\nu + b_\nu + c_\nu} \leqq l(\mathfrak{Z}) \leqq \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{A_\nu + B_\nu + C_\nu}.$$

Такъ какъ

$$\sqrt{A_\nu + B_\nu + C_\nu} - \sqrt{a_\nu + b_\nu + c_\nu} =$$
$$= \frac{(A_\nu - a_\nu) + (B_\nu - b_\nu) + (C_\nu - c_\nu)}{\sqrt{a_\nu + b_\nu + c_\nu} + \sqrt{A_\nu + B_\nu + C_\nu}} \leqq \frac{(A_\nu - a_\nu) + (B_\nu - b_\nu) + (C_\nu - c_\nu)}{K},$$

если K^2 означаетъ положительную нижнюю границу функціи $f'^2 + g'^2 + h'^2$ въ интервалѣ $\langle \alpha, \beta\rangle$, то разность величинъ

$$\sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{A_\nu + B_\nu + C_\nu}, \quad \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{a_\nu + b_\nu + c_\nu}$$

не можетъ быть больше, чѣмъ

$$\frac{1}{K} \sum (t_\nu - t_{\nu-1})(A_\nu - a_\nu) + \frac{1}{K} \sum (t_\nu - t_{\nu-1})(B_\nu - b_\nu) +$$
$$+ \frac{1}{K} \sum (t_\nu - t_{\nu-1})(C_\nu - c_\nu).$$

Каждая изъ трехъ составныхъ частей этого выраженія стремится къ нулю, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Пусть τ_ν будетъ произвольное значеніе изъ интервала $\langle t_{\nu-1}, t_\nu\rangle$. Тогда

$$\sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{a_\nu + b_\nu + c_\nu}$$
$$\leqq \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{[f'(\tau_\nu)]^2 + [g'(\tau_\nu)]^2 + [h'(\tau_\nu)]^2}$$
$$\leqq \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{A_\nu + B_\nu + C_\nu}.$$

Изъ этихъ неравенствъ мы можемъ сдѣлать заключеніе объ интегрируемости функціи $\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}$. Въ самомъ дѣлѣ, если

$\mathfrak{m}_\nu$ есть нижняя, $\mathfrak{M}_\nu$ — верхняя граница, $\mathfrak{s}_\nu$ — колебанiе этой функцiи въ интервалѣ $\langle t_{\nu-1}, t_\nu \rangle$, то

$$\sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{a_\nu + b_\nu + c_\nu} \leqq \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \mathfrak{m}_\nu$$
$$\leqq \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \mathfrak{M}_\nu \leqq \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{A_\nu + B_\nu + C_\nu},$$

такъ что

$$\sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \mathfrak{s}_\nu \leqq \frac{1}{K} \sum (t_\nu - t_{\nu-1})(A_\nu - a_\nu) + \frac{1}{K} \sum (t_\nu - t_{\nu-1})(B_\nu - b_\nu)$$
$$+ \frac{1}{K} \sum (t_\nu - t_{\nu-1})(C_\nu - c_\nu)$$

и

$$\lim \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \mathfrak{s}_\nu = 0,$$

если $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Теперь мы увѣрены въ томъ, что

$$\lim \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{a_\nu + b_\nu + c_\nu} = \lim \sum (t_\nu - t_{\nu-1}) \sqrt{A_\nu + B_\nu + C_\nu}$$
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt;$$

слѣдовательно, и

$$l = \lim l(\mathfrak{Z}) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt.$$

Принявъ во вниманiе, что

$$dx = f'(t)\,dt, \quad dy = g'(t)\,dt, \quad dz = h'(t)\,dt,$$

можно также писать

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Если функцiи f', g', h' непрерывны въ интервалѣ $\langle \alpha, \beta \rangle$, то дуга

$$\int_\alpha^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

имѣетъ дифференцiалъ

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Это выраженiе называютъ **дифференцiаломъ дуги**.

§ 204. **Примѣръ.** Уравненія

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

представляютъ обыкновенную винтовую линію.

Здѣсь

$$dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt, \quad dz = b\,dt,$$

такъ что дифференціалъ дуги равенъ

$$\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

и длина дуги есть

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = (t_1 - t_0)\sqrt{a^2+b^2}.$$

Глава XVIII.

Двойные интегралы и криволинейные интегралы.

§ 205. **Опредѣленіе двойного интеграла въ одномъ частномъ случаѣ.** Положимъ, что въ прямоугольникѣ [1])

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

опредѣлена функція $f(x, y)$. Разлагаемъ интервалъ $\langle a, b\rangle$ на частные интервалы

$$\langle x_{\mu-1}, x_\mu\rangle \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p;\ x_0 = a,\ x_p = b)$$

и интервалъ $\langle c, d\rangle$ на частные интервалы

$$\langle y_{\nu-1}, y_\nu\rangle. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q;\ y_0 = c,\ y_q = d)$$

Такимъ образомъ получается разложеніе $\mathfrak{Z}$ прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ на pq частныхъ прямоугольниковъ

$$\langle x_{\mu-1}, x_\mu;\ y_{\nu-1}, y_\nu\rangle \qquad (x_{\mu-1} < x_\mu,\ y_{\nu-1} < y_\nu).$$

Пусть $f_{\mu\nu}$ будетъ какое-либо значеніе, принимаемое функціей $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu;\ y_{\nu-1}, y_\nu\rangle$.

---

[1]) Мы разсматриваемъ x, y, какъ прямоугольныя координаты.

Мы разсмотримъ выраженіе

$$\sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f_{\mu\nu} = \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}).$$

Можетъ случиться, что оно постоянно стремится къ одному предѣлу, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.[1]) Тогда мы говоримъ, что функція $f(x, y)$ интегрируема въ $\langle a, b; c, d\rangle$ и называемъ предѣлъ[2]) выраженія $\sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f_{\mu\nu}$ интеграломъ функціи $f(x, y)$, распространеннымъ на прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$. Этотъ интегралъ обозначаютъ черезъ

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy.$$

При этомъ еще должно быть добавлено, что $\langle a, b; c, d\rangle$ есть область интегрированія.

§ 206. **Монотонныя послѣдовательности, имѣющія предѣлъ $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$.** Если распространенный на прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ интегралъ J функціи $f(x, y)$ существуетъ, то справедливо слѣдующее предложеніе.

Каждому положительному числу ε можно противопоставить такое положительное число δ, что

$$|J - \sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f_{\mu\nu}| < \varepsilon,$$

коль скоро

$$\sqrt{(x_\mu - x_{\mu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2} < \delta,$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, p;\ \nu = 1, 2, \ldots, q)$$

т. е. коль скоро діагонали частныхъ прямоугольниковъ меньше, чѣмъ δ.

---

[1]) $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ называется особенною послѣдовательностью $\mathfrak{Z}$-въ, если $\lim \delta_n = 0$. При этомъ δ_n есть наибольшая длина діагоналей или, короче, наибольшая діагональ частныхъ прямоугольниковъ разложенія $\mathfrak{Z}_n$.

[2]) Если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ и $\overline{\mathfrak{Z}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_3, \ldots$ суть особенныя послѣдовательности $\mathfrak{Z}$-въ, то и $\mathfrak{Z}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_1, \mathfrak{Z}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \ldots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Отсюда вытекаетъ, что вышеупомянутый предѣлъ всегда одинъ и тотъ же.

Если бы $\varepsilon = \varepsilon_0$ представляло исключенiе изъ этого предложенiя, то, положивъ $\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, мы получили бы выраженiе $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n)$, которое уклонялось бы отъ J, по меньшей мѣрѣ, на ε_0, между тѣмъ какъ дiагонали всѣхъ частныхъ прямоугольниковъ были бы меньше, чѣмъ $1/n$. Такимъ образомъ, послѣдовательность $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ была бы особенною послѣдовательностью $\mathfrak{Z}$-въ, а между тѣмъ не выполнялось бы равенство

$$\lim \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n) = J.$$

Мы можемъ теперь сдѣлать заключенiе, что функцiя $f(x, y)$ ограничена въ $\langle a, b; c, d\rangle$. Такъ какъ при условiи $(x_\mu - x_{\mu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2 < \delta^2$ выполняется неравенство

$$(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)|f_{11}| < |J| + \sum{}'(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})|f_{\mu\nu}| + \varepsilon^{1)},$$

то, фиксируя всѣ $f_{\mu\nu}$ кромѣ f_{11}, выведемъ, что f_{11} лежитъ между двумя постоянными числами, такъ что функцiя $f(x, y)$ ограничена въ прямоугольникѣ $\langle x_0, x_1; y_0, y_1\rangle$. Точно такъ же выводится, что функцiя $f(x, y)$ ограничена во всякомъ другомъ прямоугольникѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle$.

Пусть $\mathfrak{m}_{\mu\nu}$ будетъ нижняя, а $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ — верхняя граница функцiи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle$. Тогда

$$\sum(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})\mathfrak{m}_{\mu\nu} \text{ есть нижняя,}$$
$$\sum(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})\mathfrak{M}_{\mu\nu} \text{ есть верхняя}$$

граница выраженiя $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z})$ при постоянномъ $\mathfrak{Z}$. А такъ какъ при условiи $(x_\mu - x_{\mu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2 < \delta^2$ выполняется неравенство

$$|J - \mathfrak{S}(\mathfrak{Z})| < \varepsilon,$$

то выраженiя

$$s(\mathfrak{Z}) = \sum(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})\mathfrak{m}_{\mu\nu},$$
$$S(\mathfrak{Z}) = \sum(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})\mathfrak{M}_{\mu\nu}$$

будутъ уклоняться отъ J не больше, чѣмъ на ε.

Пусть теперь $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ будетъ особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Тогда почти всѣ $\mathfrak{Z}_n$ удовлетворяютъ условiю

[1]) Черта при Σ означаетъ, что недостаетъ одного члена суммы. Здѣсь недостающiй членъ есть $(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)|f_{11}|$.

$(x_\mu - x_{\mu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2 < \delta^2$. Поэтому почти всѣ $s(\mathfrak{Z}_n)$, $S(\mathfrak{Z}_n)$ будутъ отличаться отъ J не больше, чѣмъ на ε. Но это означаетъ, что

$$\lim s(\mathfrak{Z}_n) = J, \quad \lim S(\mathfrak{Z}_n) = J.$$

Если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть особенная цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, т. е. если каждое разложеніе $\mathfrak{Z}_{n+1}$ получается изъ разложенія $\mathfrak{Z}_n$ прибавленіемъ новыхъ линій дѣленія, то

$$s(\mathfrak{Z}_1),\ s(\mathfrak{Z}_2),\ s(\mathfrak{Z}_3), \ldots \text{ есть возрастающая,}$$
$$S(\mathfrak{Z}_1),\ S(\mathfrak{Z}_2),\ S(\mathfrak{Z}_3), \ldots \text{ есть убывающая}$$

послѣдовательность, имѣющая предѣлъ J. Особенная цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ можетъ начинаться любымъ $\mathfrak{Z}$. Поэтому

$$s(\mathfrak{Z}) \leqq \int\int f(x, y)\,dx\,dy \leqq S(\mathfrak{Z}).$$

Въ частности же

$$(b-a)(d-c)\,\mathfrak{m} \leqq \int\int f(x, y)\,dx\,dy \leqq (b-a)(d-c)\,\mathfrak{M}.$$

При этомъ $\mathfrak{m}$ означаетъ нижнюю, а $\mathfrak{M}$—верхнюю границу функціи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$,

§ 207. **Верхній и нижній интегралъ ограниченной функціи.** Если $f(x, y)$ есть функція, ограниченная въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, то выраженія $s(\mathfrak{Z})$ и $S(\mathfrak{Z})$ имѣютъ смыслъ.

Если $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, то $s(\mathfrak{Z})$ приближается возрастая къ предѣлу s, а $S(\mathfrak{Z})$ приближается убывая къ предѣлу S ($\geqq s$). Пишутъ

$$s = \underline{\int\int} f(x, y)\,dx\,dy$$

и

$$S = \overline{\int\int} f(x, y)\,dx\,dy \qquad \text{(по площади } \langle a, b; c, d\rangle)$$

и называютъ s нижнимъ, а S верхнимъ интеграломъ функціи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Можно доказать, что величины $s(\mathfrak{Z})$ и $S(\mathfrak{Z})$ соотвѣтственно стремятся къ s и S и въ томъ случаѣ, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ какую-либо особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Когда имѣются 2 разложенія $\mathfrak{Z}$ и $\overline{\mathfrak{Z}}$ прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$, то частные прямоугольники разложенія $\mathfrak{Z}$ распадаются на два класса:

1. такіе, которые содержатся въ какомъ-нибудь частномъ прямоугольникѣ разложенія $\overline{\mathfrak{Z}}$.

2. такіе, которые этого свойства не имѣютъ.

Члены $(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ разложенія $S(\mathfrak{Z})$ мы называемъ членами перваго или второго класса, смотря по тому, принадлежитъ ли частный прямоугольникъ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle$ къ первому или ко второму классу.

Частные прямоугольники второго класса даютъ сумму, которая меньше, чѣмъ

$$\{(\bar{p}-1)(d-c)+(\bar{q}-1)(b-a)\}\delta=\bar{k}\delta.\text{[1]}$$

Замѣнимъ $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ черезъ $\mathfrak{m}_{\mu\nu}$ въ каждомъ числѣ второго класса суммы $S(\mathfrak{Z})$. Измѣненная такимъ образомъ сумма $S(\mathfrak{Z})$ будетъ меньше, чѣмъ $S(\overline{\mathfrak{Z}})$. Однако же произведенное уменьшеніе не больше, чѣмъ $\bar{k}\delta(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})$.

Но

$$S(\mathfrak{Z}) \leqq S(\overline{\mathfrak{Z}})+\bar{k}\delta(\mathfrak{M}-\mathfrak{m}).$$

На томъ же основаніи

$$S(\overline{\mathfrak{Z}}) \leqq S(\mathfrak{Z})+k\bar{\delta}(\mathfrak{M}-\mathfrak{m}),$$

гдѣ

$$k=(p-1)(d-c)+(q-1)(b-a).$$

Теперь мы подъ $\overline{\mathfrak{Z}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_3, \ldots$ будемъ разумѣть особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, а подъ $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2\, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ особенную цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ.

Послѣдовательность $S(\overline{\mathfrak{Z}}_1), S(\overline{\mathfrak{Z}}_2), S(\overline{\mathfrak{Z}}_3), \ldots$ ограничена, ибо всегда

$$(b-a)(d-c)\mathfrak{m} \leqq S(\overline{\mathfrak{Z}}_n) \leqq (b-a)(d-c)\mathfrak{M}.$$

Пусть $S(\mathfrak{Z}_1'), S(\mathfrak{Z}_2'), S(\mathfrak{Z}_3'), \ldots$ будетъ такая часть этой послѣдовательности, которая сходится и имѣетъ предѣлъ S'. Тогда, слѣдовательно,

$$\lim S(\mathfrak{Z}_n)=S \quad \text{и} \quad \lim S(\mathfrak{Z}_m')=S'.$$

---

[1]) Числа $\bar{p}, \bar{q}$ играютъ въ разложеніи $\overline{\mathfrak{Z}}$ ту же роль, что p, q въ $\mathfrak{Z}$; δ есть наибольшая діагональ частныхъ прямоугольниковъ разложенія $\mathfrak{Z}$, а $\bar{\delta}$ имѣетъ то же значеніе для $\overline{\mathfrak{Z}}$.

Примѣняя къ суммамъ $\mathrm{S}(\mathfrak{Z}_n)$ и $\mathrm{S}(\mathfrak{Z}'_m)$ неравенства, установленныя выше для суммъ $\mathrm{S}(\mathfrak{Z})$ и $\mathrm{S}(\overline{\mathfrak{Z}})$, мы получаемъ

$$\mathrm{S}(\mathfrak{Z}'_m) \leqq \mathrm{S}(\mathfrak{Z}_n) + k_n \mathfrak{d}'_m (\mathfrak{M} - \mathfrak{m}),$$
$$\mathrm{S}(\mathfrak{Z}_n) \leqq \mathrm{S}(\mathfrak{Z}'_m) + k'_m \mathfrak{d}_n (\mathfrak{M} - \mathfrak{m}).$$

Когда n остается неизмѣннымъ, а m пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$, то первое неравенство даетъ

$$\mathrm{S}' \leqq \mathrm{S}(\mathfrak{Z}_n).$$

Когда же, наоборотъ, m остается неизмѣннымъ, а n пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$, то второе неравенство даетъ

$$\mathrm{S} \leqq \mathrm{S}(\mathfrak{Z}'_m).$$

Если въ этихъ новыхъ неравенствахъ величины m и n обѣ пробѣгаютъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$, то получается

$$\mathrm{S}' \leqq \mathrm{S} \quad \text{и} \quad \mathrm{S} \leqq \mathrm{S}',$$

т. е.

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S}.$$

Этимъ доказано, что ограниченная послѣдовательность $\mathrm{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_1)$, $\mathrm{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_2)$, $\mathrm{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_3), \ldots$ имѣетъ только одну точку сгущенія, а именно S. Но это означаетъ, что

$$\lim \mathrm{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_n) = \mathrm{S}.$$

Примѣняя предыдущія разсужденія къ функціи $-f(x)$, слѣдуетъ замѣнить S на $-\mathrm{s}$ и $\mathrm{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_n)$ на $-\mathrm{s}(\overline{\mathfrak{Z}}_n)$. Предыдущее равенство даетъ тогда

$$\lim \mathrm{s}(\overline{\mathfrak{Z}}_n) = \mathrm{s}.$$

§ 208. **Критерій интегрируемости.** Функція $f(x, y)$ интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда она ограничена въ $\langle a, b; c, d \rangle$ и верхній интегралъ равенъ нижнему. Второе условіе можно выразить еще нѣсколько иначе. Разность $\mathfrak{M} - \mathfrak{m}$ называютъ колебаніемъ функціи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d \rangle$ и въ соотвѣтствіи съ этимъ разность $\mathfrak{M}_{\mu\nu} - \mathfrak{m}_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}$ называютъ колебаніемъ функціи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu \rangle$. Выраженіе

$$\sigma(\mathfrak{Z}) = \frac{\mathrm{S}(\mathfrak{Z}) - \mathrm{s}(\mathfrak{Z})}{(b-a)\ (d-c)} = \frac{\sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})\,\sigma_{\mu\nu}}{(b-a)(d-c)}$$

называется среднимъ колебаніемъ функціи $f(x, y)$ въ частныхъ прямоугольникахъ разложенія $\mathfrak{Z}$. Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то $\sigma(\mathfrak{Z})$ стремится къ предѣлу

$$\frac{S - s}{(b-a)(d-c)}.$$

Этотъ предѣлъ называется среднимъ колебаніемъ функціи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Такимъ образомъ, функція $f(x, y)$ интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, если она ограничена и имѣетъ среднее колебаніе, равное нулю.

Среднее колебаніе равно нулю, если каждому положительному числу ε можно противопоставить такое разложеніе $\mathfrak{Z}$, что

$$\sigma(\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$$

Ошибка, съ которою

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}) = \sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f_{\mu\nu}$$

выражаетъ распространенный на прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ интегралъ функціи $f(x, y)$, по большей мѣрѣ, равна

$$(b-a)(d-c)\sigma(\mathfrak{Z}).$$

§ 209. Интегралы

$$\int\int (f+g)dxdy, \int\int fg dxdy, \int\int \frac{1}{f} dxdy, \int\int |f| dxdy.$$

Если функціи f и g интегрируемы въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, то это же свойство принадлежитъ и функціямъ $f+g$, fg, $|f|$, $|g|$.

Если функція f интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ и $|f|$ имѣетъ положительную нижнюю границу, то и функція $1:f$ интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ [1]).

---

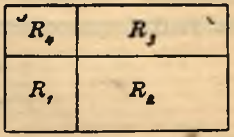
[1]) Доказательство подобно тому, какое приведено въ § 152 и сл.; нужно воспользоваться тѣмъ, что $\sigma = \mathfrak{M} - \mathfrak{m}$ есть верхняя граница функціи $f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})$, когда (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ суть точки въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

§ 210. **Формула разложенія.** Если функція $f(x, y)$ интегрируема въ прямоугольникѣ $\mathfrak{R}$ и если разложить $\mathfrak{R}$ при помощи прямыхъ, параллельныхъ осямъ, на p частныхъ прямоугольниковъ

$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_p,$$

то функція $f(x, y)$ будетъ интегрируема въ каждомъ изъ этихъ частныхъ прямоугольниковъ.

Наоборотъ, изъ интегрируемости функціи $f(x, y)$ въ каждомъ частномъ прямоугольникѣ слѣдуетъ, что она интегрируема и въ прямоугольникѣ $\mathfrak{R}$. Все это прямо выводится изъ критерія, даннаго въ § 208.



Фиг. 24.

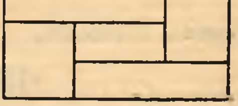
Разсматривая цѣпь $\mathfrak{Z}$-въ, въ которой первый членъ есть разложеніе прямоугольника $\mathfrak{R}$ на прямоугольники $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_p$, находимъ, что

$$\int_{\mathfrak{R}}\int f\,dx\,dy = \int_{\mathfrak{R}_1}\int f\,dx\,dy + \int_{\mathfrak{R}_2}\int f\,dx\,dy + \cdots + \int_{\mathfrak{R}_p}\int f\,dx\,dy.$$

При этомъ

$$\int_{\mathfrak{R}}\int f\,dx\,dy$$

обозначаетъ интегралъ функціи $f(x, y)$, распространенный на прямоугольникъ $\mathfrak{R}$. Подобное же значеніе имѣютъ интегралы въ правой части.



Фиг. 25.

Приведенная формула разложенія еще примѣнима, когда прямоугольникъ $\mathfrak{R}$ какимъ-либо инымъ образомъ разложенъ на прямоугольники, стороны которыхъ параллельны осямъ (ср. фиг. 25). Продолжая эти стороны, можно немедленно получить разложеніе, подобное тому, которое мы выше разсмотрѣли.

§ 211. **Примѣры интегрируемыхъ функцій.** 1. Положимъ, что $\varphi(x) = f(x, y_0)$ есть функція, убывающая въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, когда y_0 есть какое-либо постоянное значеніе изъ интервала $\langle c, d\rangle$ $(a < b,\ c < d)$. Точно такъ же положимъ, что $\psi(y) = f(x_0, y)$ есть функція, убывающая въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$, когда x_0 есть какое-либо постоянное значеніе изъ интервала $\langle a, b\rangle$. Мы покажемъ, что функція $f(x, y)$ интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Первое условіе интегрируемости выполнено. Функція $f(x, y)$ ограничена въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Наибольшее значеніе есть $f(a, c)$, а наименьшее $f(b, d)$.

Если $\mathfrak{Z}$ есть разложеніе прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ на p^2 равныхъ частныхъ прямоугольниковъ, то среднее колебаніе $\sigma(\mathfrak{Z})$ въ этихъ прямоугольникахъ равно

$$\frac{1}{p^2}\sum\{f(x_{\mu-1}, y_{\nu-1})-f(x_\mu, y_\nu)\}.$$

Здѣсь уничтожаются всѣ члены, въ которыхъ оба индекса больше нуля и меньше, чѣмъ p. Остаются еще только $2p-1$ членовъ

$$f(x_0, y_0), f(x_0, y_1), \ldots, f(x_0, y_{p-1}),$$
$$f(x_1, y_0), \ldots, f(x_{p-1}, y_0)$$

и $2p-1$ членовъ

$$-f(x_p, y_1), \ldots, -f(x_p, y_{p-1}), -f(x_p, y_p),$$
$$-f(x_1, y_p), \ldots, -f(x_{p-1}, y_p).$$

Первая группа членовъ имѣетъ сумму, которая не больше, чѣмъ

$$(2p-1)f(a, c),$$

между тѣмъ какъ сумма членовъ второй группы не больше, чѣмъ

$$-(2p-1)f(b, d).$$

Такимъ образомъ,

$$\sigma(\mathfrak{Z}) \leqq \frac{2p-1}{p^2}\{f(a, c)-f(b, d)\};$$

слѣдовательно,

$$\lim \sigma(\mathfrak{Z}) = 0.$$

2. Если функція $f(x, y)$ непрерывна въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, то она интегрируема въ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Изъ § 117 мы знаемъ, что функція $f(x, y)$ ограничена. Остается только показать, что среднее колебаніе равно нулю.

Этотъ вопросъ рѣшается при помощи теоремы о равномѣрной непрерывности:

Если функція $f(x, y)$ непрерывна въ прямоугольникѣ $\mathfrak{R}$, то каждому положительному ε можно противопоставить такое разложенiе на конечное число частныхъ прямоугольниковъ, что въ каждомъ частномъ прямоугольникѣ колебанiе функцiи $f(x, y)$ будетъ меньше, чѣмъ ε.

Положимъ, что ε_0 (> 0) составляетъ исключенiе. Если разложить $\mathfrak{R}$ прямыми, параллельными осямъ, на p^2 равныхъ частныхъ прямоугольниковъ, то въ одномъ изъ этихъ прямоугольниковъ колебанiе должно быть не меньше, чѣмъ ε_0. Если $f(x_p, y_p)$ есть наибольшее, а $f(x_p', y_p')$ есть наименьшее значенiе функцiи въ разсматриваемыхъ частныхъ прямоугольникахъ, то

$$f(x_p, y_p) - f(x_p', y_p') \geqq \varepsilon_0.$$

Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$ будетъ сходящаяся часть послѣдовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots$ соотвѣтственная часть послѣдовательности $y_1, y_2, y_3, \ldots$ Если $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3, \ldots$ будетъ сходящаяся часть послѣдовательности $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots$, то и соотвѣтственная часть $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots$ послѣдовательности $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$ будетъ сходиться. Пусть теперь

$$\lim \mathfrak{x}_p = \mathfrak{x} \text{ и } \lim \mathfrak{y}_p = \mathfrak{y}.$$

Тогда, очевидно, и

$$\lim \mathfrak{x}_p' = \mathfrak{x} \text{ и } \lim \mathfrak{y}_p' = \mathfrak{y},\text{[1]}$$

ибо

$$|x_p' - x_p| < \frac{b-a}{p}, \quad |y_p' - y_p| < \frac{d-c}{p}$$

и тѣмъ болѣе

$$|\mathfrak{x}_p' - \mathfrak{x}_p| < \frac{b-a}{p}, \quad |\mathfrak{y}_p' - \mathfrak{y}_p| < \frac{d-c}{p}.$$

Но изъ равенствъ $\lim \mathfrak{x}_p = \mathfrak{x}$, $\lim \mathfrak{y}_p = \mathfrak{y}$, въ виду непрерывности функцiи $f(x, y)$, слѣдуетъ, что

$$\lim f(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_p) = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

и точно такъ же изъ равенствъ $\lim \mathfrak{x}_p' = \mathfrak{x}$, $\lim \mathfrak{y}_p' = \mathfrak{y}$ слѣдуетъ, что

$$\lim f(\mathfrak{x}_p', \mathfrak{y}_p') = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

[1]) Положимъ, что разсматриваемой части $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots$ послѣдовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ соотвѣтствуютъ въ послѣдовательностяхъ $x_1', x_2', x_3', \ldots$ и $y_1', y_2', y_3', \ldots$ части $\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_2', \mathfrak{x}_3', \ldots$ и $\mathfrak{y}_1', \mathfrak{y}_2', \mathfrak{y}_3' \ldots$

Поэтому

$$\lim\{f(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_p) - f(\mathfrak{x}_p', \mathfrak{y}_p')\} = 0,$$

между тѣмъ какъ, съ другой стороны,

$$f(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_p) - f(\mathfrak{x}_p', \mathfrak{y}_p') \geqq \varepsilon_0.$$

Послѣ того, какъ доказана теорема о равномѣрной непрерывности, мы знаемъ, что всегда существуетъ такое разложеніе $\mathfrak{Z}$, для котораго

$$\sigma(\mathfrak{Z}) < \varepsilon$$

($\varepsilon > 0$). Но такъ именно и выражается второе условіе интегрируемости.

3. Если функція $f(x, y)$ непрерывна въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ повсюду за исключеніемъ k мѣстъ, то она интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Сначала разложимъ прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ на p^2 равныхъ частныхъ прямоугольниковъ. Тогда не больше, чѣмъ въ $4k$ частныхъ прямоугольникахъ будутъ содержаться точки разрыва. Совокупность этихъ прямоугольниковъ мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{U}$. Прибавляя новыя линіи дѣленія, можно достигнуть того, чтобы колебаніе въ каждомъ частномъ прямоугольникѣ внѣ $\mathfrak{U}$ было меньше, чѣмъ $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для новаго разложенія

$$\sigma(\mathfrak{Z}) < \frac{4k\frac{(b-a)(d-c)}{p^2}(\mathfrak{M} - \mathfrak{m}) + \frac{1}{2}(b-a)(d-c)\varepsilon}{(b-a)(d-c)},$$

гдѣ $\mathfrak{m}$ означаетъ нижнюю, а $\mathfrak{M}$ — верхнюю границу въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Если число p заранѣе выбрано такъ, что

$$\frac{4k}{p^2}(\mathfrak{M} - \mathfrak{m}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$\sigma(\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$$

Это вѣрно и при безконечномъ множествѣ точекъ разрыва, если только функція $f(x, y)$ ограничена и если всегда можно выбрать такое разложеніе $\mathfrak{Z}$, что сумма частныхъ прямоугольниковъ, содержащихъ точки разрыва, меньше чѣмъ δ, при чемъ δ означаетъ произвольное напередъ заданное положительное число[1]).

---

[1]) Подобное же примѣчаніе мы могли бы сдѣлать и въ § 158.

§ 212. Опредѣленный и неопредѣленный интегралъ. Допустимъ, что функція $f(x, y)$ интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ и что функція $F(x, y)$ имѣетъ повсюду въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ производныя F'_x и F''_{xy}. Пусть, наконецъ, будетъ

$$F''_{xy} = f(x, y).$$

Такую функцію мы будемъ называть интеграломъ функціи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Если $F(x, y)$ есть интегралъ, то и сумма

$$F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

будетъ интеграломъ [1]).

Разложимъ прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ на частные прямоугольники $\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle$ прямыми, параллельными осямъ. Тогда выраженіе

$$F(x_{\mu-1}, y_{\nu-1}) - F(x_\mu, y_{\nu-1}) - F(x_{\mu-1}, y_\nu) + F(x_\mu, y_\nu)$$

можно будетъ представить въ видѣ

$$\Phi(x_\mu) - \Phi(x_{\mu-1}),$$

гдѣ

$$\Phi(x) = F(x, y_\nu) - F(x, y_{\nu-1}).$$

Но по теоремѣ о среднемъ значеніи, изложенной въ § 67,

$$\Phi(x_\mu) - \Phi(x_{\mu-1}) = (x_\mu - x_{\mu-1})\,\Phi'(x_{\mu\nu}),$$
$$(x_{\mu-1} < x_{\mu\nu} < x_\mu),$$

т. е.

$$\Phi(x_\mu) - \Phi(x_{\mu-1}) = (x_\mu - x_{\mu-1})\{F'_x(x_{\mu\nu}, y_\nu) - F'_x(x_{\mu\nu}, y_{\nu-1})\}.$$

Далѣе, по той же теоремѣ

$$F'_x(x_{\mu\nu}, y_\nu) - F'_x(x_{\mu\nu}, y_{\nu-1}) = (y_\nu - y_{\nu-1})\,F''_{xy}(x_{\mu\nu}, y_{\mu\nu}),$$
$$(y_{\nu-1} < y_{\mu\nu} < y_\nu)$$

---

[1]) Мы должны предполагать функцію $\varphi(x)$ дифференцируемой въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$.

такъ что, наконецъ,

$$\begin{aligned}F(x_{\mu-1}, y_{\nu-1}) - F(x_\mu, y_{\nu-1}) - F(x_{\mu-1}, y_\nu) + F(x_\mu, y_\nu)\\ = (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) F''_{xy}(x_{\mu\nu}, y_{\mu\nu})\\ = (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f(x_{\mu\nu}, y_{\mu\nu}).\end{aligned}$$

Суммируя по всѣмъ частнымъ прямоугольникамъ, получаемъ:

$$\begin{aligned}\sum\{F(x_{\mu-1}, y_{\nu-1}) - F(x_\mu, y_{\nu-1}) - F(x_{\mu-1}, y_\nu) + F(x_\mu, y_\nu)\}\\ = \sum(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f(x_{\mu\nu}, y_{\mu\nu}),\end{aligned}$$

или, вычисливъ первую сумму, имѣемъ:

$$\begin{aligned}F(a, c) - F(b, c) - F(a, d) + F(b, d)\\ = \sum(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f(x_{\mu\nu}, y_{\mu\nu}).\end{aligned}$$

Возьмемъ теперь особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Тогда правая часть равенства будетъ стремиться къ

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{R}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

и мы найдемъ, что

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{R}} f(x, y)\, dx\, dy = (F(x, y))_{a,\, b}^{c,\, d},$$

гдѣ

$$(F(x, y))_{a,\, b}^{c,\, d} = F(a, c) - F(b, c) - F(a, d) + F(b, d).$$

§ 213. **Приведеніе двойного интеграла къ двумъ простымъ интегрированіямъ.** Мы ограничимся сначала случаемъ, когда функція $f(x, y)$ непрерывна въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Тогда функція

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

непрерывна въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\lim y_n = y, \qquad (c \leqq y_n \leqq d)$$

то

$$\varphi(y)-\varphi(y_n)=\int_a^b\{f(x,y)-f(x,y_n)\}\,dx$$
$$=(b-a)\{f(x_n,y)-f(x_n,y_n)\}.$$
$$(a<x_n<b)$$

Разложимъ прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ прямыми, параллельными осямъ, на частные прямоугольники такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ частномъ прямоугольникѣ колебаніе было меньше, чѣмъ $\frac{\varepsilon}{2}$ $(\varepsilon>0)$. Тогда двѣ точки

$$(x_n, y) \quad \text{и} \quad (x_n, y_n)$$

лежатъ въ смежныхъ частныхъ прямоугольникахъ, коль скоро $n \geqq \nu$. Такимъ образомъ, при $n \geqq \nu$

$$|f(x_n,y)-f(x_n,y_n)| \leqq \varepsilon.$$

А это означаетъ, что

$$\lim\{f(x_n,y)-f(x_n,y_n)\}=0.\,^{1)}$$

Поэтому и

$$\lim\varphi(y_n)=\varphi(y).$$

Какъ мы теперь покажемъ, интегралъ

$$\int_c^d\varphi(y)\,dy$$

---

1) Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$ будутъ двѣ произвольныя числовыя послѣдовательности изъ интервала $\langle a, b\rangle$, а $y_1, y_2, y_3, \ldots$ и $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots$ двѣ произвольныя числовыя послѣдовательности изъ интервала $\langle c, d\rangle$ такого свойства, что

$$\lim(x_n-\bar{x}_n)=0,\quad \lim(y_n-\bar{y}_n)=0.$$

Тогда при $n \geqq \nu$ точки (x_n, y_n) и $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ лежатъ въ прилегающихъ другъ къ другу частныхъ прямоугольникахъ. Поэтому при $n \geqq \nu$

$$|f(x_n,y_n)-f(\bar{x}_n,\bar{y}_n)|<\varepsilon.$$

А это означаетъ, что

$$\lim\{f(x_n,y_n)-f(\bar{x}_n,\bar{y}_n)\}=0.$$

равенъ интегралу функціи $f(x, y)$, распространенному на прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Пусть будетъ $c < y_1 < \cdots < y_{q-1} < d$ и $c = y_0$, $d = y_q$. Тогда (ср. § 150 и § 162)

$$\int\limits_c^d \varphi(y)\, dy = \sum_{\nu=1}^{q} \int\limits_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} \varphi(y)\, dy = \sum_{\nu=1}^{q} (y_\nu - y_{\nu-1})\, \varphi(\bar{y}_\nu),$$

при чемъ $y_{\nu-1} < \bar{y}_\nu < y_\nu$.

Если вмѣсто $\varphi(y)$ вставить его значеніе, то это уравненіе приметъ видъ:

$$\int\limits_c^d \varphi(y)\, dy = \sum (y_\nu - y_{\nu-1}) \int\limits_a^b f(x, \bar{y}_\nu)\, dx$$

$$= \int\limits_a^b \sum (y_\nu - y_{\nu-1}) f(x, \bar{y}_\nu)\, dx.$$

Пусть теперь будетъ $a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < b$ и $a = x_0$, $b = x_p$. Тогда мы можемъ написать:

$$\int\limits_c^d \varphi(y)\, dy = \sum_{\mu=1}^{p} \int\limits_{x_{\mu-1}}^{x_\mu} \sum_{\nu=1}^{q} (y_\nu - y_{\nu-1}) f(x, \bar{y}_\nu)\, dx$$

$$= \sum_{\mu=1}^{p} (x_\mu - x_{\mu-1}) \sum_{\nu=1}^{q} (y_\nu - y_{\nu-1}) f(\bar{x}_\mu, \bar{y}_\nu),$$

при чемъ $x_{\mu-1} < \bar{x}_\mu < x_\mu$.

Такимъ образомъ получилось, что

$$\int\limits_c \varphi(y)\, dy = \sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f(\bar{x}_\mu, \bar{y}_\nu).$$

Суммованіе распространяется на всѣ частные интервалы

$$\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle.$$

Мы пользовались разложеніемъ $\mathfrak{Z}$ интервала $\langle a, b\rangle$ и разложеніемъ $\bar{\mathfrak{Z}}$ интервала $\langle c, d\rangle$. Если оба разложенія одновременно пробѣгаютъ особенныя послѣдовательности $\mathfrak{Z}$-въ, то получается:

$$\int_c^d \varphi(y)\,py = \int_{\mathfrak{R}}\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

или подробнѣе:

$$\int_{\mathfrak{R}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy.$$

На томъ же основаніи

$$\int_{\mathfrak{R}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx.$$

Итакъ, если функція $f(x)$ непрерывна въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, то имѣетъ мѣсто равенство

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx.\text{[1]}$$

Словесно эту формулу можно выразить такъ:

При интегрированіи функціи $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ можно интегрировать подъ знакомъ интеграла.

Если функція $A(x)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, а функція $C(y)$ — въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$, то функція

$$f(x, y) = A(x)\,C(y)$$

непрерывна въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Здѣсь

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx = C(y)\int_a^b A(x)\,dx$$

и

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \left(\int_a^b A(x)\,dx\right)\left(\int_c^d C(y)\,dy\right).$$

---

[1]) Эта формула имѣетъ мѣсто и при $c = d$, такъ какъ тогда обѣ части равны нулю.

Такимъ образомъ,

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}\int A(x)\,C(y)\,dx\,dy=\left(\int\limits_a^b A(x)\,dx\right)\left(\int\limits_c^d C(y)\,dy\right).$$

Если

$$a=c \text{ и } b=d$$

и если

$$C(x)=A(x),$$

то предыдущая формула переходитъ въ слѣдующую:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}\int A(x)\,A(y)\,dx\,dy=\left(\int\limits_a^b A(x)\,dx\right)^2.$$

Здѣсь $\mathfrak{R}$ означаетъ квадратъ $\langle a, b; a, b\rangle$.

§ 214. Дифференцированіе подъ знакомъ интеграла. Положимъ, что функціи $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Тогда функція

$$\varphi(y)=\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$$

имѣетъ въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$ производную

$$\varphi'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx.$$

Поэтому при дифференцированіи функціи $\varphi(y)$ можно дифференцировать подъ знакомъ интеграла.

Чтобы это доказать, слѣдуетъ принять во вниманіе, что

$$f(x, y)=f(x, c)+\int\limits_c^y f'_y(x, y)\,dy,$$

такъ что

$$\varphi(y)=\int\limits_a^b f(x, c)\,dx+\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^y f'_y(x, y)\,dy\right)dx.$$

Но по § 213 послѣдній интегралъ равенъ

$$\int_c^y \left(\int_a^b f'_y(x, y)\,dx\right) dy.$$

Такъ какъ $\int_a^b f'_y(x, y)\,dx$ есть непрерывная функція отъ y въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$ (ср. § 213), то интегралъ

$$\int_c^y \left(\int_a^b f'_y(x, y)\,dx\right) dy \text{ имѣетъ производную} \int_a^b f'_y(x, y)\,dx.$$

Но ту же производную имѣетъ и функція $\varphi(y)$.

Теорему можно доказать и такъ:

Пусть y и $y+k$ будутъ два различныхъ значенія изъ интервала $\langle c, d\rangle$; тогда

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}\,dx$$

$$= \int_a^b f'_y(x, y+\vartheta k)\,dx, \qquad (0<\vartheta<1)$$

такъ что

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} - \int_a^b f'_y(x, y)\,dx = \int_a^b \{f'_y(x, y+\vartheta k) - f'_y(x, y)\}\,dx$$

$$= f'_y(\bar{x}, y+\bar{\vartheta}k) - f'_y(\bar{x}, y)\}\{b-a\}. \qquad (0<\bar{\vartheta}<1)$$

Отсюда въ силу равномѣрной непрерывности [1])

$$\varphi'(y) = \lim \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx. \qquad (\lim k = 0)$$

Диффеенцировать подъ знакомъ интеграла можно и при слѣдующихъ уловіяхъ:

[1]) Ср. подстрочное примѣчаніе на стр. 403.

Функціи $f(x, y_0)$ и $f'_y(x, y_0)$ интегрируемы въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, какъ бы ни было выбрано y_0 въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$. Функція $f''_{yy}(x, y)$ ограничена въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.

Въ самомъ дѣлѣ, при этихъ предположеніяхъ

$$\int_a^b \{f'_y(x, y+\vartheta k) - f'_y(x, y)\}\, dx = \int_a^b \vartheta k f''_{yy}(x, y+\bar{\vartheta} k)\, dx.$$

$$(0 < \bar{\vartheta} < 1)$$

Если же въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$

$$|f''_{yy}(x, y)| < K,$$

то

$$\left|\int_a^b \{f'_y(x, y+\vartheta k) - f'_y(x, y)\}\, dx\right| < (b-a)kK,$$

т. е.

$$\left|\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} - \int_a^b f'_y(x, y)\, dx\right| < (b-a)kK.$$

Для $\lim k = 0$ правая, а, слѣдовательно, и лѣвая часть стремится къ нулю.

§ 215. **Дифференцированіе и интегрированіе подъ знакомъ интеграла при несобственныхъ интегралахъ.** 1. Положимъ, что функціи $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны при

$$x \geqq a_0, \quad c \leqq y \leqq d.$$

Мы примемъ, далѣе, что интегралы

$$\varphi(y) = \int_{a_0}^{\infty} f(x, y)\, dx \quad \text{и} \quad \psi(y) = \int_{a_0}^{\infty} f'_y(x, y\, dx$$

существуютъ, какъ бы ни было выбрано число y въ инервалѣ $\langle c, d\rangle$.

Пусть будетъ $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ и положимъ, то a_n становится безконечнымъ съ возрастаніемъ n; тогда

$$\lim \int_{a_0}^{a_n} f'_y(x, y)\, dx = \int_{a_0}^{\infty} f'_y(x, y)\, dx.$$

Мы можемъ поэтому написать:

$$\psi(y)=\int_{a_0}^{a_1} f'_y(x,y)\,dx+\int_{a_1}^{a_2} f'_y(x,y)\,dy+\cdots=\sum\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f'_y(x,y)\,dx.$$

Если этотъ безконечный рядъ сходится равномѣрно при $c\leqq y\leqq d$, то мы можемъ интегрировать почленно. При этомъ получается

$$\int_c^y \psi(y)\,dy=\sum\int_c^y\left(\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f'_y(x,y)\,dx\right)dy. \qquad (c\leqq y\leqq d)$$

Но по § 213

$$\int_c^y\left(\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f'_y(x,y)\,dx\right)dy=\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}\left(\int_c^y f'_y(x,y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}\{f(x,y)-f(x,c)\}\,dx,$$

такъ что

$$\int_c^y \psi(y)\,dy=\varphi(y)-\varphi(c),$$

ибо

$$\varphi(y)=\sum\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f(x,y)\,dx. \qquad (c\leqq y\leqq d)$$

Такъ какъ отдѣльные члены ряда, которымъ выражается функція $\psi(y)$, непрерывны въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$ (ср. § 213), то и функція $\psi(y)$ непрерывна въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$ (ср. § 172, No. 5). Поэтому

$$\varphi'(y)=\psi(y),$$

т. е. при сдѣланныхъ нами предположеніяхъ производная отъ

$$\int_{a_0}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

равна

$$\int_{a_0}^{\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

Примѣръ

$$\varphi(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx.$$

показываетъ, что нужно быть осторожнымъ при дифференцированіи подъ знакомъ интеграла. Мы знаемъ (§ 189), что

$$\begin{array}{ll} \text{для } y = 0 & \varphi(y) = 0, \\ \text{для } y > 0 & \varphi(y) = \frac{\pi}{2}, \\ \text{для } y < 0 & \varphi(y) = -\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Поэтому должно быть $\varphi'(y) = 0$ при $y > 0$ и $y < 0$.

Если же дифференцировать подъ знакомъ интеграла, то получится

$$\varphi'(y) = \int_0^\infty \cos xy\, dx.$$

Но интегралъ въ правой части лишенъ какого бы то ни было значенія. Ибо при $y \gtrless 0$

$$\int_0^x \cos xy\, dx = \left(\frac{\sin xy}{y}\right)_0^x = \frac{\sin xy}{y},$$

а $\sin xy$ при безгранично возрастающемъ x не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу.

Мы разсмотримъ теперь случай, гдѣ дифференцированіе подъ знакомъ интеграла возможно.

Изъ двухъ интеграловъ

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{и} \quad \psi(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\, dx$$

первый существуетъ при $y \geqq 0$, а второй при $y > 0$.[1])

---

[1]) При $y \geqq 0$ выраженіе $e^{-xy} : x$ стремится къ нулю, убывая съ безграничнымъ возрастаніемъ x. Выраженіе e^{-xy} стремится къ нулю убывая только при $y > 0$. Далѣе ср. § 189.

Если положить $a_\nu = \nu\pi$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, то рядъ

$$\psi(y) = \sum \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} e^{-xy} \sin x dx$$

будетъ сходиться равномѣрно при $y \geqq c > 0$.

Это есть знакоперемѣнный рядъ, и абсолютныя величины его членовъ образуютъ убывающую послѣдовательность, ибо

$$\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} e^{-xy} \sin x dx = \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} e^{-(x+\pi)y} \sin(x+\pi) dx$$
$$= -\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} e^{-(x+\pi)y} \sin x dx.$$

Абсолютная величина ν-аго остатка меньше, чѣмъ

$$\left| \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} e^{-xy} \sin x dx \right| = e^{-ca_{\nu-1}} \left| \int_{a_{\nu-1}}^{\xi_\nu} \sin x dx \right| < 2e^{-ca_{\nu-1}},$$

т. е. при $y \geqq c$

$$|R_\nu(y)| < 2e^{-(\nu-1)c\pi}.$$

Поэтому, если $y_1, y_2, y_3, \ldots$ есть произвольная послѣдовательность, члены которой не меньше, чѣмъ c, то

$$\lim R_\nu(y_\nu) = 0,$$

ибо

$$\lim e^{-(\nu-1)c\pi} = 0.$$

Этимъ мы доказали равномѣрную сходимость ряда $\psi(y)$.

Такъ какъ c есть произвольное положительное число, то при $y > 0$

$$\varphi'(y) = -\psi(y).$$

Но мы можемъ опредѣлить $\psi(y)$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\int e^{-xy} \sin x dx = -\frac{e^{-xy}\sin x}{y} + \frac{1}{x}\int e^{-xy} \cos x dx,$$
$$\int e^{-xy} \cos x dx = -\frac{e^{-xy}\cos x}{y} - \frac{1}{y}\int e^{-xy} \sin x dx,$$

такъ что

$$\int e^{-xy}\sin x dx = -\frac{e^{-xy}(\cos x + y\sin x)}{1+y^2}$$

и (ср. § 190)

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx = -\left(\frac{e^{-xy}(\cos x + y\sin x)}{1+y^2}\right)_0^\infty = \frac{1}{1+y^2}.$$

Такимъ образомъ, при $y > 0$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Но и

$$\varphi(y) = \sum \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx \qquad (y \geqq 0)$$

также есть знакоперемѣнный рядъ, абсолютныя величины членовъ котораго образуютъ убывающую послѣдовательность. Абсолютная величина ν-го остатка меньше, чѣмъ

$$\left|\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx\right| = \frac{e^{-ya_{\nu-1}}}{a_{\nu-1}}\left|\int_{a_{\nu-1}}^{\xi_\nu}\sin x dx\right| \leqq \frac{2}{a_{\nu-1}}. \qquad (\nu > 1)$$

Слѣдовательно, рядъ сходится равномѣрно при $y \geqq 0$. Такъ какъ отдѣльные члены непрерывны при $y \geqq 0$ (ср. § 213), то отсюда слѣдуетъ, что и сумма $\varphi(y)$ непрерывна при $y \geqq 0$.

Такимъ образомъ, $\varphi(y) + \operatorname{arctg} y$ есть функція непрерывная при $y \geqq 0$ и имѣетъ производную, равную нулю при $y > 0$. Отсюда слѣдуетъ (ср. § 68), что

$$\varphi(y) + \operatorname{arctg} y = c. \qquad (c \text{ есть постоянная})$$

Если y безгранично возрастаетъ, то $\operatorname{arctg} y$ стремится къ $\pi/2$, а $\varphi(y)$, какъ легко убѣдиться, стремится къ нулю. Поэтому

$$\frac{\pi}{2} = c \quad \text{и} \quad \varphi(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y.$$

При $y = 0$ мы находимъ, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

— результатъ, намъ уже извѣстный.

2. Пусть $f(x, y)$ будетъ функція, непрерывная при

$$x \geqq a_0, \quad c \leqq y \leqq d,$$

и положимъ, что

$$\varphi(y) = \int_{a_0}^\infty f(x, y)\,dx$$

существуетъ, каково бы ни было значеніе y изъ интервала $\langle c, d\rangle$.

Если $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ и a_n стремится къ безконечности съ возрастаніемъ n, то

$$\varphi(y) = \sum \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f(x, y)\,dx. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Можетъ случиться, что этотъ рядъ сходится постоянно[1]) въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$ и при томъ **равномѣрно**.[2]) Въ этомъ случаѣ (ср. § 172)

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \sum \int_c^d \left(\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f(x, y)\,dx\right) dy,$$

или

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \sum \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx.$$

Отсюда вытекаетъ, что

$$\int_{a_0}^\infty \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx$$

---

[1]) Т. е. для **каждой** послѣдовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, имѣющей указанное свойство.

[2]) Принято въ такомъ случаѣ говорить, что интегралъ $\int_{a_0}^\infty f(x, y)\,dx$ **сходится равномѣрно** въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$.

существуетъ и что

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_{a_0}^{\infty}\left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Слѣдовательно, здѣсь можно интегрировать подъ знакомъ интеграла.

3. Положимъ, что при

$$x \geqq a_0, \quad y \geqq c_0$$

функція $f(x, y)$ непрерывна и нигдѣ не бываетъ отрицательной. Положимъ далѣе, что интегралъ

$$\int_{a_0}^{\infty} f(x, y)\,dx \quad \text{въ каждомъ интервалѣ } \langle c_0, c\rangle$$

и интегралъ

$$\int_{c_0}^{\infty} f(x, y)\,dy \quad \text{въ каждомъ интервалѣ } \langle a_0, a\rangle$$

сходятся равномѣрно [1]). Пусть, наконецъ, интегралъ функціи $f(x, y)$, распространенный на прямоугольникъ $\langle a_0, a; c_0, c\rangle$, будетъ меньше постояннаго числа K.

Обозначимъ черезъ J верхнюю границу функціи

$$\iint_{\langle a_0, a;\, c_0, c\rangle} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (a > a_0,\ c > c_0)$$

и выберемъ числа a_1 и c_1 такъ, чтобы выполнялось неравенство

$$J_1 = \iint_{\langle a_0, a_1;\, c_0, c_1\rangle} f(x, y)\,dx\,dy > J - \varepsilon \qquad (a_1 > a_0,\ c_1 > c_0)$$

$(\varepsilon > 0)$.

Тогда при $a \geqq a_1$, $c \geqq c_1$

$$J_1 \leqq \int_{a_0}^{a}\left(\int_{c_0}^{c} f(x, y)\,dy\right)dx \leqq J.$$

[1]) Ср. подстрочное примѣчаніе 2 на стр. 413. По § 172, No. 6, мы могли бы также сказать, что функція $\int_{a_0}^{\infty} f(x, y)\,dx$ непрерывна при $y \geqq c_0$, а функція $\int_{c_0}^{\infty} f(x, y)\,dy$ — при $x \geqq a_0$.

Отсюда видно, что интегралъ

$$\int_{a_0}^{\infty}\left(\int_{c_0}^{c} f(x, y)\, dy\right) dx$$

существуетъ и имѣетъ значеніе, содержащееся въ интервалѣ $\langle J_1, J\rangle$. Но по No. 2 этотъ интегралъ равенъ

$$\int_{c_0}^{c}\left(\int_{a_0}^{\infty} f(x, y)\, dx\right) dy,$$

такъ что

$$J_1 \leqq \int_{c_0}^{c}\left(\int_{a_0}^{\infty} f(x, y)\, dx\right) dy \leqq J.$$

Теперь мы можемъ придти къ выводу, что интегралъ

$$\int_{c_0}^{\infty}\left(\int_{a_0}^{\infty} f(x, y)\, dx\right) dy$$

существуетъ и что значеніе этого интеграла содержится въ интервалѣ $\langle J_1, J\rangle$.

Точно такъ же выводится, что

$$\int_{a_0}^{\infty}\left(\int_{c_0}^{\infty} f(x, y)\, dy\right) dx$$

существуетъ и имѣетъ значеніе, лежащее въ интервалѣ $\langle J_1, J\rangle$. Такъ какъ $J - J_1 < \varepsilon$, а ε есть произвольно выбранное положительное число, то отсюда вытекаетъ, что

$$\int_{a_0}^{\infty}\left(\int_{c_0}^{\infty} f(x, y)\, dy\right) dx = \int_{c_0}^{\infty}\left(\int_{a_0}^{\infty} f(x, y)\, dx\right) dy.$$

§ 216. **Обобщеніе теоремы, изложенной въ § 213.** Мы будемъ теперь требовать отъ функціи $f(x, y)$ одной только интегрируемости въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Тогда функція $f(x, y)$ ограничена и поэтому, согласно § 148, существуютъ интегралы

$$\varphi(y) = \underline{\int_{a}^{b}} f(x, y)\, dx, \qquad \Phi(y) = \overline{\int_{a}^{b}} f(x, y) dx;$$

$$(c \leqq y \leqq d)$$

$\varphi(y)$ есть нижній, а $\Phi(y)$ есть верхній интегралъ функціи $f(x, y)$ при постоянномъ y. Если мы раздѣлимъ при помощи прямыхъ, параллельныхъ осямъ, прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ на pq частныхъ прямоугольниковъ

$$\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p; \nu = 1, 2, \ldots, q)$$

и обозначимъ черезъ $\mathfrak{m}_{\mu\nu}$ нижнюю, черезъ $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ верхнюю границу функціи $f(x, y)$ въ прямоугольникѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle$, то при $y_{\nu-1} \leqq \bar{y}_\nu \leqq y_\nu$

$$\sum_{\mu-1}^{p}(x_\mu - x_{\mu-1})\,\mathfrak{m}_{\mu\nu} \leqq \varphi(\bar{y}_\nu) \leqq \Phi(\bar{y}_\nu) \leqq \sum_{\mu-1}^{p}(x_\mu - x_{\mu-1})\,\mathfrak{M}_{\mu\nu},$$

такъ что (ср. § 206)

$$\mathrm{s}(\mathfrak{Z}) \leqq \sum(y_\nu - y_{\nu-1})\,\varphi(\bar{y}_\nu) \leqq \sum(y_\nu - y_{\nu-1})\,\Phi(\bar{y}_\nu) \leqq \mathrm{S}(\mathfrak{Z}).$$

Пусть теперь $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Тогда

$$\lim \mathrm{s}(\mathfrak{Z}) = \lim \mathrm{S}(\mathfrak{Z}) = \int\!\!\int_{\langle a, b; c, d\rangle} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Къ тому же предѣлу будутъ, слѣдовательно, стремиться и суммы

$$\sum(y_\nu - y_{\nu-1})\,\varphi(\bar{y}_\nu) \quad \text{и} \quad \sum(y_\nu - y_{\nu-1})\,\Phi(\bar{y}_\nu).$$

А это означаетъ, что интегралы

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy \quad \text{и} \int_c^d \Phi(y)\,dy$$

существуютъ и оба равны

$$\int\!\!\int_{\langle a, b; c, d\rangle} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Если функція $\omega(y)$ такова, что въ интервалѣ $\langle c, d\rangle$ постоянно имѣютъ мѣсто неравенства

$$\varphi(y) \leqq \omega(y) \leqq \Phi(y),$$

то интегралъ

$$\int_c^d \omega(y)\,dy$$

существуетъ и также равенъ разсмотрѣнному двойному интегралу.

Вмѣсто функцій $\varphi(y)$ и $\Phi(y)$ можно также исходить отъ функцій

$$\psi(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy \quad \text{и} \quad \Psi(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Если въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ постоянно

$$\psi(x) \leqq w(x) \leqq \Psi(x),$$

то

$$\int_c^d \omega(y)\,dy = \int_a^b w(x)\,dx.$$

§ 217. **Двойные интегралы, распространенные на нормальныя области.** Положимъ, что функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$ и что при $a < x < b$

$$\varphi(x) < \psi(x).$$

Назовемъ область $\mathfrak{B}$, опредѣляемую двумя прямыми

$$x = a \quad \text{и} \quad x = b$$

и двумя кривыми

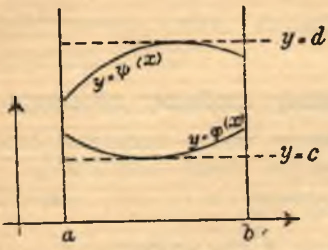
$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad y = \psi(x),$$

нормальною областью (въ отношеніи оси x-овъ)[1]. Пусть $f(x, y)$ представляетъ функцію, опредѣленную въ области $\mathfrak{B}$.

Мы будемъ теперь понимать подъ c наименьшее значеніе функціи $\varphi(x)$, а подъ d наибольшее значеніе функціи $\psi(x)$ въ ин-

[1]) Эта область состоитъ изъ всѣхъ точекъ (x, y), удовлетворяющихъ условіямъ $a \leqq x \leqq b$, $\varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)$. Нормальная область въ отношеніи оси y-овъ представляется неравенствомъ $a \leqq y \leqq b$, $\varphi(y) \leqq x \leqq \psi(y)$.

тервалѣ $\langle a, b\rangle$ и будемъ разсматривать прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$. $\mathfrak{B}$ содержится въ $\langle a, b; c, d\rangle$. Мы будемъ полагать, что $f(x, y)=0$ въ каждой точкѣ прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$, не принадлежащей области $\mathfrak{B}$. Тогда функція $f(x, y)$ будетъ опредѣлена во всемъ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.



Фиг. 26.

Если интегралъ

$$\int\int_{\langle a,\, b;\, c,\, d\rangle} f(x, y)\, dx dy$$

существуетъ, то мы его называемъ интеграломъ функціи $f(x, y)$, распространеннымъ на область $\mathfrak{B}$, и обозначаемъ его знакомъ

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\, dx dy.$$

Этотъ интегралъ не измѣняется, если замѣнить c меньшимъ или d бóльшимъ числомъ.

§ 218. **Функція $f(x, y)$, непрерывная въ области $\mathfrak{B}$.** Мы теперь примемъ, что функція $f(x, y)$ непрерывна въ области $\mathfrak{B}$, и покажемъ, что тогда интегралъ $\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\, dx dy$ существуетъ.

Функція $f(x, y)$ будетъ ограничена[1]) въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, если мы ей припишемъ значеніе нуль внѣ области $\mathfrak{B}$. Точки разрыва этой функціи всѣ будутъ лежать на кривыхъ $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$.

Разложимъ интервалъ $\langle a, b\rangle$ на p такихъ частныхъ интерваловъ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu\rangle$, чтобы въ каждомъ частномъ интервалѣ колебаніе каждой изъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ было меньше, чѣмъ ε ($\varepsilon > 0$). Если тогда $m_\mu(\overline{m}_\mu)$ и $M_\mu(\overline{M}_\mu)$ соотвѣтственно представляютъ наименьшія и

[1]) Если положить, что функція $F(x, y)$ равна $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{B}$ и, далѣе, что при $a \leqq x \leqq b$ и $y > \psi(x)$ постоянно $F(x, y) = f(x, \psi(x))$, а при $a \leqq x \leqq b$ и $y < \varphi(x)$ постоянно $F(x, y) = f(x, \varphi(x))$, то функція $F(x, y)$ будетъ непрерывна въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Наибольшее (наименьшее) значеніе функціи $F(x, y)$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ наибольшее (наименьшее) значеніе функціи $f(x, y)$.

наибольшія значенія функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ интервалѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu \rangle$, то для разложенія интервала $\langle c, d \rangle$ мы воспользуемся значеніями

$$m_\mu,\ \overline{m}_\mu,\ M_\mu,\ \overline{M}_\mu. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Такимъ образомъ получается разложеніе прямоугольника $\langle a, b; c, d \rangle$ на частные прямоугольники, и тотчасъ же видно, что сумма частныхъ прямоугольниковъ, содержащихъ точки кривой $y = \varphi(x)$ или $y = \psi(x)$, меньше, чѣмъ $2\varepsilon(b - a)$. Выбирая надлежащимъ образомъ число ε, можно эту сумму сдѣлать сколь угодно малой. Поэтому, согласно § 211, функція $f(x, y)$ интегрируема въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d \rangle$, и, слѣдовательно, существуетъ интегралъ $\int\limits_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy$.

Тотъ же результатъ получается, если функція $f(x, y)$ ограничена въ области $\mathfrak{B}$ и имѣетъ разрывы на кривыхъ $y = \varphi(x)$ или $y = \psi(x)$, но не имѣетъ никакихъ другихъ разрывовъ въ области $\mathfrak{B}$.

Когда функція $g(x, y)$ ограничена въ области $\mathfrak{B}$ и можетъ быть отличной отъ нуля только на кривыхъ $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, то мы имѣемъ такой именно случай. Ясно, что интегралъ функціи $g(x, y)$, распространенный на прямоугольникъ $\langle a, b; c, d \rangle$, равенъ нулю, такъ какъ при выборѣ чиселъ $g_{\mu\nu}$ для выраженія

$$\sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})\, g_{\mu\nu}$$

можно постоянно избѣгать кривыхъ $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$.

Если $\int\limits_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy$ существуетъ, то

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int (f+g)\,dx\,dy = \int\limits_{\mathfrak{B}}\int f\,dx\,dy + \int\limits_{\mathfrak{B}}\int g\,dx\,dy = \int\limits_{\mathfrak{B}}\int f\,dx\,dy.$$

Такимъ образомъ, интегралъ

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy$$

сохраняетъ свое значеніе, если измѣнить значенія функціи $f(x, y)$ на кривыхъ $y = \varphi(x)$ или $y = \psi(x)$, однако же такъ, чтобы функція $f(x, y)$ оставалась ограниченною въ области $\mathfrak{B}$.

§ 219. **Интегралъ**

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int dx\,dy.$$

Какъ и въ § 218, мы возьмемъ разложенiе $\mathfrak{Z}$ интервала $\langle a, b\rangle$ на p частныхъ интерваловъ и обозначимъ соотвѣтственно через $m_\mu\,(\overline{m}_\mu)$ наименьшее и черезъ $M_\mu\,(\overline{M}_\mu)$ наибольшее значенiе функцiи $\varphi\,(\psi)$ въ частномъ интервалѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu\rangle$. Воспользуемся этими значенiями m_μ, $\overline{m}_\mu$, M_μ, $\overline{M}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ для разложенiя интервала $\langle c, d\rangle$. Тогда мы будемъ имѣть разложенiе прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ на частные прямоугольники $\langle x_{\mu-1}, x_\mu; y_{\nu-1}, y_\nu\rangle$, и при надлежащемъ выборѣ чиселъ $f_{\mu\nu}$ [1])

$$\sum (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{p} (x_\mu - x_{\mu-1})(\overline{M}_\mu - m_\mu)\ ^{*})$$

$$= \sum_{\mu=1}^{p} (x_\mu - x_{\mu-1})(\overline{M}_\mu - c) - \sum_{\mu=1}^{p} (x_\mu - x_{\mu-1})(m_\mu - c).$$

Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то получается

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int dx\,dy = \int_a^b (\psi(x) - c)\,dx - \int_a^b (\varphi(x) - c)\,dx.$$

Первый интегралъ справа есть площадь области, ограниченной линiями $y = \psi(x)$, $y = c$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$; точно такъ же второй интегралъ есть площадь области, ограниченной линiями $y = \varphi(x)$, $y = c$ и $x = a$, $x = b$. Разность есть площадь области $\mathfrak{B}$.

§ 220. **Формула разложенiя.** Мы ограничимся случаемъ, когда функцiя $f(x, y)$ непрерывна въ области $\mathfrak{B}$. Внѣ области $\mathfrak{B}$ мы полагаемъ функцiю $f(x, y)$ равною нулю.

Разлагаемъ область $\mathfrak{B}$ на двѣ нормальныя области $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ непрерывною кривою $y = \omega(x)$, выбранною такъ, чтобы при $a < x < b$ выполнялись неравенства

$$\varphi(x) < \omega(x) < \psi(x).$$

---

[1]) Функцiя $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{B}$ равна 1, а внѣ области $\mathfrak{B}$ равна нулю.

*) Суммируя сначала по ν при постоянномъ μ, находимъ, что

$$\sum_\nu (x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) f_{\mu\nu} = (x_\mu - x_{\mu-1})(\overline{M}_\mu - m_\mu).$$

Положимъ, что $f_1(x, y) = f(x, y)$ во всѣхъ точкахъ области $\mathfrak{B}_1$, не лежащихъ на кривой $y = \omega(x)$. Пусть во всѣхъ другихъ точкахъ $f_1(x, y)$ будетъ нулемъ. Положимъ, что функція $f_2(x, y)$ равна функціи $f(x, y)$ во всѣхъ точкахъ области $\mathfrak{B}_2$ и равна нулю во всѣхъ другихъ точкахъ. Тогда во всемъ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

Функціи $f(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ интегрируемы въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ (ср. § 218). Поэтому

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\int f_1(x, y)\,dx\,dy + \int\int f_2(x, y)\,dx\,dy,$$

гдѣ всѣ интегралы распространяются на прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$, или

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\mathfrak{B}_1}\int f(x, y)\,dx\,dy + \int_{\mathfrak{B}_2}\int f(x, y)\,dx\,dy. \text{ [1]}$$

Область $\mathfrak{B}$ также разлагается на двѣ нормальныя области прямою $x = c\,(a < c < b)$. Назовемъ ихъ $\overline{\mathfrak{B}}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}_2$. Очевидно,

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\overline{\mathfrak{B}}_1}\int f(x, y)\,dx\,dy + \int_{\overline{\mathfrak{B}}_2}\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

Примѣнивъ къ одной изъ двухъ частныхъ областей $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ или $\overline{\mathfrak{B}}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}_2$ одинъ изъ двухъ вышеприведенныхъ способовъ разложенія, получаютъ разложеніе области $\mathfrak{B}$ на три нормальныя области. Примѣняя вновь къ одной изъ этихъ трехъ частныхъ областей одинъ изъ двухъ способовъ разложенія, получаютъ разложеніе области $\mathfrak{B}$ на четыре нормальныя области и т. д. Если такимъ путемъ получилось разложеніе области $\mathfrak{B}$ на p нормальныхъ областей $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$, то имѣетъ мѣсто слѣдующая **формула разложенія**:

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\mathfrak{B}_1}\int f(x, y)\,dx\,dy + \cdots + \int_{\mathfrak{B}_p}\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

§ 221. **Теорема о среднемъ значеніи.** Пусть $f(x, y)$ будетъ функція, интегрируемая въ области $\mathfrak{B}$, и пусть $\mathfrak{m}$ будетъ

[1]) Слѣдуетъ принять во вниманіе замѣчаніе въ концѣ § 218.

нижняя и $\mathfrak{M}$—верхняя граница функціи $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{B}$. Тогда

$$\int_{\mathfrak{B}}\int \mathfrak{m}\, dx\, dy \leqq \int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\, dx\, dy \leqq \int_{\mathfrak{B}}\int \mathfrak{M}\, dx\, dy.$$

Поэтому, если B есть площадь области $\mathfrak{B}$, то

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\, dx\, dy = B\mathfrak{K}.$$

$\mathfrak{K}$ есть значеніе изъ интервала $\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{M}\rangle$.

Точно такъ же легко доказать общую формулу

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,\varphi(x, y)\, dx\, dy = \mathfrak{K}\int_{\mathfrak{B}}\int \varphi(x, y)\, dx\, dy;$$

$\varphi(x, y)$ есть интегрируемая въ области $\mathfrak{B}$ функція, которая нигдѣ не бываетъ отрицательной.

Если $f(x, y)$ есть функція, непрерывная въ области $\mathfrak{B}$, то числа $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{M}$ принадлежатъ къ значеніямъ, принимаемымъ функціей $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{B}$. Ибо построенная въ § 218 (подстрочное примѣчаніе 1) функція $F(x, y)$ имѣетъ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ наибольшее и наименьшее значеніе (ср. § 117).

Въ области $\mathfrak{B}$ эта функція $f(x, y)$ принимаетъ также каждое значеніе $\mathfrak{K}$ между $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{M}$. Въ самомъ дѣлѣ, числа

$$F(x, y) = \mathfrak{m}, \quad F(x+h, y+k) = \mathfrak{M}$$

принадлежатъ къ значеніямъ функціи $F(x+ht, y+kt)$, непрерывной въ интервалѣ $0 \leqq t \leqq 1$.

Слѣдовательно, въ случаѣ, когда функція $f(x, y)$ непрерывна въ области $\mathfrak{B}$, мы можемъ записать теорему о среднемъ значеніи въ видѣ

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,\varphi(x, y)\, dx\, dy = \varphi(\xi, \eta)\int_{\mathfrak{B}}\int \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

гдѣ (ξ, η) есть точка изъ области $\mathfrak{B}$.

§ 222. **Особенныя послѣдовательности разложеній области** $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{Z}$ будетъ разложеніе области $\mathfrak{B}$ на конечное число нормальныхъ областей (ср. § 220). Если

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \rho(x) \leqq y \leqq \sigma(x)$$

есть одна изъ этихъ частныхъ областей, γ—наименьшее значеніе функціи $\rho(x)$ и δ—наибольшее значеніе функціи $\sigma(x)$ въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$, то діагональ прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ мы кратко будемъ называть діагональю разсматриваемой области. Пусть $\mathfrak{d}$ будетъ наибольшая длина діагоналей въ разложеніи $\mathfrak{Z}$ или, короче,—наибольшая діагональ разложенія $\mathfrak{Z}$.

Послѣдовательность разложеній $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$, подобныхъ разложенію $\mathfrak{Z}$, мы будемъ называть особенною послѣдовательностью $\mathfrak{Z}$-въ области $\mathfrak{B}$, если эта послѣдовательность обладаетъ свойствомъ: $\lim \mathfrak{d}_n = 0$, гдѣ $\mathfrak{d}_n$ означаетъ наибольшую діагональ разложенія $\mathfrak{Z}_n$. Мы познакомимся съ примѣромъ особенной послѣдовательности $\mathfrak{Z}$-въ въ § 223.

Пусть $f(x, y)$ будетъ функція, непрерывная въ области $\mathfrak{B}$, и σ_n—наибольшее колебаніе функціи $f(x, y)$ въ частныхъ областяхъ разложенія $\mathfrak{Z}_n$, такъ что ни въ одной изъ этихъ областей колебаніе не больше, чѣмъ σ_n, и, по крайней мѣрѣ, въ одной оно равно σ_n. Если теперь $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то

$$\lim \sigma_n = 0.$$

Это непосредственно вытекаетъ изъ того, что построенная въ § 218 (подстрочное примѣчаніе) функція $F(x, y)$ непрерывна въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ и потому обладаетъ свойствомъ равномѣрной непрерывности (ср. § 211, No. 2 и подстрочное примѣчаніе на стр. 403).

Если

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$$

суть частныя области разложенія $\mathfrak{Z}$, то по § 220

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \sum \int_{\mathfrak{B}_\nu}\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

Но по § 221

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy = B_\nu f_\nu.$$

Здѣсь B_ν означаетъ площадь области $\mathfrak{B}_\nu$, а f_ν есть значеніе функціи $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{B}_\nu$.

Такимъ образомъ,

$$\int\int_{\mathfrak{B}} f(x, y)\, dx dy = \sum B_\nu f_\nu.$$

Пусть теперь $\bar{f}_\nu$ будетъ какое-либо значеніе функціи $f(x, y)$ изъ области $\mathfrak{B}_\nu$. Тогда

$$\left| \sum B_\nu \bar{f}_\nu - \int\int_{\mathfrak{B}} f(x, y)\, dx dy \right| \leqq \sum B_\nu \left| \bar{f}_\nu - f_\nu \right| \leqq B\sigma\,[1]),$$

и, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$, то

$$\lim \sum B_\nu \bar{f}_\nu = \int\int_{\mathfrak{B}} f(x, y)\, dx dy.$$

Такимъ образомъ установлена слѣдующая теорема:

Пусть $f(x, y)$ будетъ функція, непрерывная въ нормальной области $\mathfrak{B}$. Возьмемъ разложеніе $\mathfrak{Z}$ области $\mathfrak{B}$ на p нормальныхъ областей $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots, \mathfrak{B}_p$. Пусть B_ν будетъ площадь области $\mathfrak{B}_\nu$, а f_ν—какое-либо значеніе функціи $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$. Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ, то сумма

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} B_\nu f_\nu$$

стремится къ предѣлу

$$\int\int_{\mathfrak{B}} f(x, y)\, dx dy.$$

§ 223. **Приведеніе двойного интеграла къ двумъ простымъ интегрированіямъ.** Кривыя

$$y = \varphi_\nu(x) = \varphi(x) + \frac{\nu}{p}\{\psi(x) - \varphi(x)\}$$

и прямыя

$$x = x_\nu = a + \frac{\nu}{p}(b - a)$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p - 1)$$

---

[1]) σ есть наибольшее колебаніе въ частныхъ областяхъ разложенія $\mathfrak{Z}$, а B есть площадь области $\mathfrak{B}$.

разлагаютъ область $\mathfrak{B}$ на p^2 нормальныхъ областей, и $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть, очевидно, особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Если функція $f(x, y)$ непрерывна въ области $\mathfrak{B}$, то функція

$$F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy$$

непрерывна въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Въ самомъ дѣлѣ [1]),

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{p}\int\limits_{\varphi_{\nu-1}(x)}^{\varphi_\nu(x)} f(x, y)\,dy=\{\psi(x)-\varphi(x)\}\frac{\Sigma f(x, y_\nu)}{p}.$$

При этомъ

$$\varphi_{\nu-1}(x)<y_\nu<\varphi_\nu(x).$$

Первый изъ двухъ сомножителей, на которые мы разложили функцію $F(x)$, непрерывенъ въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Все приводится только къ доказательству непрерывности второго множителя $G(x)=\frac{\Sigma f(x, y_\nu)}{p}$.

Если $\lim \bar{x}=x$, то почти всѣ числа $\bar{x}$ будутъ удовлетворять неравенству

$$|x-\bar{x}|<\frac{b-a}{p}.$$

Тогда точки (x, y_ν) и $(\bar{x}, \bar{y}_\nu)$ лежатъ либо въ одной и той же, либо въ смежныхъ частныхъ областяхъ разложенія $\mathfrak{Z}_p$. Поэтому, если σ_p есть наибольшее колебаніе функціи $f(x, y)$ въ этихъ частныхъ областяхъ, то

$$|f(x, y_\nu)-f(\bar{x}, \bar{y}_\nu)|\leqq 2\sigma_p,$$

а потому и

$$\left|\frac{\Sigma f(x, y_\nu)}{p}-\frac{\Sigma f(\bar{x}, \bar{y}_\nu)}{p}\right|\leqq 2\sigma_p.$$

Такъ какъ $\lim \sigma_p=0$, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\lim G(\bar{x})=G(x).$$

---

[1]) Мы полагаемъ $\varphi(x)=\varphi_0(x)$ и $\psi(x)=\varphi_p(x)$.

Частныя области разложенія $\mathfrak{B}_p$, лежащія между двумя прямыми $x = x_{\mu-1}$ и $x = x_\mu$[1]), всѣ имѣютъ площадь

$$B_\mu = \frac{1}{p}\int_{x_{\mu-1}}^{x_\mu}\{\psi(x) - \varphi(x)\}\,dx = \frac{\psi(\mathfrak{x}_\mu) - \varphi(\mathfrak{x}_\mu)}{p}(x_\mu - x_{\mu-1}),$$

гдѣ $x_{\mu-1} < \mathfrak{x}_\mu < x_\mu$. Выраженіе

$$\sum_{\mu=1}^{p}(x_\mu - x_{\mu-1})\,F(\mathfrak{x}_\mu),$$

въ виду соотношеній

$$F(\mathfrak{x}_\mu) = \frac{\psi(\mathfrak{x}_\mu) - \varphi(\mathfrak{x}_\mu)}{p}\sum_{\nu=1}^{p} f(\mathfrak{x}_\mu,\ \mathfrak{y}_{\mu\nu})$$

$$\{\varphi_{\nu-1}(\mathfrak{x}_\mu) < \mathfrak{y}_{\mu\nu} < \varphi_\nu(\mathfrak{x}_\mu)\},$$

можетъ быть написано въ видѣ

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} B_\mu f(\mathfrak{x}_\mu,\ \mathfrak{y}_{\mu\nu}).$$

Когда p пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots$, то эта сумма приближается къ

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

Съ другой стороны,

$$\lim \sum_{\mu=1}^{p}(x_\mu - x_{\mu-1})\,F(\mathfrak{x}_\mu) = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Поэтому справедлива формула

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b\Bigl(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\Bigr)\,dx.$$

Эту формулу можно доказать и такъ:

Разложимъ область $\mathfrak{B}$ при помощи прямыхъ $x = x_\mu$ на p

---

[1]) $a = x_0$, $b = x_p$.

частей $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$. Обозначимъ соотвѣтственно черезъ $m_\mu (\overline{m}_\mu)$ наименьшее, а черезъ $M_\mu (\overline{M}_\mu)$ наибольшее значеніе функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ интервалѣ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu\rangle$. Мы введемъ еще символъ m'_μ, имѣющій слѣдующее значеніе.

Если $M_\mu \leqq \overline{m}_\mu$, то мы полагаемъ $m'_\mu = \overline{m}_\mu$. Если $M_\mu > \overline{m}_\mu$, то мы полагаемъ $m'_\mu = M_\mu$. Тогда постоянно

$$0 \leqq \overline{M}_\mu - m'_\mu \leqq \overline{M}_\mu - \overline{m}_\mu.$$

Черезъ $\mathfrak{Q}_\mu$ мы обозначимъ прямоугольникъ

$$\langle x_{\mu-1}, x;\ M_\mu, m'_\mu\rangle.$$

Пусть σ будетъ наибольшее колебаніе функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ частныхъ интервалахъ $\langle x_{\mu-1}, x_\mu\rangle$, а $\mathfrak{M}$—наибольшее значеніе величины $|f(x, y)|$ въ области $\mathfrak{B}$.

Тогда

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{B}_\mu}\!\!\int f(x, y)\,dx\,dy - \int\limits_{\mathfrak{Q}_\mu}\!\!\int f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqq 2\sigma\mathfrak{M}(x_\mu - x_{\mu-1});$$

поэтому

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{B}}\!\!\int f(x, y)\,dx\,dy - \sum\int\limits_{\mathfrak{Q}_\mu}\!\!\int f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqq 2\sigma(b-a)\mathfrak{M}.$$

Съ другой стороны,

$$\left|\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy - \int\limits_{M_\mu}^{m'_\mu} f(x, y)\,dy\right| \leqq 2\sigma\mathfrak{M};$$

$$(x_{\mu-1} \leqq x \leqq x_\mu)$$

слѣдовательно,

$$\left|\int\limits_{x_{\mu-1}}^{x_\mu}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right)dx - \int\limits_{x_{\mu-1}}^{x_\mu}\left(\int\limits_{M_\mu}^{m'_\mu} f(x, y)\,dy\right)dx\right| \leqq 2\sigma(x_\mu - x_{\mu-1})\mathfrak{M}.$$

По § 213 можно написать:

$$\int\limits_{x_{\mu-1}}^{x_\mu}\left(\int\limits_{M_\mu}^{m'_\mu} f(x, y)\,dy\right)dx = \int\limits_{\mathfrak{Q}_\mu}\!\!\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

Поэтому

$$\left|\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\right) dx - \sum \int_{\mathfrak{O}_\mu}\int f(x, y)\, dx\, dy\right| \leqq 2\sigma(b-a)\mathfrak{M}$$

и

$$\left|\int_{\mathfrak{B}}\int f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\right) dx\right| < 4\sigma(b-a)\mathfrak{M}.$$

Такъ какъ число σ можно сдѣлать произвольно малымъ, то отсюда слѣдуетъ, что лѣвая часть есть нуль.

Еще легче придти къ этому результату, если вмѣсто того, чтобы опираться на § 216, принять, что функція $f(x, y)$ равна нулю повсюду внѣ области $\mathfrak{B}$.

§ 224. **Двойные интегралы въ произвольныхъ ограниченныхъ областяхъ.** Пусть $\mathfrak{A}$ будетъ произвольная ограниченная область, т. е. область, которая можетъ быть включена въ прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$. Положимъ, что въ области $\mathfrak{A}$ опредѣлена функція $f(x, y)$. Мы распространяемъ опредѣленіе функціи f на прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$, принявъ, что она равна нулю въ каждой точкѣ, не принадлежащей области $\mathfrak{A}$. Если интегралъ

$$\int_{\langle a,\, b;\, c,\, d\rangle}\int f(x, y)\, dx\, dy$$

существуетъ, то мы его называемъ интеграломъ функціи f, распространеннымъ на область $\mathfrak{A}$, и обозначаемъ черезъ

$$\int_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\, dx\, dy.$$

Мы ограничимся случаемъ, когда область $\mathfrak{A}$ можетъ быть разложена на конечное число нормальныхъ областей[1]) (ср. фигуру 28 на стр. 442). Пусть, далѣе, функція $f(x, y)$ будетъ непрерывной въ области $\mathfrak{A}$. Если мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots, \mathfrak{B}_p$ упомянутыя нормальныя области, то функція $f(x, y)$ будетъ непре-

[1]) Мы допускаемъ оба рода нормальныхъ областей, т. е. нормальныя области относительно оси x-овъ и такія же области относительно оси y-овъ. Въ разложеніе области $\mathfrak{A}$ могутъ входить нормальныя области обоихъ родовъ.

рывной въ каждой области $\mathfrak{B}_\nu$. Существуютъ, слѣдовательно, интегралы

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_\nu}\int f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Пусть теперь $f_\nu(x, y)$ будетъ функція, которая равна $f(x, y)$ внутри области $\mathfrak{B}_\nu$ и равна нулю повсюду внѣ этой области. Тогда въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, за исключеніемъ границъ отдѣльныхъ областей $\mathfrak{B}_\nu$,

$$f(x, y) = f_1(x, y) + \cdots + f_p(x, y).$$

Измѣняя значеніе каждой функціи $f_\nu(x, y)$ на границѣ области $\mathfrak{B}_\nu$, мы можемъ достичь того, чтобы предыдущее равенство имѣло мѣсто во всемъ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$.*) Принявъ во вниманіе, что при этомъ величина интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_\nu}\int f_\nu(x, y)\,dx\,dy$$

не измѣняется, находимъ, что

$$\int\limits_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{\nu=1}^{p}\int\limits_{\mathfrak{B}_\nu}\int f_\nu(x, y)\,dx\,dy = \sum_{\nu=1}^{p}\int\limits_{\mathfrak{B}_\nu}\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

Разложивъ область $\mathfrak{A}$ на конечное число областей $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$, изъ коихъ каждая можетъ быть разложена на конечное число нормальныхъ областей, имѣемъ:

$$\int\limits_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{\rho=1}^{r}\int\limits_{\mathfrak{A}_\rho}\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

ибо къ каждой области $\mathfrak{A}_\rho$ можно примѣнить только-что выведенную формулу

Положимъ, что функціи $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ непрерывны въ области $\mathfrak{A}$ и что функція $\varphi(x, y)$ нигдѣ не имѣетъ отрицательнаго значенія. Если опять разложить область $\mathfrak{A}$ на p нормальныхъ областей $\mathfrak{B}_\nu$, то будемъ имѣть (ср. § 221):

$$m\int\limits_{\mathfrak{B}_\nu}\int \varphi\,dx\,dy \leqq \int\limits_{\mathfrak{B}_\nu}\int f\varphi\,dx\,dy \leqq M\int\limits_{\mathfrak{B}_\nu}\int \varphi\,dx\,dy,$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

*) Можно, напримѣръ, принять, что $f_\nu(x, y) = \frac{1}{k} f(x, y)$, если точка x, y принадлежитъ частной области $\mathfrak{B}_\nu$ и еще $k-1$ частнымъ областямъ.

гдѣ m есть наименьшее, а M—наибольшее значеніе функціи $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{A}$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$m\int_{\mathfrak{A}}\int\varphi\,dx\,dy \leqq \int_{\mathfrak{A}}\int f\varphi\,dx\,dy \leqq M\int_{\mathfrak{A}}\int\varphi\,dx\,dy,$$

и мы можемъ положить

$$\int_{\mathfrak{A}}\int f\varphi\,dx\,dy = K\int_{\mathfrak{A}}\int\varphi\,dx\,dy$$

$(m \leqq K \leqq M)$. Если m_ν есть наименьшее, а M_ν—наибольшее значеніе функціи $f(x, y)$ въ области $\mathfrak{B}_\nu$, то число K навѣрно расположено въ одномъ изъ интерваловъ

$$\langle m_1, M_1\rangle,\ \langle m_2, M_2\rangle, \cdots,\ \langle m_p, M_p\rangle.$$

Поэтому, согласно § 221, въ области $\mathfrak{A}$ имѣется такая точка (ξ, η), что $K = f(\xi, \eta)$. Но тогда

$$\int_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta)\int_{\mathfrak{A}}\int\varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Положивъ $\varphi(x, y) = 1$, мы имѣемъ формулу

$$\int_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta)\,A.$$

Такимъ образомъ, A, т. е.

$$\int_{\mathfrak{A}} dx\,dy = \sum\int_{\mathfrak{B}_\nu}\int dx\,dy = \Sigma B_\nu,$$

есть площадь области $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{Z}$ будетъ разложеніе области $\mathfrak{A}$ на частныя области $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$, изъ коихъ каждая можетъ быть разложена на конечное число нормальныхъ областей. Каждую область $\mathfrak{A}_\rho$ мы заключаемъ въ возможно малый прямоугольникъ $\langle a_\rho, b_\rho; c_\rho, d_\rho\rangle$ и называемъ діагональ этого прямоугольника діагональю области $\mathfrak{A}_\rho$. Наибольшую діагональ, встрѣчающуюся въ областяхъ $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$, мы называемъ наибольшею діагональю разложенія $\mathfrak{Z}$. Послѣдовательность $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ разложеній, подобныхъ разложенію $\mathfrak{Z}$, мы называемъ особенною послѣдовательностью $\mathfrak{Z}$-овъ, когда $\lim \mathfrak{d}_n = 0$. Здѣсь $\mathfrak{d}_n$ означаетъ наибольшую діагональ разложенія $\mathfrak{Z}_n$.

Пусть (x_ρ, y_ρ) будетъ произвольная точка области $\mathfrak{A}_\rho$. Тогда сумма

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}) = \sum_{\rho=1}^{r} f(x_\rho, y_\rho) A_\rho \qquad \left(A_\rho = \int\int_{\mathfrak{A}_\rho} dx\,dy\right)$$

отличается отъ выраженія

$$\int\int_{\mathfrak{A}} f(x, y)\,dx\,dy = \sum \int\int_{\mathfrak{A}_\rho} f(x, y)\,dx\,dy = \sum f(\xi_\rho, \eta_\rho) A_\rho$$

менѣе, чѣмъ на σA, гдѣ σ означаетъ наибольшее среди чиселъ $|f(\xi_\rho, \eta_\rho) - f(x_\rho, y_\rho)|$. Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ, то $\lim \sigma = 0$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, слѣдуетъ представить себѣ область $\mathfrak{A}$ разложенною на нормальныя области $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$. Слѣдуетъ выбрать число $\delta\ (> 0)$ такъ, чтобы двѣ точки, расположенныя въ двухъ не прилегающихъ другъ къ другу областяхъ, были удалены другъ отъ друга больше, чѣмъ на δ.[1] Если теперь

$$\lim (x_n - \bar{x}_n) = \lim (y_n - \bar{y}_n) = 0,$$

то при $n \geqq \nu$

$$\sqrt{(x_n - \bar{x}_n)^2 + (y_n - \bar{y}_n)^2} < \delta.$$

Точки (x_n, y_n) и $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ лежатъ тогда въ одной и той же или въ двухъ смежныхъ нормальныхъ областяхъ. Если распорядиться разложеніемъ области $\mathfrak{A}$ такъ, чтобы колебаніе функціи $f(x, y)$ въ каждомъ частномъ интервалѣ было меньше, чѣмъ ε (по § 223 это возможно), то при $n \geqq \nu$ будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|f(x_n, y_n) - f(\bar{x}_n, \bar{y}_n)| < \varepsilon.$$

А это означаетъ, что

$$\lim \{f(x_n, y_n) - f(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\} = 0.$$

[1]) Легко установить существованіе такого числа δ. Слѣдуетъ принять во вниманіе, что кривыя $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqq t \leqq b$ и $x = F(u)$, $y = G(u)$, $c \leqq u \leqq d$, имѣютъ кратчайшее разстояніе, если функціи f, g, F и G непрерывны. Это есть наименьшее значеніе функціи

$$\omega(t, u) = \{f(t) - F(u)\}^2 + \{g(t) - G(u)\}^2$$

въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Если кривыя не имѣютъ общей точки, то кратчайшее разстояніе больше нуля.

Такимъ образомъ,

$$\int_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\,dx\,dy = \lim \sum f(x_\rho, y_\rho) A_\rho$$

въ случаѣ, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность разложеній.

§ 225. **Криволинейные интегралы.** Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ будутъ функціи, непрерывныя въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, и положимъ, что

$$\{\varphi(t)-\varphi(\bar{t})\}^2+\{\psi(t)-\psi(\bar{t})\}^2+\{\chi(t)-\chi(\bar{t})\}^2>0,$$

пока $t, \bar{t}$ суть два различныхъ значенія изъ интервала $\langle a, b\rangle$.

Равенствами

$$(\mathfrak{k}) \qquad x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t) \qquad \langle a \leqq t \leqq b\rangle$$

тогда представляется, какъ это принято говорить, непрерывная простая кривая. Точка A, соотвѣтствующая значенію $t=a$, называется начальною точкою кривой, а точка B, соотвѣтствующая значенію $t=b$, называется ея конечною точкою.

При посредствѣ перемѣнной t между точками кривой $\mathfrak{k}$ устанавливается опредѣленный порядокъ. Если точка P_1 соотвѣтствуетъ значенію $t=t_1$, а точка P_2—значенію $t=t_2\,(>t_1)$, то мы скажемъ, что P_2 слѣдуетъ за P_1 и будемъ писать:

$$P_1 \prec P_2.$$

Черезъ $\langle P_1, P_2\rangle$ мы обозначаемъ кривую

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t). \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

Если на кривой $\mathfrak{k}$ выберемъ точки $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, такъ что

$$A \prec P_1 \prec \cdots \prec P_{n-1} \prec B,$$

то кривая $\mathfrak{k}$ разложится на n частей того же свойства, что и $\mathfrak{k}$, а именно на части

$$\langle A, P_1\rangle,\ \langle P_1, P_2\rangle, \cdots,\ \langle P_{n-1}, B\rangle.$$

Такое разложеніе мы будемъ обозначать черезъ $\mathfrak{Z}$. Максимальною хордою разложенія $\mathfrak{Z}$ мы называемъ длиннѣйшую изъ хордъ $AP_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}B$.[1])

[1]) Эти хорды должны измѣряться положенною въ основаніе единицей длины.

Подъ особенною послѣдовательностью $\mathfrak{Z}$-овъ кривой $\mathfrak{k}$ мы понимаемъ послѣдовательность $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ разложеній, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что $\lim l_p = 0$. При этомъ l_p обозначаетъ максимальную хорду разложенія $\mathfrak{Z}_p$.

Положимъ, что на кривой $\mathfrak{k}$ опредѣлены двѣ функціи f и g, т. е. каждой точкѣ P на $\mathfrak{k}$ соотвѣтствуетъ число $f(P)$ и число $g(P)$. Сдѣлаемъ какое-либо разложеніе $\mathfrak{Z}$ и обозначимъ черезъ Q_ν произвольную точку части $\langle P_{\nu-1}, P_\nu\rangle$.[1])

Можетъ случиться, что

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(Q_\nu)\{g(P_\nu) - g(P_{\nu-1})\}$$

стремится къ нѣкоторому предѣлу, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ. Мы обозначаемъ этотъ предѣлъ черезъ

$$\int\limits_{\mathfrak{k}} f\,d\,g$$

и называемъ его **криволинейнымъ интеграломъ**.

Если иначе „оріентировать" кривую $\mathfrak{k}$, т. е. обратить порядокъ, установленный для ея точекъ, то интегралъ умножится на -1, т. е.

$$\int\limits_{\langle A B\rangle} f\,d\,g = -\int\limits_{\langle B A\rangle} f\,d\,g.$$

Черезъ $\langle BA\rangle$ мы обозначаемъ обратно оріентированную кривую $\mathfrak{k}$.

Если криволинейные интегралы

$$\int\limits_{\mathfrak{k}} f_1\,dg_1, \cdots, \int\limits_{\mathfrak{k}} f_p\,dg_p$$

существуютъ, то ихъ сумму изображаютъ черезъ

$$\int\limits_{\mathfrak{k}} (f_1\,dg_1 + \cdots + f_p\,d\,g_p)$$

и это выраженіе также называютъ криволинейнымъ интеграломъ.

Криволинейный интегралъ есть обобщеніе простого опредѣленнаго интеграла.

---

[1]) Точку A мы обозначаемъ черезъ P_0, а точку B черезъ P_n.

§ 226. **Формула разложенія.** Если интегралъ

$$\int_{\mathfrak{k}} f\,dg$$

существуетъ, то существуетъ и интегралъ

$$\int_{\langle AP\rangle} f\,dg,$$

при чемъ P есть какая-либо точка кривой $\mathfrak{k}$. [1])

Сначала докажемъ слѣдующее:

Каждому положительному числу ε можно противопоставить такое положительное число δ, что

$$\left|\int_{\mathfrak{k}} f\,dg - \mathfrak{S}(\mathfrak{Z})\right| < \varepsilon,$$

коль скоро максимальная хорда разложенія $\mathfrak{Z}$ меньше, чѣмъ δ.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы $\varepsilon = \varepsilon_0\,(>0)$ составляло исключеніе, то, положивъ $\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, можно было бы составить такое разложеніе $\mathfrak{Z}_n$ и такую сумму $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n)$, что выполнялось бы неравенство

$$\left|\int_{\mathfrak{k}} f\,dg - \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n)\right| \geqq \varepsilon_0,$$

несмотря на то, что максимальная хорда разложенія $\mathfrak{Z}_n$ меньше, чѣмъ $1/n$.

Послѣдовательность $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ явно представляетъ собою особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ. Однако же равенство

$$\lim \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n) = \int_{\mathfrak{k}} f\,dg.$$

не выполняется.

Если сдѣлать такое разложеніе $\mathfrak{Z}'$ части $\langle P_1B\rangle$, въ которомъ максимальная хорда была бы меньше, чѣмъ δ, и разсмотрѣть на части $\langle AP\rangle$ два разложенія $\overline{\mathfrak{Z}}$ и $\mathfrak{Z}$ того же свойства, то будемъ имѣть:

$$\left|\int_{\mathfrak{k}} f\,dg - \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}') - \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{Z}})\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\int_{\mathfrak{k}} f\,dg - \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}') - \mathfrak{S}(\overline{\overline{\mathfrak{Z}}})\right| < \varepsilon,$$

[1]) Мы полагаемъ этотъ интегралъ равнымъ нулю, когда точка P совпадаетъ съ точкой A.

а потому

$$|\mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{Z}})-\mathfrak{S}(\overline{\overline{\mathfrak{Z}}})|<2\varepsilon.$$

Отсюда на основаніи критерія Коши вытекаетъ, что $\lim \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_n)$ существуетъ, если $\overline{\mathfrak{Z}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_3, \ldots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ на $\langle AP\rangle$.

Существуетъ поэтому интегралъ отъ fdg, распространенный на $\langle AP\rangle$, а, слѣдовательно, и на $\langle PB\rangle$, и мы, очевидно, имѣемъ:

$$\int_{\mathfrak{k}} fdg=\int_{\langle AP\rangle} fdg+\int_{\langle PB\rangle} fdg.$$

Вообще справедлива формула

$$\int_{\mathfrak{k}} fdg=\int_{\langle AP_1\rangle} fdg+\int_{\langle P_1P_2\rangle} fdg+\cdots+\int_{\langle P_{n-1}B\rangle} fdg.$$

$$(A\prec P_1\prec\cdots\prec P_{n-1}\prec B)$$

Подъ цѣпью простыхъ кривыхъ мы будемъ разумѣть p такихъ простыхъ кривыхъ

$$\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_p,$$

что конецъ кривой $\mathfrak{k}_\nu\,(\nu=1,2,\ldots,p-1)$ есть начало кривой $\mathfrak{k}_{\nu+1}$. Мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{l}$ кривую, составленную изъ кривыхъ $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_p$, взятыхъ въ этой послѣдовательности.

Если интегралы

$$\int_{\mathfrak{k}_1} fdg,\quad \int_{\mathfrak{k}_2} fdg,\ldots,\quad \int_{\mathfrak{k}_p} fdg$$

существуютъ, то мы полагаемъ ихъ сумму равной

$$\int_{\mathfrak{l}} fdg$$

и называемъ ее интеграломъ отъ fdg, распространеннымъ на $\mathfrak{l}$. Если $\overline{\mathfrak{k}}_1, \overline{\mathfrak{k}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{k}}_{\overline{p}}$ есть другое разложеніе кривой $\mathfrak{l}$ на цѣпь простыхъ кривыхъ, то оба эти разложенія совмѣстно доставляютъ третье разложеніе кривой $\mathfrak{l}$ на простыя кривыя $\mathfrak{k}'_1, \mathfrak{k}'_2, \ldots, \mathfrak{k}'_{p'}$. Оно составляется изъ первыхъ двухъ черезъ подраздѣленіе кривыхъ

$\mathfrak{k}_\nu$ и $\bar{\mathfrak{k}}_\nu$. Примѣняя выведенную раньше формулу, находимъ, что

$$\sum\int_{\mathfrak{k}_\nu} f\,dg = \sum\int_{\mathfrak{k}'_\nu} f\,dg = \sum\int_{\bar{\mathfrak{k}}_\nu} f\,dg.$$

§ 227. Соотношеніе между $\int_{\mathfrak{k}} f\,dg$ и $\int_{\mathfrak{k}} g\,df$.

Мы допустимъ, что первый интегралъ существуетъ и докажемъ, что тогда и второй будетъ существовать.

Мы должны будемъ разсмотрѣть для этой цѣли выраженіе

$$\bar{\mathfrak{S}}(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} g(Q_\nu)\{f(P_\nu) - f(P_{\nu-1})\}.$$

Ясно, что

$$\bar{\mathfrak{S}}(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n}\{g(Q_\nu)[f(P_\nu) - f(Q_\nu)] + g(Q_\nu)[f(Q_\nu) - f(P_{\nu-1})]\}.$$

Но теперь можно написать:

$$g(Q_\nu)[f(P_\nu) - f(Q_\nu)]$$
$$= g(P_\nu)f(P_\nu) - g(Q_\nu)f(Q_\nu) - f(P_\nu)[g(P_\nu) - g(Q_\nu)]$$

и

$$g(Q_\nu)[f(Q_\nu) - f(P_{\nu-1})]$$
$$= g(Q_\nu)f(Q_\nu) - g(P_{\nu-1})f(P_{\nu-1}) - f(P_{\nu-1})[g(Q_\nu) - g(P_{\nu-1})],$$

такъ что

$$\bar{\mathfrak{S}}(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n}\{g(P_\nu)f(P_\nu) - g(P_{\nu-1})f(P_{\nu-1})\}$$
$$- \sum_{\nu=1}^{n}\{f(P_{\nu-1})[g(Q_\nu) - g(P_{\nu-1})] + f(P_\nu)[g(P_\nu) - g(Q_\nu)]\}.$$

Первая сумма справа равна

$$(fg)_A^B = f(B)g(B) - f(A)g(A).$$

Вторая сумма справа есть такое же выраженіе, какъ и $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z})$ въ § 225.

Если $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ, то

$$\lim \overline{\mathfrak{S}}(\mathfrak{Z}) = (fg)_A^B - \int\limits_{\mathfrak{k}} f dg.$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ слѣдующее предложенiе:

Если одинъ изъ двухъ интеграловъ

$$\int\limits_{\mathfrak{k}} f dg, \int\limits_{\mathfrak{k}} g df$$

существуетъ, то существуетъ и другой, при чемъ

$$\int\limits_{\mathfrak{k}} f dg + \int\limits_{\mathfrak{k}} g df = (fg)_A^B.$$

§ 228. **Случай, когда**

$$\int\limits_{\mathfrak{k}} f dg$$

существуетъ. Пусть f будетъ непрерывной, а g—убывающей функцiей на кривой $\mathfrak{k}$, т. е. пусть будетъ постоянно

$$g(P_1) \geqq g(P_2),$$

если

$$P_1 \prec P_2.$$

Покажемъ, что при этихъ условiяхъ $\int\limits_{\mathfrak{k}} f dg$ существуетъ. Прежде всего докажемъ слѣдующее:

Если $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ и если σ_n есть максимальное колебанiе функцiи $f(x, y)$ на частныхъ дугахъ разложенiя $\mathfrak{Z}_n$, то $\lim \sigma_n = 0$.

Если σ есть точка сгущенiя ограниченной послѣдовательности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, то изъ послѣдовательности $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ можно выдѣлить такую послѣдовательность $\overline{\mathfrak{Z}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_3, \ldots$, что $\lim \overline{\sigma}_n = \sigma$.

Пусть $\langle A_n, B_n \rangle$ будетъ частная дуга разложенiя $\overline{\mathfrak{Z}}_n$, на которой f имѣетъ колебанiе $\overline{\sigma}_n$. Положимъ, что точка A_n соотвѣтствуетъ значенiю $t = a_n$, а точка B_n соотвѣтствуетъ значенiю $t = b_n$. Мы выдѣляемъ изъ послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ сходящуюся частную послѣдовательность $a_1', a_2', a_3', \ldots$, а изъ послѣдовательности

$b_1, b_2, b_3, \ldots$, сходящуюся частную послѣдовательность b_1', b_2', $b_3', \ldots$. Положимъ, что

$$\lim a_n' = a', \quad \lim b_n' = b',$$

и что A_n', B_n', A', B' суть точки, соотвѣтствующія значеніямъ $t = a_n'$, $t = b_n'$, $t = a'$, $t = b'$. Тогда, въ виду непрерывности функцій $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$,

$$\lim \overline{A_n' B_n'}^2 = \overline{A' B'}^2.$$

А такъ какъ

$$\lim \overline{A_n' B_n'}^2 = 0,$$

ибо $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ, то

$$\overline{A' B'}^2 = 0,$$

т. е.

$$a' = b'.$$ [1]

Если обозначить черезъ σ_n' колебаніе функціи $f(x, y)$ на дугѣ $\langle A_n', B_n' \rangle$, то $\lim \sigma_n' = \sigma$. Пусть же теперь $f(\mathfrak{A}_n')$ будетъ наименьшее, а $f(\mathfrak{B}_n')$ наибольшее значеніе функціи f на $\langle A_n', B_n' \rangle$, такъ что

$$f(\mathfrak{B}_n') - f(\mathfrak{A}_n') = \sigma_n'.$$

Если $\mathfrak{A}_n'$ соотвѣтствуетъ значенію $t = \mathfrak{a}_n'$ и $\mathfrak{B}_n'$ соотвѣтствуетъ значенію $t = \mathfrak{b}_n'$, то

$$a_n' \leqq \mathfrak{a}_n' \leqq b_n' \quad \text{и} \quad a_n' \leqq \mathfrak{b}_n' \leqq b_n',$$

такъ что

$$\lim \mathfrak{a}_n' = a', \quad \lim \mathfrak{b}_n' = a'.$$

Но отсюда слѣдуетъ, что

$$\sigma = \lim \{ f(\mathfrak{B}_n') - f(\mathfrak{A}_n') \} = 0.$$

Такимъ образомъ, ограниченная послѣдовательность $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ имѣетъ одну только точку сгущенія, а именно—нуль. Поэтому $\lim \sigma_n = 0$.

Теперь мы въ состояніи доказать существованіе интеграла $\int_{\mathfrak{k}} f dg$. Такъ какъ $\lim \sigma_n = 0$, то число ν можно выбрать такъ, что σ_n будетъ меньше, чѣмъ ε при $n \geqq \nu$. Изъ совокупности разложеній

---

[1]) Вспомнимъ, что $\mathfrak{k}$ есть простая кривая.

$\mathfrak{Z}_\nu$ и $\mathfrak{Z}_n$ $(n > \nu)$ получается разложеніе $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ кривой $\mathfrak{k}$. Легко установить, что

$$|\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_\nu) - \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_n)| < \sigma_\nu\{g(A) - g(B)\} < \varepsilon\{g(A) - g(B)\}$$

и

$$|\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n) - \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{Z}}_n)| < \sigma_n\{g(A) - g(B)\} < \varepsilon\{g(A) - g(B)\},$$

такъ что

$$|\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_\nu) - \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n)| < 2\varepsilon\{g(A) - g(B)\}.$$

Отсюда съ помощью критерія Коши выводится, что $\lim \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_n)$ существуетъ[1]).

Если на кривой $\mathfrak{k}$ функція g есть функція съ ограниченною варіаціей, а функція $f(x)$ непрерывна, то и въ этомъ случаѣ существуетъ интегралъ $\int\limits_{\mathfrak{k}} f dg$, ибо g можно представить въ видѣ разности двухъ убывающихъ функцій.

Примѣненіе. Положимъ, что $F(x)$ есть функція, монотонная въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$, а $G(x)$ есть функція, интегрируемая въ интервалѣ $\langle a, b\rangle$. Тогда интегралъ $\int\limits_a^x G(x)\,dx$ непрерывенъ въ $\langle a, b\rangle$. Сообразно съ вышеизложеннымъ существуетъ поэтому интегралъ

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^x G(x)\,dx\right) dF(x),$$

а, слѣдовательно, (по § 227) и интегралъ

$$\int\limits_a^b F(x)\,d\int\limits_a^x G(x)\,dx,$$

при чемъ

$$\int\limits_a^b F(x)\,d\int\limits_a^x G(x)\,dx + \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^x G(x)\,dx\right) dF(x) = F(b)\int\limits_a^b G(x)\,dx.$$

---

[1]) Что при этомъ постоянно получается одинъ и тотъ же предѣлъ, зависитъ отъ того, что $\mathfrak{Z}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_1, \mathfrak{Z}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \ldots$ будетъ особенною послѣдовательностью $\mathfrak{Z}$-овъ, коль скоро $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ и $\overline{\mathfrak{Z}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_3, \ldots$ суть особенныя послѣдовательности.

Но при $x_{\nu-1} \leqq \bar{x}_\nu \leqq x_\nu$ выраженія

$$\sum F(\bar{x}_\nu) \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} G(x)\,dx \quad \text{и} \quad \sum F(\bar{x}_\nu)\, G(\bar{x}_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

различаются не больше, чѣмъ на

$$M \sum (x_\nu - x_{\nu-1})\, \sigma_\nu,$$

гдѣ σ_ν есть колебаніе функціи $G(x)$ въ интервалѣ $\langle x_{\nu-1}, x_\nu \rangle$, а M обозначаетъ наибольшее изъ чиселъ $|F(a)|$, $|F(b)|$. Поэтому

$$\int_a^b F(x)\, d\left(\int_a^x G(x)\,dx\right) = \int_a^b F(x)\, G(x)\,dx.^{1)}$$

Принявъ во вниманіе, что $F(x)$ есть монотонная функція и что функція $\int_a^x G(x)\,dx$ непрерывна, легко убѣдиться въ томъ, что

$$\int_a^b \left(\int_a^x G(x)\,dx\right) dF(x) = \{F(b) - F(a)\} \int_a^\xi G(x)\,dx$$

$(a \leqq \xi \leqq b)$. Такимъ образомъ, мы наконецъ получимъ (ср. § 162) формулу второй теоремы о среднемъ значеніи:

$$\int_a^b F(x)\, G(x)\,dx = F(a) \int_a^\xi G(x)\,dx + F(b) \int_\xi^b G(x)\,dx.$$

§ 229. **Формула Грина (Green).** Положимъ, что функціи $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны въ нормальной области $\mathfrak{B}$.

По § 223

$$\iint_{\mathfrak{B}} f'_y(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_y(x, y)\,dy\right) dx.$$

---

1) Эта формула справедлива всегда, когда функціи F и G интегрируемы въ интервалѣ $\langle a, b \rangle$. Если $G(x) = H'(x)$, то она переходитъ въ

$$\int_a^b F(x)\, dH(x) = \int_a^b F(x)\, H'(x)\,dx.$$

А такъ какъ (по § 156)

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_y(x, y)\, dy = f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x)),$$

то

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int f'_y(x, y)\, dy = \int\limits_a^b f(x, \psi(x))\, dx - \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\, dx.$$

Если обозначить черезъ $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_3$, $\mathfrak{k}_4$ (ср. фиг. 27) четыре кривыя, ограничивающія область $\mathfrak{B}$, то

$$\int\limits_{\mathfrak{k}_2} f(x, y)\, dx = 0, \quad \int\limits_{\mathfrak{k}_4} f(x, y)\, dx = 0,$$

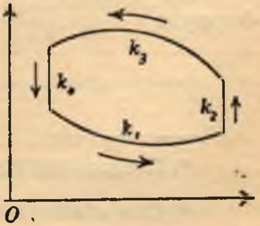
$$\int\limits_{\mathfrak{k}_1} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\, dx,$$

$$\int\limits_{\mathfrak{k}_3} f(x, y)\, dx = -\int\limits_a^b f(x, \psi(x))\, dx.$$

Мы можемъ поэтому написать:

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int f'_y(x, y)\, dx\, dy = -\int\limits_{\mathfrak{B}} f(x, y)\, dx,$$

при чемъ $\int\limits_{\mathfrak{B}} f dx$ означаетъ интегралъ отъ $f dx$, распространенный на всю границу области $\mathfrak{B}$. Здѣсь эта граница оріентирована такъ, какъ это показано на фигурѣ. Если двигаться вдоль границы въ направленіи стрѣлки, то мы будемъ обходить область $\mathfrak{B}$ такъ же, какъ обходимъ кругъ единицы при положительномъ вращеніи радіуса (ср. стр. 382). Этотъ обходъ мы будемъ называть положительнымъ. Если выбрать положительныя направленія осей такъ, что положительное вращеніе будетъ противоположно вращенію часовой стрѣлки, то при положительномъ обходѣ области $\mathfrak{B}$ она будетъ расположена слѣва. Мы предполагаемъ, что наблюдатель остается постоянно на одной и той же сторонѣ координатной плоскости.

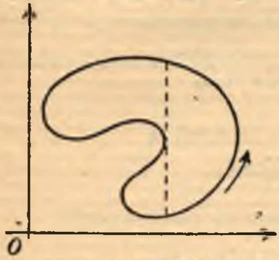


Фиг. 27.

Предыдущую формулу можно еще обобщить. Если $\mathfrak{A}$ есть область, которая разлагается на p нормальныхъ областей въ отношенiи оси x-овъ (ср. § 217), то предыдущая формула имѣетъ мѣсто для каждой изъ этихъ нормальныхъ областей. Путемъ сложенiя найдемъ, что [1])

$$\int_{\mathfrak{A}}\int f'_y(x, y)\, dx\, dy = -\int_{\mathfrak{A}} f(x, y)\, dx.$$

Интегралъ въ правой части распространяется на всю границу, которая орiентирована такъ, что при пробѣганiи ея область $\mathfrak{A}$ остается слѣва. Пусть читатель самъ дастъ доказательство для фигуры 28.



Фиг. 28.

Положимъ теперь, что $\mathfrak{A}$ разлагается на нормальныя области также и въ отношенiи оси y-овъ. Если функцiи $g(x, y)$ и $g'_x(x, y)$ непрерывны въ области $\mathfrak{A}$, то [2])

$$\int_{\mathfrak{A}}\int g'_x(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathfrak{A}} g(x, y)\, dy.$$

Черезъ вычитанiе обѣихъ формулъ найдемъ, что

$$\int_{\mathfrak{A}} (f dx + g dy) = \int_{\mathfrak{A}}\int (g'_x - f'_y)\, dx\, dy.$$

Это есть формула Грина.

Пусть $\mathfrak{B}$ будетъ нормальная область въ отношенiи оси x-овъ, а $\overline{\mathfrak{B}}$ — нормальная область въ отношенiи оси y-овъ. Формула

$$\int_{\mathfrak{B}}\int f'_y\, dx\, dy = -\int_{\mathfrak{B}} f dx$$

при $f = y$ даетъ

$$\int_{\mathfrak{B}}\int dx\, dy = -\int_{\mathfrak{B}} y\, dx = \int_{\mathfrak{B}} x\, dy. \quad (§ 227)$$

Формула

$$\int_{\overline{\mathfrak{B}}}\int f'_x\, dx\, dy = \int_{\overline{\mathfrak{B}}} f dy$$

[1]) Предполагается, что функцiи f и f_y' непрерывны въ области $\mathfrak{A}$.

[2]) Оси обмѣнялись ролями; при этомъ направленiе положительныхъ вращенiй стало обратнымъ. Вотъ почему справа нѣтъ знака —.

при $f = x$ даетъ

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int dx\,dy = \int\limits_{\mathfrak{B}} x\,dy.$$

Такимъ образомъ, нормальная область $\mathfrak{B}$ имѣетъ постоянно площадь, равную

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} x\,dy,$$

независимо отъ того, будетъ ли она нормальной въ отношенiи оси x-овъ или оси y-овъ. Интегралъ долженъ быть взятъ вдоль границы въ положительномъ направленiи.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее общее предложенiе:

Если $\mathfrak{A}$ есть область, которая можетъ быть разложена на конечное число нормальныхъ областей,[1]) то ея площадь равна

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} x\,dy,$$

при чемъ интегралъ долженъ быть взятъ вдоль контура области $\mathfrak{A}$ въ положительномъ направленiи.

Вмѣсто $\int\limits_{\mathfrak{A}} x\,dy$ мы можемъ также писать $-\int\limits_{\mathfrak{A}} y\,dx$ или $\frac{1}{2}\int\limits_{\mathfrak{A}} (x\,dy - y\,dx)$.

§ 230. **Интегралъ**

$$\int f(x, y)\,dg(x, y).$$

Положимъ, что въ прямоугольникѣ $\langle a, b;\ c, d\rangle$ функцiи $f(x, y)$ и $g(x, y)$ имѣютъ непрерывныя частныя производныя

$$f_1(x, y) = f'_x(x, y), \quad f_2(x, y) = f'_y(x, y),$$
$$g_1(x, y) = g'_x(x, y), \quad g_2(x, y) = g'_y(x, y).$$

Тогда функцiи $f(x, y)$, $g(x, y)$ также непрерывны въ прямоугольникѣ $\langle a, b;\ c, d\rangle$ (ср. § 111).

---

[1]) Здѣсь допустимы оба рода нормальныхъ областей (т. е. какъ области, нормальныя въ отношенiи оси x-овъ, такъ и области, нормальныя въ отношенiи оси y-овъ).

Пусть $\mathfrak{B}$ будетъ нормальной областью, содержащейся въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d, \rangle$, и притомъ нормальной областью относительно оси x-овъ, такъ что эта область опредѣляется неравенствами вида:

$$a \leqq \alpha \leqq x \leqq \beta \leqq b,$$

$$c \leqq \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x) \leqq d \text{ [1])}.$$

Мы примемъ, что область $\mathfrak{B}$ спрямляема, т. е. что граница области $\mathfrak{B}$ имѣетъ длину. Для этого $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть функціями съ ограниченной варіаціей въ интервалѣ $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Если мы обозначимъ черезъ $\lambda(x_0)$ сумму обѣихъ дугъ

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad y = \psi(x)$$
$$(\alpha \leqq x \leqq x_0),$$

то $\lambda(x)$ будетъ непрерывной функціей въ интервалѣ $\langle \alpha, \beta \rangle$ (ср. § 199) и $\lambda(\alpha) = 0$.

Такъ какъ при переходѣ отъ одного значенія къ другому непрерывная функція принимаетъ всѣ промежуточныя значенія, то между числами $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \alpha_p$ можно выбрать такой рядъ значеній $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$, что

$$\lambda(\alpha_\nu) = \frac{\nu}{p} \lambda(\beta)$$

$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, p)$.

Область $\mathfrak{B}$ разлагается прямыми

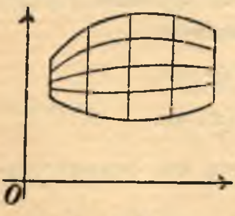
$$x = \alpha_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p-1)$$

на p нормальныхъ областей.

Если, кромѣ этихъ прямыхъ, воспользоваться еще кривыми

$$y = \varphi_\nu(x) = \varphi(x) + \frac{\nu}{p}\{\psi(x) - \varphi(x)\}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, p-1),$$

какъ линіями дѣленія, то мы получимъ разложеніе области $\mathfrak{B}$ на p^2 нормальныхъ областей. (Фигура 29 показываетъ это для случая, когда $p = 4$).



Фиг. 29.

[1]) Функціи $\varphi(x)$, $\psi(x)$ непрерывны въ интервалѣ $\langle \alpha, \beta \rangle$ и при $\alpha < x < \beta$ постоянно $\varphi(x) < \psi(x)$.

Такая частная область опредѣляется неравенствами

$$(\mathfrak{B}_{\mu\nu}) \qquad \alpha_{\mu-1} \leqq x \leqq \alpha_\mu, \quad \varphi_{\nu-1}(x) \leqq y \leqq \varphi_\nu(x)\,[1].$$

$$(\mu, \nu = 1, \ldots, p)$$

Пусть l_ν будетъ длина [2]) кривой

$$y = \varphi_\nu(x) \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta)$$

и $l_0 = l$, $l_p = \bar{l}$.

Легко показать, что

$$l_\nu < l + \bar{l}.$$

Дѣйствительно, если s, $\bar{s}$, s_ν суть соотвѣтственныя хорды [3]) кривыхъ

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x), \quad y = \varphi_\nu(x),$$

то

$$s_\nu < s + \bar{s}.$$

Граница области $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$ содержитъ два куска, которые параллельны оси x-овъ. Ихъ сумма не больше, чѣмъ

$$2\,\frac{d-c}{p}.$$

По предыдущему, каждый изъ двухъ другихъ кусковъ границы меньше, чѣмъ

$$l(\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu) + \bar{l}(\alpha_{\mu-1}\ \alpha_\mu) = \frac{l+\bar{l}}{p}.\,[4])$$

Такимъ образомъ, вся граница области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ меньше, чѣмъ

$$\mathfrak{z}_p = \frac{2}{p}\left\{l + \bar{l} + d - c\right\} = \frac{K}{p}.$$

---

[1]) Мы полагаемъ $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, $\psi(x) = \varphi_p(x)$.

[2]) l_ν существуетъ, ибо функцiя $\varphi_\nu(x)$ непрерывна и имѣетъ ограниченную варiацiю въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$.

[3]) Начала, а также и концы этихъ хордъ имѣютъ одну и ту же абсциссу.

[4]) $l(\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu)$ означаетъ ту часть дуги кривой $y = \varphi(x)$, которая содержится между $x = \alpha_{\mu-1}$ и $x = \alpha_\mu$. Подобное же значенiе имѣетъ $\bar{l}(\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu)$.

При сдѣланныхъ нами предположеніяхъ интегралы

$$\int_{\mathfrak{B}} f dg \quad \text{и} \quad \int_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} f dg.$$

существуютъ.

Мы можемъ опереться на теорему, изложенную въ § 228. Функція f непрерывна вдоль пути интегрированія, а функція g имѣетъ на этомъ пути ограниченную варіацію. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства

$$g(x', y') - g(x, y) = (x' - x)\, g_1(\bar{x}, \bar{y}) + (y' - y)\, g_2(\bar{x}, \bar{y})$$

слѣдуетъ (ср. § 111):

$$|g(x', y') - g(x, y)| < 2\, M \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

гдѣ M означаетъ наибольшее изъ значеній функцій $|g_1|$ и $|g_2|$ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d, \rangle$. Примѣнивъ это неравенство къ произвольно большому числу точекъ пути интегрированія и принявъ во вниманіе, что въ разсматриваемомъ случаѣ путь интегрированія имѣетъ длину, найдемъ, что на немъ функція g имѣетъ ограниченную варіацію.

Имѣемъ, очевидно,

$$\int_{\mathfrak{B}} f dg = \sum \int_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} f dg.$$

Въ послѣдующемъ мы вмѣсто $f(x, y)$, $g(x, y)$ будемъ кратко писать $f(\mathfrak{p})$, $g(\mathfrak{p})$, понимая подъ $\mathfrak{p}$ точку (x, y).

Примѣнимъ къ двумъ точкамъ $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_0$ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ формулу § 111. По этой формулѣ

$$f(\mathfrak{p}) - f(\mathfrak{p}_0) = (x - x_0) f_1(\bar{\mathfrak{p}}) + (y - y_0) f_2(\bar{\mathfrak{p}}).$$

Точка $\bar{\mathfrak{p}}$ лежитъ на отрѣзкѣ, соединяющемъ точки $\mathfrak{p}_0$ и $\mathfrak{p}$.

Такъ какъ функціи f_1, f_2, g_1, g_2 непрерывны въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d \rangle$, то въ силу равномѣрной непрерывности (ср. § 211) можно выбрать число p столь большимъ, чтобы абсолютныя величины разностей

$$f_1(\mathfrak{p}') - f_1(\mathfrak{p}''), \quad f_2(\mathfrak{p}') - f_2(\mathfrak{p}''),$$
$$g_1(\mathfrak{p}') - g_1(\mathfrak{p}''), \quad g_2(\mathfrak{p}') - g_2(\mathfrak{p}'')$$

были меньше, чѣмъ ε, коль скоро $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{p}''$ суть точки прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$, разстояніе между которыми меньше, чѣмъ вышеуказанное число δ_p.

А такъ какъ разстояніе между точками $\bar{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{p}_0$ меньше, чѣмъ периметръ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$, а, слѣдовательно, и меньше, чѣмъ δ_p, то и точка $\bar{\mathfrak{p}}$ удалена отъ точки $\mathfrak{p}_0$ меньше, чѣмъ на δ_p, и можно заключить, что каждое изъ чиселъ $|f_1(\bar{\mathfrak{p}})-f_1(\mathfrak{p}_0)|$, $|f_2(\bar{\mathfrak{p}})-f_2(\mathfrak{p}_0)|$ меньше, чѣмъ ε.

Если разсмотрѣть еще неравенства

$$|x-x_0|<\delta_p,\quad |y-y_0|<\delta_p,$$

то получится:

$$f(\mathfrak{p})=f(\mathfrak{p}_0)+(x-x_0)f_1(\mathfrak{p}_0)+(y-y_0)f_2(\mathfrak{p}_0)+\rho,$$

$$|\rho|<2\varepsilon\delta_p.$$

Такимъ образомъ, [1])

$$(*)\qquad \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} f dg = f_1(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x dg + f_2(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} y dg + \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \rho dg.$$

Теперь слѣдуетъ принять во вниманіе, что интегралъ

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \rho dg$$

есть предѣлъ суммы вида [2])

$$\mathfrak{S}=\sum_{n=1}^{N}\rho(\mathfrak{q}_{n-1})\{g(\mathfrak{q}_n)-g(\mathfrak{q}_{n-1})\}.$$

Пусть x_n, y_n будутъ координатами точки $\mathfrak{q}_n$. Тогда

$$g(\mathfrak{q}_n)-g(\mathfrak{q}_{n-1})=(x_n-x_{n-1})\,g_1(\bar{\mathfrak{q}}_n)+(y_n-y_{n-1})\,g_2(\bar{\mathfrak{q}}_n),$$

---

[1]) Интегралъ $\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} dg$ равенъ нулю.

[2]) $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_N$ суть послѣдовательныя точки границы $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$, а $\mathfrak{q}_N$ совпадаетъ съ $\mathfrak{q}_0$.

такъ что

$$|g(\mathfrak{q}_n)-g(\mathfrak{q}_{n-1})| \leqq M\{|x_n-x_{n-1}|+|y_n-y_{n-1}|\}.$$ [1])

Поэтому

$$|\mathfrak{S}| \leqq 2M\varepsilon\delta_p \sum\{|x_n-x_{n-1}|+|y_n-y_{n-1}|\};$$

слѣдовательно,

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \rho\, dg\right| < 4M\varepsilon\delta_p^2.$$

Возвращаясь къ формулѣ, отмѣченной знакомъ (*), мы находимъ (ср. § 227), что

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x\, dg = -\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} g\, dx$$

и что

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} y\, dg = -\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} g\, dy.$$

Но теперь имѣетъ мѣсто равенство

$$g(\mathfrak{p}) = g(\mathfrak{p}_0)+(x-x_0)g_1(\mathfrak{p}_0)+(y-y_0)g_2(\mathfrak{p}_0)+\bar{\rho},$$

гдѣ

$$|\bar{\rho}| < 2\varepsilon\delta_p$$

Поэтому, принявъ во вниманіе, что интегралы

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} dx,\ \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} dy,\ \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x\, dx,\ \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} y\, dy$$

исчезаютъ, имѣемъ:

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} g\, dx = g_2(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} y\, dx + \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \bar{\rho}\, dx$$

и

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} g\, dy = g_1(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x\, dy + \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \bar{\rho}\, dy.$$

---

[1]) Принимая во вниманіе послѣдующее, мы прямо беремъ число M такимъ, чтобы въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ абсолютныя величины функцій $f_1(x, y)$, $f_2 x, y)$, $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ были меньше, чѣмъ M.

Абсолютныя величины интеграловъ $\int \bar{\rho}\,dx$, $\int \bar{\rho}\,dy$ будутъ меньше, чѣмъ $2\varepsilon\delta_p^2$.

Итакъ, мы нашли, что

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} f\,dg = -f_1(\mathfrak{p}_0)\,g_2(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} y\,dx - f_2(\mathfrak{p}_0)\,g_1(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x\,dy + \rho_{\mu\nu},$$

или, въ виду равенства

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} y\,dx = -\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x\,dy,$$

что

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} f\,dg = \{f_1(\mathfrak{p}_0)\,g_2(\mathfrak{p}_0) - f_2(\mathfrak{p}_0)\,g_1(\mathfrak{p}_0)\}\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x\,dy + \rho_{\mu\nu}.$$

Для $\rho_{\mu\nu}$ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\rho_{\mu\nu} = \int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \rho\,dg - f_1(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \bar{\rho}\,dx - f_2(\mathfrak{p}_0)\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \bar{\rho}\,dy.$$

Согласно съ этимъ

$$|\rho_{\mu\nu}| < 8M\varepsilon\delta_p^2.$$

Мы знаемъ, что

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} x\,dy$$

есть площадь $B_{\mu\nu}$ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$. Но при надлежащемъ выборѣ точки $\mathfrak{p}_0$ (ср. § 221)

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \{f_1(x,y)\,g_2(x,y) - f_2(x,y)\,g_1(x,y)\}\,dx\,dy$$
$$= \{f_1(\mathfrak{p}_0)\,g_2(\mathfrak{p}_0) - f_2(\mathfrak{p}_0)\,g_1(\mathfrak{p}_0)\}\,B_{\mu\nu},$$

такъ что

(**) $$\int\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} f\,dg = \iint\limits_{\mathfrak{B}_{\mu\nu}} \begin{pmatrix} fg \\ xy \end{pmatrix} dx\,dy + \rho_{\mu\nu}.$$

При этомъ мы вмѣсто функціональнаго опредѣлителя

$$f_1(x,y)\,g_2(x,y) - f_2(x,y)\,g_1(x,y)$$

написали символъ

$$\begin{pmatrix} fg \\ xy \end{pmatrix}.$$

Если сложить всѣ формулы (**), то выйдетъ:

$$\int_{\mathfrak{B}} f dg = \int_{\mathfrak{B}}\int \binom{fg}{xy} dx dy + \Sigma \rho_{\mu\nu},$$

и мы будемъ имѣть:

$$|\Sigma \rho_{\mu\nu}| < 8 M \varepsilon p^2 \delta_p^2,$$

или, принимая во вниманіе, что $\delta_p = K/p$ (ср. стр. 445),

$$|\Sigma \rho_{\mu\nu}| < 8 M K^2 \varepsilon;$$

но ε есть произвольно выбранное положительное число. Такимъ образомъ выводится, что

$$\int_{\mathfrak{B}} f dg = \int_{\mathfrak{B}}\int \binom{fg}{xy} dx dy.$$

Та же формула имѣетъ мѣсто, когда $\mathfrak{B}$ есть спрямляемая область, нормальная относительно оси y-овъ.

Положимъ, что область $\mathfrak{A}$ лежитъ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ и можетъ быть разложена на конечное число спрямляемыхъ нормальныхъ областей [1]) $\mathfrak{B}$. Тогда

$$\int_{\mathfrak{A}} f dg = \Sigma \int_{\mathfrak{B}} f dg = \Sigma \int_{\mathfrak{A}}\int \binom{fg}{xy} dx dy = \int_{\mathfrak{A}}\int \binom{fg}{xy} dx dy,$$

т. е.

$$\int_{\mathfrak{A}} f dg = \int_{\mathfrak{A}}\int \binom{fg}{xy} dx dy.$$

Эту формулу обыкновенно выводятъ изъ формулы Грина. Въ равенствѣ

$$\int_{\mathfrak{A}} (F dx + G dy) = \int_{\mathfrak{A}}\int (G'_x - F'_y) dx dy$$

замѣняютъ F и G соотвѣтственно на

$$f g'_x \text{ и } f g'_y.$$

Тогда

$$G'_x = f'_x g'_y + f g''_{xy},$$
$$F'_y = f'_y g'_x + f g''_{xy};$$

поэтому

$$G'_x - F'_y = f'_x g'_y - f'_y g'_x.$$

[1]) Здѣсь допустимы нормальныя области обоихъ родовъ.

Съ другой стороны,

$$Fdx + Gdy = f(g_x' dx + g_y' dy) = fdg.$$

Мы видимъ, что въ этомъ доказательствѣ встрѣчаются вторыя производныя

$$g_{xy}'' \text{ и } g_{yx}'',$$

между тѣмъ какъ въ нашемъ доказательствѣ не сдѣлано никакихъ предположеній относительно вторыхъ производныхъ.

§ 231. **Преобразованіе двойного интеграла.** Сначала сдѣлаемъ относительно функцій f и g тѣ же предположенія, что и въ § 230. Эти функціи должны, слѣдовательно, имѣть непрерывныя первыя производныя f_1, f_2, g_1, g_2 въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Но мы принимаемъ далѣе, что въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ функціональный детерминантъ

$$\binom{f\,g}{x\,y} = f_1 g_2 - f_2 g_1$$

нигдѣ не обращается въ нуль. Наконецъ, мы требуемъ еще, чтобы оба равенства

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}), \quad g(x, y) = g(\bar{x}, \bar{y})$$

выполнялись только тогда, когда точки (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ совпадаютъ.

Это послѣднее требованіе пріобрѣтаетъ наглядное значеніе при разсмотрѣніи отображенія[1])

$$u = f(x, y),$$
$$v = g(x, y)$$

и приводится къ тому, чтобы различныя точки прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ имѣли различныя точки отображенія.

Совокупность всѣхъ точекъ отображенія, получаемыхъ при отображеніи прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$, мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{R}$. Каждой точкѣ (u, v) совокупности $\mathfrak{R}$ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная точка (x, y) въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$. Такимъ образомъ, въ области $\mathfrak{R}$ опредѣлены двѣ функціи

$$F(u, v), \quad G(u, v),$$

[1]) u, v суть координаты точки въ плоскости отображенія.

и отображенія

$$x = F(u, v), \quad y = G(u, v)$$

относятъ къ каждой точкѣ области $\mathfrak{R}$ ту точку прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$, изображеніемъ которой она была въ первомъ отображеніи. Оба отображенія мы называемъ (какъ и въ § 123) взаимно обратными.

Изъ § 124 можно вывести, что функціи F и G имѣютъ внутри области $\mathfrak{R}$ непрерывныя первыя производныя. Внутреннею частью области $\mathfrak{R}$ мы называемъ совокупность всѣхъ точекъ, соотвѣтствующихъ внутреннимъ точкамъ прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$. По § 123 каждую внутреннюю точку (u, v) области $\mathfrak{R}$ можно окружить квадратомъ $\langle u - \varepsilon, u + \varepsilon; v - \varepsilon, v + \varepsilon\rangle$, состоящимъ только изъ внутреннихъ точекъ области $\mathfrak{R}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ будетъ нормальная область внутри области $\mathfrak{R}$.[1] Примѣнимъ къ области $\mathfrak{B}$ разложеніе $\mathfrak{Z}_p$, употребленное въ § 223. Получаемыя частныя области мы называемъ $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{p^2}$.

Положимъ, что $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{p^2}$ суть области въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$, которымъ въ силу отображенія соотвѣтствуютъ области $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{p^2}$.

Площадь области $\mathfrak{B}_\nu$ выражается интеграломъ

$$\int_{\mathfrak{B}_\nu} u\, dv.$$

Этотъ интегралъ есть предѣлъ суммы вида

$$\sum_{\rho=1}^{r} \bar{u}_\rho (v_\rho - v_{\rho-1}),$$

гдѣ

$$(u_0, v_0), \ (\bar{u}_1, \bar{v}_1), \ (u_1, v_1), \ (\bar{u}_2, \bar{v}_2), \ (u_2, v_2), \ldots, (\bar{u}_r, \bar{v}_r), \ (u_r, v_r)$$

суть послѣдовательныя точки границы области $\mathfrak{B}_\nu$, а $(\bar{u}_\rho, \bar{v}_\rho)$ есть точка, которая также можетъ совпадать съ точкою $(u_{\rho-1}, v_{\rho-1})$ или съ точкою (u_ρ, v_ρ). Точка (u_r, v_r) та же, что и точка (u_0, v_0). Соотвѣтственныя точки

$$(x_0, y_0), \ (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \ (x_1, y_1), \ (\bar{x}_2, \bar{y}_2), \ (x_2, y_2), \ldots (\bar{x}_r, \bar{y}_r), \ (x_r, y_r)$$

---

[1]) Представимъ себѣ, напримѣръ, нормальную область относительно оси u.

на границѣ области $\mathfrak{A}_\nu$ слѣдуютъ другъ за другомъ въ опредѣленномъ направленіи. [1])

Пусть $\bar{\delta}$ будетъ наибольшее изъ чиселъ

$$\sqrt{(x_\rho - x_{\rho-1})^2 + (y_\rho - y_{\rho-1})^2},$$

а δ — наибольшее изъ чиселъ

$$\sqrt{(u_\rho - u_{\rho-1})^2 + (v_\rho - v_{\rho-1})^2}.$$

Въ силу непрерывности функцій f и g равенство $\lim \delta = 0$ влечетъ за собою равенство

$$\lim \bar{\delta} = 0$$

(ср. подстрочное примѣчаніе на страницѣ 403). Изъ равенства

$$\sum \bar{u}_\rho (v_\rho - v_{\rho-1}) = \sum f(\bar{x}_\rho, \bar{y}_\rho)\{g(x_\rho, y_\rho) - g(x_{\rho-1}, y_{\rho-1})\}$$

при $\lim \delta = 0$ вытекаетъ поэтому, что

$$\int_{\mathfrak{B}_\nu} u\,dv = \pm \int_{\mathfrak{A}_\nu} f\,dg.$$

Но по § 230 имѣемъ: [2])

$$\int_{\mathfrak{A}_\nu} f\,dg = \int_{\mathfrak{A}_\nu}\int \begin{pmatrix} fg \\ xy \end{pmatrix} dx\,dy.$$

Такъ какъ въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ функціональный детерминантъ нигдѣ не равенъ нулю, то онъ сохраняетъ постоянный знакъ. Поэтому

$$\int_{\mathfrak{B}_\nu} u\,dv = \int_{\mathfrak{A}_\nu}\int \left| \begin{pmatrix} fg \\ xy \end{pmatrix} \right| dx\,dy.$$

---

[1]) Если точка (u, v) пробѣгаетъ границу области $\mathfrak{B}_\nu$ въ положительномъ направленіи, то соотвѣтственная точка (x, y) перемѣщается по границѣ области $\mathfrak{A}_\nu$, слѣдуя постоянно одному и тому же направленію.

[2]) Мы принимаемъ, что къ областямъ $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$, примѣнима формула, выведенная въ § 230. Таковъ случай, когда эти области могутъ быть разложены на спрямляемыя нормальныя области. Относительно этого ср. § 232.

Пусть теперь $\Phi(u, v)$ будетъ функція, непрерывная въ области $\mathfrak{B}$. Изъ непрерывности функцій $f(x, y)$, $g(x, y)$ вытекаетъ тогда, что въ области $\mathfrak{A}$ функція

$$\Phi(f(x, y), g(x, y))$$

непрерывна.

Примѣняя къ интегралу

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_\nu}\!\!\int \Phi(f, g)\left|\binom{fg}{xy}\right| dx\,dy$$

теорему о среднемъ значеніи, мы получаемъ равенство

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_\nu}\!\!\int \Phi(f, g)\left|\binom{fg}{xy}\right| dx\,dy = \Phi(f(x_\nu, y_\nu), g(x_\nu, y_\nu))\int\limits_{\mathfrak{A}_\nu}\!\!\int \left|\binom{fg}{xy}\right| dx\,dy;$$

(x_ν, y_ν) есть точка въ области $\mathfrak{A}_\nu$; ея отображеніе (u_ν, v_ν) лежитъ поэтому въ области $\mathfrak{B}_\nu$.

Въ силу вышеизложеннаго, сумма

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_p) = \sum_{\nu=1}^{p^2}\Phi(u_\nu, v_\nu)\int\limits_{\mathfrak{B}_\nu} u\,dv$$

равна

$$\sum_{\nu=1}^{p^2}\int\limits_{\mathfrak{A}_\nu}\!\!\int \Phi(f, g)\left|\binom{fg}{xy}\right| dx\,dy = \int\limits_{\mathfrak{A}}\!\!\int \Phi(f, g)\left|\binom{fg}{xy}\right| dx\,dy.$$

Если p пробѣгаетъ послѣдовательность $1, 2, 3, \ldots,$ то (ср. § 322)

$$\lim \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_p) = \int\limits_{\mathfrak{B}}\!\!\int \Phi(u, v)\,du\,dv.$$

Такимъ образомъ, имѣетъ мѣсто равенство

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\!\!\int \Phi(u, v)\,du\,dv = \int\limits_{\mathfrak{A}}\!\!\int \Phi(f, g)\left|\binom{fg}{xy}\right| dx\,dy.$$

§ 232. **Замѣчанія къ доказательству, данному въ § 231.** Пусть $\mathfrak{Z}_p$ означаетъ то же разложеніе области $\mathfrak{B}$, что и въ § 231. Положимъ, что область $\mathfrak{B}$ представлена неравенствами

$$\alpha \leqq u \leqq \beta, \quad \varphi(u) \leqq v \leqq \psi(u).$$

Отъ функцій $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ мы требуемъ теперь, чтобы въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$ производныя

$$\varphi'(u), \ \psi'(u)$$

существовали и были непрерывны.

Одна изъ p^2 частныхъ областей опредѣляется[1]) неравенствами

$$\alpha_{\mu-1} \leqq u \leqq \alpha_\mu, \ \ \varphi_{\nu-1}(u) \leqq v \leqq \varphi_\nu(u). \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Мы обозначимъ ее черезъ $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ и назовемъ $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ соотвѣтствующую ей часть области $\mathfrak{A}$.

Прежде всего докажемъ слѣдующее:

Можно выбрать число p_0 такъ, чтобы при $p > p_0$, по крайней мѣрѣ, одна изъ двухъ функцій[2])

$$F'_v(u, v), \ G'_v(u, v)$$

имѣла постоянный знакъ въ каждой области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$.

Если бы это было не такъ, то между разложеніями $\mathfrak{Z}_p$ существовало бы безчисленное множество такихъ, что въ одной изъ частныхъ областей $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ ни одна изъ двухъ функцій F'_v, G'_v не сохраняла бы постояннаго знака. Въ силу непрерывности функцій F_v' и G_v' отсюда вытекало бы, что въ нѣкоторой точкѣ соотвѣтственной области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ обращается въ нуль какъ функція F_v', такъ и функція G_v'.

Въ области $\mathfrak{B}$ существовала бы такая послѣдовательность паръ точекъ

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1; \ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_2; \ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{q}_3; \ldots,$$

для которой

$$\lim \overline{\mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_n} = 0$$

и

$$F'_v(\mathfrak{p}_n) = 0, \ \ G'_v(\mathfrak{q}_n) = 0.$$

Пусть $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3' \ldots$ будетъ часть[3]) послѣдовательности $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$, стремящаяся къ предѣлу $\mathfrak{p}'$. Соотвѣтственная часть

---

[1]) $\alpha_\nu = \alpha + \frac{\nu}{p}(\beta - \alpha)$, $\varphi_\nu(u) = \varphi(u) + \frac{\nu}{p}\{\psi(u) - \varphi(u)\}$.

[2]) F, G имѣютъ тѣ же значенія, что и въ § 231.

[3]) Чтобы найти такую частную послѣдовательность, выбираютъ изъ послѣдовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots$ сходящуюся часть $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots$ и затѣмъ изъ послѣдовательности $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ldots$ — сходящуюся часть $v_1', v_2', v_3', \ldots$ Это возможно, такъ какъ послѣдовательности ограничены.

$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_3', \ldots$ послѣдовательности $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \ldots$ также тогда стремится къ $\mathfrak{p}'$ и

$$F_v'(\mathfrak{p}') = \lim F_v'(\mathfrak{p}_n) = 0,$$
$$G_v'(\mathfrak{p}') = \lim G_v'(\mathfrak{p}_n) = 0.$$

Однако, это невозможно. Ибо, какъ это видно изъ § 124, внутри области $\mathfrak{R}$

$$\begin{pmatrix} F\,G \\ u\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f\,g \\ x\,y \end{pmatrix} = 1.$$

Мы введемъ теперь ось w, перпендикулярную къ плоскости (u, v), и обозначимъ черезъ $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}$ пространственную область, опредѣляемую неравенствами.

$$\alpha_{\mu-1} \leqq u \leqq \alpha_\mu, \quad \varphi_{\nu-1}(u) \leqq v \leqq \varphi_\nu(u), \quad \frac{\nu-1}{p} \leqq w \leqq \frac{\nu}{p}.$$

$\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}$ есть цилиндръ съ основаніемъ $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ и высотою $\frac{1}{p}$.

Относительно двухъ функцій

$$\Phi(u, v, w) = F_u'(u, v) + (1-w) F_v'(u, v)\,\varphi'(u) + w F_v'(u, v)\,\psi'(u),$$
$$\Psi(u, v, w) = G_u'(u, v) + (1-w) G_v'(u, v)\,\varphi'(u) + w G_v'(u, v)\,\psi'(u)$$

можно высказать слѣдующее предложеніе:

Можно выбрать число $\bar{p}_0$ такъ, чтобы при $p > \bar{p}_0$, по крайней мѣрѣ, одна изъ двухъ функцій

$$\Phi(u, v, w), \quad \Psi(u, v, w)$$

имѣла постоянный знакъ въ каждой области $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}$.

Если бы это предложеніе не было вѣрно, то существовало бы безчисленное множество такихъ разложеній $\mathfrak{Z}_p$, что въ одной изъ областей $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}$ имѣлись бы точки $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, для которыхъ [1])

$$\Phi(\mathfrak{p}) = 0, \quad \Psi(\mathfrak{q}) = 0.$$

Мы имѣли бы такимъ образомъ двѣ послѣдовательности точекъ $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ и $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \ldots$, для которыхъ

$$\lim \overline{\mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_n} = 0$$

и

$$\Phi(\mathfrak{p}_n) = 0, \quad \Psi(\mathfrak{p}_n) = 0.$$

---

[1]) Вмѣсто $\Phi(u, v, w)$ мы кратко пишемъ $\Phi(\mathfrak{r})$, когда точка $\mathfrak{r}$ имѣетъ координаты u, v, w.

Пусть $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots$ будетъ сходящаяся часть послѣдовательности $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ и $\mathfrak{p}'$ — предѣлъ этой части. Тогда и $\lim \mathfrak{q}_n' = \mathfrak{p}'$, а въ силу непрерывности функцій Φ и Ψ

$$\Phi(\mathfrak{p}') = \lim \Phi(\mathfrak{p}_n') = 0,$$

$$\Psi(\mathfrak{p}') = \lim \Psi(\mathfrak{q}_n') = 0,$$

т. е.

$$F_u'(u', v') + (1 - w') F_v'(u', v') \varphi'(u') + w' F_v'(u', v') \psi'(u') = 0,$$

$$G_u'(u', v') + (1 - w') G_v'(u', v') \varphi'(u') + w' G_v'(u', v') \psi'(u') = 0.$$

Но отсюда вытекало бы, что

$$F_u'(u', v') G_v'(u' v') - F_v'(u', v') G_u'(u', v') = 0,$$

чего быть не можетъ.

Точно такъ же легко доказать слѣдующее предложеніе:

Можно выбрать число p_0' такъ, чтобы при $p > p_0'$, по крайней мѣрѣ, одна изъ двухъ функцій

$$\Phi(u, v, w), \quad F_v'(u, v)$$

имѣла постоянный знакъ въ каждой области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$.

Можно выбрать число p_0'' такъ, чтобы при $p > p_0''$, по крайней мѣрѣ, одна изъ двухъ функцій

$$\Psi(u, v, w), \quad G_v'(u, v)$$

имѣла постоянный знакъ въ каждой области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$.

Если положить

$$x = F(u, v), \quad y = G(u, v),$$

то точка (x, y) будетъ описывать границу области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$, когда точка (u, v) будетъ описывать границу области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$. Предыдущіе результаты позволяютъ намъ высказать кое-что объ области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$, по крайней мѣрѣ, для достаточно большихъ p.

Итакъ, примемъ, что p больше каждаго изъ чиселъ p_0, p_0, p_0', p_0'' и будемъ имѣть въ виду опредѣленную область $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$. Если написать квадратную схему

$$\begin{matrix} \Phi(u, v, w) & \Psi(u, v, w) \\ F_v'(u, v) & G_v'(u, v), \end{matrix}$$

то въ каждой строкѣ и въ каждомъ столбцѣ навѣрно будетъ содержаться функція, имѣющая постоянный знакъ въ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$. Если функція Φ имѣетъ постоянный знакъ, а функція G'_v его не имѣетъ, то функціи Ψ и F'_v должны имѣть постоянный знакъ. Если функція Ψ имѣетъ постоянный знакъ, а функція F'_v его не имѣетъ, то функціи Φ и G'_v должны имѣть постоянный знакъ. Такимъ образомъ, всегда имѣютъ постоянные знаки либо двѣ функціи Φ и G'_v, либо двѣ функціи Ψ и F'_v. При помощи перестановки x и y одинъ случай приводится къ другому. Выбравъ еще надлежащимъ образомъ положительныя направленія оси x-овъ и оси y-овъ, можно достичь того, чтобы въ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ выполнялись неравенства

$$\Phi(u, v, w) > 0 \quad \text{и} \quad G'_v(u, v) > 0.$$

Если точка (u, v) перемѣщается въ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ по кривой

$$v = (1 - w)\,\varphi(u) + w\,\psi(u)$$

$$\left(\frac{\nu - 1}{p} \leqq w \leqq \frac{\nu}{p}\right)$$

и притомъ такъ, что u увеличивается, то x постоянно возрастаетъ.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{dx}{du} = F'_u + F'_v \frac{dv}{du} = \Phi(u, v, w) > 0.$$

Если точка (u, v) перемѣщается въ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ параллельно оси v и притомъ такъ, что v возрастаетъ, то y постоянно увеличивается, такъ какъ

$$\frac{dy}{dv} = G'_v(u, v) > 0.$$

Въ обоихъ случаяхъ кривая, описываемая точкой (x, y), представляется уравненіями вида

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

при чемъ функціи $x(t)$ и $y(t)$ имѣютъ непрерывныя производныя и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$. Кривая будетъ поэтому спрямляемой.

Покажемъ теперь, что область $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ можетъ быть разложена на нормальныя области.

Область $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ ограничена четырьмя кривыми 12, 23, 34, 41, которымъ соотвѣтствуютъ четыре куска **12**, **23**, **34**, **41** — границы области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ Вдоль кривой 12 возрастаетъ x, вдоль кривой 23 возрастаетъ y, а вдоль кривой 34 убываетъ x и вдоль кривой 41 убываетъ y.

Если въ области $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}$ повсюду

$$\Psi(u, v, w) F'_v(u, v) > 0,$$

то въ этой области имѣютъ мѣсто либо неравенства

$$\Psi(u, v, w) > 0, \quad F'_v(u, v) > 0,$$

либо неравенства

$$\Psi(u, v, w) < 0, \quad F'_v(u, v) < 0.$$

Въ первомъ случаѣ какъ x, такъ и y увеличивается вдоль кривыхъ 12 и 23, а также вдоль кривыхъ 14 и 43. Дуги 123 и 143, для которыхъ только точки 1 и 3 являются общими, ограничиваютъ нормальную область (какъ въ отношеніи оси x-овъ, такъ и въ отношеніи оси y-овъ). Легко убѣдиться въ томъ, что эта нормальная область тождественна съ областью $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$.

Во второмъ случаѣ x возрастаетъ, а y убываетъ вдоль кривыхъ 41 и 12, а также вдоль кривыхъ 43 и 32. Дуги 412 и 432, для которыхъ только точки 4 и 2 являются общими, ограничиваютъ нормальную область, тождественную съ областью $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$.

Теперь мы должны разсмотрѣть еще только тотъ случай, когда въ области $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}$ произведеніе $\Psi(u, v, w) F'_v(u, v)$ не будетъ повсюду положительнымъ, т. е. когда, наоборотъ, въ области $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}$ есть такія точки, въ которыхъ это произведеніе имѣетъ отрицательное значеніе или будетъ нулемъ. Въ такой точкѣ

$$\begin{vmatrix} \Phi(u, v, w) & \Psi(u, v, w) \\ F'_v(u, v) & G'_v(u, x) \end{vmatrix} = \Phi G'_v - \Psi F'_v \geqq \Phi G'_v > 0.$$

А такъ какъ опредѣлитель

$$\Phi G'_v - \Psi F'_v = \begin{pmatrix} F & G \\ u & v \end{pmatrix}$$

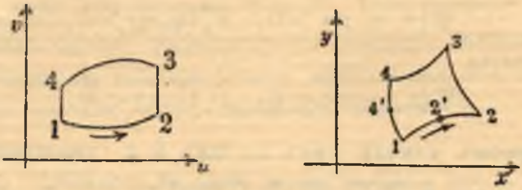
имѣетъ постоянный знакъ, ибо произведеніе этого опредѣлителя на опредѣлитель $\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix}$ равно 1, то въ области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ повсюду

$$\begin{pmatrix} F & G \\ u & v \end{pmatrix} > 0.$$

Если въ точкѣ **1**

$$\Psi\left(u, v, \frac{\nu-1}{p}\right) > 0,$$

то мы можемъ выбрать на дугѣ **12** точку **2′** такъ, чтобы функція $\Psi\left(u, v, \frac{\nu-1}{p}\right)$ была положительной на дугѣ **12′**. Тогда y будетъ возрастать вдоль дуги 12′.



Фиг. 30.

Пусть $x_1 + h_2$ и $y_1 + k_2$ будутъ координаты точки 2′[1]). Мы выберемъ точку **2′** столь близкой къ точкѣ **1**, чтобы выполнялось неравенство

$$k_2 < y_4 - y_1 \text{[2])}.$$

Тогда прямая

$$y = y_1 + k_2$$

встрѣтитъ дугу 14 въ точкѣ 4′ и притомъ только въ этой точкѣ, такъ какъ y возрастаетъ вдоль дуги 14. Пусть $x_1 + h_4$ и $y_1 + k_2$ будутъ координаты точки 4′.

Легко убѣдиться въ томъ, что $h_4 < h_2$, если точка **2′** достаточно близка къ точкѣ 1.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ соотвѣтственно черезъ u, v и $u' + h', v' + k'$ $(h' > 0)$ координаты точекъ **4′** и **2′**, мы имѣемъ:

$$y_1 + k_2 = G(u', v') = G(u' + h', v' + k');$$

далѣе:

$$x_1 + h_4 = F(u, v), \quad x_1 + h_2 = F(u' + h', v' + k');$$

поэтому

$$h' G'_u(\bar{u}, \bar{v}) + k' G'_v(\bar{u}, \bar{v}) = 0,$$

$$h' F'_u(\hat{u}, \hat{v}) + k' F'_v(\hat{u}, \hat{v}) = h_2 - h_4,$$

---

[1]) Координаты точки ν $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ мы обозначаемъ черезъ x_ν, y_ν.

[2]) Случай, когда дуга **14** сводится къ точкѣ, мы разсмотримъ ниже.

откуда слѣдуетъ:

$$(h_2 - h_4)\, G_v'(\bar{u}, \bar{v}) = h'\{ F_u'(\hat{u}, \hat{v})\, G_v'(u, v) - F_v'(\hat{u}, \hat{v})\, G_u'(\bar{u}, \bar{v})\}.$$

Пусть теперь h_4' будетъ колебаніе перемѣнной x вдоль дуги 14. Тогда прямоугольникъ

$$\langle x_1 - h_4',\ x_1 + h_2;\ y_1,\ y_1 + k_2\rangle$$

разлагается кривыми 12, 14 на нормальныя области.

Если точка $\mathbf{2}'$ стремится къ точкѣ $\mathbf{1}$, то

$$\lim h_2 = \lim k_2 = 0 \quad \text{и} \quad \lim h_4' = 0.$$

Мы можемъ поэтому такъ распорядиться, чтобы ни одна изъ точекъ, принадлежащихъ дугѣ 23 или дугѣ 34, не содержалась въ прямоугольникѣ $\langle x_1 - h_4', x_1 + h_2;\ y_1, y_1 + k_2\rangle$.

Если въ точкѣ $\mathbf{1}$

$$\Psi\left(u, v, \frac{\nu - 1}{p}\right) < 0,$$

то мы можемъ выбрать точку $\mathbf{2}'$ такъ, чтобы перемѣнная y убывала вдоль кривой $12'$. Если на дугѣ $\mathbf{14}$ точка $\mathbf{4}'$ лежитъ достаточно близко къ точкѣ $\mathbf{1}$, то колебаніе h_4' перемѣнной x вдоль кривой $14'$ меньше, чѣмъ h_2. Прямоугольникъ

$$\langle x_1 - h_4',\ x_1 + h_2;\ y_1 + k_2,\ y_1 + k_4\rangle$$

разложится дугами 12 и 14 на двѣ нормальныя области, и можно такъ распорядиться, чтобы въ этомъ прямоугольникѣ не заключались ни точки дуги 23, ни точки дуги 34.

Если въ точкѣ 1

$$\Psi\left(u\ v, \frac{\nu - 1}{p}\right) = 0 \ \text{и} \ F_v'(u, v) \gtrless 0,$$

то мы выбираемъ точку $\mathbf{4}'$ такъ, чтобы не только координата y, но и координата x была монотонной на дугѣ $14'$. Кривыя 12, 14 раздѣляютъ въ случаѣ $F_v' > 0$ прямоугольникъ

$$\langle x_1,\ x_1 + h_4;\ y_1 - k_4,\ y_1 + k_4\rangle,$$

а въ случаѣ $F_v' < 0$ прямоугольникъ

$$\langle x_1 + h_4,\ x_1 - h_4;\ y_1 - k_4,\ y_1 + k_4\rangle$$

на нормальныя области, если только точка 4′ достаточно близка къ точкѣ 1. Въ самомъ дѣлѣ, если мы обозначимъ черезъ k_2' колебаніе координаты y вдоль кривой 12′, при чемъ въ первомъ случаѣ точка 2′ имѣетъ абсциссу x_1+h_4, а во второмъ—абсциссу x_1-h_4, то будемъ имѣть:

$$\lim \frac{k_2'}{k_4} = 0.$$

Мы можемъ, слѣдовательно, придвинуть такъ близко точку 4′ къ точкѣ 1, чтобы было

$$|k_2'| < k_4.$$

И здѣсь можно распорядиться такъ, чтобы дуги 23 и 34 лежали внѣ прямоугольника.

Если въ точкѣ 1

$$\Psi\left(u, v, \frac{\nu-1}{p}\right) = 0 \quad \text{и} \quad F_v'(u, v) = 0,$$

то касательныя къ кривымъ 12 и 14 въ точкѣ 1 параллельны осямъ.

При достаточно маломъ h_1 квадратъ $\langle x_1-h_1, x_1+h_1; y_1-h_1, y_1+h_1\rangle$ не содержитъ ни одной точки кривыхъ 23 и 34 и раздѣляется кривыми 12, 14 и діагональю на нормальныя области. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$0 < h < x_2 - x_1 \quad \text{и} \quad 0 < h < y_4 - y_1,$$

то прямая $x = x_1+h$ встрѣчаетъ дугу 12 въ точкѣ (x_1+h, y_1+k_2), а прямая $y = y_1+h$ — дугу 14 въ точкѣ (x_1+h_4, y_1+h). Такъ какъ при h, стремящемся къ нулю,

$$\lim \frac{k_2}{h} = 0, \quad \lim \frac{h_4}{h} = 0,$$

то мы можемъ такъ выбрать h_1, чтобы при $0 < h \leqq h_1$ имѣли мѣсто неравенства

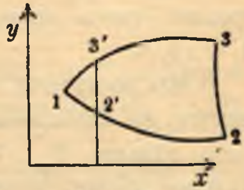
$$|k_2| < h, \quad |h_4| < h.$$

Слѣдуетъ принять во вниманіе, что точка 2′ постоянно лежитъ на сторонѣ построеннаго нами прямоугольника, параллельной оси y-овъ, а точка 4′ — на сторонѣ, параллельной оси x-овъ. Это важно для послѣдующаго.

Мы должны, наконецъ, обсудить тотъ случай, когда дуга 14 сводится къ точкѣ, такъ что $x_4 = x_1$ и $y_4 = y_1$. Такъ какъ x возрастаетъ вдоль кривой 12 и вдоль кривой 43, то при

$$0 < h_1 < x_2 - x_1 \quad \text{и} \quad 0 < h_1 < x_3 - x_1$$

прямая $x = x_1 + h_1$ пересѣчетъ каждую изъ дугъ 12 и 13 въ одной точкѣ. Пусть k' будетъ колебаніе координаты y на кривой $12'$ и k'' — на кривой $13'$; пусть, далѣе, k_1 будетъ большее изъ чиселъ k', k''. Тогда прямоугольникъ



Фиг. 31.

$$\langle x_1, x_1 + h_1;\ y_1 - k_1, y_1 + k_1 \rangle$$

разлагается кривыми 12 и 13 на нормальныя области. Если h_1 взято достаточно малымъ, то въ прямоугольникѣ нѣтъ ни одной точки дуги 23. Точки $2'$ и $3'$ лежатъ на одной сторонѣ, параллельной оси y-овъ.

То, что здѣсь сказано о вершинѣ 1, можно примѣнить и къ другимъ вершинамъ 2, 3, 4. Вокругъ каждой вершины мы можемъ построить параллельно осямъ координатъ прямоугольникъ, который разлагается на нормальныя области границею области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ и, въ случаѣ надобности, діагональю.

Если опустить куски границы области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$, лежащіе въ прямоугольникѣ [1]), то остаются четыре (или три, или двѣ) вполнѣ отдѣленныя другъ отъ друга кривыя.

Вдоль одной такой кривой координата x или координата y будетъ монотонной. Координата x будетъ монотонной вдоль кусковъ, остающихся отъ кривыхъ 12 и 34, а координата y — вдоль кусковъ, остающихся отъ кривыхъ 23 и 41. Конечныя точки двухъ первыхъ (послѣднихъ) кусковъ лежатъ на сторонѣ прямоугольника, параллельной оси y-овъ (оси x-овъ). Послѣдніе куски совсѣмъ отпадаютъ, когда точка 2 совпадаетъ съ точкой 3 или точка 4 съ точкой 1.

Разсмотримъ теперь кусокъ, на которомъ, напримѣръ, координата x монотонна. Мы разлагаемъ интервалъ координаты x на n равныхъ частей $\langle x_{\rho-1}, x_\rho \rangle$ такимъ образомъ, чтобы колебаніе коор-

---

[1]) Концовъ каждаго такого куска мы не опускаемъ.

динаты y на каждой частной дугѣ было меньше, чѣмъ ε. Въ каждомъ изъ прямоугольниковъ

$$\langle x_{\rho-1}, x_\rho; y_{\rho-1}-\varepsilon, y_{\rho-1}+\varepsilon\rangle \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n)$$

лежитъ частная дуга и раздѣляетъ его на двѣ нормальныя области. Если взять n достаточно большимъ, то въ прямоугольникъ не войдетъ никакая другая точка границы области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ и никакая внутренняя точка прямоугольниковъ, которыми охватываются точки 1, 2, 3, 4.

Мы построили такимъ образомъ конечное число прямоугольниковъ, не перекрывающихъ другъ друга и содержащихъ всю границу области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$. Каждый прямоугольникъ раздѣляется на нормальныя области лежащимъ въ немъ кускомъ границы и, въ соотвѣтственныхъ случаяхъ, діагональю.

Пользуясь продолженіями сторонъ этихъ прямоугольниковъ, мы разложимъ на прямоугольники остальныя части прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ [1]). Тогда прямоугольникъ $\langle a, b; c, d\rangle$ будетъ разложенъ на нормальныя области, и притомъ всѣ эти области будутъ спрямляемыми, такъ какъ кривыя 12, 23, 34, 41 спрямляемы.

Если точка, лежащая внутри такой области, принадлежитъ области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$, то и всякая другая точка, лежащая внутри первой области, будетъ принадлежать области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ соединить обѣ точки непрерывною кривою, которая цѣликомъ лежитъ внутри первой области. Но эта кривая должна пересѣчь [2]) границу области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$, если одна точка принадлежитъ, а другая не принадлежитъ области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$.

Такимъ образомъ, среди нашихъ нормальныхъ областей имѣются области двоякаго рода:

1. такія, внутри которыхъ содержится точка области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$.
2. такія, внутри которыхъ нѣтъ ни одной точки области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$.

---

[1]) Такъ какъ область $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ лежитъ **внутри** прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ (ибо область $\mathfrak{B}$ должна лежать внутри области $\mathfrak{R}$), то можно такъ распорядиться, чтобы всѣ наши прямоугольники лежали внутри прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$.

[2]) Это легко доказать для нормальной области. Но при нашемъ отображеніи область $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ соотвѣтствуетъ нормальной области $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$.

Опустивъ эти послѣднія области, мы имѣемъ разложеніе области $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ на спрямляемыя нормальныя области. Этимъ самымъ и область $\mathfrak{A}$ разложена на спрямляемыя нормальныя области.

Если нормальная область, обозначенная въ § 231 черезъ $\mathfrak{B}$ и опредѣляемая неравенствами вида

$$\alpha \leqq u \leqq \beta, \quad \varphi(u) \leqq v \leqq \psi(u)$$

или вида

$$\alpha \leqq v \leqq \beta, \quad \varphi(v) \leqq u \leqq \psi(v),$$

такова, что функціи φ и ψ имѣютъ въ интервалѣ $\langle\alpha, \beta\rangle$ непрерывныя производныя φ' и ψ', то разсужденія, приведенныя въ § 231, вполнѣ безупречны.

Слѣдовательно, къ каждой области, которая можетъ быть разложена на конечное число такихъ, какъ мы будемъ говорить, правильныхъ нормальныхъ областей, формула преобразованія двойного интеграла можетъ еще примѣняться.

Словесно эту формулу можно выразить такъ:

Если къ двойному интегралу

$$\int\int \Phi(u, v)\, du\, dv$$

нужно примѣнить преобразованіе

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

то слѣдуетъ замѣнить въ интегралѣ u черезъ $f(x, y)$, v черезъ $g(x, y)$ и $du\,dv$ черезъ $\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix} dx\, dy$.

§ 233. **Примѣры.** 1. Линейное преобразованіе. Если уравненія, связывающія x, y съ u, v, имѣютъ видъ:

$$\begin{aligned} u &= \alpha x + \beta y + \gamma, \\ v &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \end{aligned} \qquad (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \gtreqless 0)$$

то говорятъ о линейномъ отображеніи или линейномъ преобразованіи.

Предыдущія уравненія могутъ быть рѣшены относительно (x, y). Различнымъ точкамъ (x, y) соотвѣтствуютъ поэтому различныя точки (u, v).

Здѣсь $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1$ есть функціональный опредѣлитель. Поэтому формула преобразованія двойнаго интеграла выражается такъ:

$$\int_{\mathfrak{B}}\int \Phi(u, v)\, du\, dv$$
$$= |\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1| \int_{\mathfrak{A}}\int \Phi(\alpha x + \beta y + \gamma, \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\, dx\, dy.$$

Въ случаѣ $\Phi = 1$

$$\int_{\mathfrak{B}}\int du\, dv = |\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta| \int_{\mathfrak{A}}\int dx\, dy.$$

Двѣ соотвѣтственныя площади различаются, слѣдовательно, постоянымъ множителемъ. Онѣ равны, когда $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \pm 1$. Это преобразованіе называютъ преобразованіемъ безъ измѣненія площади.

Такимъ, напримѣръ, будетъ преобразованіе

$$u = x\cos\varphi - y\sin\varphi + \gamma,$$
$$v = x\sin\varphi + y\cos\varphi + \delta.$$

Если разсматривать x, y и u, v, какъ координаты въ одной и той же плоскости и относительно одной и той же системы координатъ, то при надлежащемъ движеніи плоскости каждая точка x, y перейдетъ въ свою точку отображенія.

2. Полярныя координаты. Полярныя кординаты r, φ связаны съ прямоугольными декартовыми координатами при посредствѣ формулъ

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Мы находимъ, что функціональнымъ опредѣлителемъ функцій x, y относительно перемѣнныхъ r, φ будетъ

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому формула преобразованія двойнаго интеграла гласитъ:

$$\int_{\mathfrak{B}}\int \Phi(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathfrak{A}}\int \Phi(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi.$$

ГЛАВА XIX.

Геометрическія примѣненія двойныхъ интеграловъ.

§ 234. **Объемы.** Положимъ, что функція $z = f(x, y)$ непрерывна и нигдѣ не бываетъ отрицательной[1]) въ области $\mathfrak{A}$, которую мы считаемъ способной разлагаться на нормальныя области.

Мы разлагаемъ область $\mathfrak{A}$ на частныя области $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ того же характера, что и $\mathfrak{A}$, и обозначаемъ это разложеніе черезъ $\mathfrak{Z}$.

Пусть m_ν будетъ наименьшее, а M_ν — наибольшее значеніе функціи f въ области $\mathfrak{A}_\nu$. Мы обозначимъ черезъ $K(K_\nu)$ тѣло, ограниченное поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью (x, y)-овъ и перпендикулярами, возставленными къ ней вдоль границы области $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}_\nu)$.

Тѣло K_ν лежитъ въ цилиндрѣ съ основаніемъ $\mathfrak{A}_\nu$ и высотою M_ν, а цилиндръ съ основаніемъ $\mathfrak{A}_\nu$ и высотою m_ν лежитъ въ тѣлѣ K_ν.

Это даетъ основаніе принять за объемъ тѣла K предѣлъ, къ которому стремятся величины

$$s(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu A_\nu, \quad S(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu A_\nu$$

(A_ν есть площадь фигуры $\mathfrak{A}_\nu$), когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ. Если и самый объемъ обозначить черезъ K, то

$$K = \int\limits_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

§ 235. **Примѣръ.** Если положить

$$f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

и опредѣлить $\mathfrak{A}$ условіемъ

$$x^2 + y^2 \leqq 1,$$

то

$$\int\limits_{\mathfrak{A}}\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

выразитъ объемъ полушара радіуса 1.

---

[1]) x, y, z суть прямоугольныя координаты.

По § 223

$$\int\limits_{\mathfrak{A}}\int f\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\mathfrak{A}$ есть кругъ, опредѣляемый неравенствами

$$-1 \leqq x \leqq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}.$$

Интегралъ

$$\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy,$$

будучи площадью полукруга радіуса $\sqrt{1-x^2}$, равенъ

$$\frac{1}{2}\pi(1-x^2).$$

Поэтому объемъ полушара равенъ

$$\frac{1}{2}\pi\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\pi.$$

§ 236. **Вычисленіе поверхностей.** Положимъ, что функція $z = f(x, y)$ имѣетъ въ области $\mathfrak{A}$ непрерывныя первыя производныя

$$z_x = f'_x(x, y), \quad z_y = f'_y(x, y).$$

Плоскость

$$\mathfrak{z} - z = z'_x(\mathfrak{x} - x) + z'_y(\mathfrak{y} - y)$$

называется касательной плоскостью къ поверхности въ точкѣ (x, y, z) ¹)

Если провести черезъ точку (x, y, z) плоскость, перпендикулярную къ плоскости (x, y), то на кривой поверхности получится кривая пересѣченія, а на касательной плоскости—прямая пересѣченія, и легко видѣть, что прямая пересѣченія есть касательная къ кривой пересѣченія въ точкѣ (x, y, z).

---

¹) Предполагается, что $z = f(x, y)$ и что $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ суть текущія координаты.

Дифференціалъ функціи $f(x, y)$ тѣсно связанъ съ касательной плоскостью. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

переходитъ въ

$$df(x, y) = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y,$$

если замѣнить поверхность ея касательною плоскостью въ точкѣ (x, y, z) *) [1].

Перпендикуляры, возставленные къ плоскости (x, y) вдоль границы области $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}_\nu)$, ограничиваютъ на поверхности $z = f(x, y)$ область $\mathfrak{S}\,(\mathfrak{S}_\nu)$.

Пусть (x_ν, y_ν) будетъ произвольная точка области $\mathfrak{A}_\nu$ и (x_ν, y_ν, z_ν) соотвѣтственная точка поверхности. Строимъ касательную плоскость въ точкѣ (x_ν, y_ν, z_ν). Перпендикуляры, возставленные къ плоскости (x, y) вдоль границы области $\mathfrak{A}_\nu$ опредѣляютъ на касательной плоскости область $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$.

Пусть $\bar{A}_\nu$ будетъ площадь фигуры $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$. Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ, то, какъ мы увидимъ, сумма

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_\nu$$

будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу. Этотъ предѣлъ называютъ величиной кривой поверхности $\mathfrak{S}$.

Чтобы вычислить $\bar{A}_\nu$, замѣтимъ, что проекція области $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$ на плоскость (x, y), есть $\mathfrak{A}_\nu$. Если касательная плоскость параллельна плоскости (x, y), то $\bar{A}_\nu = A_\nu$. Если эти двѣ плоскости не параллельны, то ихъ линію пересѣченія принимаемъ за ось $\mathfrak{x}$-овъ, перпендикуляръ къ ней въ плоскости (x, y)—за ось $\mathfrak{O}\,\mathfrak{y}$, а въ ка-

*) Т. е. приращеніе $\Delta\mathfrak{z}$ координаты $\mathfrak{z}$ при переходѣ на касательной плоскости отъ точки (x, y, z) къ точкѣ $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta\mathfrak{z})$ есть дифференціалъ перемѣнной z на поверхности $z = f(x, y)$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ точка $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta\mathfrak{z})$ лежитъ на касательной плоскости, то $z + \Delta\mathfrak{z} - z = z'_x (x + \Delta x - x) + z'_y (y + \Delta y - y)$, или

$$\Delta\mathfrak{z} = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = dz.$$

[1]) Ср. аналогичную зависимость между $\Delta f(x)$ и $df(x)$, разсмотрѣнную нами въ § 56.

сательной плоскости—за ось $\mathfrak{O}\,\mathfrak{y}_1$. Тогда точка $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$ касательной плоскости имѣетъ на плоскости (x, y) своей проекціей точку $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, которой координаты вычисляются по слѣдующимъ уравненіямъ

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1 \cos \varphi_\nu.$$

При этомъ φ_ν есть уголъ, образуемый двумя разсматриваемыми плоскостями. Но (ср. § 229)

$$A_\nu = -\int_{\mathfrak{A}_\nu} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}, \quad \bar{A}_\nu = -\int_{\mathfrak{A}_\nu} \mathfrak{y}_1\, d\mathfrak{x}_1;$$

поэтому

$$A_\nu = \bar{A}_\nu \cos \varphi_\nu.$$

Для $\cos \varphi_\nu$ найдется значеніе

$$\cos \varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(x_\nu, y_\nu) + f_y'^2(x_\nu, y_\nu)}}.$$

Сообразно съ этимъ

$$\bar{A}_\nu = A_\nu \sqrt{1 + f_x'^2(x_\nu, y_\nu) + f_y'^2(x_\nu, y_\nu)}.$$

Изъ непрерывности функцій f_x' и g_x' вытекаетъ непрерывность функціи

$$\varphi(x, y) = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}.$$

Но мы знаемъ, что сумма

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \varphi(x_\nu, y_\nu)$$

стремится къ предѣлу

$$\int_{\mathfrak{A}}\int \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ особенную послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-въ.

Поэтому площадь области $\mathfrak{G}$ равна

$$\int_{\mathfrak{A}}\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

гдѣ мы вмѣстѣ съ Эйлеромъ полагаемъ

$$f_x'(x, y) = p, \quad f_y'(x, y) = q.$$

Мы введемъ въ предыдущій интегралъ новыя перемѣнныя u, v, а именно [1]) пусть будетъ

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Тогда z также становится функціей отъ u и v. Мы полагаемъ поэтому

$$z = z(u, v).$$

Для вычисленія p и q мы имѣемъ уравненіе

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

которое распадается на два:

$$z'_u = p x'_u + q y'_u,$$
$$z'_v = p x'_v + q y'_v.$$

Отсюда получается:

$$p = \frac{z'_u y'_v - y'_u z'_v}{x'_u y'_v - y'_u x'_v}, \quad q = \frac{x'_u z'_v - z'_u x'_v}{x'_u y'_v - y'_u x'_v};$$

поэтому

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{(y'_u z'_v - z'_u y'_v)^2 + (z'_u x'_v - x'_u z'_v)^2 + (x'_u y'_v - y'_u x'_v)^2}{(x'_u y'_v - y'_u x'_v)^2}.$$

Положивъ

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u,$$
$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$
$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v,$$

найдемъ, что числитель послѣдней дроби равенъ

$$EG - F^2.$$

Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{|x'_u y'_v - y'_u x'_v|}.$$

По правилу преобразованія двойного интеграла, дифференціалъ

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

[1]) Мы считаемъ выполненными условія, указанныя въ § 231 (ср. также § 232). Прежде всего разность $x'_u y'_v - y'_u x'_v$ должна быть отлична отъ нуля. Теперь x, y суть старыя, а u, v—новыя перемѣнныя. Тамъ обозначенія были какъ разъ обратными.

замѣщается теперь дифференціаломъ

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\left|\binom{x\,y}{u\,v}\right|du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

и для площади области $\mathfrak{G}$ получается выраженіе

$$\int\int_{\mathfrak{U}}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

$\mathfrak{U}$ есть область, отвѣчающая въ плоскости (u, v) области $\mathfrak{A}$.

Мы примемъ теперь, что даны три равенства

(*) $$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

и что въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ функціи x, y, z имѣютъ непрерывныя производныя

$$x'_u,\ y'_u,\ z'_u,$$
$$x'_v,\ y'_v,\ z'_v.$$

Пусть, далѣе, повсюду въ прямоугольникѣ $\langle a, b; c, d\rangle$ будетъ

$$EG-F^2>0$$

Допустимъ, наконецъ, что различнымъ точкамъ (u, v) прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ постоянно отвѣчаютъ различныя точки (x, y, z).

Мы полагаемъ

$$X(\mathfrak{p},\mathfrak{q})=\begin{vmatrix} y'_u(u,v) & y'_v(u,v)\\ z'_u(\bar u,\bar v) & z'_v(\bar u,\bar v)\end{vmatrix},$$

$$Y(\mathfrak{p},\mathfrak{q})=\begin{vmatrix} z'_u(u,v) & z'_v(u,v)\\ x'_u(\bar u,\bar v) & x'_v(\bar u,\bar v)\end{vmatrix},$$

$$Z(\mathfrak{p},\mathfrak{q})=\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v)\\ y'_u(\bar u,\bar v) & y'_v(\bar u,\bar v)\end{vmatrix},$$

и понимаемъ подъ $\mathfrak{p}$ точку съ координатами u, v, а подъ $\mathfrak{q}$ — точку съ координатами $\bar u, \bar v$.

Пусть $\langle a', b'; c', d'\rangle$ будетъ прямоугольникъ, расположенный внутри прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$.

Прямыми, параллельными осямъ, можно разложить прямоугольникъ $\langle a', b'; c', d'\rangle$ на такія частныя прямоугольники, чтобы въ каждомъ частномъ прямоугольникѣ одна изъ трехъ функцій

$$X(\mathfrak{p},\mathfrak{q}),\quad Y(\mathfrak{p},\mathfrak{q}),\quad Z(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$$

сохраняла постоянный знакъ при всякомъ перемѣщеніи точки $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ внутри частнаго прямоугольника.

Допустимъ, что это невозможно. Если въ такомъ случаѣ $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть особенная послѣдовательность $\mathfrak{Z}$-овъ, то въ разложеніи $\mathfrak{Z}_n$ содержится частный прямоугольникъ, въ которомъ исчезаетъ каждая изъ трехъ функцій, т. е. въ немъ находятся шесть такихъ точекъ

$$\mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{q}_n,\ \mathfrak{p}'_n,\ \mathfrak{q}'_n,\ \mathfrak{p}''_n,\ \mathfrak{q}''_n,$$

что выполняются равенства

$$X(\mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_n) = Y(\mathfrak{p}'_n, \mathfrak{q}'_n) = Z(\mathfrak{p}''_n, \mathfrak{q}'_n) = 0.$$

Пусть $\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{p}}_3, \ldots$ будетъ сходящаяся часть послѣдовательности $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ и $\mathfrak{p}$ — предѣлъ этой части. Тогда и

$$\lim \bar{\mathfrak{q}}_n = \lim \mathfrak{p}'_n = \lim \mathfrak{q}'_n = \lim \mathfrak{p}''_n = \lim \mathfrak{q}''_n = \mathfrak{p}.$$

Въ виду непрерывности производныхъ $x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v$ отсюда слѣдуетъ, что

$$X(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = Z(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0,$$

поэтому

$$EG - F^2 = 0,$$

вопреки предположенію.

Прямоугольникъ $\langle a', b'; c', d' \rangle$ можно, слѣдовательно, разложить желательнымъ образомъ. Если, напримѣръ, $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta \rangle$ есть частный прямоугольникъ, въ которомъ $Z(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ имѣетъ постоянный знакъ, то въ силу равенства (*) двумъ различнымъ точкамъ (u, v), $(\bar{u}, \bar{v})$ прямоугольника $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta \rangle$ отвѣчаютъ двѣ точки (x, y, z), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ съ различными проекціями на плоскость (x, y). (Ср. § 123).

Поэтому, разсматривая ту часть поверхности, представляемой уравненіемъ (*), которая соотвѣтствуетъ частному прямоугольнику $\langle \alpha, \beta; \gamma, \delta \rangle$, мы найдемъ, что она принадлежитъ къ разсмотрѣнному вначалѣ типу $z = f(x, y)$. Пусть $\mathfrak{A}$ будетъ проекція этой части на плоскость (x, y). Далѣе, изъ § 123 мы можемъ вывести, что перемѣнныя u и v, разсматриваемыя, какъ функціи отъ x и y, имѣютъ непрерывныя частныя производныя въ области $\mathfrak{A}$ [1]). То же поэтому относится къ функціи

$$f(x, y) = \zeta(u, v),$$

ибо ζ'_u и ζ'_v суть непрерывныя функціи отъ u и v.

Разсмотрѣнная часть поверхности (*) имѣемъ поэтому площадь

$$\int\int\limits_{\langle\alpha,\ \beta;\ \gamma,\ \delta\rangle} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Соотвѣтственные выводы относятся и къ другимъ частнымъ прямоугольникамъ. Соотвѣтственная часть нашей поверхности будетъ всякій разъ встрѣчаться съ прямыми, параллельными оси x-овъ, по большей мѣрѣ, въ одной точкѣ.

Поэтому площадь той части поверхности, которая соотвѣтствуетъ прямоугольнику $\langle a', b'; c', d'\rangle$ равна

$$\int\int\limits_{\langle a',\ b';\ c',\ d'\rangle} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Если $\mathfrak{B}$ есть нормальная область, содержащаяся въ прямоугольникѣ $\langle a', b'; c', d'\rangle$, то площадь соотвѣтственной части поверхности равна

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Пусть область $\mathfrak{B}$ представляется неравенствами

$$a' \leqq u \leqq b', \quad \varphi(u) \leqq v \leqq \psi(u).$$

Мы разлагаемъ интервалъ $\langle a', b'\rangle$ на частные интервалы $\langle u_{\nu-1}, u_\nu\rangle$ и соотвѣтственно обозначаемъ черезъ m_ν $(\overline{m}_\nu)$ наименьшее, а черезъ M_ν $(\overline{M}_\nu)$ — наибольшее значеніе функцій $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ въ интервалѣ $\langle u_{\nu-1}, u_\nu\rangle$. Какъ и въ § 223, мы вводимъ еще символъ m_ν', который долженъ имѣть слѣдующее значеніе.

---

[1]) Прямоугольникъ $\langle\alpha, \beta; \gamma, \delta\rangle$ сохраняетъ свойство $Z(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \gtreqless 0$, когда его замѣщаютъ прямоугольникомъ $\langle\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon; \gamma - \varepsilon, \delta + \varepsilon\rangle$ и берутъ положительное число ε достаточно малымъ. Функціи u и v имѣютъ поэтому и на границѣ области $\mathfrak{A}$ непрерывныя производныя по x и по y. Теперь читатель видитъ, почему мы употребили прямоугольникъ $\langle a', b'; c', d'\rangle$ вмѣсто прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$.

Если $M_\nu \leqq \overline{m}_\nu$, то мы полагаемъ $m_\nu' = \overline{m}_\nu$. Если же, наоборотъ, $M_\nu > \overline{m}_\nu$, то мы полагаемъ $m_\nu' = M_\nu$. Тогда постоянно

$$0 \leqq \overline{M}_\nu - m'_\nu \leqq \overline{M}_\nu - \overline{m}_\nu.$$

Обозначимъ прямоугольникъ

$$\langle u_{\nu-1}, u_\nu;\ M_\nu, m'_\nu \rangle$$

черезъ $\mathfrak{q}_\nu$, а прямоугольникъ

$$\langle u_{\nu-1}, u_\nu;\ m_\nu, \overline{M}_\nu \rangle$$

черезъ $\mathfrak{Q}_\nu$. Соотвѣтствующая области $\mathfrak{B}$ часть S кривой поверхности имѣетъ, очевидно, площадь, которая не меньше, чѣмъ

$$\Sigma \int\!\!\int_{\mathfrak{q}_\nu} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

и не больше, чѣмъ

$$\Sigma \int\!\!\int_{\mathfrak{Q}_\nu} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Въ томъ же интервалѣ лежитъ интегралъ

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{B}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Пусть σ будетъ наибольшее колебаніе функцій $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ въ частныхъ интервалахъ $\langle u_{\nu-1}, u_\nu \rangle$. Площади q_ν и Q_ν прямоугольниковъ $\mathfrak{q}_\nu$ и $\mathfrak{Q}_\nu$ удовлетворяютъ тогда слѣдующимъ неравенствамъ:

$$0 < Q_\nu - q_\nu < 2\sigma(u_\nu - u_{\nu-1}).$$

Если $\mathfrak{M}$ есть наибольшее значеніе функціи $\sqrt{EG - F^2}$ въ прямоугольникѣ $\langle a', b';\ c', d' \rangle$, то мы будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{Q}_\nu} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv - \int\!\!\int_{\mathfrak{q}_\nu} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv < 2\sigma(b' - a')\mathfrak{M}.$$

Такимъ образомъ, величины S и $\int\!\!\int_{\mathfrak{B}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ отличаются другъ отъ друга менѣе, чѣмъ на $2\sigma(b' - a')\mathfrak{M}$. Такъ какъ величина σ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, то имѣетъ мѣсто формула

$$S = \int_{\mathfrak{B}}\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Она остается вѣрной, если область $\mathfrak{B}$ лежитъ внутри прямоугольника $\langle a, b; c, d\rangle$ и можетъ быть разложена на конечное число нормальныхъ областей.

§ 237. **Поверхность шара.** Мы характеризуемъ точки шаровой поверхности ихъ географической долготой и широтой (λ и β). Тогда, положивъ радіусъ равнымъ λ, имѣемъ:

$$x = \cos\beta\cos\lambda, \quad y = \cos\beta\sin\lambda, \quad z = \sin\beta,$$

а β и λ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 2\pi.$$

Для производныхъ

$$x'_\beta,\ y'_\beta,\ z'_\beta,$$
$$x'_\lambda,\ y'_\lambda,\ z'_\lambda$$

получаются здѣсь значенія:

$$\begin{array}{lll} -\sin\beta\cos\lambda, & -\sin\beta\sin\lambda, & \cos\beta, \\ -\cos\beta\sin\lambda, & \cos\beta\cos\lambda, & 0. \end{array}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$y'_\beta z'_\lambda - z'_\beta y'_\lambda = -\cos^2\beta\cos\lambda,$$
$$z'_\beta x'_\lambda - x'_\beta z'_\lambda = -\cos^2\beta\sin\lambda,$$
$$x'_\beta y'_\lambda - y'_\beta x'_\lambda = -\cos\beta\sin\beta;$$

поэтому

$$EG - F^2 = \cos^2\beta.$$

Такимъ образомъ, часть шаровой поверхности, соотвѣтствующая области $\mathfrak{B}$ въ плоскости (β, λ), имѣетъ площадь

$$\int_{\mathfrak{B}}\int \sqrt{EG - F^2}\, d\beta\, d\lambda = \int_{\mathfrak{B}}\int \cos\beta\, d\beta\, d\lambda. \text{ [1]}$$

---

[1]) Область $\mathfrak{B}$ лежитъ внутри прямоугольника $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; 0, 2\pi\rangle$ и можетъ быть разложена на конечное число нормальныхъ областей.

Если $\mathfrak{B}$ есть нормальная область, представляемая неравенствами

$$\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1, \quad \varphi(\lambda) \leqq \beta \leqq \psi(\lambda),$$

то (ср. § 223)

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int \cos\beta\, d\beta\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} \{\sin\psi(\lambda) - \sin\varphi(\lambda)\}\, d\lambda.$$

Если область $\mathfrak{B}$ представлена неравенствами

$$\beta_0 \leqq \beta \leqq \beta_1, \quad \varphi(\beta) \leqq \lambda \leqq \psi(\beta),$$

то

$$\int\limits_{\mathfrak{B}}\int \cos\beta\, d\beta\, d\lambda = \int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} \{\psi(\beta) - \varphi(\beta)\} \cos\beta\, d\beta.$$

Если въ первомъ случаѣ

$$\varphi(\lambda) = \beta_0, \quad \psi(\lambda) = \beta_1$$

или во второмъ

$$\varphi(\beta) = \lambda_0, \quad \psi(\beta) = \lambda_1,$$

то интегралъ равенъ

$$(\sin\beta_1 - \sin\beta_0)(\lambda_1 - \lambda_0).$$

Отсюда слѣдуетъ, что площадь всей шаровой поверхности равна 4π.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Нѣкоторыя свѣдѣнія изъ теоріи опредѣлителей.

Опредѣлители (детерминанты) введены были Лейбницемъ для удобства рѣшенія системы линейныхъ уравненій.

Для опредѣленія детерминанта n-аго порядка мы должны сказать сначала кое что о перестановкахъ.

Какъ читателю извѣстно, существуетъ

$$1 \cdot 2 \ldots n = n! \qquad (n \text{ факультетъ})$$

перестановокъ чиселъ $1, 2, \ldots, n$.

Перестановка

$$1, 2, \ldots, n$$

отличается тѣмъ, что въ ней изъ каждыхъ двухъ чиселъ меньшее всегда находится слѣва отъ большаго. Въ каждой другой перестановкѣ

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

будетъ встрѣчаться большее число, предшествующее меньшему. Такое расположеніе называютъ инверсіей или безпорядкомъ [1]).

Чтобы сосчитать, сколько инверсій содержится въ перестановкѣ, можно поступать такъ:

Опредѣляютъ, сколько чиселъ, меньшихъ k_1, слѣдуетъ за k_1; затѣмъ, сколько чиселъ, меньшихъ k_2, слѣдуетъ за k_2 и т. д.

Для опредѣленія числа инверсій въ перестановкѣ

$$7531264$$

---

[1]) Мы принимаемъ $n > 1$.

слѣдуетъ замѣтить, что

за 7-ю слѣдуютъ шесть меньшихъ чиселъ,
за 5-ю слѣдуютъ четыре меньшихъ числа,
за 3-мя слѣдуютъ два меньшихъ числа,
за 6-ю слѣдуетъ одно меньшее число.

Эта перестановка содержитъ, слѣдовательно,

$$6 + 4 + 2 + 1 = 13$$

инверсій.

Мы разсмотримъ теперь двѣ перестановки, получающіяся другъ изъ друга черезъ перемѣщеніе двухъ смежныхъ элементовъ, каковы, напримѣръ, перестановки

7531264 и 7513264.

Пусть r и s $(> r)$ будутъ два подлежащихъ перемѣщенію элемента. Тогда одна перестановка имѣетъ видъ

$\ldots rs \ldots$, а другая $\ldots sr \ldots$

Во второй, кромѣ инверсій, встрѣчающихся въ первой, есть еще новая инверсія, зависящая отъ r, s.

При перемѣщеніи двухъ сосѣднихъ элементовъ число инверсій перестановки увеличивается или уменьшается на 1.

Пусть теперь имѣется перестановка, въ которой за элементомъ r слѣдуютъ сначала μ другихъ элементовъ, за которыми уже слѣдуетъ элементъ s, т. е. имѣется перестановка вида

$$\ldots r z_1 z_2 \ldots z_\mu s \ldots$$

Замѣняя $\mu + 1$ разъ элементъ r его сосѣднимъ правымъ элементомъ, мы черезъ перестановки

$$\ldots z_1 r z_2 \ldots z_\mu s \ldots,$$
$$\ldots z_1 z_2 r \ldots z_\mu s \ldots,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\ldots z_1 z_2 z_3 \ldots rs \ldots$$

приходимъ къ перестановкѣ

$$\ldots z_1 z_2 \ldots z_\mu s r \ldots.$$

Замѣняя теперь μ разъ элементъ s его лѣвымъ сосѣднимъ элементомъ, мы приходимъ къ перестановкѣ

$$\ldots s z_1 z_2 \ldots z_\mu r \ldots .$$

Отсюда видно, что достаточно сдѣлать $2\mu + 1$ перестановокъ смежныхъ элементовъ для того, чтобы элементы r и s обмѣнялись мѣстами.

При этомъ число инверсій увеличивается или уменьшается на нечетное число, ибо оно $2\mu + 1$ разъ изъ четнаго становится нечетнымъ или изъ нечетнаго становится четнымъ.

Перестановки раздѣляютъ на два класса сообразно съ четнымъ или нечетнымъ числомъ содержащихся въ нихъ инверсій и говорятъ о четныхъ и нечетныхъ перестановкахъ.

Перестановка измѣняетъ свой классъ при перемѣщеніи двухъ ея элементовъ.

Существуетъ столько же четныхъ, сколько и нечетныхъ перестановокъ. Чтобы въ этомъ убѣдиться, слѣдуетъ себѣ представить, что всѣ $n!$ перестановокъ чиселъ $1, 2, \ldots, n$ написаны рядомъ въ нѣкоторомъ порядкѣ. Пусть между этими перестановками будетъ p четныхъ и q нечетныхъ. Если теперь перемѣстить во всѣхъ перестановкахъ числа 1 и 2, то мы опять будемъ имѣть всѣ $n!$ перестановокъ, только въ другомъ порядкѣ. Но p четныхъ перестановокъ стали p нечетными, а q нечетныхъ сдѣлались q четными перестановками. Отсюда видно, что $p = q$.

Опредѣленіе детерминанта n-аго порядка.

Мы разсматриваемъ n^2 чиселъ, расположенныхъ въ видѣ квадрата и отмѣченныхъ двойными индексами[1])

$$(1)\qquad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

Первый индексъ элемента a_{rs} указываетъ рядъ или горизон-

[1]) Обозначеніе при помощи двойныхъ индексовъ введено Лейбницемъ.

таль, въ которой находится этотъ элементъ, а второй—колонну или вертикаль.

Мы выдѣлимъ теперь n элементовъ, которые находятся въ различныхъ горизонталяхъ и въ различныхъ вертикаляхъ, и составимъ ихъ произведеніе. Это произведеніе имѣетъ слѣдующій видъ:

$$a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n},$$

и $r_1, r_2, \dots, r_n$ есть перестановка чиселъ $1, 2, \dots, n$. Имѣется, очевидно, $n!$ такихъ произведеній. Мы можемъ ихъ подраздѣлить на два класса. Къ первому классу мы причисляемъ тѣ произведенія, въ которыхъ индексы $r_1, r_2, \dots, r_n$ составляютъ четную перестановку, а ко второму—тѣ произведенія, въ которыхъ индексы $r_1, r_2, \dots, r_n$ образуютъ нечетную перестановку.

Вычтя изъ суммы всѣхъ произведеній перваго класса сумму произведеній второго класса, получаютъ выраженіе, которое называютъ **детерминантомъ** или **опредѣлителемъ** схемы (1) и обозначаютъ символомъ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Въ случаѣ $n = 2$ существуютъ только два произведенія вида $a_{1r_1} a_{2r_2}$, а именно

$$a_{11} a_{22} \text{ и } a_{12} a_{21}.$$

Первое принадлежитъ къ первому, а второе ко второму классу, ибо 1, 2 есть четная, а 2, 1—нечетная перестановка.

Такимъ образомъ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

или, при другихъ обозначеніяхъ,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Въ случаѣ $n = 3$ существуетъ $3! = 6$ произведеній $a_{1r_1} a_{2r_2} a_{3r_3}$, а именно слѣдующія:

$$a_{11} a_{22} a_{33}, \quad a_{12} a_{23} a_{31}, \quad a_{13} a_{21} a_{32}$$
$$a_{11} a_{23} a_{32}, \quad a_{12} a_{21} a_{33}, \quad a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Три первыхъ принадлежатъ къ первому, а три послѣднихъ ко второму классу, ибо

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2$$

суть четныя, а

$$1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1$$

суть нечетныя перестановки

Такимъ образомъ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \quad a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}. \end{array} \right.$$

Ясно, что съ отрицательными знаками слѣдуетъ взять тѣ произведенія, которыя содержатъ по одному только множителю съ равными индексами.

О перемѣщеніяхъ элементовъ опредѣлителя.

Произведеніе $a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{nr_n}$ не измѣняетъ величины при какой-либо перестановкѣ его множителей. Къ любому расположенію множителей можно придти, перемѣщая въ произведеніи $a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{nr_n}$ нѣсколько разъ только два элемента.

Если при p такихъ перемѣщеніяхъ

$$a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{nr_n} \text{ переходитъ въ } a_{s_1 1} a_{s_2 2} \ldots a_{s_n n},$$

то $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $s_1, s_2, \ldots, s_n$ суть четныя или нечетныя перестановки, смотря по тому, будетъ ли p четнымъ или нечетнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что перестановка измѣняетъ свой классъ, если въ ней перемѣстить два элемента. Но при помощи p такихъ перемѣщеній перестановки $1, 2, \ldots, n$ и $r_1, r_2, \ldots, r_n$ переходятъ соотвѣтственно въ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и $1, 2, \ldots, n$.

Раздѣлимъ теперь $n!$ произведеній

$$a_{s_1 1} a_{s_2 2} \ldots a_{s_n n}$$

($s_1, s_2, \ldots, s_n$ есть перестановка чиселъ $1, 2, \ldots, n$)

на два класса. Къ первому классу причислимъ тѣ произведенія, въ которыхъ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ есть четная перестановка, а ко второму классу—тѣ произведенія, въ которыхъ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ есть нечетная перестановка. Опредѣлитель (2) равенъ тогда суммѣ произведеній перваго класса, уменьшенной на сумму произведеній второго класса.

Положимъ, что два опредѣлителя

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

находятся другъ къ другу въ такомъ соотношеніи, что при $r = 1, 2, \ldots, n$ и $s = 1, 2, \ldots, n$

$$b_{rs} = a_{sr},$$

т. е. r-ая горизонталь одного опредѣлителя совпадаетъ съ r-ой вертикалью другого.

Пусть теперь будетъ

$$A = \sum \operatorname{sgn}(s_1 s_2 \cdots s_n)\, a_{s_1 1}\, a_{s_2 2} \cdots a_{s_n n},$$

гдѣ $\operatorname{sgn}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ должно полагать равнымъ $+1$ или -1, смотря по тому, будетъ ли перестановка $s_1, s_2, \ldots, s_n$ четной или нечетной.

Но, съ другой стороны,

$$B = \sum \operatorname{sgn}(s_1 s_2 \cdots s_n)\, b_{1 s_1}\, b_{2 s_2} \cdots b_{n s_n}.$$

Такъ какъ, по предположенію,

$$b_{1 s_1} = a_{s_1 1}, \quad b_{2 s_2} = a_{s_2 2}, \cdots, \quad b_{n s_n} = a_{s_n n},$$

то отсюда слѣдуетъ, что

$$A = B.$$

Теорема 1. Опредѣлитель не измѣняетъ своей величины, если переписать его такъ, чтобы r-ая горизонталь стала r-ой вертикалью ($r = 1, 2, \ldots, n$).

Мы предположимъ теперь, что B получается изъ A путемъ перемѣщенія r-ой и s-ой горизонталей. Новую перестановку, получаемую изъ перестановки $s_1, s_2, \ldots, s_n$ черезъ перемѣщеніе r и s, обозначимъ черезъ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Тогда

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n) = -\operatorname{sgn}(s_1 s_2 \cdots s_n),$$

и мы можемъ написать:

$$A = -\sum \operatorname{sgn}(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n)\, a_{s_1 1} a_{s_2 2} \cdots a_{s_n n}.$$

Но, по предположенію,

$$a_{s_1 1} a_{s_2 2} \cdots a_{s_n n} = b_{\sigma_1 1} b_{\sigma_2 2} \cdots b_{\sigma_n n};$$

поэтому

$$A = -\sum \operatorname{sgn}(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n)\, b_{\sigma_1 1} b_{\sigma_2 2} \cdots b_{\sigma_n n} = -B.$$

Теорема 2. Опредѣлитель умножается на -1, когда въ немъ перемѣщаютъ двѣ горизонтали.

Если въ опредѣлителѣ A r-ая горизонталь совпадаетъ съ s-ой и, слѣдовательно,

$$a_{r1} = a_{s1},\ a_{r2} = a_{s2}, \cdots, a_{rn} = a_{sn}$$

($r \gtreqless s$), то при перемѣщеніи r-ой и s-ой горизонталей опредѣлитель A переходитъ въ $-A$ и, съ другой стороны, не измѣняетъ своей величины при этой перестановкѣ. Поэтому

$$A = -A, \text{ т. е. } A = 0.$$

Теорема 3. Опредѣлитель съ двумя тождественными горизонталями равенъ нулю.

Принявъ во вниманіе теорему 1, мы видимъ, что теоремы 2 и 3 относятся также и къ вертикалямъ.

Предложеніе 2 можно обобщить слѣдующимъ образомъ:

Теорема 2'. Если $r_1, r_2, \ldots, r_n$ есть произвольная перестановка чиселъ $1, 2, \ldots, n$, то

$$\begin{vmatrix} a_{r_1 1} & a_{r_1 2} & \cdots & a_{r_1 n} \\ a_{r_2 1} & a_{r_2 2} & \cdots & a_{r_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_n 1} & a_{r_n 2} & \cdots & a_{r_n n} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(r_1 r_2 \cdots r_n) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Положимъ, что опредѣлитель въ лѣвой части получается изъ опредѣлителя, находящагося въ правой части путемъ p перемѣщеній двухъ горизонталей. Тогда, по теоремѣ 2,

$$\begin{vmatrix} a_{r_1 1} & a_{r_1 2} & \cdots & a_{r_1 n} \\ a_{r_2 1} & a_{r_2 2} & \cdots & a_{r_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_n 1} & a_{r_n 2} & \cdots & a_{r_n n} \end{vmatrix} = (-1)^p \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но, съ другой стороны,

$$\operatorname{sgn}(r_1 r_2 \cdots r_n) = (-1)^p,$$

такъ какъ при переходѣ отъ перестановки $1, 2, \ldots, n$ къ перестановкѣ $r_1, r_2, \ldots, r_n$ классъ измѣняется p разъ.

Опредѣлитель, какъ функція элементовъ горизонтали.

Каждый членъ опредѣлителя A имѣетъ видъ $a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n}$ и содержитъ только по одному элементу изъ каждой горизонтали.

Теорема 4. Опредѣлитель есть линейная однородная функція элементовъ какой-либо горизонтали.

Такъ, напримѣръ,

$$A = a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \cdots + a_{rn} A_{rn},$$

гдѣ величины $A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rn}$ совершенно независимы отъ элементовъ r-ой горизонтали.

Величину A_{rs} называютъ алгебраическимъ дополненіемъ элемента a_{rs}. Чтобы найти A_{rs}, замѣнимъ r-ую горизонталь сначала $(r-1)$-ой, потомъ $(r-2)$-ой, ..., наконецъ, первой горизонталью, съ цѣлью сдѣлать такимъ образомъ r-ую горизонталь первою. Мы этимъ путемъ получимъ опредѣлитель, равный $(-1)^{r-1} A$. Въ немъ мы будемъ замѣщать s-ую колонну $(s-1)$-ой, $(s-2)$-ой, ..., наконецъ, первой. Новый опредѣлитель будетъ тогда имѣть значеніе $(-1)^{r-1+s-1} A$ или

$$(-1)^{r+s} A.$$

Подробно написанный, этотъ опредѣлитель имѣетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} a_{rs} & a_{r1} & \cdots & a_{r,s-1} & a_{r,s+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{1s} & a_{11} & \cdots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1,s} & a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,s} & a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ns} & a_{n1} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $\bar{A}_{rs}$ есть алгебраическое дополненіе элемента a_{rs} въ этомъ опредѣлителѣ, то

$$A_{rs}=(-1)^{r+s}\bar{A}_{rs}.$$

Такимъ образомъ все теперь сводится къ опредѣленію алгебраическаго дополненія B_{11} элемента b_{11} въ опредѣлителѣ

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Члены опредѣлителя B, содержащіе элементъ b_{11}, имѣютъ видъ:

$$\operatorname{sgn}(1\, r_2 \cdots r_n)\, b_{11}\, b_{2r_2} \cdots b_{nr_n}.$$

$r_2, \ldots, r_n$ есть перестановка чиселъ $2, \ldots, n$.

Если мы положимъ на мгновеніе

$$c_{rs}=b_{r+1,\,s+1}, \qquad (r, s=1, 2, \cdots, n-1),$$

то будетъ:

$$b_{11}\, b_{2r_2} \cdots b_{nr_n}=b_{11}\, c_{1,\,r_2-1} \cdots c_{n-1,\,r_n-1},$$

при чемъ $r_2-1, \cdots, r_n-1$ есть перестановка чиселъ $1, 2, \ldots, n-1$. Ясно, что въ перестановкѣ $1, r_2, \ldots, r_n$ будетъ столько же инверсій, сколько ихъ и въ перестановкѣ $r_2-1, \cdots, r_n-1$, такъ что

$$\operatorname{sgn}(1\, r_2 \cdots r_n)=\operatorname{sgn}(r_2-1, \cdots r_n-1).$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$B_{11}=\sum \operatorname{sgn}(r_2-1, \cdots, r_n-1)\, c_{1,r_2-1} \cdots c_{n-1,r_n-1}$$

$$=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

или

$$B_{11}=\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно, при составленіи A_{rs} соблюдается слѣдующее правило:

Чтобы найти алгебраическое дополненіе элемента a_{rs} въ опредѣлителѣ A порядка n, слѣдуетъ вычеркнуть r-ую горизонталь и s-ую вертикаль, т. е. горизонталь и вертикаль, въ которыхъ находится a_{rs}. Остающійся опредѣлитель $(n-1)$-го порядка, будучи снабженъ еще множителемъ $(-1)^{r+s}$, равенъ искомому алгебраическому дополненію.

Теорема 5. Если каждый элементъ какой-либо горизонтали опредѣлителя умножить на алгебраическое дополненіе соотвѣтственнаго элемента другой горизонтали, то сумма полученныхъ произведеній будетъ равна нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, если замѣнить въ опредѣлителѣ A элементы r-ой горизонтали, т. е. элементы $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ соотвѣтственно на $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$, то выраженіе

$$a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \cdots + a_{rn} A_{rn}$$

преобразуется въ

$$a_{s1} A_{r1} + a_{s2} A_{r2} + \cdots + a_{sn} A_{rn}.$$

Такъ какъ новый опредѣлитель имѣетъ двѣ тождественныя горизонтали, то

$$a_{s1} A_{r1} + a_{s2} A_{r2} + \cdots + a_{sn} A_{rn} = 0. \qquad (s \gtrless r)$$

Теорема 6. Если элементы какой-либо горизонтали суть биномы, то опредѣлитель можетъ быть представленъ въ видѣ суммы двухъ опредѣлителей. Первый получится, если оставить только первые члены этихъ биномовъ, а второй—если оставить только вторые члены.

Если въ r-ой горизонтали находятся биномы

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n,$$

то опредѣлитель равенъ

$$(x_1 + y_1) A_{r1} + (x_2 + y_2) A_{r2} + \cdots + (x_n + y_n) A_{rn},$$

т. е. равенъ

$$(x_1 A_{r1} + x_2 A_{r2} + \cdots + x_n A_{rn}) + (y_1 A_{r1} + y_2 A_{r2} + \cdots + y_n A_{rn}).$$

Теорема 7. Если умножить всѣ элементы горизонтали на множителя λ, то опредѣлитель получаетъ множителя λ.

Въ самомъ дѣлѣ, если замѣнить соотвѣтственно $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$, на $\lambda a_{r1}, \lambda a_{r2}, \ldots, \lambda a_{rn}$, то опредѣлитель

$$a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \cdots + a_{rn} A_{rn}$$

превращается въ

$$\lambda (a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \cdots + a_{rn} A_{rn}).$$

Теорема 8. Если къ элементамъ горизонтали прибавить соотвѣтственные элементы другой горизонтали, по множенные на число λ, то опредѣлитель не измѣнится.

Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ 6 и теоремѣ 7, новый опредѣлитель можетъ быть написанъ въ видѣ $A + \lambda B$, и опредѣлитель B, будучи опредѣлителемъ съ двумя тождественными горизонталями, равенъ нулю.

На основаніи теоремы 1 теоремы 4—8 относятся также и къ вертикалямъ.

Теорема объ умноженіи.

Изъ r-ой горизонтали опредѣлителя

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и s-ой горизонтали опредѣлителя

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

мы составляемъ выраженіе

$$c_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \cdots + a_{rn} b_{sn}$$

и разсматриваемъ опредѣлитель

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

По повторномъ примѣненіи теоремы 6 онъ разлагается на слагаемыя слѣдующаго вида:

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} b_{1r_1}, & a_{1r_1} b_{2r_1}, & \cdots, & a_{1r_1} b_{nr_1} \\ a_{2r_2} b_{1r_2}, & a_{2r_2} b_{2r_2}, & \cdots, & a_{2r_2} b_{nr_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nr_n} b_{1r_n}, & a_{nr_n} b_{2r_n}, & \cdots, & a_{nr_n} b_{nr_n} \end{vmatrix}.$$

Но по теоремѣ 7 такое слагаемое равно

$$a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n} \begin{vmatrix} b_{1r_1} & b_{2r_1} & \cdots & b_{nr_1} \\ b_{1r_2} & b_{2r_2} & \cdots & b_{nr_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1r_n} & b_{2r_n} & \cdots & b_{nr_n} \end{vmatrix}.$$

Второй множитель исчезаетъ, если не всѣ числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ различны. Съ другой стороны, по теоремѣ 2′,

$$\begin{vmatrix} b_{1r_1} & b_{2r_1} & \cdots & b_{nr_1} \\ b_{1r_2} & b_{2r_2} & \cdots & b_{nr_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1r_n} & b_{2r_n} & \cdots & b_{nr_n} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(r_1 r_2 \cdots r_n) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{sgn}(r_1 r_2 \cdots r_n) B.$$

Поэтому

$$C = B \sum \operatorname{sgn}(r_1 r_2 \cdots r_n) a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n} = AB,$$

т. е. опредѣлитель C есть произведеніе опредѣлителей A и B.

Системы линейныхъ уравненій.

Мы разсматриваемъ систему n линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными. Такая система имѣетъ слѣдующій видъ:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Опредѣлитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называютъ опредѣлителемъ системы (3). Мы примемъ, что онъ отличенъ отъ нуля.

Пусть A_{rs} будетъ алгебраическое дополненіе элемента a_{rs}. Умноживъ уравненія (3) по порядку на

$$A_{1r},\ A_{2r},\ \ldots,\ A_{nr}$$

и сложивъ затѣмъ всѣ полученныя уравненія, получимъ, согласно теоремамъ 4 и 5, равенство:

$$Ax_r = b_1 A_{1r} + b_2 A_{2r} + \cdots + b_n A_{nr},$$

т. е.

$$x_r = \frac{b_1 A_{1r} + b_2 A_{2r} + \cdots + b_n A_{nr}}{A}.$$

$$(r = 1, 2, \cdots, n)$$

Наоборотъ, легко убѣдиться въ томъ, что эти значенія удовлетворяютъ системѣ (3). Въ самомъ дѣлѣ,

$$\sum_r a_{kr} x_r = \frac{b_1}{A} \sum a_{kr} A_{1r} + \cdots + \frac{b_n}{A} \sum a_{kr} A_{nr} = b_k.$$

Такимъ образомъ, система n линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными имѣетъ одно и только одно рѣшеніе, если опредѣлитель отличенъ отъ нуля.

Чтобы найти его, слѣдуетъ въ опредѣлителѣ A замѣнить r-ую вертикаль вертикалью

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n. \end{matrix}$$

Если полученный такимъ образомъ опредѣлитель назовемъ B_r, то искомымъ рѣшеніемъ будетъ

$$x_1 = \frac{B_1}{A},\; x_2 = \frac{B_2}{A}, \cdots,\; x_n = \frac{B_n}{A}.$$

Въ случаѣ $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ мы имѣемъ систему n линейныхъ однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными.

Если опредѣлитель такой системы отличенъ отъ нуля, то всѣ неизвѣстныя должны быть равны нулю.

Если система n линейныхъ однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными имѣетъ исчезающій опредѣлитель, то, какъ мы покажемъ, кромѣ тривіальнаго рѣшенія $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$, существуютъ еще другія.

Если въ опредѣлителѣ A опустить $n-h$ горизонталей и $n-h$ вертикалей, то получится опредѣлитель порядка h, который называютъ миноромъ опредѣлителя A.

Если между минорами опредѣлителя A есть отличный отъ нуля миноръ порядка r, но нѣтъ минора порядка выше r, которому принадлежало бы это свойство, то говорятъ, что A есть опредѣлитель ранга r.

Положимъ теперь, что имѣется система

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

съ опредѣлителемъ, равнымъ нулю. Тогда его рангъ r будетъ меньше, чѣмъ n. Если рангъ равенъ нулю, т. е. всѣ коэффиціенты равны нулю, то наши уравненія удовлетворяются каждой системой чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Въ случаѣ $0 < r < n$ мы можемъ перемѣнить порядокъ уравненій и перенумеровать неизвѣстныя такъ, чтобы именно миноръ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

былъ отличенъ отъ нуля.

Пусть въ опредѣлителѣ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_r & u_k \end{vmatrix} \qquad (k > r)$$

алгебраическими дополненіями элементовъ $u_1, u_2, \ldots, u_r$ будутъ

$$U_1,\ U_2, \ldots,\ U_r,\ U_k.$$

Положивъ

$$x_1 = U_1,\ x_2 = U_2, \cdots,\ x_r = U_r,\ x_k = U_k$$

и взявъ всѣ остальные x-ы равными нулю, мы получаемъ рѣшеніе системы (4). Ибо

$$\begin{aligned} & a_{h1} x_1 + a_{h2} x_2 + \cdots + a_{hn} x_n \\ = {} & a_{h1} U_1 + a_{h2} U_2 + \cdots + a_{hr} U_r + a_{hk} U_k = \\ = {} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hr} & a_{hk} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

а этотъ опредѣлитель при $h \leqq r$ равенъ нулю, такъ какъ въ этомъ случаѣ онъ содержитъ двѣ тождественныя горизонтали, а при $h > r$ онъ также равенъ нулю, такъ какъ рангъ опредѣлителя A выше r и, слѣдовательно, всѣ миноры этого опредѣлителя, коихъ порядокъ выше r, исчезаютъ.

Такъ какъ

$$U_k = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \cdots a_{1r} \\ a_{21} \, a_{22} \cdots a_{2r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1} \, a_{r2} \cdots a_{rr} \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

то мы нашли рѣшеніе, которое не состоитъ исключительно изъ нулей.[1])

Такъ какъ k можетъ принимать значенія $r+1, \ldots, n$, то предложенный способъ даетъ $n-r$ рѣшеній. Обозначимъ ихъ теперь слѣдующимъ образомъ:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, x_r^{(1)}, & 1, 0, \cdots, 0 \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, x_r^{(2)}, & 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n-r)}, & x_2^{(n-r)}, & \ldots, x_r^{(n-r)}, & 0, 0, \cdots, 1. \end{cases}$$

Изъ этихъ $n-r$ рѣшеній можно линейно составить каждое рѣшеніе системы (4). Въ самомъ дѣлѣ, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть рѣшеніе системы (4), то можно получить ея рѣшеніе, помноживъ рѣшенія (5) на какіе-либо множители и сложивъ соотвѣтственно съ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Умноживъ рѣшенія (5) по порядку на

$$-x_{r+1}, -x_{r+2}, \cdots, -x_n$$

и прибавивъ ихъ послѣ этого соотвѣтственно къ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы получимъ рѣшеніе слѣдующаго вида

$$x_1', x_2', \ldots, x_r', 0, 0, \ldots, 0.$$

Но изъ уравненій

$$\begin{aligned} a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + \cdots + a_{1r} x_r' &= 0, \\ a_{21} x_1' + a_{22} x_2' + \cdots + a_{2r} x_r' &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{r1} x_1' + a_{r2} x_2' + \cdots + a_{rr} x_r' &= 0 \end{aligned}$$

вытекаетъ, что

$$x_1' = x_2' = \cdots = x_r' = 0,$$

ибо опредѣлитель отличенъ отъ нуля.

Такимъ образомъ, значенія $x_1, x_2, \ldots, x_n$ составляются ли-

[1]) Если умножить всѣ x-ы на $1/U_k$, то x_k будетъ равно 1.

нейно изъ рѣшеній (5). Наоборотъ, каждая линейная комбинація рѣшеній (5) опять будетъ рѣшеніемъ. *)

*) Поясним это мѣсто. Полагая $k \leq n-r$, мы среди найденныхъ $n-r$ рѣшеній будемъ имѣть рѣшеніе

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_r^{(k)}, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0,$$

при чемъ 1 занимаетъ $(r+k)$-ое мѣсто. Для этихъ значеній неизвѣстныхъ всѣ разсматриваемыя уравненія обращаюся въ тождества и потому имѣемъ тождественно:

$$a_{p1} x_1^{(k)} + a_{p2} x_2^{(k)} + \cdots + a_{pr} x_r^{(k)} + a_{p,\,r+k} = 0. \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на произвольное число λ_k и суммируя по k отъ $k=1$ до $k=n-r$, получаемъ тождественно:

$$a_{p1} \Sigma \lambda_k x_1^{(k)} + a_{p2} \Sigma \lambda_k x_2^{(k)} + \cdots + a_{pr} \Sigma \lambda_k x_r^{(k)} + a_{p,\,r+1} \lambda_1 + a_{p,\,r+2} \lambda_2 + \cdots$$
$$\cdots + a_{p,\,n} \lambda_{n-r} = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

откуда слѣдуетъ, что система чиселъ

$$\Sigma \lambda_k x_1^{(k)}, \ldots, \Sigma \lambda_k x_2^{(k)}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$$

также есть рѣшеніе нашей системы, т. е. мы получимъ рѣшеніе, приписавъ неизвѣстнымъ $x_{r+1}, \ldots, x_n$ совершенно произвольныя значенія $\lambda_1\, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$, а неизвѣстнымъ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — соотвѣтственно значенія $\Sigma \lambda_k x_1^{(k)}, \Sigma \lambda_k x_2^{(k)}, \ldots, \Sigma \lambda_k x_r^{(k)}$. Наоборотъ, если неизвѣстнымъ $x_{r+1}, \ldots, x_n$ приписаны значенія $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$, то система уравненій будетъ удовлетворяться только тогда, когда неизвѣстнымъ $x_1, \ldots, x_r$ соотвѣтственно припишемъ значенія $\Sigma \lambda_k x_1^{(k)}, \ldots, \Sigma \lambda_k x_r^{(k)}$, ибо, допустивъ, что система уравненій удовлетворяется при $x_1 = \xi_1, \ldots, x_r = \xi_r, x_{r+1} = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_{n-r}$, будемъ имѣть тождественно:

$$a_{p1} \xi_1 + a_{p2} \xi_2 + \cdots + a_{pr} \xi_r + a_{p,\,r+1} \lambda_1 + a_{p,\,r+2} \lambda_2 + \cdots + a_{p,\,n} \lambda_{n-r} = 0.$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

Вычтя изъ этого тождества предыдущее, имѣемъ:

$$a_{p1} \left[\xi_1 - \Sigma \lambda_k x_1^{(k)} \right] + a_{p2} \left[\xi_2 - \Sigma \lambda_k x_2^{(k)} \right] + \cdots + a_{pr} \left[\xi_r - \Sigma \lambda_k x_r^{(k)} \right] = 0.$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

Полагая здѣсь $p = 1, 2, \ldots, r$, мы получаемъ r равенствъ, которыя могутъ быть разсматриваемы, какъ система r однородныхъ уравненій съ r неизвѣстными разностями $\xi_1 - \Sigma \lambda_k x_1^{(k)}, \ldots, \xi_r - \Sigma \lambda_k x_r^{(k)}$. Опредѣлитель этой системы отличенъ отъ нуля по допущенію, а потому каждая изъ разностей равна нулю, т. е.

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_k x_1^{(k)}; \ldots; \xi_r = \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_k x_r^{(k)}.$$

Функціональные опредѣлители.

Положимъ, что функціи

$$u_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ u_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, u_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

имѣютъ въ точкѣ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ производныя

$$(u_r)'_{x_s}$$

$(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ или, какъ пишетъ Якоби (Jacobi),

$$\frac{\partial u_r}{\partial u_s}.$$

Опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

называется функціональнымъ опредѣлителемъ или Якобіевымъ опредѣлителемъ*) функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Его обозначаютъ символами

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

Второе обозначеніе имѣетъ свое основаніе въ многочисленныхъ аналогіяхъ, существующихъ между производной и функціональнымъ опредѣлителемъ. Вотъ одна изъ этихъ аналогій (ср. § 64):

Положимъ, что функціи

$$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

въ нѣкоторой окрестности точки $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ имѣютъ непрерывныя первыя производныя

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial u_r}$$

$(r, s = 1, 2, \ldots, n)$.

*) или просто якобіаномъ.

Черезъ посредство функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которыя мы считаемъ опредѣленными въ нѣкоторой окрестности точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ сами становятся функціями отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и въ точкѣ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_s} + \cdots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_s}.$$
$$(r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

При помощи теоремы объ умноженіи опредѣлителей отсюда вытекаетъ, что

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

или, при другомъ знакоположеніи,

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)} \frac{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

Если функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ представляютъ собой обращеніе системы функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)} = 1 : \frac{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

РЕГИСТРЪ.

(Числа указываютъ страницы книги.)

MATHESIS

школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества. Перев. съ нѣмецк. подъ ред. лаборанта *Е. С. Ельчанинова.* IV+192 стран. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. Р. 1. 20 к.

Превосходная книга, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ... учитъ серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ. *Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Litteratur.*

ШМИДЪ, Б. проф. **Философская хрестоматія** *). Перев. съ нѣмецк. *Ю. А. Говсѣева* подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII+172 стр. 8° 1907. Ц. Р. 1. —

...Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики** *). Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ прилож. рѣчи *А. Бальфура*: **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+319 стран. 8°. Съ 5 портрет., 6 таблиц. и 33 рис. Ц. Р. 2. —

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** *) (іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3 итальянск. изданія. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. 1910. *Второе изданіе.* Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній** *). 46 стран. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛАКУРЪ, П. и АППЕЛЬ, Я. Историческая физика *). Перев. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физики и Элементарн. Матем."*. Въ 2-хъ томахъ большого формата, 892 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными цвѣтными таблицами. 1908. Ц. Р. 7. 50 к.

«Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ»... *Ж. М. Н. Пр.*

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. **Образованіе міровъ** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. 1908. Ц. Р. 1. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагог. Сборн.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 чертеж. 1908. Ц. 35 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матерiи** *). Вступительная лекцiя. Перев. съ итальянскаго подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физ. и Элем. Матем.“*. 28 стр. 8°. *2-е изданiе.* 1911. Ц. 30 к.
Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненiй знаменитаго проф. Болоньскаго унив. *Ж. М. Н. Пр.*

ЛЕМАНЪ, О. проф. **Жидкiе кристаллы и теорiи жизни.** Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.
.....весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагогическiй Сборникъ.*

ГЕЙБЕРГЪ, I. проф. **Новое сочиненiе Архимеда** *). Посланiе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.
Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованiе.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники** *). IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. Р. 1.
«Mathesis» можетъ гордиться этимъ изданiемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

КОВАЛЕВСКIЙ, Г. проф. **Введенiе въ исчисленiе безконечно-малыхъ** *). Перев. съ нѣмецк. подъ редакц. и съ прим. прив.-доц. *С. О Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. Р. 1.
Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введенiе въ высшiй анализъ... *Русская Школа.*

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. **Добыванiе свѣта** *). Общедоступная лекцiя для рабочихъ, прочит. на собранiи Британск. Ассоцiацiи 1906. Перев. съ англ VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.
Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матерiалъ по вопросу добыванiя свѣта. *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А. проф. **Резонансъ и затуханiе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опыт Физ. и Элемент. Матем.“*. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

СНАЙДЕРЪ, К. проф. **Картина мiра въ свѣтѣ современнаго естествознанiя.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отдѣльными портретами. 1909. Ц. Р. 1. 50 к.
Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагог. Сборникъ.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Благородные и радiоактивные газы.** Пер. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.“*. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

БРУНИ, К. проф. **Твердые растворы** *). Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 37 стр. 16°. 1909. Ц. 25 к.

БОЛЛЪ, Р. С. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. 1909. Ц. 75 к.
.....настоящее изданiе «Mathesis» слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающiй распространенiя и серьезнаго вниманiя, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

СЛАБИ, А. проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16°. *2-е изданiе.* 1909. Ц. 15 к.

КУТЮРА, Л. Алгебра логики. Перев. съ французскаго съ прибавленiями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8°. 1909. Ц. 90 к.

ВЕБЕРЪ Г. и ВЕЛЬШТЕЙНЪ I., проф. **Энциклопедiя элементарной геометрiи.** Томъ II, книга I. **Основанiя геометрiи.** Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* XII+362 стр. 8°. Съ 144 черт. и 5 рис. 1909. Ц. Р. 3.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. **Курсъ физики** *). Перев. съ нѣмецк. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.*
Т. I. VIII+348 стр. больш. 8°. Съ 236 рис. 1910. Ц. Р. 2. 75 к.
Т. II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. 1910. Ц. Р. 3. 75 к.
Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

ГЕРНЕТЪ В. А. Объ единствѣ вещества. 46 стр. 16°. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра.** Съ прил. статьи *В. Ритца.* **„Линейные спектры и строеніе атомовъ“.** 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Теорія движенія луны.** (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. 16°. Ц. 20 к.

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Основы метеорологіи** *). XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. Р. 4. —
Честь и слава «Mathesis» за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука! *Ж. М. Н. Пр.*

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** (съ нѣкоторыми указаніями для препод.) *). Перев. съ англ. подъ ред и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8°. Съ рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.
Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ «Исторію элемент. мат.» Кэджори. *Вѣст. Воспит.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

РОУ, С. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. и чертежами. 1910. Ц. 90 к.

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Переводъ съ англійск. *І. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. 1910. Ц. Р. 1. 20 к.

ГРАФФЪ, К. Комета Галлея *). Пер. съ нѣм. VIII+71 стр. 16°. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изданіе второе исправл. и дополненное 1910. Ц. 30 к.
Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педагог. Сборникъ.*

НИМФЮРЪ, Р. Воздухоплаваніе *). Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр 8°. Съ 52 рис. 1910. Ц. 90 к.

Галлеева Комета въ 1910 году. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной—О кометахъ—О кометѣ Галлея. 32 стр. 8°. Съ 12 иллюстраціями 1910. Ц. 12 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. **Развитіе современной спектроскопіи** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* 45 стр. 16°. 1910. Ц. 25 к.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. Парадоксы природы *). Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8°. Съ 67 рис. Ц. Р. 1.20 к.

ВЕБЕРЪ и ВЕЛЬШТЕЙНЪ, проф. **Энциклопедія элементарной математики** *). Т. II, кн. 2 и 3. Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія. Перев. съ нѣмец. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+321 стр. 8°. Съ 109 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Что такое алгебра?** *) 72 стр. 16°. Ц. 40 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и Методъ.** Пер. съ франц. И. Брусиловскаго подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16°. 1910. Ц. Р. 1. 50 к.

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Динамика живого вещества.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+352 стр. 8°. Съ 64 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

АДЛЕРЪ, А. Теорія геометрическихъ построеній. Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* XXIV+325 стр. 8°. Съ 177 рис. 1910. Ц. Р. 2. 25 к.

СОДДИ, Ф. проф. **Радій и его разгадка.** Пер. съ англ. подъ ред. лаборанта Новорос. универс. *Д. Хмырова.* VII+190 стр. 8°. Съ 31 рис. 1910. Ц. Р. 1. 25 к.

СМИТЪ, А. проф. **Введеніе въ неорганическую химію.** Пер. англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* Вып. I. VI+400 стр. 8°. Съ рис. 1911. Ц. Р. 2.—

ВИНЕРЪ, О. проф. **О цвѣтной фотографіи и родственныхъ ей естественно-научныхъ вопросахъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* VI+69 стр. 8°. Съ 3 цвѣтн. табл. 1911. Ц. 60 к.

БОРЕЛЬ, Э. проф. **Элементарная математика.** Ч. I. Ариѳметика и алгебра. Въ обработкѣ проф. *П. Штѣккеля.* Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана* съ приложеніемъ его статьи «О реформѣ преподаванія математики». LXIV+434 стр. 8°. 1911. Ц. Р. 3.—

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.** Перев. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.* VIII+496 стр. 8°. 1911. Ц. Р. 3. 50 к.

МАРКОВЪ, А. акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей.** Въ 2-хъ частяхъ. Изд. 2-ое, исправлен. и дополнен. VIII+274 стр. 8°. 1911. Ц. Р. 2.—

Имѣются на складѣ:

МУЛЬТОНЪ, Ф. проф. **Эволюція солнечной системы.** Перев съ англійскаго. IV+82 стр. 16°. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.
Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

ЕФРЕМОВЪ, Д. кандид. матем. наукъ. **Новая геометрія треугольника** 334+XIII стр. 8°. 1902. Ц. Р. 2.—

Печатаются и готовятся къ печати:

КЛЕЙНЪ. Лекціи по элементарной математикѣ для учителей. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.*

ОСТВАЛЬДЪ, В. проф. **Натурфилософія.** Съ двумя дополн. статьями. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. Страсбург. Универс. *Л. Мандельштама.*

ТРЕЛЬСЪ-ЛУНДЪ. Небо и міровоззрѣніе въ круговоротѣ временъ. Пер. съ нѣмецкаго.

ЛОВЕЛЛЬ, П. Обитаемость Марса. Пер. съ англ. Со мног. рис.

ШУБЕРТЪ, Г. проф. **Математическія развлеченія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„В. Оп. Физ. и Эл. Мат.“.*

АНДУАЙЕ, проф. **Курсъ астрономіи.** Переводъ съ французскаго.

ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. Два новыхъ міра (Инфра-міръ. Супра-міръ). Перев. съ англійскаго.

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* Выпускъ второй.

МАМЛОКЪ, Л. проф. **Стереохимія.** Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. *П. Меликова.*