22.1г
Т78
(09с)
Т78
П62

ТРУДЫ

1-го Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей МАТЕМАТИКИ

27-го Декабря 1911 г. — 3-го Января 1912 г.

ТОМЪ I.

ОБЩІЯ СОБРАНІЯ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Тип. «СѢВЕРЪ», Невскій пр., 140—2.
1913.

0000037168

Поверніть книгу не пізніше
зазначеного терміну

МПП. Зам. 43 - 4000 тис.

22.А5
5(оде) 68463
84
Т78
Труды I-го Всероссийского съезда преподавателей математ.
Т. 1. 1913. 3р.
~~28/IV 83 20/ Солом~~

НАУЧНЫЙ
ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ

М1

84 92

51(09c)
Т 78

ТРУДЫ

1-го Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей МАТЕМАТИКИ.

27-го Декабря 1911 г. — 3-го Января 1912 г.

ТОМЪ I.

ОБЩІЯ СОБРАНІЯ.

0011

Белгородск. БИБЛИОТЕКА Пед институт
Инв. № 68463
Береги книгу и возвращай в срок

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Тип. «СѢВЕРЪ», Невскій пр., 140—2.
1913.

> Предоставьте мнѣ дѣло воспитанія, и я измѣню лицо Европы менѣе, чѣмъ въ одинъ вѣкъ.
>
> *Лейбницъ.*

> Я считаю, что всѣ науки безъ исключенія экспериментальны, по крайней мѣрѣ, до извѣстной степени.
>
> *Лезанъ.*

Въ 1908 г. профессоръ Нью-Іоркскаго университета *Смитъ* внесъ въ секцію преподаванія 4-го международнаго конгресса математиковъ, собравшагося въ Римѣ, предложеніе объ избраніи особой международной комиссіи, которой было-бы поручено обслѣдованіе вопроса о преподаваніи математики въ различныхъ странахъ. Конгрессъ отнесся съ большимъ сочувствіемъ къ этой мысли и слѣдующимъ образомъ формулировалъ свое постановленіе по этому поводу:

„Руководясь убѣжденіемъ въ важности сравнительнаго изученія методовъ и учебныхъ плановъ преподаванія математики въ среднихъ школахъ различныхъ странъ, Конгрессъ поручаетъ г.г. Клейну (Klein), Гринхиллу (Greenhill) и Феру (Fehr) образовать международную комиссію для изученія этого вопроса и представить отчетъ ближайшему Конгрессу“.

Желательность всесторонняго изслѣдованія методовъ преподаванія математики чувствовалась въ З. Европѣ уже давно и въ значительной степени проистекала изъ повсемѣстнаго недовольства постановкой преподаванія этого предмета.

Почти 50 лѣтъ тому назадъ Керъ (Kehr) свидѣтельствуетъ о жалобахъ учителей на плохіе результаты обученія математикѣ въ нѣмецкой школѣ, а съ легкой руки Ридлера (Riedler), давшаго въ 1895 году рѣзкую критику этого преподаванія, въ Германіи началось, такъ называемое, движеніе инженеровъ въ пользу реформы преподаванія.

Во Франціи въ 1898 году была образована парламентская комиссія изъ 33 депутатовъ подъ предсѣдательствомъ бывшаго перваго министра Рибо для изслѣдованія нуждъ средняго образованія путемъ собиранія разнаго рода фактическихъ цифровыхъ и иныхъ данныхъ, а также опроса лицъ, мнѣнія которыхъ могли представлять интересъ и значеніе. Данныя, собранныя Комиссіей, работавшей съ Января до Апрѣля 1899 г., напечатаны въ 6 томахъ „Enquête sur l'Enseignement Secondaire“, представляющихъ въ высшей степени драгоцѣнный источникъ для изученія положенія средней школы во Франціи въ концѣ XIX вѣка. Въ анкетѣ, среди другихъ жалобъ на французскую среднюю школу вообще, встрѣчается не мало указаній и на неудовлетворительность лицейскаго преподаванія математики. Математическія познанія бывшихъ лицеистовъ, по мнѣнію весьма компетентныхъ лицъ, принявшихъ участіе въ анкетѣ, представляютъ жалкую картину. Вотъ, что говоритъ объ этомъ, напримѣръ, *Бюкэ*, директоръ такъ называемой Центральной Школы, куда молодые люди, окончившіе лицеи, поступаютъ какъ и въ другія высшія школы Франціи—Политехническую и Нормальную—по предварительному испытанію.

> „Прискорбно видѣть поступающихъ въ высшую школу двадцати-лѣтнихъ молодыхъ людей, продѣлавшихъ на экзаменѣ рядъ выкладокъ и не способныхъ дать себѣ отчетъ, чего они искали, чего ждали отъ выведенныхъ въ нѣсколько рядовъ формулъ“;

и въ другомъ мѣстѣ:

> „съ большой тревогой мы должны заявить, что являющіеся къ намъ на экзаменъ ученики лицеевъ, рекомендованные учителями, какъ первые въ классѣ и какъ отлично знающіе алгебраическій анализъ, исписавъ безъ остановки доску формулами и придя къ концу, рѣшительно не знаютъ, что собственно они хотѣли сдѣлать и найти“...
>
> „Воспитанники“

говоритъ *Пэйо* (J. Payot)

> „отдѣлены отъ жизни и дѣйствительности стѣною словъ и совершенно не привыкли заглядывать внутрь себя... Вся ихъ умственная энергія вертится на словахъ“.

Такова картина, даваемая парламентской анкетой. А между тѣмъ обученіе матиматикѣ весьма распространено у латинскихъ народовъ. Эта отрасль знаній пользуется у нихъ наибольшимъ почетомъ и служитъ средствомъ для отбора кандидатовъ, принимаемыхъ въ высшія школы. Программы пріемныхъ испытаній Политехнической и Центральной школъ почти исключительно заполнены вопросами по математикѣ.

Подъ вліяніемъ общаго недовольства существующимъ положеніемъ вещей, правительственныя учрежденія разныхъ странъ, математическія организаціи и отдѣльныя лица въ началѣ XX вѣка предпринимаютъ рядъ работъ, направленныхъ къ радикальной реформѣ преподаванія математики.

Въ Германіи въ 1903 г. на Кассельскомъ съѣздѣ естествоиспытателей и врачей было рѣшено заняться разсмотрѣніемъ преподаванія не только наукъ естественныхъ, но и математическихъ и „всю совокупность вопросовъ математическо-естественно-научнаго преподаванія сдѣлать предметомъ подробнаго обсужденія при ближайшей возможности“. Въ слѣдующемъ же году на съѣздѣ въ Бреславлѣ была выбрана Комиссія, которая въ 1905 г. представила Меранскому Съѣзду проектъ реформы преподаванія математики.

Во Франціи въ 1902 г., т. е. всего только черезъ два года послѣ окончанія работъ анкетной комиссіи по изслѣдованію состоянія и нуждъ средняго образованія, было уже одобрено палатой и обнародовано новое положеніе о лицеяхъ, существеннымъ образомъ коснувшееся и преподаванія математики. Такимъ образомъ во Франціи вопросъ о реформѣ преподаванія математики тѣсно сплелся съ реформой средней школы вообще.

Даже въ такой консервативной въ педагогическомъ отношеніи странѣ, какъ Англія, стали серьезно задумываться надъ реформой преподаванія математики. Реформаторская дѣятельность „Британской ассоціаціи для усовершенствованія преподаванія геометріи“ служитъ нагляднымъ этому доказательствомъ.

Въ Америкѣ проф. Смитъ въ 1905 г. въ своемъ отвѣтѣ на международную анкету, предпринятую журналомъ „L' Enseignement mathématique“ по вопросу „о реформѣ, подлежащей осуществленію“, высказывалъ уже, развитую имъ впослѣдствіи на Римскомъ Конгрессѣ, мысль объ образованіи особой международной комиссіи по этому вопросу.

Международное движеніе, имѣющее цѣлью обслѣдованіе методовъ преподаванія математики, нашло откликъ и у насъ въ Россіи. Потребность въ общеніи преподавателей математики между собой для совмѣстнаго обсужденія волнующихъ ихъ вопросовъ преподаванія не разъ высказывалась въ послѣдніе годы. На XII-мъ Съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ 1909 году, на Первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ по экспериментальной педагогикѣ въ 1910 году, на Рижской педагогической выставкѣ 1911 года раздавались находившіе сочувствіе голоса о созывѣ Съѣзда преподавателей математики.

Мысль о созывѣ такого Съѣзда въ Петербургѣ на Рождественскихъ каникулахъ 1911-12 года принадлежитъ отдѣлу математики Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній.*) Еще въ 1907 году отдѣлъ предпринялъ рядъ работъ, имѣвшихъ цѣлью обсужденіе тѣхъ новыхъ идей, содержаніе которыхъ связано съ именами *Клейна*, *Лезана*, *Лоджа*, *Перри* и другихъ сторонниковъ реформы курса школьной математики, а въ 1909 году, желая принять посильное участіе въ подготовкѣ Россіи къ V-му Международному Конгрессу математиковъ, назначенному въ Кембриджѣ въ 1912 году, рѣшилъ заняться разработкой докладовъ по вопросамъ, подлежащимъ внесенію въ конгрессъ. Схема этихъ вопросовъ и общія указанія, относящіяся до ихъ содержанія, приведены въ „*Предварительномъ докладѣ*“ Международной Комиссіи по преподаванію математики, обнародованномъ г. Феромъ, главнымъ секретаремъ Комиссіи, въ журналѣ „L' Enseignement mathématique“—офиціальномъ ея органѣ**). Въ „предварительномъ докладѣ“ указывается, что

---

*) Краткія свѣдѣнія объ этой организаціи приведены на стр. 304—315 „Трудовъ“, томъ 1-й.

**) См. № отъ 15 ноября.

Въ 1909 г. русская делегація Международной комиссіи—Г.г. Н. Я. Сонинъ, Б. М. Кояловичъ и К. В. Фохтъ—издали „предварительный докладъ“ въ переводѣ на русскій языкъ. Вслѣдъ за этимъ онъ появился въ „Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія“ и другихъ педагогическихъ и научныхъ изданіяхъ.

цѣль работъ Комиссіи состоитъ съ одной стороны „въ разслѣдованіи современныхъ направленій въ преподаваніи математики въ разныхъ странахъ“, а съ другой — „въ выясненіи тѣхъ общихъ принциповъ, которыми слѣдуетъ руководиться учителю при преподаваніи“. Въ эту вторую часть вошли вопросы: о современныхъ тенденціяхъ, относящихся къ цѣлямъ математическаго образованія и къ выбору предметовъ преподаванія; о современныхъ идеяхъ, касающихся методовъ преподаванія на различныхъ ступеняхъ и въ школахъ различныхъ типовъ; о связи между различными вѣтвями математики и о связи математики съ другими отраслями знанія и т. п. Выработка программъ преподаванія и установленіе однообразія въ деталяхъ въ задачу комиссіи не входили.

Рядъ докладовъ именно вышеуказаннаго *общаго* характера, сдѣланныхъ въ Отдѣлѣ въ 1909-10 и 1910-11 годахъ г.г. В. Р. Мрочекомъ, Т. А. Эренфестъ, С. И. Шохоръ-Троцкимъ, Д. М. Левитусомъ, Б. Б. Піотровскимъ, Ф. В. Филипповичемъ, Н. А. Томилинымъ и другими преподавателями математики, возбудилъ вниманіе Петербургскихъ педагоговъ. Засѣданія отдѣла стали особенно многолюдны и оживленны; высказывались весьма разнообразныя точки зрѣнія на затрагиваемые вопросы, и вмѣстѣ съ тѣмъ созрѣвала и крѣпла мысль о еще болѣе широкомъ общеніи для обмѣна мнѣніями о Всероссійскомъ Съѣздѣ.

Работы по созыву Съѣзда шли въ слѣдующей постепенности.

Первое совѣщаніе кружка лицъ, взявшихъ на себя эту задачу, состоялось 4-го мая 1911 года. Въ кружокъ этотъ входили: Членъ Государственнаго Совѣта проф. А. В. Васильевъ, директоръ Педагогическаго Музея в.-уч. зав. З. А. Макшеевъ, проф. К. А. Поссе, проф. С. Е. Савичъ, помощникъ директора Пед. Музея Д. Э. Теннеръ, преподаватели математики — В. Р. Мрочекъ, Ф. В. Филипповичъ и секретарь отдѣла математики Педагогическаго Музея преподаватель Д. М. Левитусъ.

На этомъ совѣщаніи было выработано „Положеніе о

Съѣздѣ“ *), представленное 7-го мая въ Министерство Внутреннихъ Дѣлъ вмѣстѣ съ подписаннымъ Г.г. Васильевымъ, Макшеевымъ, Поссе и Савичемъ ходатайствомъ о разрѣшеніи созвать Съѣздъ.

На второмъ совѣщаніи, состоявшемся 10-го мая, въ которомъ, кромѣ вышеперечисленныхъ лицъ, принималъ участіе проф. Харьковскаго Университета Д. М. Синцовъ, было постановлено, не ожидая формальнаго разрѣшенія на созывъ Съѣзда, немедленно-же, передъ каникулами, предпринять нѣкоторыя мѣры, какъ для распространенія свѣдѣній о Съѣздѣ, такъ и для его подготовки. Съ этой цѣлью было рѣшено выработать особое воззваніе къ Обществу. Текстъ воззванія, окончательно установленный въ совѣщаніи 15-го мая, содержалъ, между прочимъ, слѣдующія строки.

„Успѣшная организація Съѣзда можетъ быть достигнута только путемъ совмѣстнаго труда всѣхъ лицъ, сочувствующихъ идеѣ Съѣзда.

Поэтому инициаторы Съѣзда обращаются къ Вамъ съ покорнѣйшей просьбой—принять участіе въ подготовительныхъ къ Съѣзду работахъ въ районѣ Вашей дѣятельности и вліянія. На первыхъ порахъ Ваше содѣйствіе можетъ выразиться въ распространеніи свѣдѣній о Съѣздѣ среди лицъ и учрежденій, на сочувствіе которыхъ идеѣ Съѣзда можно разсчитывать.

Въ началѣ 1911—12 учебнаго года предположено организаціонное совѣщаніе Комитета Съѣзда для окончательнаго установленія срока представленія докладовъ и порядка ихъ разсмотрѣнія. Присутствіе въ этомъ совѣщаніи делегатовъ отъ педагогическихъ Обществъ и математическихъ Кружковъ въ высшей степени желательно. Въ случаѣ же невозможности личнаго участія делегатовъ въ этомъ совѣщаніи ожидается присылка въ Комитетъ письменныхъ заявленій, касающихся организаціи занятій Съѣзда. Въ этомъ же совѣщаніи будетъ возбужденъ вопросъ о пополненіи состава Комитета Съѣзда новыми сочленами.

Если результатомъ Съѣзда явится единеніе русскихъ преподавателей математики на почвѣ выясненія ихъ педагогическихъ и методическихъ взглядовъ, на почвѣ указанія общихъ неотложныхъ задачъ ближайшаго будущаго для школьной математики, то инициаторы Съѣзда будутъ считать свою задачу выполненной“.

Воззваніе это было напечатано и вмѣстѣ съ проектомъ Положенія о Съѣздѣ разослано въ числѣ 2000 экземпля-

---

*) См. стр. XV.

ровъ столичнымъ и провинціальнымъ педагогическимъ и научнымъ Обществамъ и Кружкамъ, нѣкоторымъ отдѣльнымъ лицамъ, а также въ редакціи журналовъ и газетъ съ просьбой помѣстить на страницахъ ихъ органовъ полностью, или, хотя-бы, въ извлеченіи.

Разрѣшеніе на созывъ Съѣзда послѣдовало лѣтомъ, а въ августѣ было разослано приглашеніе на назначенное въ Педагогическомъ Музеѣ 2-го сентября первое засѣданіе Организаціоннаго Комитета, съ просьбой, въ случаѣ невозможности прибыть, сообщить письменное предположеніе относительно предстоящей дѣятельности Комитета.

2-го сентября Комитетъ сорганизовался въ слѣдующемъ составѣ:

Предсѣдатель — директоръ Педагогическаго Музея, ген.-л. З. А. Макшеевъ;

Товарищи предсѣдателя — ген.-л. М. Г. Попруженко, проф. К. А. Поссе, проф. С. Е. Савичъ;

Секретари — Д. М. Левитусъ, В. Р. Мрочекъ, Ф. В. Филипповичъ;

Казначей—Д. Э. Теннеръ.

Члены: проф. А. В. Васильевъ, И. Н. Кавунъ, пр.-д. В. Ѳ. Каганъ (Одесса), А. Р. Кулишеръ, А. К. Линдебергъ, Э. Ю. Лундбергъ, проф. Б. К. Млодзѣевскій (Москва), С. Г. Петровичъ, Б. Б. Піотровскій, проф. Д. М. Синцовъ (Харьковъ), Н. А. Томилинъ, В. І. Шиффъ, С. И. Шохоръ-Троцкій, Т. А. Афанасьева-Эренфестъ, П. С. Эренфестъ.

Изъ состава Организаціоннаго Комитета было выдѣлено „Бюро“; въ него вошли предсѣдатель, секретари и казначей Организаціоннаго Комитета. На „Бюро“ возложено было веденіе переписки, выдача справокъ и, вообще, вся текущая дѣятельность по созыву Съѣзда.

Для завѣдыванія выставкой учебныхъ пособій и книгъ по математикѣ избрана *Выставочная Комиссія* слѣдующаго состава: Д. Э. Теннеръ (предсѣдатель), С. А. Богомоловъ, В. И. Гартьеръ, М. А. Знаменскій, И. Н. Кавунъ, А. Р. Кулишеръ, В. Р. Мрочекъ, Н. А. Томилинъ, Ф. В. Филипповичъ, М. Л. Франкъ, П. С. Эренфестъ.

Для подыскиванія помѣщеній членамъ Съѣзда на льготныхъ условіяхъ, исходатайствованія льготъ для проѣзда и пр. образована *Хозяйственная Комиссія*; въ нее вошли: Д. Э. Теннеръ (предсѣдатель), К. Д. Дмитріевъ, Я. В. Іодынскій и Т. А. Эренфестъ.

Кромѣ этихъ работъ организаціоннаго характера, въ засѣданіи 2-го сентября былъ заслушанъ перечень поступившихъ уже докладовъ и постановлено, чтобы всѣ доклады, или ихъ конспекты, разсматривались въ засѣданіяхъ Комитета, который и рѣшаетъ вопросъ о ихъ допущеніи на Съѣздъ; крайнимъ срокомъ для представленія докладовъ было назначено 15 ноября.

Для планомѣрности въ подготовкѣ докладовъ рѣшено было обратиться къ нижепоименованнымъ лицамъ съ просьбой взять на себя разработку и представленіе докладовъ *общаго характера* по программѣ Съѣзда (§ 4-й Положенія):

Къ С. И. Шохоръ-Троцкому—по п. I: „Психологическія основы обученія математикѣ“.

К. А. Поссе и *Д. М. Синцову*—по п. III, а: „Согласованіе программъ математики средней школы съ программами высшихъ школъ“.

М. Г. Попруженко — по п. V, а: „Учебная литература по математикѣ“.

В. В. Бобынину—по п. VI, а: „Историческіе элементы въ курсѣ математики средней школы“.

А. В. Васильеву—по п. VI, б: „Философскіе элементы въ курсѣ математики средней школы“.

В. Ѳ. Кагану—по п. VIII: „Подготовка учителей математики“.

С. И. Шохоръ-Троцкому—по п. VIII, въ части, касающейся военно-учебныхъ заведеній.

По пункту IV: „Вопросы методики школьной математики“, въ виду обширности и разнообразія затрагиваемыхъ имъ вопросовъ, рѣшено образовать особую комиссію.

По пункту V, б: „Учебныя пособія по математикѣ (не книги)“ — вся работа поручена Выставочной Комиссіи.

Всѣ эти постановленія были напечатаны и разосланы въ значительномъ числѣ экземпляровъ.

Дальнѣйшія засѣданія Организаціоннаго Комитета посвящались, главнымъ образомъ, разсмотрѣнію поступавшихъ докладовъ. Только два изъ нихъ были отклонены; всѣ-же остальные допущены къ прочтенію на Съѣздѣ.

Въ дѣятельности Комитета и его органовъ можно отмѣтить еще слѣдующія подробности.

Редакція журнала „Обновленіе Школы“ обратилась въ Комитетъ съ предложеніемъ *безвозмездно* издавать бюллетени Съѣзда. Комитетъ принялъ это предложеніе, поручивъ „Бюро“ редактированіе бюллетеней. Всѣхъ бюллетеней съ 20 октября 1911 г. по 22 января 1912 г. было выпущено восемь номеровъ.

Въ бюллетеняхъ помѣщались свѣдѣнія о дѣятельности Организаціоннаго Комитета и о ходѣ занятій во время Съѣзда. Къ сожалѣнію, раздача бюллетеней, выходившихъ во время Съѣзда (№№ 4—7), не сразу наладилась, вслѣдствіе чего не всѣ члены Съѣзда могли своевременно получать ихъ. Но, все-же, изданіе бюллетеней, не вызвавъ денежныхъ расходовъ, прошло не безъ пользы въ отношеніи освѣдомленія о Съѣздѣ.

Ходатайства Организаціоннаго Комитета передъ начальниками учебныхъ вѣдомствъ о содѣйствіи Съѣзду имѣли благопріятный исходъ. Министръ Народнаго Просвѣщенія, Министръ Промышленности и Торговли и Начальникъ Главнаго Управленія военно-учебныхъ заведеній оказали Съѣзду и матеріальную, и моральную поддержку. Первая выразилась въ денежныхъ субсидіяхъ на изданіе Трудовъ Съѣзда (Министерство Народнаго Просвѣщенія—1000 р., Министерство Промышленности и Торговли—1000 р. и Главное Управленіе в.-уч. заведеній—500 р.), а моральная—въ освѣдомленіи учащаго персонала заведеній о задачахъ и цѣляхъ Съѣзда.

Успѣхомъ увѣнчались и сношенія Хозяйственной Комиссіи съ учебными заведеніями о помѣщеніяхъ для членовъ Съѣзда. Гимназія Императора Александра I-го, Гимназіи Мая и Лентовской и Высшіе Женскіе курсы дали помѣщеніе на 130 человѣкъ отчасти безплатно, а отчасти за ничтожную плату 2—3 р. для вознагражденія прислуги и возмѣщенія расходовъ по освѣщенію; 1-й Кадетскій Корпусъ безплатно помѣстилъ у себя преподавателей военно-учебныхъ заведеній, пріѣхавшихъ на Съѣздъ; 2-й кадетскій Корпусъ и 3-я гимназія дали 215 кроватей.

Для встрѣчи прибывающихъ въ Петербургъ членовъ Съѣзда 26 и 27 декабря на вокзалахъ было установлено дежурство. Студенты Спб. Университета и Технологическаго Института (съ зеленой повязкой на рукавѣ) направляли съ вокзала на квартиры тѣхъ членовъ Съѣзда, которые заблаговременно заявили Комитету о своемъ желаніи воспользоваться помѣщеніями въ учебныхъ заведеніяхъ, и вообще давали указанія относительно квартиръ.

Что же касается до ходатайства о льготномъ проѣздѣ по желѣзнымъ дорогамъ, то на него 7-го октября председателемъ Организаціоннаго Комитета былъ полученъ слѣдующій отвѣтъ.

> „Въ отвѣтъ на ходатайство отъ 19 сентября с. г., Департаментъ Желѣзнодорожныхъ Дѣлъ имѣетъ честь увѣдомить Ваше Превосходительство, что члены различныхъ съѣздовъ и конгрессовъ никакими льготами для проѣзда по желѣзнымъ дорогамъ не пользуются. Поэтому разрѣшеніе льготнаго проѣзда г.г. членовъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики вышло бы изъ предѣловъ, допускаемыхъ нынѣ Министерствомъ Финансовъ на практикѣ тарифныхъ льготъ и, являясь прецедентомъ, послужило бы основаніемъ для возбужденія ходатайствъ о предоставленіи аналогичныхъ льготъ, а удовлетвореніе всѣхъ таковыхъ ходатайствъ повело бы къ установленію новой категоріи тарифныхъ льготъ. Между тѣмъ, при обремененіи въ настоящее время желѣзнодорожной сѣти множествомъ всякаго рода льготныхъ перевозокъ, установленіе новыхъ разрядовъ тарифныхъ льготъ не представляется возможнымъ.
>
> Въ виду изложеннаго и принимая во вниманіе, что нынѣ производится общій пересмотръ дѣйствующихъ льготныхъ тарифовъ, съ цѣлью возможнаго ихъ сокращенія, Департаментъ затрудняется расширять объемъ существующихъ льготныхъ перевозокъ путемъ допущенія льготнаго проѣзда г.г. членовъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики“.

Въ работахъ *Выставочной Комиссіи* принимали участіе слушательницы Женскаго Педагогическаго Института, Высшихъ женскихъ Курсовъ и слушатели курсовъ для подготовленія кандидатовъ на учительскія должности въ кадетскихъ корпусахъ. Комиссія разбилась на слѣдующія секціи.

1) Ариѳметика — наглядныя и лабораторныя пособія (И. Н. Кавунъ, В. И. Гартьеръ и М. А. Знаменскій).

2) Геометрія — наглядныя и лабораторныя пособія (А. Р. Кулишеръ и Д. Э. Теннеръ).

3) Графики — (М. Л. Франкъ и Н. А. Томилинъ).

4) „Лабораторный столъ“ — (В. Р. Мрочекъ).

5) Каталогъ новѣйшей математической учебной литературы — (Ф. В. Филипповичъ).

Свѣдѣнія о выставкѣ будутъ приведены во 2-мъ томѣ „Трудовъ Съѣзда“.

Съѣздъ засѣдалъ въ „Соляномъ Городкѣ“, въ помѣщеніяхъ Педагогическаго Музея В.-Уч. Зав. и *Императорскаго* Русскаго Техническаго Общества, предоставленныхъ ему безвозмездно.

Число членовъ Съѣзда достигло 1217 человѣкъ.

Организаціонный Комитетъ во время Съѣзда былъ пополненъ новыми членами, въ него вошли почетные предсѣдатели и почетные секретари Съѣзда. Кромѣ того, на засѣданія, посвященныя обсужденію резолюцій, подлежавшихъ утвержденію Съѣзда, были приглашены и тѣ члены Съѣзда, которые въ той или иной формѣ, напр. подачей отдѣльныхъ мнѣній, проявили желаніе принять активное участіе въ этой работѣ.

3-го и 4-го января состоялся рядъ экскурсій. Члены Съѣзда посѣтили: заводъ аэроплановъ „Гамаюнъ“, Пулковскую обсерваторію, Городскую женскую школу имени П. А. Потѣхина, Зоологическій Музей Академіи Наукъ и Музей Императора Александра III-го. Экскурсіей въ Зоологическій Музей руководилъ Н. Я. Кузнецовъ, а въ Музей Императора Александра III-го П. А. Перелецкій.

Для изданія „Трудовъ Съѣзда“ Организаціонный Комитетъ выдѣлилъ изъ своей среды Редакціонную Комиссію. Въ нее вошли: предсѣдатель Организаціоннаго Комитета (онъ же и предсѣдатель комиссіи), секретари общихъ собраній, предсѣдатели и секретари секцій и казначей.

Изданіе „Трудовъ“ сильно осложнилось, какъ собираніемъ матеріала, такъ и его большимъ объемомъ. Выпускаемый нынѣ I-й томъ, заключающій въ себѣ все то, что происходило въ общихъ собраніяхъ, составленъ секретарями В. Р. Мрочекомъ и Ф. В. Филипповичемъ подъ общей редакціей З. А. Макшеева.

Для обревизованія денежной отчетности составлена Коммиссія изъ слѣдующихъ лицъ: проф. П. А. Некрасовъ (предсѣдатель), В. І. Шиффъ и С. А. Богомоловъ.

Денежный отчетъ будетъ приложенъ ко 2-му тому.

З. Макшеевъ.

Декабря 1912 г.

ПОЛОЖЕНІЕ

о 1-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподователей математики.

§ 1. Первый Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики созывается Организаціоннымъ Комитетомъ.

§ 2. Организаціонный Комитетъ, подъ предсѣдательствомъ имъ выбраннаго лица, избираетъ товарищей предсѣдателя, секретарей и казначея, а также особое *Бюро Съѣзда*. При этомъ допускается кооптація новыхъ лицъ.

§ 3. Занятія Съѣзда продолжаются 8 дней,—съ 27 Декабря 1911 года по 3 Января 1912 года.

§ 4. Съѣздъ имѣетъ цѣлью обсужденіе слѣдующихъ вопросовъ:

1) психологическія основы обученія математикѣ (активность, наглядность, роль интуиціи и логики, и т. п.);
2) содержаніе курса школьной математики съ точекъ зрѣнія:
    а) современныхъ научныхъ тенденцій,
    б) современныхъ запросовъ жизни,
    в) современныхъ общепедагогическихъ воззрѣній;
3) согласованіе программъ математики средней школы съ программами низшихъ и высшихъ школъ;
4) вопросы методики школьной математики;
5) учебники и учебныя пособія;
6) историческіе и философскіе элементы въ курсѣ математики средней школы;
7) рисованіе, лѣпка и ручной трудъ, какъ вспомогательныя средства при обученіи математикѣ;
8) подготовка учителей математики.

§ 5. При Съѣздѣ организуется выставка наглядныхъ пособій, діаграммъ и литературы, соотвѣтствующихъ программѣ Съѣзда. Для завѣдыванія выставкой Организаціонный Комитетъ избираетъ особыхъ лицъ.

§ 6. Подготовительныя къ Съѣзду работы ведутся Бюро, избирающемъ изъ своей среды предсѣдателя и секретарей.

§ 7. Въ случаѣ необходимости Организаціонный Комитетъ устраиваетъ секціи Съѣзда по отдѣльнымъ вопросамъ программы и избираетъ изъ своей среды предсѣдателя каждой секціи.

§ 8. Предсѣдателю секціи предоставляется право организовать бюро секціи.

§ 9. Членами Съѣзда могутъ быть: профессора и преподаватели математики и физики, представители ученыхъ обществъ и учебныхъ заведеній, а также лица, заявившія себя трудами въ области математики или педагогики. Всѣ прочія лица, интересующіяся программой Съѣзда, могутъ принимать участіе во всѣхъ работахъ Съѣзда, но безъ права рѣшающаго голоса.

§ 10. Лица, желающія участвовать въ Съѣздѣ въ качествѣ членовъ или гостей, заявляютъ объ этомъ Организаціонному Комитету и вносятъ одновременно денежный взносъ въ размѣрѣ трехъ рублей.

§ 11. Доклады по программѣ Съѣзда представляются въ Организаціонный Комитетъ по возможности не позже 1 Октября 1911 года, по адресу: Спб., Фонтанка 10, въ Канцелярію Педагогическаго Музея В.-Уч. Зав.

§ 12. По открытіи Съѣзда новые доклады могутъ быть допущены не иначе, какъ съ разрѣшенія Предсѣдателя Съѣзда.

§ 13. Доклады на Съѣздѣ могутъ продолжаться не болѣе 1 часа; во время же обсужденія рѣчь каждаго лица не должна продолжаться болѣе 10 минутъ.

§ 14. Организаціонный Комитетъ, руководствуясь постановленіями какъ общихъ собраній Съѣзда, такъ и секціонныхъ засѣданій, вноситъ въ послѣднее общее собраніе рядъ резолюцій по вопросамъ, обсуждавшимся на Съѣздѣ, для голосованія.

§ 15. Резолюціи принимаются или отвергаются простымъ большинствомъ голосовъ.

ОТКРЫТІЕ СЪѢЗДА.

27 декабря.

Въ 12 час. дня въ большой аудиторіи Соляного Городка состоялось открытіе Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики.

Открывая Съѣздъ, предсѣдатель Организаціоннаго Комитета, *З. А. Макшеевъ* произнесъ слѣдующую рѣчь:

«Милостивые Государи и Милостивыя Государыни! — Удостоенный чести предсѣдательствовать въ Организаціонномъ Комитетѣ по устройству Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики, привѣтствую отъ лица Комитета настоящее Собраніе. Начинанія Организаціоннаго Комитета въ дѣлѣ созыва Съѣзда нашли широкій откликъ въ педагогическихъ кругахъ нашего обширнаго отечества и далеко превзошли по своимъ размѣрамъ скромныя ожиданія иниціаторовъ».

«Очевидно, что среди преподавателей математики глубоко, а, можетъ быть, и давно уже таилась потребность въ общеніи для обмѣна мнѣній; чувствовалась надобность въ коллективномъ умѣ, въ коллективномъ опытѣ для разрѣшенія многихъ волнующихъ учительскую среду вопросовъ преподаванія».

«Мы счастливы, что угадали эту потребность и пошли ей навстрѣчу. Нельзя не признать, что потребность эта явилась до извѣстной степени слѣдствіемъ нѣкоторой неудовлетворенности, нѣкотораго недовольства преподавателей своей работой. Но, Милостивые Государи, недовольство есть счастье мудреца. Человѣкъ сильный духомъ, а такимъ долженъ быть учитель, не боится признанія своихъ заблужденій или ошибокъ. Напротивъ, именно въ этомъ признаніи черпается энергія и новыя силы для дальнѣйшей работы и борьбы съ трудностями, неизбѣжными во всякомъ серьезномъ дѣлѣ. Съ другой стороны надо помнить, что преподаватели въ дѣлѣ усовершенствованія своей работы заключены въ довольно тѣсныя рамки, изъ которыхъ они не могутъ выйти, пока новая педагогическая мысль не получитъ не только общаго, но и оффиціальнаго признанія. Будемъ надѣяться, что и въ этомъ отношеніи настоящій Съѣздъ не останется безрезультатнымъ. Въ этой надеждѣ меня укрѣпляетъ то сочувственное отношеніе, которое Съѣздъ встрѣтилъ въ высшихъ представителяхъ учебныхъ вѣдомствъ—Министрѣ Народнаго Просвѣщенія, Министрѣ Промышленности и Торговли и Начальникѣ Управленія Военно-учебныхъ завѣдѣній, своимъ авторитетомъ поддержавшихъ первые шаги Организаціоннаго Комитета. Съ пожеланіемъ вамъ успѣха въ предстоящихъ работахъ объявляю Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики открытымъ».

Вслѣдъ затѣмъ предсѣдателемъ Организаціоннаго Комитета *З. А. Макшеевымъ* были прочитаны привѣтственныя телеграммы Съѣзду:

«Привѣтствую Ваше Превосходительство съ открытіемъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики и прошу передать всѣмъ членамъ его сердечное пожеланіе успѣшныхъ занятій на пользу науки и школы.

Министръ Народнаго Просвѣщенія *Кассо*».

«Прошу Васъ принять и передать участникамъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики мои привѣтствія и пожеланія усиленной работы на пользу отечественнаго просвѣщенія.

Министръ Торговли и Промышленности *Тимашевъ*».

Затѣмъ были произнесены привѣтствія слѣдующими делегатами:

Полк. А. В. Полторацкій. «Привѣтствую Съѣздъ отъ Имени Августѣйшаго Генералъ-Инспектора В-Уч. Заведеній, *Великаго Князя Константина Константиновича*».

«ЕГО ИМПЕРАТОРСКОЕ ВЫСОЧЕСТВО серьезно боленъ и не покидаетъ постели. Беру на себя смѣлость привѣтствовать отъ Его Имени Съѣздъ, зная Его сочувствіе этому дѣлу».

В. Б. Струве. «Я имѣю честь, Милостивые Государи и Государыни, привѣтствовать Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики отъ имени Конференціи Константиновскаго Межевого Института въ Москвѣ. Московскій Межевой Институтъ есть одна изъ старѣйшихъ математическихъ школъ въ Россіи: онъ основанъ въ 1779 г. и, слѣдовательно, существуетъ уже больше ста лѣтъ.

Въ Институтѣ имѣются собственные общеобразовательные классы, изъ которыхъ воспитанники поступаютъ на старшіе-землемѣрные и инженерные курсы. Съ конца прошлаго столѣтія на эти высшіе курсы былъ открытъ доступъ также лицамъ, окончившимъ курсъ общеобразовательныхъ средне-учебныхъ заведеній.

Контингентъ слушателей высшихъ курсовъ состоитъ теперь изъ учениковъ-абитуріентовъ среднихъ школъ: реальныхъ училищъ, гимназій, кадетскихъ корпусовъ и коммерческихъ училищъ. Поэтому Межевой Институтъ глубоко заинтересованъ, какъ и прочія высшія школы Россіи, въ подготовкѣ абитуріентовъ среднихъ школъ. Привѣтствую Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики отъ имени Конференціи Константиновскаго Межевого Института и выражаю твердую увѣренность въ томъ, что труды Съѣзда явятся могучимъ толчкомъ въ развитіи и усовершенствованіи преподаванія математики».

С. И. Шохоръ-Троцкій. «Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! Отъ имени Совѣта профессоровъ Психо-Неврологическаго Института имѣю честь привѣтствовать васъ и пожелать вамъ успѣшной работы на пользу школъ, какъ среднихъ, такъ и высшихъ, на пользу культуры и математическаго образованія въ Россіи. Желаю успѣха».

Г. П. Кузнецовъ. «Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! Имѣю честь привѣтствовать васъ отъ имени Новочеркасскаго Математическаго Кружка. Новочеркасскій Математическій Кружокъ есть лишь одинъ изъ математическихъ кружковъ въ Россіи, а въ настоящее время мы имѣемъ въ лицѣ собравшихся не отдѣльный кружокъ, а Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики. Въ виду этого Новочеркасскій Математическій Кружокъ съ большимъ чувствомъ привѣтствуетъ васъ и желаетъ успѣха въ вашей плодотворной работѣ».

П. Д. Енько. «Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! При обученіи глухонѣмыхъ сказываются всѣ недостатки пріемовъ обученія, которые вносятъ гораздо болѣе вредныя послѣдствія, чѣмъ при обученіи въ обыкновенныхъ школахъ, поэтому ИМПЕРАТОРСКОЕ училище глухонѣмыхъ привѣтствуетъ Съѣздъ Преподавателей Математики и желаетъ, чтобы его занятія увѣнчались успѣхомъ».

З. А. Макшеевъ. «Какъ директоръ Педагогическаго Музея привѣтствую Съѣздъ. Здѣсь зародилась, окрѣпла и осуществилась мысль о Первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики».

К. В. Трефнеръ. «Признавая Съѣздъ Преподавателей Математики фактомъ весьма важнымъ въ жизни русскихъ учителей и русской школы, Юрьевское Педагогическое Об-во горячо привѣтствуетъ Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики и выражаетъ пожеланія плодотворности трудовъ, чтобы оправдались тѣ надежды, которыя возлагаютъ на него съѣхавшіеся на Съѣздъ со всей обширной Россіи».

А. П. Нечаевъ. «Педагогическая Академія имѣетъ честь привѣтствовать Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики въ твердой увѣренности, что его труды оставятъ глубокій слѣдъ въ исторіи нашей школы».

А. Ф. Гатлихъ. «Господа, въ виду отсутствія предсѣдателя Московскаго Математическаго Кружка, проф. Млодзѣевскаго, позвольте въ качествѣ товарища предсѣдателя привѣтствовать Съѣздъ отъ Московскаго Математическаго Кружка, пожелать полнаго успѣха его занятіямъ и выразить твердую надежду, что за этимъ Съѣздомъ послѣдуетъ рядъ другихъ на пользу математическаго образованія у насъ на Руси и для объединенія представителей математической науки».

І. И. Чистяковъ. «Позвольте привѣтствовать Первый Съѣздъ отъ имени редакціи журнала, издаваемаго Московскимъ Математическимъ Кружкомъ, «Математическое Образованіе». Нашъ молодой журналъ, первый нумеръ котораго вышелъ изъ печати только вчера, ставитъ себѣ задачей служеніе той же высокой цѣли, которую ставитъ себѣ и Первый

Съѣздъ Преподавателей Математики. Поэтому редакція желаетъ успѣха работамъ Съѣзда на благо русской математической науки и русскаго просвѣщенія».

К. К. Мазинъ. «Московское отдѣленіе ИМПЕРАТОРСКАГО Русскаго Техническаго Общества и Московская Постоянная Комиссія но техническому образованію привѣтствуетъ Съѣздъ. Хотя этотъ Съѣздъ главное вниманіе свое отдаетъ средней школѣ, а въ Комиссіи по техническому образованію находятъ себѣ образованіе главнымъ образомъ взрослые рабочіе, но крупица трудовъ этого Съѣзда принесетъ пользу и тѣмъ труженикамъ, которые служатъ дѣлу техническаго образованія, главная основа котораго математика. Привѣтствую Съѣздъ».

Послѣ рѣчей делегатовъ были прочитаны слѣдующія привѣтственныя телеграммы и письма:

«Отъ имени Московскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ привѣтствую I Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики. Директоръ *Чаплыгинъ*».

«Симбирскій Кадетскій Корпусъ привѣтствуетъ въ лицѣ Вашего Превосходительства Первый Съѣздъ Математиковъ—педагоговъ, выражая твердую увѣренность въ плодотворности работы Съѣзда. Генералъ *Шпигель*».

«Не откажите принять и передать сердечный привѣтъ Съѣзду отъ Вашего Сосѣда, ИМПЕРАТОРСКАГО Русскаго Техническаго Общества, и отъ меня лично и самыя душевныя пожеланія успѣха Съѣзду въ его трудахъ на благо русской школы и русской жизни...

... Правильная постановка преподаванія математики въ нашей школѣ, одного изъ главнѣйшихъ (если не главнѣйшаго) предметовъ для развитія духовнаго аппарата учащихся, безспорно отразится и на всемъ нашемъ жизненномъ укладѣ. При высокихъ свойствахъ духа русскаго народа, ему все же недостаетъ той — если можно такъ выразиться — математичности мышленія, которой отличается въ особенности англосаксонская раса. По широтѣ полета мысли, по окрыленности нашихъ идеаловъ, по стремленію познать все и обнять все мы едвали имѣемъ соперниковъ въ семьѣ народовъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ мы не можемъ похвалиться ни практическимъ строительствомъ жизни, ни послѣдовательностью въ проведеніи задуманнаго плана, ни систематичностью въ дѣйствіяхъ. Наша неподготовленность къ правильному счету и учету реальныхъ величинъ, къ измѣренію и взвѣшиванію ихъ, наше неумѣнье поставить на свое мѣсто каждый изъ факторовъ дѣйствительной жизни, координировать ихъ въ стройную систему для опредѣленной практической цѣли неблагопріятно отзывается на всемъ нашемъ бытѣ, на личномъ существованіи, семейномъ режимѣ, общественной и государственной работѣ.

Если строительнымъ камнемъ общежитія является отдѣльный (индивидуальный) человѣкъ, то пусть же школа подготовляетъ матеріалъ для лучшаго строительства, пусть она придаетъ мышленію ту математичность, безъ которой нельзя строить прочно и солидно.

Предсѣдатель Императорскаго Русскаго Техническаго Общества *В. Ковалевскій.*»

«Привѣтствую отъ имени редакціи газеты «*Школа и Жизнь*» и своего личнаго, желаю Съѣзду плодотворной работы на благо нашей школы. *Фальборкъ*».

«Совѣтъ Петербургскаго Общества Народныхъ Университетовъ привѣтствуетъ собравшійся Первый Всероссійскій Съѣздъ Математиковъ, выражая увѣренность въ плодотворности его работъ на пользу просвѣщенія всѣхъ слоевъ населенія, не исключая и внѣшкольныхъ народныхъ, среди которыхъ распространяется дѣятельность Народнаго Университета. Товарищъ Предсѣдателя Совѣта *Дмитріевъ*, Предсѣдатель административнаго отдѣла *Неллисъ*, Секретарь Совѣта *Гранъ*».

По предложенію Организаціоннаго Комитета Предсѣдателемъ Съѣзда былъ избранъ членъ Государственнаго Совѣта профессоръ *А. В. Васильевъ*.

Проф. А. В. Васильевъ. «Глубоко благодарю за оказанную мнѣ честь, которая тѣмъ болѣе доставляетъ мнѣ удовольствіе, что въ теченіе моей университетской дѣятельности я пришелъ къ убѣжденію, что наши университеты безъ всякаго ущерба для главной цѣли могутъ служить и для не менѣе важной цѣли — подготовки къ педагогической дѣятельности тѣхъ воспитанниковъ, которые хотятъ посвятить себя этому трудному, но почтенному дѣлу. Мы стараемся образовывать по мѣрѣ силъ педагогическіе кружки, библіотеки, студенческіе кружки, въ которыхъ разрабатываются педагогическіе вопросы на пользу образованія. Но это общеніе между молодыми педагогами—людьми только стремящимися еще посвятить себя педагогической дѣятельности представляется ничтожнымъ въ сравненіи съ тѣмъ общеніемъ, которое осуществляется здѣсь на этомъ съѣздѣ, гдѣ будетъ происходить общеніе между молодыми педагогами на первыхъ шагахъ ихъ дѣятельности и педагогами, посвятившими свою жизнь этой дѣятельности. Поэтому Всероссійскій Съѣздъ долженъ имѣть громадное значеніе въ математическомъ образованіи Россіи. Этому значенію содѣйствуетъ еще и то обстоятельство, что время, которое мы переживаемъ въ высшемъ образованіи, весьма знаменательно для математическаго образованія. Сначала образовалась комиссія по иниціативѣ нѣмецкихъ педагоговъ для разработки реформы математическаго образованія, труды которой вамъ извѣстны; она очень много сдѣлала въ этомъ направленіи. Эта комиссія расширилась и образовала международную комиссію для разработки вопроса о реформѣ математическаго преподаванія. Мы должны принять участіе въ этой работѣ, внести посильную лепту на пользу математическаго образованія въ нашемъ дорогомъ отечествѣ. Такова одна изъ цѣлей Съѣзда, создающаго общеніе математиковъ. Привѣтствую еще разъ, Милостивыя Государыни и Милостивые Государи, и искренно благодарю за высокую честь, которая мнѣ оказана».

Затѣмъ Съѣздъ избралъ: Товарищами Предсѣдателя—*З. А. Макшеева*, *М. Г. Попруженко*, *К. А. Поссе*, *С. Е. Савича*, *В. Ѳ. Кагана*, *Б. К. Млодзѣевскаго*, *В. Б. Струве*, *Д. М. Синцова* и *С. О. Шатуновскаго*, казначеемъ—*Д. Э. Теннера*, секретарями — *Д. М. Левитуса*, *В. Р. Мрочека* и *Ф. В. Филипповича*.

ПЕРВОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

27 декабря, 2 часа дня.

Въ предсѣдатели избранъ З. А. Макшеевъ.
Въ почетные секретари—И. И. Александровъ.

Математическое и философское преподаваніе въ средней школѣ.

Докладъ проф. А. В. Васильева. (СПВ.).

«Сложность, трудность и жгучесть всѣхъ вопросовъ, связанныхъ со школою, имѣетъ свои и соціологическія и психологическія основанія. Психологическое основаніе въ томъ, что средняя школа имѣетъ дѣло съ наиболѣе важнымъ и критическимъ періодомъ въ жизни человѣка, — въ томъ, что она беретъ изъ семьи ребенка и выпускаетъ въ общество юношу. Соціологическое основаніе трудности и жгучести вопросовъ, касающихся средней школы, въ томъ, что судьба и направленіе средней школы тѣсно связаны съ жизнью страны и съ борющимися въ ней стремленіями. Когда Петръ I, говоря словами поэта, поднялъ Россію на дыбы, онъ не могъ ограничиться одною существующею церковною школою; онъ создалъ цифирную школу съ преобладаніемъ математики, какъ учебнаго предмета. Великому перевороту, происходящему на нашихъ дняхъ на Востокѣ Азіи, предшествовало полное крушеніе устарѣлой системы образованія по книгамъ, написаннымъ тысячелѣтія тому назадъ, и введеніе «новаго» европейскаго образованія.

Эта двойная трудность вопроса о средней школѣ и является причиною постоянныхъ измѣненій во взглядахъ на цѣль и объемъ преподаванія различныхъ предметовъ.

Позвольте привести вамъ одинъ примѣръ, имѣющій интересъ новизны. Только въ 1905 г. вошли въ жизнь реформы средняго образованія во Франціи, введшія такъ называемое enseignement moderne и ослабившія значеніе тѣхъ филологическихъ и литературныхъ предметовъ, которые во Франціи обозначаются однимъ словомъ «humanités». Не прошло и шести лѣтъ, какъ группа выдающихся французскихъ мыслителей—и въ числѣ ихъ геніальный математикъ Пуанкаре и талантливый романистъ Анатоль Франсъ—сочла нужнымъ обратить вниманіе на пониженіе умственнаго образованія французскаго юношества и высказалась за возвращеніе «humanités» ихъ стараго значенія.

Но тѣмъ не менѣе, при всѣхъ смѣнахъ взглядовъ и направленій въ исторіи средней школы въ разныхъ странахъ, значеніе математическаго образованія давно не подвергается уже сомнѣнію и роль этого образованія все болѣе и болѣе увеличивается. По мѣрѣ этого ростетъ и отвѣтственность преподавателей математики передъ своею страною и поэтому естественно стремленіе ихъ къ серьезному совмѣстному обсужденію вопросовъ математическаго преподаванія. Съѣздъ нашъ является однимъ изъ проявленій этого стремленія и интересъ, проявленный къ нему, о которомъ свидѣтельствуетъ и многочисленная аудиторія и количество докладовъ, служитъ ручательствомъ, что онъ принесетъ большую пользу дѣлу математическаго образованія въ Россіи. Этимъ будетъ оказана громадная услуга дѣлу образованія вообще, потому что роль математическаго преподаванія въ общей системѣ образованія неоспорима. Исключительными являются тѣ нападки на математическое образованіе, которымъ въ 1841 г. посвятилъ свою актовую рѣчь въ Московскомъ университетѣ подъ заглавіемъ «О вліяніи математическихъ наукъ на развитіе умственныхъ способностей» проф. Брашманъ, учитель Чебышева, который до конца берегъ, какъ святыню, портретъ своего учителя. Нападки шли отъ англійскаго философа Гамильтона (Hamilton), который доказывалъ (De l'études de mathématiques), что въ занятіяхъ математическими науками умъ нашъ не дѣйствователь, а зритель, что математика не только не возбуждаетъ и не увеличиваетъ способности къ мышленію, но даже ослабляетъ ее и дѣлаетъ неспособною къ постоянному напряженію, какого, требуетъ философія, другія науки и вопросы житейскіе, что, наконецъ, математики ничего не знаютъ о причинахъ явленій; лишь философы раскрываютъ причины, лишь истины послѣднихъ суть согласіе мысли съ существующимъ.

За исключеніемъ этого послѣдняго обвиненія, которое можетъ быть признано математикою и обращено ею въ достоинство, всѣ остальныя обвиненія едва-ли кѣмъ-нибудь поддерживаются; не только здѣсь, въ кругу преподавателей математики, но и внѣ его уже не представляется необходимымъ, подобно профессорамъ Брашману и Бугаеву, доказывать, что математика есть могучее педагогическое орудіе. Еще менѣе можетъ подлежать сомнѣнію необходимость введенія въ преподаваніе математики, какъ могучаго орудія для рѣшенія вопросовъ науки теоретической и прикладной. Можетъ ли подлежать сомнѣнію необходимость включить въ систему общаго образованія хотя бы первоначальное знакомство съ наукою о пространственныхъ формахъ, съ тѣмъ методомъ, который, съ одной стороны, приводитъ къ возможности рѣшать вопросы объ устойчивости солнечной системы въ цѣломъ, о структурѣ и устойчивости колецъ Сатурна (изслѣдованія С. В. Ковалевской), а съ другой — приводитъ Джорджа Томсона (J. Tomson) къ объясненію періодической системы Д. И. Менделѣева (этой крупной заслуги русскаго генія передъ современной наукой) строеніемъ атома изъ корпускулъ или электроновъ. И тотъ же самый методъ привелъ къ установленію законовъ, проявляющихся въ массовыхъ явленіяхъ и примѣнилъ основанный на нихъ статистическій методъ, съ одной стороны, къ теоріи газовъ и структуры млечнаго пути, съ другой,—къ точному обоснованію мѣръ страхованія, этого важнаго орудія современной соціальной политики.

И педагогическое и научное значеніе математики вполнѣ оправдываютъ ея все болѣе и болѣе возрастающее значеніе въ системѣ средняго преподаванія. Но у математики, кромѣ ея логической строгости и сравнительной простоты, дѣлающей ее незамѣнимымъ педагогическимъ орудіемъ, кромѣ ея значенія для познанія явленій окружающаго насъ міра и для обладанія имъ, есть еще третья сторона: ея близкое соприкосновеніе, скажу, проникновеніе въ область наиболѣе общихъ вопросовъ человѣческой мысли.

Это философское значеніе математики цѣнится и признается съ глубокой древности: «Математика есть рукоятка философіи», говорилъ Ксенократъ; Платонъ отказывалъ въ человѣческомъ достоинствѣ людямъ, не знакомымъ съ геометріей, а проникновеніе въ ея истины считалъ знаніемъ, наиболѣе необходимымъ для вождей народа. Въ эпоху возрожденія Галилей говорилъ въ своемъ Saggiatore: «языкъ природы есть языкъ математики, а буквы этого языка—круги, треугольники и другія математическія фигуры».

Не разъ успѣхи математики оказывали чарующее, почти гипнотизирующее вліяніе на мысль человѣчества. При самомъ возникновеніи научной математики открытыя пиѳагорейскою школою первыя законности въ ученіи о цѣлыхъ числахъ, открытіе чиселъ совершенныхъ и дружественныхъ, открытіе ирраціональностей оказали столь сильное вліяніе на метафизику Платона, что вся его теорія идей есть лишь развитіе пиѳагоровскаго положенія, согласно которому вещи всегда суть копіи чиселъ; и многія мѣста его діалоговъ и книги о Государствѣ полны отступленіями въ область свойствъ цѣлыхъ чиселъ и ирраціональныхъ отрѣзковъ. Мы присутствуемъ въ настоящее время при проявленіи подобнаго же чарующаго вліянія математическаго открытія на общіе вопросы міропониманія. Самыя смѣлыя метафизическія теоріи о тожествѣ пространства и времени являются слѣдствіемъ замѣчательнаго математическаго факта, открытаго Лоренцомъ (Lorentz), Эйнштейномъ (Einstein) и Минковскимъ (Minkowsky) и заключающагося въ томъ, что система Максвеллевскихъ уравненій электродинамики не мѣняется отъ преобразованія, связывающаго пространственныя координаты со временемъ, и что эти уравненія принимаютъ вполнѣ симметричную форму относительно четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ, если эти перемѣнныя суть три пространственныя координаты, съ одной стороны,—время, умноженное на $\sqrt{-1}$ (мнимую единицу) съ другой.

Математика соприкасается съ философіею и съ ея частными доктринами: логикою, психологіею, гносеологіею и въ своихъ основаніяхъ, и въ своей конечной цѣли, и своимъ методомъ.

Она соприкасается съ гносеологіею и психологіею въ основаніяхъ. «Понятія о числѣ, пространствѣ, времени, говоритъ Кронекеръ, прежде чѣмъ сдѣлаться предметомъ чистой математики, должны быть развиваемы въ чистомъ полѣ философской» и, прибавлю я отъ себя, психофизіологической работы.

По отношенію къ нашимъ пространственнымъ ощущеніямъ психофизіологическій анализъ возникновенія далеко еще не законченъ; но онъ далъ уже многое, подтверждающее геніальную мысль, брошенную Лобачевскимъ: «Въ природѣ мы познаемъ, собственно, только движеніе, безъ котораго чувственныя впечатлѣнія невозможны. Всѣ прочія, понятія, напримѣръ, геометрическія, произведены нашимъ умомъ искусственно, будучи взяты въ свойствахъ движенія: а потому пространство само собой отдѣльно для насъ не существуетъ».

Не болѣе разработаны вопросы о времени и о генезисѣ понятія о цѣломъ числѣ (напримѣръ, вопросъ о взаимоотношеніи чиселъ порядковыхъ и количественныхъ). Математика соприкасается съ философіею природы по своей конечной цѣли. Гамильтонъ былъ правъ, указывая на то, что математики ничего не знаютъ о причинахъ явленій; философы же раскрываютъ причины. Математикъ, дѣйствительно, не задается цѣлью искать причины, а ограничивается тѣмъ, что ищетъ точныя функціональныя зависимости между измѣняющимися величинами. На той же точкѣ зрѣнія стоитъ и современная философская мысль. Она опредѣляетъ задачу философіи, говоря, что философія есть система научно-разработаннаго міровоззрѣнія, и относитъ къ области метафизики или морально обоснованной вѣры разысканіе причинъ явленій. (А. И. Введенскій. «Логика»).

Чистая математика пользуется дедуктивнымъ и символическимъ методами для изученія величинъ и чиселъ. Но этотъ дедуктивный методъ и употребленіе символовъ, какъ предчувствовалъ еще Лейбницъ (Leibnitz), не составляетъ принадлежности только ученія о величинахъ и числахъ. Въ 1854 г. Буль (Booll) издалъ свое сочиненіе «An investigation on the laws of thought», гдѣ тотъ же методъ былъ примѣненъ не къ величинамъ, а къ понятіямъ. И это расширеніе области математическаго метода даетъ поводъ Пирсу (Peirce), Рёселю (Russell) и другимъ подводить подъ понятіе о чистой математикѣ всѣ дедуктивныя разсужденія, пользующіяся употребленіемъ символовъ, считать датою рожденія чистой математики не времена Θалеса и Пиθагора, а 1854 г. и давать математикѣ опредѣленіе науки, выводящей логическія слѣдствія изъ логическихъ посылокъ, а подчасъ и другое — чистая математика есть наука, которая не знаетъ того, о чемъ она говоритъ, и не знаетъ, вѣрно ли то, что она говоритъ. Грань, отдѣляющая математику отъ формальной логики, такимъ образомъ, почти исчезаетъ. Таковы связи между математикою и философіей. Насколько въ преподаваніи математики въ средней школѣ могутъ отразиться эти связи математики и философіи, — вотъ тотъ вопросъ, докладъ по которому Организаціонному Комитету благоугодно было поручить мнѣ. Я прошу извиненія за несовершенства моего доклада, такъ какъ вопросъ совсѣмъ не разработанъ въ дидактической литературѣ. Такъ, напримѣръ, его совсѣмъ почти не касается появившаяся въ прошломъ году дидактика Гёфлера (A. Höfler) или касается съ точки зрѣнія такъ называемой «Gegenstandstheorie». Пользуюсь случаемъ, чтобы выразить благодарность профессору Вернике (Брауншвейгъ), доставившему мнѣ возможность познакомиться съ тезисами книги, касающейся вопроса объ отношеніи между математическимъ и философскимъ преподаваніемъ, которую онъ предполагаетъ выпустить въ 1912 году.

Вопросъ о философскихъ элементахъ въ преподаваніи математики находится, конечно, въ тѣснѣйшей связи съ вопросомъ болѣе общимъ, съ вопросомъ о философскомъ элементѣ въ преподаваніи средней школы, съ вопросомъ о философскомъ преподаваніи вообще.

Какъ относятся къ нему въ разныхъ странахъ? Классическая гуманитарная (не классическая филологическая) школа ставила себѣ заслугой именно ознакомленіе съ философіей древнихъ мыслителей. Чтеніе діалоговъ Платона и рѣчей Цицерона знакомило съ основными вопросами философской мысли и съ ихъ рѣшеніемъ въ идеалистическомъ смыслѣ. До сихъ поръ въ англійскихъ школахъ философское образованіе идетъ этимъ путемъ, и, напримѣръ, въ извѣстной школѣ Rugby, основанной педагогомъ Арнольдомъ (Arnold) и оказавшей большое вліяніе на постановку средняго образованія, orders или программы сочиненій заключаютъ въ себѣ длинный рядъ философскихъ темъ, относящихся къ спеціальнымъ вопросамъ психологіи и логики. И безъ спеціальнаго преподаванія философіи уваженіе къ философскому мышленію сочетается въ англійской интеллигенціи съ тою способностью къ интенсивной практической дѣятельности, которая составляетъ предметъ зависти для интеллигенціи другихъ странъ. Въ дни моего лѣтняго пребыванія въ Англіи рѣчь въ Оксфордѣ при открытіи курсовъ University extension, посвященная германской философіи, была произнесена выдающимся представителемъ гегеліанской философіи въ Англіи, ея военнымъ министромъ лордомъ Гальденомъ.

Въ другихъ странахъ (во Франціи и въ Австріи съ 1894 г. и у насъ со времени министерства Зенгера) преподаваніе философіи ведется въ видѣ особаго курса—«философская пропедевтика», заключающаго въ себѣ элементы логики и психологіи, знакомство съ теоріей познанія и съ важнѣйшими философскими системами.

Вопросъ о цѣлесообразности и объемѣ такого преподаванія труднѣйшихъ вопросовъ человѣческой мысли несозрѣвшимъ умамъ, при томъ подавленнымъ изученіемъ другихъ предметовъ, представляется весьма спорнымъ. Такъ напримѣръ, проф. Введенскій, съ большою убѣдительностью защищая въ своей «Логикѣ» преподаваніе логики, какъ руководства къ критикѣ мышленія «всѣмъ, кто хочетъ получить высшее образованіе, т. е. либо на всѣхъ факультетахъ, либо въ старшихъ классахъ гимназіи», высказывается противъ преподаванія психологіи, такъ какъ ея содержаніе еще не установилось и пока оно сводится къ безконечнымъ спорамъ по поводу почти каждаго ея положенія. «Преподаваніе психологіи въ гимназіяхъ въ видѣ особаго учебнаго предмета скорѣе приноситъ вредъ, чѣмъ пользу. Поэтому въ интересахъ общаго образованія гораздо полезнѣе упразднить въ гимназіяхъ психологію, какъ особый учебный предметъ и, прибавивъ одинъ урокъ къ двумъ существующимъ урокамъ логики, поручить ея преподавателю ознакомить учениковъ съ отличіемъ психологической точки зрѣнія отъ логической, съ разнообразіемъ міра душевныхъ явленій, съ пріемами ихъ изученія».

Нѣсколько лѣтъ тому назадъ (въ 1894 г.) вопросъ о пользѣ философскаго преподаванія въ лицеяхъ и колледжахъ Франціи подвергся всестороннему обсужденію на страницахъ извѣстнаго французской школѣ «Revue bleue». Рѣзкое осужденіе преподаванія, которое пріучаетъ учениковъ къ «попугайному пустомельству», встрѣтило отпоръ со стороны видныхъ представителей философской мысли Франціи: Бутру (Boutroux) и Фулье (Foulliée).

Въ критическомъ возрастѣ, когда юноша въ первый разъ сталкивается съ запросами философской мысли, школа, если она хочетъ быть другомъ юноши, не можетъ не помочь ему посильно. Но и тѣхъ, для кого такіе вопросы не существуетъ, школа не можетъ оставить безъ ознакомленія съ высшими потребностями человѣческаго духа, толкнуть ихъ къ философіи. Только въ этомъ и видитъ Бутру цѣль философскаго преподаванія. «Обученіе философіи въ лицеяхъ есть посвященіе въ философское мышленіе. Законченнаго здѣсь не можетъ быть дано ничего; но законченное образованіе есть систематизація ограниченности».

Для тѣхъ, кто, несмотря на неудачи и недостатки практическаго выполненія идеально правильной мысли о необходимости философскаго преподаванія въ средней школѣ, будетъ считать его выполнимымъ, будетъ ясно, что вслѣдствіе громадной важности этой цѣли и другіе предметы должны быть въ той или въ другой стадіи, а особенно въ заключительной стадіи, поставлены въ тѣсную связь съ философскимъ преподаваніемъ и должны служить ему подспорьемъ. И преподаваніе исторіи должно освѣтить роль исторіи мысли вообще и философіи въ частности, не избѣгая столь важнаго вопроса о соотношеніи мысли и исторіи производственныхъ отношеній; и науки біологическія должны остановиться на вопросѣ о витализмѣ и аргументахъ pro и contra; и въ особенности изученіе литературы должно преслѣдовать тѣ этическія цѣли, которымъ она служила въ лицѣ своихъ лучшихъ представителей. Русская литература для многихъ поколѣній русскаго общества является единственной учительницей философской мысли.

Сказанное выше о тѣсной связи математики съ философіей не оставляетъ сомнѣнія въ томъ, что и преподаваніе математики должно послужить той же высокой цѣли пробужденія интереса къ философскому мышленію.

Но за то большія трудности представляетъ рѣшеніе вопроса, на какихъ стадіяхъ и въ какой формѣ это должно осуществиться. Конечно, на всѣхъ ступеняхъ математическое преподаваніе должно служить цѣли развитія логическаго мышленія; но можетъ быть лучше всего, если оно будетъ достигать этого такъ, что ученикъ будетъ въ положеніи Мольеровскаго M-r Jourdain, который искренне удивился, когда ему сказали, что онъ говоритъ прозою. Сверхъ того у математическаго преподавателя есть свои другія задачи, важность которыхъ никто не можетъ отрицать: развитіе способности геометрическаго представленія, развитіе техники ариѳметическаго счета и алгебраическихъ вычисленій и т. п. При этихъ условіяхъ я колебался бы высказаться за то, чтобы философскій элементъ примѣшивался къ математическому преподаванію даже въ предпослѣднемъ классѣ. Пословица о погонѣ за двумя зайцами есть одна изъ наиболѣе поучительныхъ для педагога. Поэтому, если мы желаемъ и считаемъ возможнымъ ввести въ въ кругъ преподаванія средней школы ознакомленіе съ тѣми вопросами, которые можно назвать пограничными между математикою и философіею, то лучшее время для такого ознакомленія (несмотря на всѣ неудобства, связанныя съ годомъ. подготовляющимъ къ аттестату зрѣлости)—есть послѣдній годъ средней школы. Введеніе въ преподаваніе этого послѣдняго года вопросовъ, интересующихъ одинаково и математику и философію, соотвѣтствуетъ вполнѣ тому общему характеру, который должно имѣть преподаваніе математики въ этотъ послѣдній годъ.

Вопросъ о преподаваніи въ послѣднемъ учебномъ году представляется весьма важнымъ. Отъ постановки математическаго преподаванія въ этомъ послѣднемъ году зависитъ, если позволено такъ выразиться, общее математическое образованіе страны, т. е. уровень математическихъ знаній и пониманія значенія математики у интеллигенціи страны; отъ нея же зависитъ уровень преподаванія въ тѣхъ школахъ, въ которыхъ продолжается математическое образованіе, т. е. на математическихъ факультетахъ университетовъ и въ высшихъ техническихъ школахъ. Въ чемъ же должна состоять главная цѣль преподаванія? Практика, конечно, здѣсь рѣзко разойдется съ теоріей. Практикъ скажетъ - въ приготовленіи ученика къ рѣшенію тѣхъ задачъ, которыя ему будутъ предложены на экзаменѣ зрѣлости и къ бойкому устному отвѣту. Теоретикъ скажетъ—къ тому, чтобы ученикъ вышелъ изъ средней школы, получивъ въ доступной ему формѣ пониманіе сущности и цѣли математики и прежде всего математики—какъ ученія о величинахъ и числахъ.

Сущность чистой математики останется скрытою для ученика, если для него останется неясною ея главная цѣль—замѣна прямыхъ и непосредственныхъ измѣреній косвенными и посредственными. Нужно выяснить ему, что къ этому сводится всякое приложеніе математики къ конкретнымъ явленіямъ, начиная съ опредѣленія Ѳалесомъ высоты недоступнаго предмета и кончая опредѣленіемъ отношенія между электрическимъ зарядомъ и массою корпускулъ по отклоненію ея, съ одной стороны, въ электрическомъ, а съ другой стороны, въ магнитномъ полѣ. Сущность математики останется непонятною если ученику не будетъ выяснено то, что такъ удачно названо Махомъ экономическимъ значеніемъ математики; экономическое значеніе формулъ, съ одной стороны, экономическое значеніе абстрактныхъ функцій, съ другой. Въ теоріи функцій, при невозможности ея достаточно полнаго изложенія въ средней школѣ, все вниманіе должно быть обращено на выясненіе значенія вопроса о ростѣ функцій и въ особенности вопроса о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

Выясненіе значенія чистой математики находится въ тѣсномъ соприкосновеніи съ основнымъ вопросомъ одного изъ отдѣловъ философской пропедевтики, а именно гносеологіи,—съ вопросомъ о томъ, какое значеніе возможно, возможно ли познаніе сущности явленій и ихъ причинъ или наше знаніе всегда будетъ только знаніемъ отношеній между ощущеніями (Махъ).

Но математика важна не только по своимъ приложеніямъ

Белгородск... институт
Инв. № 68463
в срок

къ конкретнымъ явленіямъ окружающаго насъ міра. Она представляетъ собою идеалъ систематизированнаго знанія, въ которомъ изъ небольшого числа логическихъ посылокъ выводятся путемъ логическаго мышленія всѣ заключающіеся въ нихъ implicite выводы. Такою системою является геометрія Эвклида, которая строится на основаніи аксіомъ сочетанія, порядка, конгруэнтности, аксіомы параллельности и аксіомы Архимеда. При изученіи ея по частямъ теряется та логическая связь, которая существуетъ во всемъ ученіи, и лучшимъ повтореніемъ геометріи будетъ выясненіе геометріи, какъ цѣлаго, построеннаго на небольшомъ числѣ аксіомъ. Послѣдующій за мною референтъ С. А. Богомоловъ подробно остановится на этомъ вопросѣ.

Такую же логическую связь необходимо указать и въ ариѳметикѣ и въ алгебрѣ или, объединяя ихъ однимъ терминомъ, въ общей ариѳметикѣ.

На порогѣ человѣческой культуры возникло понятіе объ абстрактномъ цѣломъ числѣ, постепенно шагъ за шагомъ оно расширялось. Овидіевское terque quaterque beati, недавно раздававшіеся въ Ургѣ клики въ честь 10000 лѣтъ живущаго царя Монголіи, свидѣтельствуютъ объ этапахъ, которые мало-по-малу привели къ понятію о безконечномъ рядѣ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, введенному въ науку въ псаммитѣ Архимеда.

Исходя изъ этого понятія, ариѳметика выводитъ, изучая обратныя операціи, понятія о добрыхъ, отрицательныхъ, несоизмѣримыхъ, комплексныхъ числахъ, подчиняя вновь вводимыя области чиселъ однимъ и тѣмъ же законамъ основныхъ операцій. Всѣ формулы алгебры составляютъ логическій выводъ изъ небольшого числа основныхъ положеній, и это должно быть показано ученику и должно приводить его къ вопросамъ логики, уясняя сущность дедукціи и дедуктивной научной системы. Но отдѣльные вопросы теоретической ариѳметики позволяютъ освѣтить для учениковъ и вопросъ объ индукціи, отличіе индукціи наукъ опытныхъ и наблюдательныхъ отъ индукціи математической (переходъ отъ n къ $n+1$).

Въ какой степени возможно ознакомленіе съ вопросами о происхожденіи геометрическихъ аксіомъ, съ различіемъ взглядовъ на то, слѣдуетъ ли теорію цѣлыхъ чиселъ обосновать на числѣ кардинальномъ и на однозначномъ соотвѣтствіи или на идеѣ порядка и на числѣ порядковомъ—вотъ вопросъ, рѣшеніе котораго не можетъ быть общимъ для средней школы и всецѣло зависитъ отъ индивидуальныхъ свойствъ учителя и подготовки класса. Къ той же категоріи вопросовъ можно отнести вопросъ объ ознакомленіи учениковъ съ мемуарами Дедекинда (R. Dedekind), съ концепціями Кантора (Cantor). Еще менѣе можно разсчитывать на дѣятельность учителя математики въ ознакомленіи съ тѣми пограничными вопросами философіи и математики, о которыхъ шла рѣчь выше. Здѣсь возможна только совмѣстная работа учителя философской пропедевтики и учителя математики и одного учителя математики только въ томъ случаѣ, если на него возложено и преподаваніе философской пропедевтики.

Отъ соглашенія учителей математики и философской пропедевтики зависитъ, въ какой мѣрѣ и кѣмъ изъ нихъ будутъ разъяснены вопросъ объ апріорныхъ сужденіяхъ, вопросъ объ аналитическихъ и синтетическихъ сужденіяхъ, ученія о номинализмѣ и реализмѣ, такъ тѣсно связанныя съ двумя выше упомянутыми теоріями цѣлаго положительнаго числа, наконецъ, вопросъ объ абстрактныхъ понятіяхъ и основанія ученія о свойствахъ отношеній.

По моему мнѣнію, вопросъ о введеніи этихъ смежныхъ вопросовъ математики, съ одной стороны,—гносеологіи, психологіи и логики, съ другой стороны, тѣсно связанъ съ болѣе общимъ вопросомъ, который, какъ я знаю, представляется въ значительной степени «музыкою будущаго», вопросомъ объ индивидуализаціи преподаванія по крайней мѣрѣ на высшей ступени средней школы.

На необходимость такой индивидуализаціи одинаково настойчиво указываютъ и наиболѣе широкіе умы современнаго человѣчества и опытные педагоги. Вы знаете, вѣроятно, съ какою рѣзкостью относится къ современной нивеллирующей школѣ одинъ изъ знаменитѣйшихъ химиковъ нашего времени Вильгельмъ Оствальдъ, видя въ ней скорѣе аппаратъ для уничтоженія будущихъ оригинальныхъ мыслителей, чѣмъ для ихъ развитія. Гёфлеръ, дидактика котораго является плодомъ тридцатилѣтней педагогической дѣятельности въ одномъ и томъ же учебномъ заведеніи (Терезіанумъ въ Вѣнѣ), съ великимъ сочувствіемъ относится къ мысли, высказанной въ Пруссіи, сдѣлать въ высшихъ классахъ гимназіи обязательными только минимальное число часовъ по каждому отдѣльному предмету. Дополнительные часы по тому или другому предмету избираются учениками сообразно ихъ способностямъ и дальнѣйшимъ планамъ. Въ менѣе радикальной формѣ Меранскій учебный планъ настаиваетъ также «на свободѣ учителя при выборѣ вопросовъ, при ихъ методическомъ изложеніи, при распредѣленіи работъ между учениками».

Только при такой индивидуализаціи мы можемъ разсчитывать, что философскія дополненія къ курсу математики въ одной школѣ, математическія иллюстраціи вопросовъ гносеологіи и логики въ другой обратятся не въ сухую, непонятную и отталкивающую схоластику, а въ источникъ умственнаго наслажденія и пробужденія интереса къ вопросамъ наиболѣе труднымъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ и привлекательнымъ, что они заставятъ учениковъ испытать то удивленіе, которое, по словамъ Сократа въ одномъ изъ діалоговъ Платона, есть мать философіи, и будутъ содѣйствовать презрѣнію къ невѣжеству и уваженію къ человѣческой мысли. Въ стѣнахъ Казанскаго Университета 85 лѣтъ тому назадъ Н. И. Лобачевскій восклицалъ въ своей рѣчи «О важнѣйшихъ предметахъ воспитанія»: «Ничто такъ не стѣсняетъ потока жизни, какъ невѣжество; прямою, мертвою дорогою провожаетъ оно насъ отъ колыбели до могилы». Мыслитель, который въ настоящее время представляетъ живое соединеніе математическаго генія и интенсивной и свѣжей философской мысли, Анри Пуанкаре, заканчиваетъ одну изъ своихъ книгъ прекрасными словами: «Исторія земли показываетъ намъ, что жизнь есть только короткій эпизодъ между двумя безконечными смертями, и въ этомъ эпизодѣ сознательная мысль есть только одно мгновеніе. Но это мгновеніе есть все».

Только тотъ народъ займетъ великое мѣсто въ исторіи мысли человѣчества, школа котораго на всѣхъ ея ступеняхъ отъ низшей до высшей, поставитъ себѣ цѣлью внушить своимъ ученикамъ то уваженіе къ мысли, которымъ проникнуты эти прекрасныя слова».

Тезисы.

I. Средняя школа должна поставить себѣ одною изъ цѣлей пробужденіе интереса къ серьезному философскому мышленію. Въ особенности этой цѣли долженъ служить послѣдній учебный годъ средней школы.

II. Математическое образованіе на всѣхъ своихъ ступеняхъ должно ставить себѣ цѣлью развитіе логическаго мышленія.

III. Математическое преподаваніе въ послѣдній учебный годъ средней школы должно поставить себѣ цѣлью:

1) выясненіе учащимся значенія математики для точнаго знанія и математическаго выраженія законовъ природы, и

2) научный ретроспективный взглядъ на систему элементарной математики (Меранскій учебный планъ 1905 г.).

IV. Соотвѣтственно указанной цѣли въ программѣ математики послѣдняго года средней школы должно быть обращено особенное вниманіе:

1) на выясеніе понятія о функціи и вопроса о ея ростѣ, и

3) на основанія ариѳметики, алгебры и геометріи.

V. При указанной постановкѣ преподаванія математики въ послѣдній годъ средней школы возможно и желательно установленіе тѣсной связи между курсами математики и философской пропедевтики.

VI. Основанія ариѳметики (ученіе о цѣломъ числѣ) въ въ особенности богаты вопросами поучительными и интересными съ точки зрѣнія философской пропедевтики.

Пренія по докладу проф. А. В. Васильева.

А. Г. Пичугинъ (Красноуфимскъ) высказалъ мысль, что прежде чѣмъ вводить философскую пропедевтику въ среднюю школу, надо позаботиться о введеніи кафедры этого предмета на физико-математическихъ факультетахъ россійскихъ университетовъ. Въ Западной Европѣ математики слушаютъ въ университетахъ философскую пропедевтику; у насъ же кафедра эта существуетъ только на историко филологическихъ факультетахъ. Наши математики, такимъ образомъ, по словамъ оппонента, не подготовлены къ преподаванію этого предмета въ средней школѣ. а потому—несмотря на всю желательность предлагаемой проф. Васильевымъ мѣры—она въ настоящее время осуществлена быть не можетъ.

В. Н. Соколовъ, (Саратовъ), ссылаясь на свой личный опытъ, находитъ возможнымъ уже съ IV класса устанавливать связь логики съ математикой, какъ первую ступень для осуществленія предложенной докладчикомъ мѣры.

А. В. Полтарацкій (СПБ.) указалъ на рѣшающее значеніе для успѣха мѣропріятій, вырабатываемыхъ на Съѣздѣ *принципа индивидуализаціи*. Поэтому поводу онъ высказалъ слѣдующее: „Пока у насъ будетъ стремленіе нивеллировать всѣхъ по одной указкѣ, заставлять работать по одной программѣ, при самой лучшей программѣ можно не достигнуть большихъ результатовъ, но когда выпадаетъ больше свободы въ выборѣ и у преподавателей, и у воспитанниковъ, тѣмъ лучшіе будутъ результаты“.

„Къ сожалѣнію, у насъ постоянно ссылаются на Германію и не знаютъ того, что дѣлается въ Скандинавіи. Въ Германіи теперь поднятъ вопросъ объ индивидуализаціи преподаванія, а въ Скандинавіи этотъ вопросъ уже давно удачно рѣшенъ. Въ Даніи выпускной классъ девяти-классной средней школы дѣлится на 4 параллельныхъ отдѣленія: классическое, новыхъ языковъ, реально-математическое и естественно-историческое. Ученикъ можетъ выбрать по своимъ силамъ и вкусамъ любой отдѣлъ. Въ Швеціи этотъ вопросъ рѣшается иначе: тамъ средняя школа дѣлится на двѣ линіи—реальную и латинскую. Въ старшихъ трехъ классахъ самая важная особенность въ томъ, что каждый ученикъ съ письменнаго согласія родителей имѣетъ право отказаться отъ одного или нѣсколькихъ любыхъ предметовъ, лишь бы общее число уроковъ, отъ которыхъ онъ отказывается, не превышало бы шести“.

„Это не мѣшаетъ выпуску, но ученикъ предупреждается, что въ дальнѣйшемъ этотъ отказъ можетъ вызвать неудобства. Напримѣръ, реалистъ, отказавшійся отъ математики, не можетъ поступить на физико-математическій факультетъ или сдѣлаться артиллерійскимъ офицеромъ, если не сдастъ дополнительный экзаменъ“.

„Кромѣ того, въ Швеціи Комитетъ имѣетъ право переводить изъ класса въ классъ, не назначая переэкзаменовокъ, даже съ неудовлетворительными баллами, если по другимъ предметамъ баллы хороши, а также Комитетъ рѣшаетъ вопросъ о выдачѣ при выпускныхъ экзаменахъ аттестата зрѣлости, несмотря на неудовлетворительные баллы по одному или двумъ предметамъ. Подробности можно найти въ моей статьѣ „Новый уставъ шведской средней школы“ (Русская школа, декабрь, 1900 г). Всякая школа вообще, а средняя въ особенности должна воспитывать въ привычкѣ къ труду, но трудъ долженъ быть посиленъ и хорошо выполняемъ. Привычка работать безъ убѣжденія въ выполнимости работы только развращаетъ“.

Г. П. Кузнецовъ (Новочеркаскъ) проситъ Съѣздъ обратить вниманіе на женскія гимназіи. По его словамъ въ женскихъ гимназіяхъ до нѣкоторой степени проводится индивидуализація, даже имѣется 8-й педагогическій классъ, въ которомъ имѣются спеціальности: словесность, исторія и др. Но въ женскихъ гимназіяхъ нѣтъ ни одного урока по философіи, ни одного урока логики, которая введена въ мужскихъ гимназіяхъ. Желательно было бы, чтобы Съѣздъ вынесъ резолюцію о введеніи преподаванія философіи въ 8-мъ классѣ женскихъ гимназій, это будетъ имѣть важное значеніе для ученицъ этого клас а, какъ будущихъ учительницъ. Преподаваніе философской пропедевтики и логики, въ восьмомъ классѣ слѣдуетъ поручить преподавателю математики“.

С. А. Неаполитанскій. (Варшава) „Раздѣляя мнѣніе многоуважаемагопрофессоравъ томъ, что необходимо ввести въ программу математики изученіе философскихъ элементовъ, я позволю себѣ подѣлиться скромнымъ опытомъ въ этомъ отношеніи. Въ прошломъ году съ учениками реальнаго училища 6-го и 7-го класса я устраивалъ бесѣды объ общихъ понятіяхъ физико-математическихъ наукъ. Я тѣмъ болѣе считалъ необходимымъ это сдѣлать, что ученики реальнаго училища совершенно лишены какихъ бы то ни было познаній по логикѣ, такъ какъ въ курсъ реальныхъ училищъ логика не входитъ совершенно“.

„Я началъ съ краткой теоріи познанія, а потомъ перешелъ къ тому, какъ формируются науки индуктивныя, потомъ перешелъ къ разсмотрѣнію математики, какъ развивается понятіе о числѣ, какое мѣсто занимаетъ математика среди другихъ наукъ.

Эти бесѣды вызвали такой большой интересъ, возбуждалось столько разнообразныхъ вопросовъ, что я считаю, что подобныя бесѣды съ учениками, состоящія въ ознакомленіи учениковъ съ элементами философіи, есть уже вопросъ вполнѣ не только назрѣвшій, но и разрѣшимый".

Обоснованіе геометріи въ связи съ постановкой ея преподаванія.

Докладъ С. А. Богомолова. (СПБ.)

«Мм. Гг.! Изъ всѣхъ математическихъ дисциплинъ геометрія съ древнѣйшихъ временъ считалась наиболѣе пригодной для общаго развитія человѣческаго ума. Чтобы не утомлять Васъ различными цитатами, я напомню лишь надпись на дверяхъ академіи Платона, которой запрещалось переступать порогъ всякому незнакомому съ геометріей. Этотъ призывъ философа, не остался безъ отклика, когда нѣсколько десятилѣтій спустя появилась первая система геометріи, твореніе исключительной важности въ исторіи науки—«Начала» Евклида, то тамъ не были забыты и чисто философскіе интересы. Евклидъ начинаетъ свою книгу введеніемъ, въ которомъ онъ пытается дать опредѣленія основныхъ геометрическихъ понятій и перечислить всѣ предпосылки дальнѣйшихъ построеній; при изложеніи каждой отдѣльной теоремы дѣло идетъ не только о ея доказательствѣ, но и о безукоризненномъ съ точки зрѣнія формальной логики расположеніи частей: за формулировкой самого предложенія слѣдуетъ установленіе того, что дано, и того, что требуется доказать; далѣе выполняется необходимое построеніе, приводится само доказательство, въ которомъ искомое предложеніе выставляется логическимъ слѣдствіемъ уже доказаннаго, и, наконецъ, заключеніе подчеркиваетъ еще разъ новое пріобрѣтеніе геометрическаго знанія. Въ Евклидѣ можно даже видѣть праотца современныхъ изслѣдованій о доказательной силѣ той или другой системы аксіомъ: первыя 28 предложеній 1-ой книги «Началъ» не опираются на знаменитый

V-ый постулатъ о параллеляхъ; авторъ какъ бы старался собрать здѣсь все, что можно установить безъ этой предпосылки. Эти замѣчанія позволяютъ намъ заключить, что Евклидъ смотрѣлъ на свою книгу не только какъ на введеніе въ геометрію, но и какъ на пропедевтику философіи въ платоновскомъ смыслѣ.

Выдвинутое въ такую далекую эпоху общеобразовательное значеніе геометріи признавалось всегда и вездѣ, гдѣ только заботились о развитіи человѣческаго ума; новѣйшее время внесло сюда еще нѣкоторыя новыя черты.

Стремясь къ гармоническому развитію всѣхъ человѣческихъ способностей, современная педагогика не могла упустить изъ виду, что занятіе геометрическими вопросами должно развивать нашу способность представлять себѣ пространственные объекты—пространственную интуицію,—и такимъ путемъ благотворно вліять на развитіе воображенія вообще.

Наконецъ, основа нашей культуры—техническій прогрессъ—требуетъ отъ каждаго ремесленника minimum'а геометрическихъ знаній и умѣнья распоряжаться ими; а для послѣдняго въ свою очередь необходимъ извѣстный minimum общаго развитія.

Что касается самихъ учащихся, то для нихъ геометрія является несомнѣнно наиболѣе усвояемымъ и интереснымъ отдѣломъ математики; преподаваніе геометріи облегчается и оживляется чертежами, призывомъ къ воображенію; въ геометрическихъ образахъ ученикъ видитъ идеальныя схемы предметовъ, съ которыми онъ сталкивается въ повседневной жизни; едва-ли найдется много дѣтей, у которыхъ при знакомствѣ съ шаромъ не всплыло-бы воспоминаніе объ апельсинѣ или арбузѣ.

Благодаря изложеннымъ причинамъ, геометрія имѣетъ выдающееся значеніе, какъ предметъ общаго и спеціально-математическаго образованія. Помимо сообщенія начальныхъ геометрическихъ свѣдѣній, мы видимъ цѣль ея преподаванія въ развитіи двухъ умственныхъ способностей: интуиціи пространства и логическаго мышленія.

Ни для кого не секретъ, что эта цѣль въ современной школѣ не осуществляется въ достаточной мѣрѣ. Недаромъ за послѣднее время мы постоянно слышимъ о новыхъ методахъ преподаванія геометріи; недаромъ вопросъ о реформѣ преподаванія математики вышелъ уже за предѣлы національнаго обсужденія, и создалась международная комиссія, посвятившая себя изученію всѣхъ относящихся сюда матеріаловъ.

Да и каждый изъ насъ, имѣющій дѣло съ оканчивающими или окончившими среднее учебное заведеніе, убѣждается въ справедливости сказаннаго своей повседневной дѣятельностью; не говоря о невысокомъ вообще уровнѣ спеціальныхъ знаній, учащіеся поражаютъ почти полнымъ отсутствіемъ пространственнаго воображенія; представить себѣ простѣйшій случай пересѣченія 2 обыкновенныхъ цилиндровъ подъ прямымъ угломъ—является для многихъ непосильнымъ требованіемъ. Что же касается задачи формировать умъ, выпускать молодыхъ людей съ привычкой и потребностью логическаго мышленія, чуткихъ ко всякому логическому диссонансу—задачи, осуществленіе которой возложено конечно не на одну геометрію,—то она оставалась всегда лишь pium desiderium средней школы.

Причины неудовлетворительной постановки средняго образованія у насъ многочисленны и разнообразны, обсужденіе ихъ должно происходить въ болѣе широкой аудиторіи; мы же, спеціалисты въ извѣстной области, поищемъ и спеціальныхъ причинъ, дѣйствующихъ наравнѣ съ общими.

Возможный главный пунктъ обычнаго изложенія геометріи намѣчается самъ собою, если вспомнить указанную нами двоякую цѣль ея преподаванія; въ самомъ дѣлѣ, если мы ставимъ себѣ двѣ различныхъ цѣли: развитіе интуиціи пространства съ одной стороны и логическаго мышленія съ другой, то невольно является вопросъ, находятся ли эти различныя стороны дѣла въ должной гармоніи; отведено ли въ процессѣ построенія геометріи должное мѣсто различнымъ методологическимъ моментамъ—интуиціи и логикѣ?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, бросимъ критическій взглядъ на обычное обоснованіе геометріи; такъ какъ при этомъ мы не желаемъ критиковать составителя того или другого учебника, а ставимъ себѣ цѣлью разсмотрѣть извѣстное направленіе весьма почтенной давности, то, минуя современныя руководства, обратимся къ ихъ первоисточнику — Евклиду.

«Началамъ» предпослано собраніе опредѣленій, постулатовъ, аксіомъ; по мысли автора это должно быть единственной предпосылкой всего послѣдующаго; такъ что предложенія геометріи должны явиться логическими слѣдствіями изъ небольшого числа основныхъ, принятыхъ безъ доказательства. Великая заслуга Евклида и заключается въ созданіи такого идеала; что касается его осуществленія, то лишь самое послѣднее время сдѣлало нѣкоторые успѣхи въ этомъ направленіи. Первое предложеніе «Началъ» ставитъ задачу: «На данной конечной прямой AB построить равносторонній треугольникъ». Для ея рѣшенія дѣлается построеніе 2 круговъ съ центрами въ A и B и съ общимъ радіусомъ AB; точка ихъ пересѣченія C соединяется съ A и B; затѣмъ доказывается, что Δ ABC будетъ искомымъ. Каждый шагъ въ этомъ разсужденіи можно обосновать ссылкой на соотвѣтствующій постулатъ или аксіому за однимъ бросающимся въ глаза исключеніемъ: существованіе точки C пересѣченія нашихъ окружностей не вытекаетъ изъ предпосылокъ, перечисленныхъ во введеніи; конечно, чертежъ съ полной очевидностью свидѣтельствуетъ, что упомянутые круги пересѣкаются; но также очевидно, что 2 точки опредѣляютъ прямую, что равныя порознь третьему равны между собой; однако послѣднія утвержденія внесены въ число предпосылокъ геометріи, и Евклидъ открыто на нихъ ссылается. Такимъ образомъ, мы видимъ здѣсь пробѣлъ: разсужденіе можно оправдать лишь призывомъ къ непосредственной интуиціи; такъ что результатъ уже 1-го предложенія нельзя считать логическимъ слѣдствіемъ принциповъ. Переходя къ 4-му предложенію, гдѣ идетъ рѣчь объ одномъ случаѣ равенства треугольниковъ, мы встрѣчаемся съ методомъ положенія, которымъ Евклидъ пользуется въ планиметріи всего 2 раза; авторъ какъ-бы чувствовалъ, что здѣсь не все обстоитъ благополучно, и по возможности избѣгалъ его примѣненія. Дѣйствительно для этого имѣются вѣскія основанія.

Примѣняя методъ положенія, мы вводимъ въ геометрію чуждое ей понятіе движенія и даемъ поводъ для весьма серьзныхъ сомнѣній. Въ самомъ дѣлѣ, обладать движеніемъ можетъ лишь нѣчто матеріальное; геометрическія точки не матеріальны, онѣ суть извѣстныя мѣста въ пространствѣ; и допустить ихъ движеніе—значитъ допустить абсурдное положеніе, что различныя мѣста въ пространствѣ могутъ совпадать, т. е. быть однимъ и тѣмъ же мѣстомъ. Такъ что, если мы все-таки желаемъ налагать наши треугольники одинъ на другой, то необходимо мыслить ихъ матеріальными и притомъ абсолютно твердыми. Но существуютъ-ли вообще абсолютно-твердыя тѣла? и развѣ не устанавливаемъ мы самое понятіе такого тѣла на разработанномъ уже ученіи о равенствѣ геометрическихъ образовъ? Въ такомъ случаѣ является опасность попасть въ безъисходный заколдованный кругъ. Между тѣмъ доказать 4-ое предложеніе Евклида или какое-либо другое, ему равносильное, безъ помощи движенія нельзя; исходъ можетъ быть только одинъ: принять одно изъ такихъ предложеній безъ доказательства, въ качествѣ основной предпосылки геометріи, и отсюда уже вывести логически все ученіе о конгруэнціи, т. е. о геометрическомъ равенствѣ.

Есть впрочемъ возможность обосновать геометрію на понятіи движенія, какъ это дѣлаютъ не безъ успѣха нѣкоторые современные ученые; однако эти авторы понимаютъ подъ движеніемъ нѣчто совершенно отличное отъ того, что связывается съ этимъ понятіемъ въ механикѣ и въ повседневной жизни; именно, они оставляютъ въ сторонѣ самый процессъ движенія, непрерывный переходъ изъ одного положенія въ другое съ теченіемъ времени, а довольствуются лишь разсмотрѣніемъ начальной и конечной стадіи его, движеніе здѣсь является ничѣмъ инымъ, какъ извѣстнаго рода геометрическимъ преобразованіемъ, благодаря которому нѣкоторой фигурѣ въ одной части пространства соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная фигура въ другой; при этомъ и каждой точкѣ первой соотвѣтствуетъ опредѣленная точка послѣдней. Вотъ если поставить во главѣ такое понятіе движенія, если далѣе открыто постулировать всѣ важнѣйшія свойства этого преобразованія, которыя такимъ образомъ дадутъ содержаніе аксіомамъ, — то на этомъ основаніи можно построить систему геометріи, безукоризненную съ точки зрѣнія формальной логики. Указаннымъ путемъ идетъ Піери; взявъ въ качествѣ основныхъ понятія: «точка» и «движеніе», онъ формулируетъ въ аксіомахъ свойства нужнаго ему движенія; точно также въ «Опытѣ обоснованія Евклидовой геометріи» пр.-доц. Кагана мы встрѣчаемся съ движеніемъ, которое опредѣляется, какъ извѣстное «сопряженіе» или отображеніе пространства въ самомъ себѣ. Нѣкоторые считаютъ подобный способъ обоснованія геометріи наиболѣе подходящимъ и для средней школы; мы позволяемъ себѣ въ этомъ сомнѣваться. Ввести въ курсъ геометріи движеніе такимъ, какимъ оно извѣстно всякому школьнику, мѣшаютъ формально-логическія соображенія; вводить же подъ именемъ движенія группу геометрическихъ преобразованій, принципіально отличную отъ движенія механическаго,—не значитъ ли это породить безнадежную путаницу въ умахъ учащихся, еще не привыкшихъ къ тонкимъ логическимъ различіямъ?

Вернемся однако къ Евклиду. Можно указать еще одинъ существенный пробѣлъ въ системѣ его предпосылокъ; мы имѣемъ въ виду отсутствіе аксіомъ расположенія, опредѣляющихъ понятіе «между» и позволяющихъ приписать извѣстный порядокъ точкамъ прямой, плоскости и пространства. Обычно вопросы подобнаго рода—напр.: лежитъ ли такая-то точка прямой между двумя данными, или нѣтъ—рѣшаются на основаніи чертежа, т. е. призывомъ къ непосредственной интуиціи; неудобство этого ясно: невѣрный чертежъ можетъ повести къ невѣрному заключенію, извѣстный порадоксъ, что всѣ треугольники равнобедренны, основанъ именно на чертежѣ, грѣшащемъ противъ понятія «между». Другое дѣло, если въ нашемъ распоряженіи будетъ необходимое число аксіомъ, исчерпывающихъ свойства указаннаго понятія; основываясь на нихъ и оставаясь конечно въ согласіи съ логикой, мы будемъ застрахованы отъ невѣрныхъ выводовъ. Примѣромъ такихъ аксіомъ, на необходимость которыхъ впервые указалъ Пашъ въ 1882 г., можетъ служить одна изъ аксіомъ Гильберта: изъ трехъ точекъ прямой одна и только одна лежитъ между двумя другими.

На изложеніи Евклида мы видимъ, что обычный способъ построенія геометріи прибѣгаетъ къ двумъ пріемамъ, существенно различнымъ съ методологической точки зрѣнія; именно, онъ пользуется и непосредственной интуиціей пространства и логической дедукціей на основаніи аксіомъ. Не въ этой ли двойственности заключается причина не совсѣмъ удовлетворительныхъ результатовъ, достигаемыхъ преподаваніемъ геометріи? Намъ представляется вполнѣ допустимымъ, что постоянные призывы къ интуиціи, нарушая логическій ходъ мысли, мѣшаютъ осуществленію той цѣли нашей науки, которую ставили такъ высоко Платонъ и Евклидъ; съ другой стороны, выдвиганіе на первый планъ по примѣру великаго геометра древности логической стороны, хотя и не вполнѣ выдержанное, не даетъ достаточнаго простора нашей способности пространственнаго воображенія и задерживаетъ ея развитіе. Такимъ образомъ, преслѣдуя одновременно двѣ различныхъ цѣли, мы не достигаемъ ни одной и тѣмъ лишній разъ подтверждаемъ извѣстную пословицу.

Естественно напрашивается выводъ: нужно отъ этой двойственности такъ или иначе избавиться; нужно, чтобы построеніе геометріи было проникнуто единствомъ метода. Вопросъ о томъ, удастся ли тогда сохранить двоякую цѣль преподаванія геометріи и не придется ли для этого вмѣсто одного курса ввести два, мы оставимъ пока въ сторонѣ. Прежде всего мы должны сравнить оба возможныхъ метода обоснованія геометріи съ точки зрѣнія достовѣрности получаемыхъ результатовъ. Вѣдь если наша интуиція пространства въ состояніи доставлять намъ предложенія, обладающія всей достовѣрностью логическаго вывода, то вполнѣ естественно будетъ предпочесть непосредственное познаваніе истины обходному пути дискурсивнаго мышленія. И такой путь вовсе бы не былъ чѣмъ-то совершенно новымъ въ геометріи: есть свидѣтельства, что индусы, сдѣлавъ необходимыя построенія, все доказательство заключали въ одномъ словѣ «смотри!» Въ сравнительно недавнее время Шопенгауэръ всей силой своего генія обрушился на обычное доказательство пиѳагоровой теоремы и требовалъ, чтобы оно было замѣнено чертежомъ, который, разлагая квадраты на части, дѣлалъ бы очевиднымъ съ перваго взгляда, что одинъ изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ другихъ.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ необходимости подвергнуть критическому разсмотрѣнію нашу способность воспринимать свойства пространственныхъ образовъ.

Оставаясь въ области элементарной геометріи, можно уже указать факты, говорящіе не въ пользу непогрѣшимости интуиціи. Возможность подобныхъ фигуръ, т. е. измѣненія размѣровъ тѣла при полномъ сохраненіи его формы принадлежитъ къ числу наиболѣе очевидныхъ положеній, доставляемыхъ намъ интуиціей пространства; исходя изъ этого замѣчанія, Валлисъ предлагалъ даже замѣнить аксіому параллелей принципомъ возможности подобія, какъ болѣе очевиднымъ.

Возьмемъ далѣе неограниченную прямую; возможность продолжать ее въ обѣ стороны до безконечности въ связи съ существеннымъ свойствомъ прямой—неизмѣнностью направленія—какъ будто-бы заставляетъ насъ приписать прямой 2 различныя безконечно-удаленныя точки. Между тѣмъ оба эти факта—существованіе подобныхъ фигуръ и двѣ различныхъ точки въ безконечности у прямой—оказываются логически несогласуемыми.

Въ самомъ дѣлѣ, геометрія Евклида имѣетъ подобныя фигуры; но прямой этой геометріи приходится приписать лишь одну точку на безконечности, если вообще говорить о такихъ точкахъ. Напомнимъ основанія указаннаго заключенія, которое поражаетъ всякаго учащагося, впервые узнающаго объ этомъ. Изъ аналитической геометріи извѣстно, что координаты любой точки прямой можно выразить формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

откуда видно, что x и y обращаются въ ∞ лишь при одномъ значеніи $\lambda = -1$. Къ тому же выводу приводитъ и изслѣдованіе пересѣченія 2 прямыхъ, изъ которыхъ одна вращается вокругъ нѣкоторой точки: каждому положенію прямой, за исключеніемъ случая параллельности, отвѣчаетъ одна опредѣленная точка; такъ что если и для этого исключительнаго случая допустимъ существованіе особой—безконечно удаленной—точки, то вполнѣ цѣлесообразно будетъ принять ея единственность у всякой прямой. Наоборотъ, въ неевклидовой геометріи, именно въ системѣ Лобачевскаго, вполнѣ естественно приписать прямой 2 точки на безконечности соотвѣтственно двумъ параллелямъ, которыя можно провести изъ данной точки къ данной прямой; но въ этой геометріи нѣтъ подобныхъ фигуръ: равенство 3 угловъ достаточно для равенства треугольниковъ. Можно, конечно, возразить, что указанный вопросъ усложняется привходящей идеей безконечности; но въ теоріи параллелей—весьма существенной части нашей науки—нельзя совсѣмъ обойтись безъ этой идеи.

Мы только что упомянули о неевклидовой геометріи; самая возможность ея нанесла весьма тяжелый ударъ вѣрѣ въ непреложность интуиціи. Что касается ученія о пространствѣ и изслѣдованія его свойствъ геометріей, то долгое время господствовали и частью господствуютъ теперь воззрѣнія Канта. По ученію кёнигсбергскаго философа, пространство есть необходимая форма нашего внѣшняго чувства, въ которую неизбѣжно отливается все то, что оно намъ доставляетъ; форма эта не только не создается опытомъ, но она его обуславливаетъ: внѣ пространства, опытъ невозможенъ. Разсматривая нашу интуицію пространства, мы непосредственно постигаемъ ея основныя свойства, напр. трехмѣрность, и строимъ такимъ образомъ систему геометріи; сила послѣдней, ея всеобщность и необходимость въ томъ именно и заключаются, что она лишь формулируетъ законы пространства, которые, благодаря его апріорности неизбѣжно осуществляются въ опытѣ; явленіе внѣшняго міра, которое опровергало-бы геометрію, есть абсурдъ. Мы готовы подписаться подъ этимъ, по скольку дѣло идетъ не о построеніи отвлеченной системы геометріи—что собственно и является единственной задачей чистой математики—а объ изученіи свойствъ реальнаго пространства нашего ежедневнаго опыта.

Однако возникаетъ сомнѣніе, доступно ли для насъ въ полной мѣрѣ исчерпывающая и безошибочная формулировка свойствъ пространства, какъ необходимой формы нашего ума, и это сомнѣніе получаетъ значительную поддержку со стороны неевклидовыхъ системъ (Лобачевскаго и Римана). Три системы геометріи исходятъ изъ совершенно различныхъ предпосылокъ: у Евклида имѣется одна параллельная къ данной прямой черезъ данную точку, у Лобачевскаго—двѣ, у Римана—ни одной; ихъ результаты существенно различны (вспомнимъ хотя-бы о подобныхъ фигурахъ); между тѣмъ оказывается, что распоряжаясь извѣстной постоянной, входящей въ формулы неевклидовыхъ геометрій, можно удовлетворить всѣмъ требованіямъ опыта при помощи любой изъ этихъ системъ. Кромѣ того, въ настоящее время доказано, что неевклидовы геометріи въ той же мѣрѣ застрахованы отъ внутреннихъ противорѣчій, какъ и геометрія Евклида, т. е. различныя допущенія о параллеляхъ одинаково согласуемы съ другими основными свойствами пространства, о которыхъ свидѣтельствуетъ наша интуиція. Эти факты подрываютъ нашу вѣру въ способность интуиціи безошибочно и полно устанавливать соотношенія между геометрическими образами.

Недостаточность интуиціи для чистой математики вообще и геометріи въ частности становится еще убѣдительнѣе, если обратиться къ высшимъ отраслямъ нашей науки. Проф. Клейнъ неоднократно возвращается къ этому вопросу въ своихъ лекціяхъ; непрерывная кривая Вейерштрасса, не имѣющая опредѣленной касательной ни въ одной изъ своихъ точекъ; кривая Пеано, заполняющая площадь квадрата; нѣкоторыя построенія изъ близкой геттингенскому ученому теоріи автоморфныхъ функцій,—все это даетъ ему поводъ подчеркнуть полное безсиліе интуиціи тамъ, гдѣ съ помощью строго установленныхъ опредѣленій и логически связанныхъ разсужденій мы остаемся полными господами положенія.

Слѣдовательно, если мы строимъ геометрію не какъ опытную науку, а въ качествѣ особаго отдѣла чистой математики, то мы не имѣемъ права отводить интуиціи рѣшающее значеніе въ разсужденіяхъ. Это не значитъ, конечно, совсѣмъ изгнать изъ геометріи интуицію и съ нею вмѣстѣ чертежи; послѣдніе останутся всегда могучимъ подспорьемъ, и не только при открытіи новыхъ истинъ; веденіе доказательства значительно облегчается наличіемъ чертежа, который позволяетъ все время имѣть передъ глазами объекты разсужденія, обозрѣвать сдѣланныя уже построенія и закрѣплять новыя. Не надо только основываться исключительно на чертежѣ, всякій шагъ въ доказательствѣ долженъ быть логическимъ слѣдствіемъ или одной изъ нашихъ аксіомъ, или ранѣе доказанной теоремы. Словомъ, мы можемъ смѣло допустить интуицію къ участію въ построеніи геометріи, но только съ совѣщательнымъ голосомъ.

Мы подошли здѣсь къ основному положенію современныхъ ученій объ основаніяхъ геометріи. Послѣднія ведутъ начало отъ работъ комментаторовъ Евклида и въ теченіи 2000 лѣтъ исключительно имѣли своимъ предметомъ теорію параллелей. Построеніе неевклидовыхъ системъ рѣшило эту частную задачу, установивъ независимость V-го постулата отъ другихъ предпосылокъ геометріи. Вполнѣ естественно было поставить подобный вопросъ и по отношенію къ другимъ аксіомамъ, изслѣдовать ихъ взаимную независимость, согласуемость и вообще подвергнуть всю систему геометріи логико-философскому анализу. Такъ возникла современная аксіоматика.

Слѣдуя итальянскому геометру Бонола, можно всѣ работы объ основаніяхъ геометріи раздѣлить на 3 большихъ группы въ зависимости отъ ихъ направленія. Первое направленіе можно обозначить терминомъ «метрико-дифференціальное»; оно кладетъ въ основу понятіе движенія, какъ непрерывной группы преобразованій, и пользуется ученіемъ о такихъ группахъ, разработаннымъ главнымъ образомъ С. Ли; сюда же надо отнести изслѣдованія, исходящія изъ выраженія для элемента линіи или поверхности и основанныя на общемъ ученіи о линіяхъ и поверхностяхъ. Кромѣ С. Ли съ работами въ этой области связаны имена Римана, Гельмгольца, Бельтрами. Мы видимъ, что здѣсь дѣло идетъ о высшихъ отрасляхъ математическаго анализа. Второе направленіе можно охарактеризовать словомъ «проективное»; оно начинаетъ съ обоснованія проективной геометріи; послѣдняя отвлекается отъ всякихъ метрическихъ свойствъ пространственныхъ образовъ и вращается въ кругѣ идей о положеніи ихъ, каковы: взаимная принадлежность точки и прямой, расположеніе точекъ на прямой и т. п. Затѣмъ вводятся т.-наз. проективныя координаты, и съ помощью общихъ теорій аналитической геометріи даются понятія о разстояніи и углахъ, при чемъ существенную роль играетъ особымъ образомъ выбранное коническое сѣченіе. Легко видѣть, что и эти изслѣдованія, съ которыми связаны имена Кэли и Клейна, стоятъ довольно далеко отъ начальнаго математическаго образованія. Наконецъ третье направленіе, извѣстное подъ именемъ «элементарнаго», всецѣло находится въ кругѣ идей и методовъ элементарной геометріи; здѣсь необходимо назвать работы Паша, Пеано, Веронезе, Гильберта и многихъ другихъ. Несмотря на огромное принципіальное значеніе изслѣдованій въ первыхъ двухъ направленіяхъ, только послѣднее можно привести въ непосредственное соприкосновеніе съ работой средней школы; только его выводы и методы могутъ непосредственно вліять на преподаваніе началъ геометріи. На этомъ основаніи въ дальнѣйшемъ мы и будемъ имѣть въ виду главнымъ образомъ элементарное направленіе въ современной аксіоматикѣ.

Первая заповѣдь этой науки гласитъ, что всякое понятіе, которое мы встрѣчаемъ въ системѣ геометріи, или должно быть принято за первоначальное, или опредѣлено черезъ другія, выбранныя уже въ качествѣ первоначальныхъ; точно такъ же всякое предложеніе или принимается открыто безъ доказательства, т. е. входитъ въ число аксіомъ, или доказывается по правиламъ формальной логики на основаніи аксіомъ. Выборъ основныхъ понятій и предложеній до извѣстной степени произволенъ; здѣсь нужно руководствоваться цѣлесообразностью: наши предпосылки прежде всего должны быть достаточны для построенія геометріи. Опредѣленіе первоначальныхъ понятій является безсмысленнымъ требованіемъ; то, что встрѣчаемъ иногда подъ этимъ именемъ у Евклида и его послѣдователей, въ сущности вовсе не опредѣленія, а описанія основныхъ геометрическихъ образовъ [напр., «точка есть то, что не имѣетъ частей», «линія есть длина безъ ширины», и т. п.]; эти описанія, помимо нѣкоторыхъ возбуждаемыхъ ими сомнѣній, совершенно излишни для геометріи. Авторы (въ томъ числѣ и Евклидъ), ставящіе ихъ во главу системы, на самомъ дѣлѣ нигдѣ ими не пользуются при дѣйствительномъ изложеніи геометріи; за то буквально на каждомъ шагу необходимо ссылаться на аксіомы или постулаты, выражающіе основныя соотношенія между нашими первоначальными понятіями, ихъ важнѣйшія свойства, или утверждающіе существованіе извѣстныхъ объектовъ. Такимъ образомъ, съ точки зрѣнія формальной логики первоначальныя понятія лишены всякаго содержанія, за исключеніемъ того, которое вкладывается въ нихъ аксіомами; такая точка зрѣнія вполнѣ достаточна для геометріи, какъ отвлеченной дедуктивной науки, какъ отрасли чистой математики. Если же подъ геометріей понимать науку о нашемъ реальномъ пространствѣ—и это будетъ одно изъ множества возможныхъ истолкованій указанной отвлеченной системы,—то каждому его непосредственная интуиція подскажетъ, какіе именно пространственные образы понимаются подъ точкой, прямою, плоскостью. Помимо логической необходимости указаннаго воззрѣнія на первоначальныя понятія, послѣднее является и въ высшей степени плодотворнымъ съ точки зрѣнія экономіи мысли. Въ самомъ дѣлѣ, если мы не вкладываемъ въ основныя понятія никакого иного содержанія кромѣ того, которое утверждается въ аксіомахъ, то очевидно всякая система объектовъ, удовлетворяющихъ въ качествѣ основныхъ понятій нашимъ предпосылкамъ, удовлетворитъ и всѣмъ слѣдствіямъ изъ нихъ; непремѣннымъ условіемъ является исполненіе требованія, чтобы всѣ выводы имѣли своимъ единственнымъ основаніемъ явно формулированныя аксіомы и, кромѣ того, лишь законы общей логики. При соблюденіи этого правила возможно почти безграничное использованіе разъ совершенной кропотливой работы строго дедуктивнаго построенія геометріи; возможно различное истолкованіе полученныхъ результатовъ. Одинъ примѣръ такого использованія извѣстенъ сравнительно давно и получилъ права особаго метода; мы имѣемъ въ виду законъ взаимности въ проективной геометріи. Дѣло въ томъ, что предпосылки этой науки допускаютъ перестановку словъ «точка» и «плоскость» одного на мѣсто другого; при чемъ другія понятія, какъ-то: «прямая», «лежать на» и нѣкоторыя иныя, остаются безъ измѣненія. Наприм.: «3 точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ плоскость» и «3 плоскости, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ точку (ихъ пересѣченія)»; «2 точки опредѣляютъ прямую» и «2 плоскости опредѣляютъ прямую». Надо замѣтить, что эти предложенія можно получить изъ обычныхъ, подверженныхъ извѣстнымъ исключеніямъ (2 плоскости не всегда пересѣкаются) путемъ введенія т.-наз. идеальныхъ элементовъ. Если при обоснованіи проективной геометріи мы строго держались аксіомъ, то возможность указанной перестановки понятій въ аксіомахъ дѣлаетъ ее законной и во всѣхъ выводахъ изъ нихъ; въ этомъ и заключается законъ взаимности. Такимъ образомъ, подъ отвлеченнымъ основнымъ понятіемъ «точка» проективной геометріи можно съ одинаковымъ правомъ понимать какъ обыкновенную интуитивную точку, такъ и обыкновенную плоскость. Законъ взаимности извѣстенъ давно, но только современныя воззрѣнія на методъ геометріи ставятъ его внѣ всякихъ сомнѣній, если же мы при построеніи нашей науки будемъ отводить рѣшающее значеніе интуиціи пространства, то его положеніе становится шаткимъ: съ интуитивной точки зрѣнія плоскость и точка существенно различны, и доказанное для одной нельзя переносить безъ дальнѣйшихъ разсужденій на другую. Прекрасные примѣры подобныхъ истолкованій основныхъ понятій можно найти въ энциклопедіи элементарной геометріи Веберъ-Вельштейна; тамъ указанъ общій методъ, позволяющій любую теорему обычной геометріи истолковать, какъ предложеніе, выражающее извѣстное свойство весьма сложныхъ пространственныхъ образовъ.

Выше было указано, что при формулировкѣ предпосылокъ геометріи допустимъ нѣкоторый произволъ; однако, кромѣ условія цѣлесообразности, послѣдній ограниченъ и другими требованіями. Прежде всего система аксіомъ должна быть свободной отъ внутреннихъ противорѣчій; мы должны быть увѣрены, что при построеніи геометріи никогда не натолкнемся на два факта, одинаково вытекающіе изъ всей совокупности аксіомъ и противорѣчащіе другъ другу; другими словами мы должны доказать согласуемость нашихъ предпосылокъ.

Пока этого не сдѣлано, не исключена возможность, что рано или поздно наша система окажется несостоятельной; только изслѣдованія подобнаго рода могли установить право на существованіе неевклидовыхъ системъ; что же касается евклидовой, то до послѣдняго времени она опиралась лишь на право давности. Доказательства согласуемости той или другой системы аксіомъ можно достигнуть, указавъ совокупность реально существующихъ объектовъ, въ которой выполняется наша система; а то, что существуетъ, по основному принципу нашей познавательной способности, не можетъ заключать въ себѣ противорѣчія. Въ частности согласуемость предпосылокъ евклидовой геометріи доказывается построеніемъ особаго аналитическаго пространства; условимся подъ «точкой» понимать совокупность 3 вещественныхъ чиселъ (x, y, z)

взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ. Само собою разумѣется, что при этомъ надо совершенно отрѣшиться отъ знанія аналитической геометріи: вѣдь дѣло идетъ о началахъ всякой геометріи. Тогда подъ «плоскостью» условимся понимать не что иное, какъ собраніе такихъ троекъ (x, y, z), которыя удовлетворяютъ уравненію $Ax+By+Cz+D=0$, при постоянныхъ A, B, C, D. Основываясь на данныхъ алгебры, нетрудно доказать, что 3 «точки» вообще опредѣляютъ «плоскость», ибо 3-хъ уравненій вообще достаточно для опредѣленія отношенія 3 коэффиціентовъ къ 4-му, и т. д. Подробности можно найти у Гильберта и въ упомянутой уже книгѣ Веберъ-Вельштейна. Такимъ образомъ, согласуемость геометрическихъ аксіомъ устанавливается при помощи уже существующей совокупности вещественныхъ чиселъ; изъ послѣдней выбираются такія ариѳметическія комбинаціи, которыя при надлежащемъ истолкованіи основныхъ дѣйствій надъ ними выполняютъ всѣ предпосылки геометріи. Въ конечномъ счетѣ дѣло сводится къ согласуемости аксіомъ ариѳметики. Невозможность противорѣчія въ евклидовой системѣ будетъ доказана лишь при условіи, что таковое невозможно въ ученіи о вещественныхъ числахъ. Геометрія можетъ поставить здѣсь точку; замѣтимъ, что аксіомы ариѳметики нѣкоторые изслѣдователи послѣдняго времени (Пеано, Фреге, Рёссель) сводятъ къ законамъ общей или т.-наз. символической логики.

Помимо согласуемости, основныя предложенія должны обладать взаимной независимостью; дѣйствительно, если какое-либо изъ нихъ можно доказать при помощи другихъ, то ему не мѣсто среди аксіомъ; оно должно быть помѣщено въ число теоремъ. Для доказательства независимости предложенія A отъ предложеній B, C, D... нужно установить, что отрицаніе A совмѣстимо съ утвержденіемъ остальныхъ; т. е. нужно доказать согласуемость системы не—A, B, C, D... На основаніи предыдущаго мы должны найти такую систему объектовъ, которые удовлетворяютъ аксіомамъ B, C, D... и не удовлетворяютъ A; такимъ именно, путемъ устанавливается независимость постулата параллелей отъ другихъ предпосылокъ геометріи, другими словами, возможность неевклидовой геометріи.

Изслѣдованія независимости или зависимости извѣстнаго предложенія отъ опредѣленной системы постулатовъ составляютъ существенную часть книги Гильберта; въ указанной уже работѣ прив.-доц. Каганъ даетъ исчерпывающее доказательство взаимной независимости его постулатовъ.

Мы указали два условія, которымъ должны удовлетворять предпосылки геометріи; однако къ ихъ нарушенію приходится отнестись совершенно различнымъ образомъ. Тогда какъ невыполненіе перваго—согласуемости—лишаетъ данную систему аксіомъ всякой цѣны, отсутствіе второго—независимости—дѣлаетъ ее лишь менѣе выработанной, менѣе изящной; но, конечно, она можетъ служить основаніемъ для геометріи. Вслѣдствіе этого, нѣкоторые авторы (Энрикесъ), имѣя въ виду школьные курсы, даже предпочитаютъ класть въ основу систему предпосылокъ, завѣдомо не удовлетворяющихъ требованію независимости; они считаютъ цѣлесообразнымъ почерпнуть какъ можно болѣе простѣйшихъ фактовъ изъ интуиціи пространства; а далѣе уже соблюдаютъ полную строгость изложенія, не дѣлая болѣе призывовъ къ непосредственному возрѣнію. Несомнѣнно такое построеніе геометріи, если его и нельзя считать совершеннымъ, ничѣмъ однако не грѣшитъ противъ правила, чтобы выводы были логическими слѣдствіями предпосылокъ.

Послѣ этихъ общихъ замѣчаній посмотримъ, какъ въ дѣйствительности происходитъ выборъ основныхъ понятій и предложеній. Что касается первыхъ, то все зависитъ отъ того, насколько далеко идетъ авторъ въ логическомъ анализѣ основъ геометріи; исходя изъ этого соображенія, можно намѣтить 3 различныхъ теченія.

Первое, наиболѣе послѣдовательное въ процессѣ расчлененія геометрическихъ понятій, принимаетъ въ качествѣ первоначальнаго лишь одно понятіе «точки». Валенъ удовлетворенно замѣчаетъ, что дальше итти некуда, такъ какъ въ геометріи должно быть по крайней мѣрѣ одно особое понятіе, присущее исключительно ей; однако Рёссель въ согласіи съ тѣмъ, что мы выше говорили о неопредѣленности смысла основныхъ понятій, утверждаетъ, что «точка» даже и не особое понятіе, характерное для геометріи, а просто названіе тѣхъ элементовъ изъ которыхъ она строитъ свои образы; а понимать подъ этимъ, словомъ можно въ сущности все, что угодно. При такомъ допущеніи прямая и плоскость опредѣляются, какъ извѣстные классы точекъ посредствомъ указанія ихъ свойствъ, выдѣляющихъ названныя совокупности изъ множества всѣхъ точекъ. Вообще всѣ понятія геометріи, по мнѣнію Рёсселя, виднаго сторонника новой логико-математической школы, сводятся въ концѣ концовъ къ понятіямъ общей логики, какъ-то: классъ, принадлежность индивидуума къ своему классу, соотношеніе (relation) и др.; среди нашихъ элементовъ — «точекъ» — мы устанавливаемъ при помощи системы аксіомъ тѣ или другія соотношенія, опредѣляя ихъ въ основныхъ понятіяхъ логики; отъ характера этихъ соотношеній зависятъ свойства геометрической системы; наприм., мы можемъ прійти къ геометріи евклидовой или неевклидовой. Для Рёсселя чистая математика есть не что иное, какъ спеціальная глава изъ логики; въ частности геометрія есть изученіе рядовъ двухъ и болѣе измѣреній, тогда какъ элементарный анализъ имѣетъ дѣло съ вещественными числами — рядомъ одного измѣренія (комплексныя числа приходится отнести въ область геометріи).

Если же разсматривать геометрію, какъ науку о дѣйствительномъ пространствѣ, то это уже будетъ наука прикладная.

Второе теченіе выражаетъ болѣе умѣренные взгляды: на ряду съ точкой оно допускаетъ еще какое-либо понятіе въ качествѣ основного; таковымъ является или движеніе (Піери), или соотношеніе порядка между 3 точками (Вебленъ), или прямолинейный отрѣзокъ (Пеано, Пашъ); мы не ставимъ себѣ здѣсь цѣлью полное перечисленіе всевозможныхъ случаевъ, а желаемъ лишь дать общую характеристику различныхъ направленій. Само собою понятно, что это второе теченіе ведетъ къ обоснованію геометріи болѣе короткимъ путемъ, цѣною быть можетъ, логическаго изящества перваго; имѣется попытка Тиме написать учебникъ геометріи, исходя изъ понятій точки и отрѣзка. Наконецъ третье теченіе, не заботясь вовсе о minimum'ѣ первоначальныхъ понятій, подходитъ еще ближе къ элементамъ; сюда надо отнести работы Гильберта и Амальди, при чемъ послѣдній въ сотрудничествѣ съ Энрикесомъ написалъ даже учебникъ геометріи. Названные авторы берутъ въ качествѣ основныхъ всѣ понятія, которыя являются важнѣйшими въ геометрическомъ мышленіи и которымъ соотвѣтствуютъ простѣйшіе интуитивные образы; таковы понятія точки, прямой, плоскости; сюда же относятся иногда и нѣкоторыя соотношенія между ними, наприм.: параллельность, конгруэнтность и др.—Что касается системы аксіомъ, то она въ значительной мѣрѣ обусловливается выборомъ основныхъ понятій; въ согласіи съ нашимъ стремленіемъ все ближе и ближе подходить къ школьному курсу геометріи, остановимся на только что указанной системѣ первоначальныхъ понятій и посмотримъ, каковы тѣ основныя предложенія, которыя единственно и опредѣляютъ ихъ содержаніе и дѣлаютъ возможными всѣ послѣдующіе выводы. По примѣру Гильберта аксіомы дѣлятся на 5 группъ; каждая постулируетъ однородные факты нашей пространственной интуиціи, стоящіе другъ съ другомъ въ тѣсной связи и образующіе такимъ образомъ нѣчто цѣльное. Вотъ онѣ:

1) Аксіомы сочетанія (или принадлежности), устанавливающія связь между понятіями точекъ, прямыхъ и плоскостей; наприм.: двѣ различныя точки всегда опредѣляютъ прямую. Сюда же относятся аксіомы, утверждающія существованіе извѣстныхъ объектовъ, въ родѣ слѣдующей: имѣется по крайней мѣрѣ 4 точки, не лежащія въ одной плоскости.

2) Аксіомы расположенія, которыя, если имѣть въ виду евклидову геометрію, опредѣляютъ свойства прямой, какъ линіи неограниченной и незамкнутой. Гильбертъ достигаетъ этого, постулируя свойства понятія «между» (см. выше), что позволяетъ сейчасъ же ввести понятіе отрѣзка. Здѣсь нужно установить и свойства плоскости—поверхности безграничной и безконечной, для сказанной цѣли обычно служитъ постулатъ Паша, утверждающій, что прямая, пересѣкающая одну изъ сторонъ треугольника той же плоскости, пересѣкаютъ и другую.

3) Аксіомы конгруенціи, относительно которыхъ Гильбертъ утверждаетъ, что онѣ опредѣляютъ также понятіе движенія; дѣйствительно, движеніе въ его геометрическомъ смыслѣ можно опредѣлить, какъ однозначное преобразованіе, при которомъ соотвѣтственныя фигуры конгруэнтны; впрочемъ, въ этомъ пунктѣ нашему автору недостаетъ различія между образами конгруэнтными и симметричными. Гильбертъ принимаетъ и конгруэнцію отрѣзковъ, и конгруэнцію угловъ за основныя

понятія; послѣдняя аксіома этой группы связываетъ ихъ и въ сущности представляетъ 4-ое предложеніе Евклида, для доказательства котораго былъ примѣненъ методъ наложенія.

4) Аксіома параллелей, которая исключаетъ геометрію Лобачевскаго; что же касается системы Римана, то она уже исключена аксіомами 2-ой группы, опредѣлившими прямую, какъ линію безконечную.

5) Аксіома непрерывности, обычно формулируемая по Дедекинду; Гильбертъ поступаетъ здѣсь совершенно оригинальнымъ образомъ, раздѣливъ ее на двѣ: аксіому измѣренія, или архимедову и аксіому законченности. Аксіома послѣдней группы сообщаетъ пространству свойства непрерывности, которыя грубымъ образомъ воспринимаются и нашей интуиціей. По этому поводу замѣтимъ, что, когда мы желаемъ построить систему геометріи, отвѣчающей пространству нашего опыта, то при выборѣ аксіомъ мы несомнѣнно руководствуемся интуиціей, которая свидѣтельствуетъ объ основныхъ свойствахъ этого пространства; но только то, что въ интуиціи мы постигаемъ въ частной и подчасъ лишь приближенной формѣ, въ аксіомахъ высказывается общимъ и безусловнымъ образомъ. Клейнъ неоднократно повторяетъ въ своихъ лекціяхъ, что аксіомы суть идеализированныя данныя непосредственной интуиціи; выводы изъ нихъ, т. е. вся геометрія, осуществляется въ реальномъ пространствѣ съ точностью, зависящей отъ точности, съ которой осуществляются въ немъ ея предпосылки. Возвращаясь къ аксіомѣ непрерывности, укажемъ, что въ собраніи статей, посвященныхъ вопросамъ геометріи и вышедшихъ подъ общей редакціей Энрикеса, имѣется статья Витали подъ заглавіемъ: «О приложеніяхъ постулата непрерывности въ элементарной геометріи»; въ ней авторъ устанавливаетъ, что этотъ постулатъ, не говоря уже о теоріи измѣренія, необходимъ для доказательства многихъ теоремъ обычнаго курса, какъ наприм.: теорема о пересѣченіи прямой съ окружностью, пересѣченіе 2 круговъ и др.; послѣднее предложеніе, какъ мы видѣли, принимается у Евклида за очевидное.

Таковы исходныя точки геометріи; что касается до метода дальнѣйшихъ построеній, то на основаніи соображеній, изложенныхъ въ предшествующей части нашего реферата, таковымъ должна служить дедукція по правиламъ формальной логики; единственной основой всѣхъ выводовъ должна быть выбранная система аксіомъ и общіе законы логики. Интуиціи, а съ нею вмѣстѣ и чертежамъ отводится лишь подчиненная и вспомогательная роль. Указанная характеристика метода геометріи относится къ нему постольку, поскольку мы говоримъ о доказательствѣ уже найденныхъ истинъ и приведеніи ихъ въ систему; если же рѣчь идетъ объ открытіи новыхъ, то вышеприведенныя соображенія теряютъ силу, ибо вообще логики открытій нѣтъ; послѣднія суть дѣло индивидуальнаго таланта, и всѣ средства—даже грубо эмпирическія—хороши при условіи, что они ведутъ къ цѣли. Но доказательство открытаго должно происходить способомъ, общезначимымъ и общеобязательнымъ для всѣхъ людей; единая логика вступаетъ здѣсь въ свои права. Поэтому, когда методъ геометріи опредѣляютъ, какъ производство умственныхъ опытовъ надъ имѣющимся матеріаломъ—подобное опредѣленіе мы находимъ у Гёльдера,—то здѣсь дѣло идетъ скорѣе объ открытіи новыхъ истинъ, чѣмъ о ихъ доказательствѣ.

Сказанное о геометріи примѣнимо ко всякой другой дедуктивной наукѣ. Издавна старались подмѣтить въ методѣ первой черты, присущія исключительно ей, и таковыя видѣли въ различныхъ построеніяхъ, которыя мы совершаемъ почти при всякомъ геометрическомъ изслѣдованіи. Особенно сильно подчеркнуто это замѣчаніе у Канта, что вполнѣ соотвѣтствуетъ его воззрѣніямъ на методъ математики вообще. Въ «критикѣ чистаго разума», сравнивая возможное поведеніе философа и математика, которымъ предложенъ вопросъ о суммѣ угловъ треугольника, онъ говоритъ: «... (геометръ) продолжаетъ одну изъ сторонъ своего треугольника и получаетъ два смежные угла, сумма которыхъ равна двумъ прямымъ угламъ. Внѣшній изъ этихъ угловъ онъ дѣлитъ, проводя линію, параллельную противоположной сторонѣ треугольника, и замѣчаетъ, что отсюда получается внѣшній смежный уголъ, равный внутреннему и т. д.». Продолженіе стороны треугольника и проведеніе параллели—дѣйствительно существенные моменты извѣстнаго доказательства, что сумма угловъ треугольника равна 2d. Важность построеній признаютъ и современные изслѣдователи началъ геометріи, но только они вносятъ сюда нѣкоторыя поправки. Во-первыхъ—относительно самого слова «построеніе»; когда мы на бумагѣ или на доскѣ строимъ прямую линію, то мы вступаемъ здѣсь уже въ физико-механическую область и получаемъ лишь несовершенную копію геометрическаго образа. Чистой геометріи до всего этого нѣтъ никакого дѣла; ея объекты существуютъ независимо отъ ихъ физическаго воспроизведенія; ихъ существованіе постулируется системой аксіомъ: нѣкоторыя изъ послѣднихъ прямо устанавливаютъ бытіе извѣстныхъ точекъ, прямыхъ, плоскостей, другія — косвенно, говоря объ опредѣлимости однихъ образовъ съ помощью другихъ; такъ что, приступая къ какому-либо изслѣдованію, мы уже имѣемъ въ своемъ распоряженіи все безчисленное множество основныхъ геометрическихъ образовъ. «Мы мыслимъ», говоритъ Гильбертъ: «три различныхъ системы объектовъ; объекты 1-ой мы называемъ точками, объекты 2-ой—прямыми и объекты 3-ей—плоскостями; мы мыслимъ точки, прямыя, плоскости въ извѣстныхъ отношеніяхъ другъ къ другу»; и не строить эти образы намъ нужно, а лишь остановить наше вниманіе, выбрать тотъ изъ нихъ, который выдѣляется изъ множества отдѣльныхъ по опредѣленному правилу. Такъ, наприм., въ предыдущемъ доказательствѣ изъ безчисленной совокупности прямыхъ мы выбираемъ двѣ: одну, которая опредѣляется двумя данными точками—вершинами треугольника, а другую, опредѣляемую точкой и условіемъ параллельности. Изложеннымъ образомъ понимается теперь терминъ «построеніе». Во-вторыхъ, современные изслѣдователи полагаютъ, что прежде всего должна быть доказана возможность «построенія»; другими словами, должно быть установлено, что требуемые образы дѣйствительно существуютъ на основаніи аксіомъ, и во многихъ случаяхъ нужно еще поставить внѣ сомнѣнія ихъ единственность. Въ приведенной выше теоремѣ это предварительное изслѣдованіе исчерпывается ссылкой на основное предложеніе о прямой и на аксіому параллелей; въ другихъ случаяхъ требуется болѣе длинное разсужденіе. Что это требованіе не пустой педантизмъ, видно хотя-бы изъ слѣдующаго примѣра. Возьмемъ теорему, что у двухъ различныхъ треугольниковъ съ соотвѣтственно равными углами (т. е. подобныхъ) сходственныя стороны пропорціональны; въ основѣ ея очевидно лежитъ допущеніе, что такіе треугольники возможны; вотъ это-то допущеніе и должно доказать на основаніи аксіомъ, и необходимость доказательства намъ станетъ ясной, если мы вспомнимъ, что въ геометріи Лобачевскаго такихъ треугольниковъ не существуетъ.

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ убѣжденію, что геометрія развивается благодаря ряду все новыхъ и новыхъ допущеній и выводу слѣдствій изъ нихъ; въ этомъ заключается специфическая особенность ея метода. Нужно различать только допущенія двоякаго рода: основныя, дающія содержаніе аксіомамъ, и производныя, лежащія въ основѣ всякой теоремы; тогда какъ первыя являются исходной точкой всякаго доказательства, вторыя должны быть каждый разъ доказаны на основаніи первыхъ.

Познакомившись съ общими положеніями современной аксіоматики, возвратимся къ тѣмъ вопросамъ, которые у насъ возникли въ связи съ критикой преподаванія геометріи.

Мы видѣли, что настоящее положеніе дѣла неудовлетворительно, потому что тамъ нѣтъ единства метода: доказательства частью основаны на интуиціи, частью на логикѣ. На первый взглядъ представляется, что указанный недостатокъ можно устранить, построивъ геометрію по единому методу. Таковымъ не можетъ быть интуиція, какъ мы старались установить выше; основываясь на ней, мы могли бы, правда, прійти къ нѣкоторымъ геометрическимъ знаніямъ; но послѣднія были бы подвержены всѣмъ ограниченіямъ опытной науки и ихъ нельзя было бы признать за отдѣлъ математики; къ тому же при такомъ способѣ изложенія геометріи она ничего не дала бы для развитія мыслительной способности ученика. Слѣдовательно, остается вторая возможность, т. е. построеніе геометріи, какъ строго дедуктивной системы по только что намѣченному плану; однако при исключительномъ господствѣ логическаго метода интуиція останется не развитой, и получится крупный пробѣлъ въ общемъ образованіи учащагося.

Независимо отъ этого соображенія, едва-ли возможно предложить приступающимъ къ изученію геометріи курсъ, построенный на общихъ выводахъ современной аксіоматики. Въ настоящее время педагогика считаетъ аксіомой, что для успѣшнаго усвоенія сообщаемаго матеріала преподаваніе должно быть интереснымъ; имѣется въ виду, конечно, серьезный интересъ, направленный на существо предмета; и такой интересъ къ знанію дѣйствительно имѣется у всякаго нормальнаго ребенка.

Только направленіе этого интереса, его характеръ мѣняется съ возрастомъ; и съ этимъ необходимо считаться: чѣмъ можно заинтересовать учениковъ одного возраста, тѣмъ самымъ можно безнадежно оттолкнуть умы ихъ болѣе юныхъ товарищей. Извѣстно, что чѣмъ моложе человѣкъ, тѣмъ болѣе его интересы направлены въ сторону внѣшняго міра; и только съ возрастомъ приходитъ вкусъ къ изслѣдованію своего внутренняго «я», господствующихъ тамъ психологическихъ и логическихъ законовъ. Наконецъ само изученіе внѣшняго міра можетъ временами выражаться въ неудержимомъ стремленіи къ накопленію новыхъ фактовъ, временами же его главной цѣлью будетъ ихъ систематизація и критическое разсмотрѣніе методовъ. Что переживаетъ каждый человѣкъ, то повторяется и съ человѣчествомъ въ отдѣльныя эпохи; XVIII-ый вѣкъ великъ въ исторіи математики: здѣсь были созданы важнѣйшія идеи современнаго анализа, формулированы его труднѣйшія задачи; но о логической строгости своихъ построеній тогда думали немногіе; и теперь мы, вооруженные критическими работами 2-ой половины XIX-го вѣка, находимъ промахи у величайшихъ умовъ того столѣтія.

Такъ и учащіеся въ томъ возрастѣ, въ которомъ они приступаютъ къ изученію геометріи, полны жаждой знанія; и въ частности знаніе геометрическое можетъ дать имъ удовлетвореніе, но при непремѣнномъ условіи, чтобы это знаніе преподносилось имъ въ живой, интуитивной формѣ, связанной съ другими ихъ интересами въ области природы и повседневной жизни; излагать имъ отвлеченную логическую систему было бы ошибкой. Едва-ли они были бы способны понять необходимость аксіомъ въ родѣ слѣдующихъ: «существуетъ по крайней мѣрѣ одна точка», «если a есть точка, то существуетъ точка, отличная отъ a», «если точка a лежитъ между точками b и c, то она лежитъ и между c и b» и т. д. Едва ли они уразумѣли бы сущность и необходимость теоремъ въ родѣ такихъ: «между двумя точками прямой имѣется безчисленное множество точекъ», «прямая дѣлитъ плоскость на двѣ части» и т. д. Не будутъ-ли для нихъ эти теоремы, по выраженію одного изъ нашихъ профессоровъ, послѣ доказательства менѣе ясными, чѣмъ до онаго? Дѣти такого возраста просто не имѣютъ никакихъ основаній—ихъ непродолжительный еще опытъ не могъ доставить имъ таковыхъ,—которыя сдѣлали бы для нихъ ясной неизбѣжность подобныхъ логическихъ тонкостей; послѣднія являются лишь сухимъ, непонятнымъ педантизмомъ учителя и способны надолго внушить учащемуся отвращеніе къ математикѣ. Другое дѣло, если преподаваніе, оставляя въ сторонѣ то, что можетъ оцѣнить только старшій возрастъ, сдѣлаетъ свой предметъ нагляднымъ; Клейнъ приводитъ слова Гербарта, что $^5/_6$ учащихся томятся на урокахъ математики, если послѣдняя не приводится въ связь съ приложеніями, и опять-таки $^5/_6$ проявляютъ къ ней живѣйшій интересъ, если она соединяется съ непосредственной интуиціей.—Однако послѣдовать подобному приглашенію—значитъ впасть въ другую крайность, которую мы уже осудили. По нашему мнѣнію изъ этого круга можетъ быть лишь одинъ выходъ: разбить преподаваніе геометріи на двѣ части, въ каждой удержать единство метода и каждую посвятить почти исключительному достиженію одной изъ двухъ намѣченныхъ выше цѣлей; первая будетъ соотвѣтствовать интуитивному, вторая—логическому элементу въ геометріи.

Первая часть—пропедевтическій курсъ—должна имѣть цѣлью развитіе пространственной интуиціи и накопленіе геометрическихъ знаній. Учащіеся должны продѣлать въ этомъ курсѣ тотъ путь, какимъ въ глубокой древности шло человѣчество, закладывая основы нашей науки; при этомъ самымъ широкимъ образомъ надо использовать ихъ способность пространственнаго воображенія; ея постоянное упражненіе и послужитъ лучшимъ средствомъ къ ея развитію. Мало того, въ пропедевтическомъ курсѣ необходимо отвести видное мѣсто т.-наз. лабораторному методу, т. е. экспериментированію всякаго рода; послѣднее можетъ происходить при помощи построеній съ простѣйшими геометрическими приборами, построеній на клѣтчатой бумагѣ, вырѣзыванія и накладыванія фигуръ, и т. д. Здѣсь, по нашему мнѣнію, вполнѣ будетъ умѣстнымъ считать движеніе съ его извѣстными всѣмъ свойствами за одну изъ исходныхъ точекъ; вѣдь движеніе твердыхъ тѣлъ имѣетъ громадное значеніе въ психологическомъ происхожденіи основныхъ понятій и предложеній геометріи.

Такимъ образомъ передъ учащимися будетъ возсоздаваться геометрія въ непосредственной связи съ ихъ повседневнымъ опытомъ и интересами. Подобные курсы уже коегдѣ имѣются, и можно надѣяться, что мы услышимъ здѣсь сообщенія о нихъ, объ ихъ содержаніи, о детальной разработкѣ ихъ методовъ. Я ограничусь по этому поводу еще однимъ общимъ замѣчаніемъ. За послѣднее столѣтіе геометрія значительно расширила свои рамки въ самыхъ различныхъ направленіяхъ; появились цѣлыя новыя отрасли этой науки, при чемъ нѣкоторыя изъ нихъ важны въ теоретическомъ отношеніи, въ частности для вопросовъ объ основаніяхъ геометріи, а другія важны въ практическомъ, являясь весьма существеннымъ подспорьемъ для прикладныхъ наукъ. Намъ кажется, что настало время оживить и пополнить нѣсколькими главами новѣйшихъ теорій традиціонный матеріалъ элементарной геометріи, неизмѣненный со временъ Евклида, съ другой стороны окажется быть можетъ допустимыхъ кое-что выкинуть изъ современныхъ учебниковъ. Будемъ пока имѣть въ виду исключительно пропедевтическій курсъ; вслѣдствіе особаго характера его—преобладанія наглядныхъ доказательствъ, основанныхъ единственно на интуиціи, опытѣ и т. п.—увеличеніе его содержанія не представитъ какихъ-либо затрудненій. Мы думаемъ поэтому, что учащихся окажется возможнымъ ознакомить съ началами проективной геометріи, которая давно уже ждетъ времени, когда ее внесутъ въ элементы: вѣдь по сравненію съ обычной геометріей мѣры, геометрія положенія является болѣе основной, болѣе элементарной. Говоря опредѣленнѣе, въ пропедевтическомъ курсѣ преподаватель могъ бы затронуть слѣдующіе вопросы: перспективное положеніе основныхъ геометрическихъ образовъ 1-ой ступени, теорему Дезарга, построеніе 4-ой гармонической съ помощью полнаго четыреугольника, быть можетъ—вычерчиванie кривыхъ 2-го порядка. Но особенно подходитъ къ духу этого курса геометрiя начертательная; послѣдняя дастъ твердую опору для пространственной интуицiи, научивъ изображать пространственные образы въ плоскости, не говоря уже о той практической пользѣ, которую принесетъ многимъ знакомство съ нею; у преподавателя будетъ тогда подъ рукою обильный и интересный матерiалъ для упражненiй; притомъ начертательная геометрiя по самому своему характеру чрезвычайно поддается именно аглядному, интуитивному изложенiю: существуютъ, напр., прекрасныя модели для выясненiя методовъ этой науки.

Мало-по-малу учащихся надо привести къ мысли, что математика не можетъ удовольствоваться тѣми прiемами доказательствъ, которые они до сихъ поръ примѣняли; этого можно достигнуть, ознакомивъ ихъ съ нѣкоторыми парадоксами, гдѣ вводитъ въ заблужденiе именно чертежъ, каковой до сего времени былъ почти единственнымъ руководителемъ.

Независимо отъ этого, необходимо выяснить, что для геометрiи вовсе и не нужно постоянно прибѣгать къ интуицiи или опыту для обоснованiя своихъ предложенiй: исходя изъ нѣкоторыхъ фактовъ, можно прiйти къ другимъ путемъ однихъ разсужденiй, при чемъ выводы имѣютъ такую же достовѣрность, какъ и предпосылки; на примѣрахъ учащiеся могутъ оцѣнить силу дедукцiи.

Къ этому времени у нихъ уже накопится порядочный запасъ свѣдѣнiй изъ области геометрiи; такъ какъ къ тому же и общее развитie ихъ съ возрастомъ повысится, то отчасти удовлетворенная жажда знанiя естественно поведетъ—не безъ влiянiя, конечно, преподавателя—къ желанiю разобраться въ усвоенномъ матерiалѣ. Словомъ, классъ будетъ готовъ для перехода къ систематическому курсу, который является второй частью намѣченной программы. Этотъ курсъ будетъ уже построенъ по плану, требуемому основными положенiями современной аксiоматики; въ качествѣ исходной точки будетъ принято нѣсколько первоначальныхъ понятiй, при чемъ нѣтъ надобности стремиться къ ихъ minimum'у, и извѣстнымъ образомъ выбранная система аксiомъ, при чемъ не будемъ во что бы то ни стало заботиться о ихъ независимости; отказъ отъ этихъ двухъ требованій ни въ чемъ существенномъ не нарушитъ строго-логическаго изложенія курса и въ то же время значительно облегчитъ его построеніе. Затѣмъ должно быть твердо установлено, что эти предпосылки являются единственными во всемъ дальнѣйшемъ; а интуиція и чертежи будутъ лишь весьма удобнымъ вспомогательнымъ средствомъ. Во введеніи къ курсу не обойтись безъ того, чтобы не затронуть нѣкоторыхъ вопросовъ изъ общей логики,—вотъ благодарная почва для сближенія этихъ двухъ наукъ, одна изъ цѣлей фузіонизма въ широкомъ смыслѣ слова.

Покончивъ съ основаніями геометріи, классъ перейдетъ къ ея изученію по намѣченному выше методу; каждая теорема представится въ видѣ необходимаго логическаго слѣдствія изъ доказаннаго ранѣе; т. е. въ конечномъ счетѣ вся цѣпь геометрическихъ знаній явится лишь неизбѣжнымъ выводомъ изъ поставленныхъ во главѣ аксіомъ. Учащіеся научатся смотрѣть на геометрію, какъ на «гипотетически—дедуктивную систему» (слова Піери); они замѣтятъ, что въ сущности мы не утверждаемъ истины каждаго отдѣльнаго сужденія, а только его необходимую связь съ другими; каждое предложеніе геометріи имѣетъ подразумѣваемую предпосылку: «если выполняется такая-то система аксіомъ»... Указанная связь и есть единственный объектъ утвержденій чистой математики. Такимъ образомъ, во второй части геометрическаго курса на первый планъ будетъ выдвинута логическая сторона дѣла; переходя отъ конкретнаго изложенія первой части къ абстрактному содержанію второй, ученики продѣлаютъ вкратцѣ тотъ путь, которымъ шло человѣчество отъ наивныхъ и приближенныхъ предписаній египетскихъ землемѣровъ до широкихъ обобщеній современной логико-математической школы; интуиція и логическое мышленіе найдутъ при этомъ надлежащее мѣсто и время для своего развитія.

Мы полагаемъ, что благодаря препедевтическому курсу и болѣе зрѣлому возрасту учащихся, систематическій курсъ окажется вполнѣ доступнымъ ихъ пониманію; кое-что можетъ быть удастся даже сократить по сравненію съ настоящими программами. Вопросъ этотъ потребуетъ пристальнаго изученія;

какъ одинъ изъ примѣровъ, можно намѣтить, опираясь на авторитетъ Таннери, исключеніе главы о площадяхъ и объемахъ тѣхъ геометрическихъ фигуръ, которыя требуютъ для рѣшенія этого вопроса «метода исчерпыванія» древнихъ; въ самомъ дѣлѣ, если предполагается ввести въ среднюю школу начала анализа безконечно-малыхъ, то гораздо естественнѣе рѣшать указанныя задачи при помощи болѣе совершеннаго пріема. Освободившееся время можно удачно использовать опять-таки для нѣкоторыхъ новѣйшихъ теорій геометріи. Прежде всего и въ систематическомъ курсѣ нужно отвести извѣстное мѣсто для началъ проективной геометріи; только центръ тяжести мы были бы склонны перенести на другіе отдѣлы этой науки. Введеніе идеальныхъ или несобственныхъ элементовъ и законъ взаимности—вотъ тѣ вопросы, которые какъ нельзя болѣе умѣстны въ систематическомъ курсѣ; здѣсь выясняется возможность различныхъ истолкованій отвлеченной системы, и становится очевиднымъ исключительное господство въ геометріи дедуктивнаго метода, которому нѣтъ дѣла до того, какъ выглядятъ геометрическіе образы, и который основывается лишь на ихъ общихъ свойствахъ, дающихъ содержаніе аксіомамъ. Трудно найти другіе столь же доступные вопросы, гдѣ существо истинно-математическаго метода сказалось-бы яснѣе; возможно, правда, еще указать новую отрасль геометріи, по нашему мнѣнію, весьма пригодную для внесенія въ систематическій курсъ, но это мнѣніе можетъ встрѣтить и сильное противодѣйствіе; мы говоримъ о неевклидовой геометріи. Ближайшимъ и весьма серьезнымъ возраженіемъ будетъ указаніе на то, что подобнаго рода изслѣдованія могутъ произвести путаницу въ умахъ учащихся и останутся непонятыми.

Конечно, все зависитъ отъ предшествующей подготовки въ евклидовой геометріи и отъ логико-философскаго развитія вообще; при надлежащей постановкѣ систематическаго курса, при условіи, что учащимся ясенъ составъ геометріи, какъ гипотетически - дедуктивной системы, намъ представляется возможнымъ въ завершеніе, въ качествѣ заключительнаго аккорда, ознакомить ихъ съ работами Лобачевскаго. При этомъ достаточно будетъ ограничиться лишь начальными свѣдѣніями изъ этой области примѣрно по слѣдующей программѣ: теоремы

Лежандра о суммѣ угловъ треугольника, постулатъ Лобачевскаго, теорема о полномъ опредѣленіи треугольника заданіемъ его трехъ угловъ и, какъ слѣдствіе, отсутствіе подобія и существованіе абсолютной единицы длины, общій характеръ измѣненія угла параллелизма, вытекающія отсюда важнѣйшія различія обѣихъ геометрическихъ системъ. Мы не отрицаемъ всей трудности категорическаго рѣшенія этого вопроса и, намѣчая здѣсь программу—maximum систематическаго курса, приглашаемъ всѣхъ интересующихся заняться ея подробной разработкой.

За то, если-бы оказалось возможнымъ ввести въ курсъ средней школы начала неевклидовой геометріи, какое это было-бы крупное пріобрѣтеніе для общаго развитія учащихся! Мы получили бы достойное завершеніе логико-геометрическихъ изысканій, показавъ, какъ съ измѣненіемъ одной предпосылки мѣняются многія предложенія геометріи; внутренняя связь между аксіомами и выводными предложеніями сдѣлалась бы ощутимо ясной.

Наконецъ, національное сокровище, которымъ мы обладаемъ въ наслѣдіи Лобачевскаго, стало бы доступнымъ для широкихъ круговъ и было бы извлечено изъ-подъ спуда, гдѣ мирно покоится теперь. Конечно, на преподавателѣ лежитъ обязанность не допустить учащихся до необоснованнаго скептицизма передъ лицомъ двухъ различныхъ геометрій; онъ долженъ провести грань между отвлеченными построеніями чистой математики, гдѣ мы имѣемъ дѣло лишь съ выводомъ всѣхъ слѣдствій изъ сдѣланныхъ допущеній, и изслѣдованіями свойствъ реальнаго пространства, гдѣ уже нельзя ограничиться областью чистой мысли. Должно подчеркнуть, что геометріи Евклида и Лобачевскаго равно истинны, какъ логическія системы; къ пространству же нашего опыта примѣняется та, предпосылки которой осуществляются въ этомъ пространствѣ; заключить можно указаніемъ, что система Евклида удовлетворяетъ всей совокупности нашего опыта. Здѣсь снова приходится преподавателю выходить за предѣлы чистой математики, и въ этомъ ему должны помочь представители философскихъ наукъ.

Мы снова подходимъ къ идеямъ фузіонистовъ. Въ узкомъ смыслѣ эти стремленія понимаются, какъ желаніе не дробить геометріи на планиметрію и стереометрію, а съ самаго начала имѣть дѣло и съ пространственными образами трехъ измѣреній; въ широкомъ смыслѣ—и таково пониманіе Клейна—подъ этимъ словомъ разумѣется стремленіе сблизить не только различные отдѣлы геометріи, но и различныя науки, а именно: математику, физику, техническіе предметы. Мы полагаемъ, что эти стремленія найдутъ полное и естественное осуществленіе въ пропедевтическомъ курсѣ; что касается дальнѣйшаго, то, конечно, всякій преподаватель съ удовольствіемъ оживитъ свой урокъ ссылкой на факты другой извѣстной ученикамъ области; но намъ кажется, что главная задача выполненія фузіонисткихъ чаяній лежитъ на представителяхъ прикладныхъ наукъ: они должны ставить свои предметы въ тѣснѣйшую связь съ математикой, памятуя слова Канта, что во всякой отрасли изученія природы мы постольку имѣемъ науку, поскольку встрѣчаемъ въ ней математику. Представители же нашей спеціальности могутъ главное свое вниманіе, помимо обученія техникѣ математическаго знанія, посвятить развитію и дисциплинированію ума учащихся; логически развитой умъ есть наиболѣе могучее орудіе человѣка, важнѣйшій факторъ его прогресса. Будемъ же помнить завѣтъ Платона, что негеометрамъ нѣтъ доступа къ вершинамъ мысли»!

Предсѣдатель. «Милостивые Государи! Этотъ прекрасный докладъ можетъ вызвать широкій обмѣнъ мнѣній, а время, отведенное для нашихъ сегодняшнихъ занятій, уже исчерпано; поэтому я предлагаю обсужденіе этого доклада перенести на 2-е января, когда будетъ сдѣланъ докладъ о начальномъ курсѣ геометріи».

Это предложеніе было принято собраніемъ единогласно.

ВТОРОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

28 декабря $10^{1}/_{2}$ час. дня.

Въ предсѣдатели избранъ пр.-доц. В. Ѳ. Каганъ. Въ почетные секретари—П. А. Долгушинъ.

III. Требованія, предъявляемыя психологіей къ математикѣ, какъ учебному предмету.

Докладъ С. И. Шохоръ-Троцкаго (Спб.) 1).

Уважаемое собраніе! Мнѣ выпала, по порученію организаціоннаго Комитета нашего съѣзда, незаслуженная мною честь и трудная для меня задача—подѣлиться съ вами моими взглядами на тѣ требованія, которыя современная психологія можетъ предъявлять къ математикѣ, какъ учебному предмету, и къ намъ, учителямъ этого предмета.

Прежде чѣмъ рѣшиться на выступленіе предъ вами, я подѣлился своими соображеніями и сомнѣніями со слѣдующими лицами: А. В. Васильевымъ, Л. Е. Габриловичемъ, А. И. Гребенкинымъ, К. Н. Кржышковскимъ, И. И. Лапшинымъ, Н. О. Лосскимъ и А. П. Нечаевымъ. Изъ разговоровъ съ этими лицами я убѣдился въ томъ, что моя осторожность въ сужде-

---

1) Прочитанъ былъ докладъ этотъ съ нѣкоторыми сокращеніями въ виду постановленія Комитета Съѣзда относительно того, чтобы доклады не длились болѣе часу времени. Сокращенія эти здѣсь возстановлены.—Въ виду многочисленныхъ запросовъ относительно литературы предмета, позволю себѣ отмѣтить лишь весьма немногія сочиненія по психологіи, чтеніе которыхъ можетъ возбудить и поддержать интересъ учителя математики къ психологіи и оказать на него большое вліяніе. Къ числу таковыхъ сочиненій, безъ сомнѣнія, принадлежатъ книги Спенсера, Тэна, Бэна, Джемса, Вундта, Гефдинга, Эббингауза, Наторпа, а также нѣкоторыя монографіи Бинэи, Анри, Нечаева, Рибо.

С. Ш.-Т.

ніяхъ о томъ, что можетъ, въ настоящее время, дать психологія учителю математики, не безосновательна. Будучи безусловнымъ сторонникомъ коренной реформы обученія математикѣ и считая для учителя математики прямо необходимой, неизбѣжной постоянную и непрерывную работу надъ своимъ философскимъ и специально-психологическимъ образованіемъ, я, можетъ быть, по причинѣ дефектовъ моего образованія въ указанномъ направленіи, осмѣливаюсь утверждать, что психологія въ настоящее время не можетъ опредѣлительно отвѣтить на вопросы обученія математики, какъ таковаго. Принося свою искреннюю признательность выше поименованнымъ лицамъ за оказанное ими мнѣ сочувствіе и содѣйствіе, я считаю себя обязаннымъ снять съ этихъ лицъ какую бы то ни было отвѣтственность за то, что я намѣренъ изложить сегодня, и за всѣ ошибки, недомолвки и недостатки этого моего доклада [1].

Мейманъ въ одной изъ своихъ лекцій по экспериментальной педагогикѣ прямо говоритъ: «О психологическомъ обоснованіи обученія ариѳметикѣ намъ придется говорить нѣсколько меньше, чѣмъ о письмѣ, такъ какъ у насъ до сихъ поръ нѣтъ еще удовлетворительнаго анализа дѣятельностей ребенка, выполняемыхъ имъ при его занятіяхъ ариѳметикой, а развитіе числовыхъ представленій въ дошкольномъ возрастѣ еще почти вовсе не изслѣдовалось». И это справедливо относительно методики ариѳметики, которой литература неизмѣримо богаче, чѣмъ литература по методикѣ остальныхъ отдѣловъ математики!

Поэтому, когда въ организаціонномъ Комитетѣ нашего съѣзда рѣчь шла о докладѣ по вопросамъ о психологическихъ основахъ преподаванія математики, то сдѣлать его на нашемъ съѣздѣ я, еще ни съ кѣмъ не посовѣтовавшись, отказался, такъ какъ прямо не чувствовалъ себя въ силахъ сдѣлать таковой докладъ хотя бы въ малѣйшей

---

[1] И. И. Лапшинъ не только снабдилъ меня нѣкоторыми новинками въ области литературы предмета, но предоставилъ въ мое распоряженіе свою не напечатанную рукопись объ интересной книгѣ Вайгингера (Vaihinger, die Philosophie des als ob, Berlin 1911). А. П. Нечаевъ подѣлился со мною своими взглядами на взаимное соотношеніе, существующее между психо-физіологіей и экспериментальной психологіей. К. Н. Кржышковскій сообщилъ мнѣ много свѣдѣній по современному состоянію ученія объ «условныхъ рефлексахъ».

С. Ш.-Т.

мѣрѣ удовлетворительно. Посовѣтовавшись съ поименованными выше лицами, которыя занимаются философіей или психологіею, какъ со спеціально ихъ интересующими областями вѣдѣнія, я въ этой мысли еще болѣе утвердился. Пришлось мнѣ обратиться къ новѣйшей литературѣ по вопросамъ психологіи, и я окончательно пришелъ къ твердому убѣжденію, что о психологическихъ основахъ обученія математикѣ подобаетъ говорить съ величайшей осторожностью. Вотъ почему я могу говорить (конечно, только въ самыхъ общихъ чертахъ) лишь о нѣкоторыхъ для меня несомнѣнныхъ и, я въ томъ увѣренъ, крайне важныхъ требованіяхъ, которыя психологія вправѣ предъявлять къ такъ наз преподаванію математики (вѣрнѣе: къ обученію этому предмету) и къ намъ, учителямъ математики.

Точнѣе говоря, я постараюсь намѣтить: 1) что именно мы, учителя математики, должны, съ точки зрѣнія психологической, принимать во вниманіе, уча математикѣ дѣтей, отроковъ и отроковицъ и кого бы то ни было; 2) чего дѣлать не должны при этомъ обученіи, и наконецъ, 3) въ какую сторону мы должны направить свои силы при изученіи психологической стороны нашего дѣла. Я постараюсь не предлагать никакихъ проектовъ относительно желательныхъ, по моему мнѣнію, измѣненій дѣйствующихъ программъ и учебныхъ плановъ, относительно измѣненія методъ обученія. Я это дѣлалъ неоднократно въ моихъ посильныхъ трудахъ и докладахъ, посвященныхъ именно этимъ вопросамъ. Я постараюсь имѣть въ виду преимущественно психологическія точки зрѣнія. Совершенно для меня неизбѣжнымъ явится также вниманіе къ нѣкоторымъ точкамъ зрѣнія педагогической этики.

Какъ ни мало у насъ времени, я считаю прямо необходимымъ дать хоть нѣкоторый, къ сожалѣнію, краткій и, вѣроятно, не свободный отъ многихъ недосмотровъ очеркъ того, что такое психологія въ настоящее время.

Какъ наука о душѣ, психологія намѣчена еще у Аристотеля, Платона и другихъ философовъ древней Эллады. Отцы церкви тоже занимались вопросами психологіи, но съ точекъ зрѣнія иногда Аристотелевскихъ, иногда Платоновскихъ. Они интересовались преимущественно вопросами психологіи воли и поведенія, но всегда болѣе или менѣе въ связи съ церковно-христіанской догматикой и мистикой. Душа, ея свойства, происхожденіе и безсмертіе были главными предметами и вопросами психологіи. Аффекты, какъ явленія душевной жизни, впервые сдѣлались предметомъ анализа въ эпоху возрожденія, а именно у Вивеса (De anima, 1548). Въ XVII в. Декартъ и Спиноза являются психологами-спиритуалистами, и долго еще послѣ нихъ работы по вопросамъ психологіи говорили о душѣ, ея аттрибутахъ, силахъ, способностяхъ, и т. д. При этомъ старались строить науку психологіи болѣе или менѣе дедуктивнымъ путемъ, принявъ какіе-либо аттрибуты за основные и стараясь изъ нихъ вывести или къ нимъ свести всѣ остальныя «свойства», «способности» и явленія душевной жизни. Декартъ, напр., главнымъ аттрибутомъ души считалъ мышленіе и даже въ основу доказательство своего собственнаго существованія (каковое существованіе онъ считалъ нужнымъ доказывать) положилъ всѣмъ извѣстное предложеніе: «я мыслю, слѣдовательно я существую». Для насъ, учителей математики, можетъ быть, не безынтересно, что намъ часто говорятъ, и многіе изъ насъ сами думаютъ, что главною цѣлью и главнымъ условіемъ математическаго образованія является воздѣйствіе на умъ, на мышленіе учащагося, притомъ на мышленіе не интуитивное, а непремѣнно отвлеченное. А, между тѣмъ, воздѣйствіе это можетъ быть только одною изъ цѣлей математическаго образованія и только однимъ изъ условій его. Выше намѣченные взгляды на цѣль и условія математическаго образованія, можетъ быть, являются какъ бы «пережиткомъ», обязаннымъ своимъ процвѣтаніемъ Декарту и картезіанской школѣ.—Въ томъ же XVII вѣкѣ Гоббзъ считаетъ единственнымъ источникомъ знанія чувственныя воспріятія, и хотя онъ болѣе извѣстенъ, какъ философъ, разрабатывавшій вопросы государственнаго права въ духѣ сочувствія къ монархическому началу, въ психологіи онъ былъ сенсуалистомъ и матеріалистомъ чистѣйшей воды. Онъ утверждалъ, что душевныя явленія суть нѣкоторыя «движенія» въ нервномъ и мозговомъ веществѣ, и т. п. Дальнѣйшая разработка матеріалистической психологіи принадлежитъ энциклопедистамъ XVIII в. и нѣкоторымъ психологамъ вѣка XIX. Матеріалисты-психологи, конечно, болѣе говорили о явленіяхъ душевной жизни, чѣмъ о самой душѣ и ея свойствахъ, аттрибутахъ и т. д. Но и они занимались болѣе объясненіемъ явленій и стремились болѣе къ этому объясненію, чѣмъ къ изученію законовъ, которымъ эти явленія подчиняются. При этомъ ихъ объясненія страдали голословностью и не основывались на точныхъ и надлежащимъ образомъ обставленныхъ наблюденіяхъ и опытахъ. — Дж. Локкъ («Опытъ о человѣческомъ разумѣ», 1690) сознаетъ, что невозможно познать душу и ея силы; но во главу своихъ психологичесскихъ воззрѣній онъ ставитъ ощущенія, остальныя же явленія считаетъ какъ бы вторичными, производными. Отъ Локка пошла эмпирическая психологія, хотя противъ нея впослѣдствіи и вооружился такой авторитетный мыслитель, какъ Лейбницъ, по мнѣнію котораго душа есть не что иное, какъ «монада» съ двумя основными свойствами: чувствованіемъ и желаніемъ.— У Юма появляется уже ассоціація идей. Гертли и Пристли вносятъ въ психологію физіологическія точки зрѣнія. Но до Канта, все же, стараются построить психологію болѣе или менѣе дедуктивнымъ путемъ, на почвѣ самонаблюденія и не организованнаго, не планомѣрнаго, такъ сказать, наблюденія надъ проявленіями душевныхъ процессовъ у другихъ людей. Этотъ вкусъ къ дедуктивному методу въ области психологіи, конечно, не мѣшалъ философамъ и психологамъ подмѣчать, благодаря самонаблюденію и наблюденіямъ надъ проявленіями душевной жизни у другихъ, все новыя и новыя душевныя явленія. Такъ, напр., уже Тетенсъ въ XVIII вѣкѣ говоритъ не только объ умѣ и волѣ, но и о чувствованіяхъ разнаго рода. Особенно Кантъ, въ своей, еще доселѣ не утратившей своего значенія, «Антропологіи» превосходно описываетъ весьма многія душевныя явленія, какъ таковыя. Хотя Кантъ не предвидитъ для психологіи возможности сдѣлаться наукою въ полномъ смыслѣ этого слова, но для него психологія должна интересоваться только душевными явленіями. Это, впрочемъ, не препятствуетъ Канту говорить о «душевныхъ способностяхъ», идея которыхъ имъ какъ бы унаслѣдована отъ Христіана Вольфа.

На Гербартѣ и Бенеке, которымъ особенно много обязана педагогика и педагогическая психологія, мы долго останавливаться не будемъ. Гербартъ, поднявшійся до уразумѣнія того, что такъ наз. душевныя «способности» представляютъ собою нѣчто въ родѣ «миѳологическаго существа», тѣмъ не менѣе слишкомъ многаго ожидалъ отъ приложенія математическаго метода къ психологіи и разсматривалъ представленія (основной, по его мнѣнію, элементъ душевной жизни) какъ «силы», которыя вступаютъ во «взаимодѣйствіе», т. е. опять-таки старался болѣе о дедуктивномъ объясненіи душевныхъ явленій, чѣмъ объ ихъ объективномъ описаніи. Его математическій методъ не привелъ къ какимъ-либо важнымъ результатамъ. Бенеке, будучи гербантіанцемъ по существу своихъ психологическихъ изысканій, устанавливаетъ другую терминологію и, въ то же время, не вполнѣ отказывается отъ душевныхъ «способностей», хотя старается отказаться отъ метафизическихъ точекъ зрѣнія на явленія душевной жизни. Онъ ставитъ себѣ цѣлью положить въ основу изученія душевныхъ явленій наблюденіе и опытъ. Въ 1833 г. онъ издаетъ книгу подъ многозначительнымъ заглавіемъ: «Психологія какъ отрасль естествознанія». Но это было только какъ бы предвосхищеніемъ одной изъ тѣхъ идей, которыя одушевляютъ многихъ психологовъ въ настоящее время, но еще не осуществлены и понынѣ.

На остальныхъ, хотя и весьма заслуженныхъ и видныхъ психологахъ XIX в. (напр., на англичанахъ, которымъ весьма многимъ обязана эмпирическая психологія) намъ останавливаться не для чего, такъ какъ цѣль наша вовсе не въ томъ и не можетъ состоять въ томъ, чтобы разобраться во всѣхъ теченіяхъ и школахъ, развившихся въ XIX вѣкѣ въ области психологіи, какъ идеалистическихъ, такъ реалистическихъ. Но нельзя не отмѣтить, что и въ XIX вѣкѣ не мало психологовъ-метафизиковъ, есть и психологи-спиритуалисты, мистики-психологи и даже психологи-спириты.—Особеннаго вниманія заслуживаетъ медицинское направленіе въ области психологіи. Многіе врачи, физіологи и психопатологи все болѣе и болѣе стали выдвигать такія психологическія точки зрѣнія, которыя перекидываютъ мостъ между психологіей и физіологіей и, благодаря методамъ изслѣдованія жизни психически и нервно больныхъ, даютъ возможность заглянуть въ глубь процессовъ душевной жизни здороваго человѣка. Назову хотя бы только слѣдующихъ физіологовъ-психологовъ: Веберъ, Фехнеръ, Гельмгольцъ, Вундтъ, Брока, Кабанисъ, Льебо, Бони, Шарко, Маудсли, Рибо, Рише, Бине, Корсаковъ, Бехтеревъ, Сербскій.

Весьма замѣтное мѣсто въ современной психологической литературѣ заняли представители такъ наз. экспериментальной психологіи: Мейманъ, Бине, Скойтенъ, Крэпелинъ, Нечаевъ, Лазурскій, Крогіусъ и др. Этой школѣ принадлежитъ заслуга такой постановки вопросовъ психологіи, при которой къ ихъ рѣшенію можно было бы приступить съ помощью методовъ экспериментальныхъ наукъ, согласно съ требованіями методологіи отраслей естествознанія.

Психологія въ настоящее время ставитъ себѣ проблемы научнаго изученія и точнаго описанія явленій душевнаго міра. не задаваясь разрѣшеніемъ вопросовъ метафизическихъ и теологическихъ (о томъ, что такое душа, каково ея происхожденіе, каковы ея аттрибуты, способности силы, «свободна» ли воля или не свободна, и т. п.) Она не спрашиваетъ о томъ, справедливо ли противоположеніе тѣлеснаго духовному или несправедливо, и не отвѣчаетъ на этотъ вопросъ. Она не задается вопросами гносеологическаго порядка (о томъ, что это значитъ знать, въ какомъ смыслѣ можно что-либо знать, и т. д.). Ее вообще не занимаютъ вопросы логическіе, эстетическіе, гносеологическіе, или религіозные, какъ таковые. Она смотритъ на мышленіе, знаніе, чувствованіе, на эмоціи эстетическія и религіозныя, на нравственныя идеи и на волевыя акты, какъ на явленія. Ее занимаютъ эти явленія, какъ явленія sui generis, душевной жизни, ихъ послѣдовательность, сосуществованіе, закономѣрность, взаимоотношенія. Нынѣ есть цѣлый рядъ, такъ сказать, частныхъ психологій, хотя многія изъ нихъ находятся еще въ зародышевомъ состояніи: психологія индивидуальная, общественная, толпы, ребенка, педагогическая, психологія средняго человѣка, генія, таланта, психологія языка, народовъ, патологическая психологія, и т. п. При современномъ состояніи знанія, явленія душевной жизни оказываются чрезвычайно разнообразными и сложными. Многое, на что ранѣе психологи не обращали вниманія, съ ростомъ наблюдательности и, такъ сказать, чуткости къ явленіямъ душевной жизни человѣка, нынѣ уже стало вопросомъ важнымъ и интереснымъ, чуть ли не первостепеннымъ. Душевныя явленія, ранѣе считавшіяся совершенно обособленными одно отъ другого, нынѣ оказываются сосуществующими, сопутствующими одно другое и другъ отъ друга взаимно зависящими. Такъ, напр., не только многія чувственныя воспріятія и специфическія ощущенія, но даже продукты отвлеченнаго мышленія, отвлеченныя понятія и идеи, не совершенно лишены (по крайней мѣрѣ, не всегда лишены) переживаній, извѣстныхъ подъ пменемъ чувствованій, стремленій, желаній и т. д. Представленія, понятія и идеи иногда вызываютъ движенія, а извѣстныя движенія и физіологическіе процессы вызываютъ цѣлый рядъ идей, чувствованій, поступковъ и дѣйствій. Мы иногда плачемъ, потому что грустимъ, но иногда грустимъ потому, что плачемъ и не удержались отъ слезъ. Страдающихъ даже едва замѣтной для другихъ слабой формой «боязни пространства» «тянетъ» броситься въ пролетъ лѣстницы; у нихъ «подкашиваются» ноги, если лѣстница не снабжена перилами. Я не скоро кончилъ бы, если бы пожелалъ привести даже не извѣстные всѣмъ и каждому случаи взаимнаго «переплетенія» душевныхъ переживаній различныхъ порядковъ, ихъ взаимной связи и ихъ связи съ явленіями физіологическаго порядка.

Изъ этого краткаго очерка легко усмотрѣть, что у психологіи, какъ науки, было такъ много дѣла по установленію своихъ задачъ и цѣлей, объектовъ своего изученія и методовъ его, что вопросовъ преподаванія вообще, и математики въ частности, она могла касаться только вскользь, мимоходомъ. Выработка и установленіе основъ этого преподаванія, вообще, не входитъ въ ея задачи.

Въ настоящее время количество подмѣченныхъ душевныхъ явленій, можно сказать, неизмѣримо велико, и ихъ изученіе—дѣло и задача будущаго, чтобы не сказать—болѣе или менѣе отдаленнаго будущаго. Физіологи и врачи, психопатологи, невропатологи и физики, знатоки первобытныхъ культуръ и педагоги обогатили психологію крайне интересными фактами, говорящими для тѣхъ, кто хочетъ слышать и видѣть, о закономѣрности въ мірѣ такъ наз. душевныхъ явленій и о связи ихъ съ явленіями физіологическими,—и обратно о вліяніи душевныхъ явленій на многіе физіологическіе процессы и явленія. Укажу, въ области физіологической психологіи, на позднѣйшія работы хотя бы только одного ученаго, которымъ можетъ гордиться Россія, и созданой имъ школы. Я говорю объ И. П. Павловѣ, установившемъ методы изученія отображенія воздѣйствій внѣшняго міра на отдѣленіи слюны и желудочнаго сока и выдвинувшемся въ первые ряды психологовъ-физіологовъ, между прочимъ, своей теоріей такъ наз. «условныхъ рефлексовъ».

Старинное раздѣленіе всѣхъ явленій такъ наз. душевной жизни человѣка только на три, какъ бы обособленныя, категоріи (ума, чувства и воли) лишь до извѣстной, притомъ не всегда достаточной, степени удобно. Оно уступаетъ свое мѣсто другому взгляду, по которому почти въ каждомъ душевномъ явленіи одновременно участвуютъ и такъ наз. умъ, и чувство, и—можно сказать—весь человѣкъ со всѣмъ громаднымъ міромъ его душевныхъ переживаній, не подходящихъ иногда ни подъ одну изъ поименованныхъ трехъ рубрикъ. Особенно легко усматривается эта несомнѣнная сложность душевной жизни человѣка въ томъ удивительномъ явленіи, которое извѣстно подъ именемъ «такта». Это явленіе, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что человѣкъ, стоящій на той или иной ступени культуры, во всякій моментъ своей жизни, при соприкосновеніи съ другими людьми, старается, въ зависимости отъ множества условій этого соприкосновенія, поступить такъ, какъ «слѣдуетъ», и не сдѣлать ничего такого, чего дѣлать «не слѣдуетъ» въ данномъ частномъ случаѣ. Это—одно изъ тѣхъ явленій, въ которомъ и для не посвященнаго видно участіе и ума, и воли, и чувствъ разнаго рода, и памяти, и вниманія, и творчества, и воображенія.

Переберемъ хоть нѣкоторыя душевныя переживанія, извѣстныя всякому культурному человѣку, интересующемуся психологическими вопросами. Это—цѣлый міръ. Игнорируя этотъ міръ, учитель, строго говоря, игнорируетъ человѣка или, по крайней мѣрѣ, смотритъ на него слишкомъ узко и поверхностно.

Мы воспринимаемъ внѣшнія раздраженія и нѣкоторыя явленія, происходящія въ нашемъ организмѣ (особенно въ случаяхъ недомоганія или въ состояніи особенной къ нимъ воспріимчивости). Мы ихъ осознаемъ, и они помогаютъ или препятствуютъ цѣлесообразному теченію остальныхъ нашихъ переживаній или поступковъ и нормальному ихъ объективированію. Мы переживаемъ громадный комплексъ разнообразнѣйшихъ ощущеній: свѣтовыхъ, звуковыхъ, мускульныхъ, вкусовыхъ, обонятельныхъ, осязательныхъ, тепловыхъ и иногда не поддающихся характеристикѣ однимъ словомъ. Слѣпорожденные испытываютъ ощущеніе пустого пространства и близости преграды («шестое чувство» слѣпыхъ, Fernsinn, sens des obstacles, facial perception). У нѣкоторыхъ, вообще, нормальныхъ людей, и особенно у дѣтей, встрѣчаются (гораздо чаще, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда) признаки такъ наз. «психической глухоты», по винѣ которой люди, хорошо слышащіе, не скоро реагируютъ на вопросы, къ нимъ обращенные, и кажутся болѣе разсѣянными и менѣе внимательными, чѣмъ каковы они на самомъ дѣлѣ. Мы испытываемъ чувства голода, жажды, чувства утомленія и усталости безъ болевыхъ ощущеній, и т. п. Мы многое помнимъ, запоминаемъ, вспоминаемъ, очень многое забываемъ (по мнѣнію Фрейда, вовсе не случайно). Мы отдаемъ себѣ (болѣе или менѣе) отчетъ въ испытываемыхъ нами ощущеніяхъ и апперципируемъ воспріятія. Мы постоянно живемъ въ мірѣ комплекса различныхъ представленій относительно того, что есть, что было и что будетъ, и относительно того, чего нѣтъ, никогда не было и не будетъ. Мы создаемъ себѣ общія представленія и отвлеченныя понятія и творимъ идеи, и въ этой послѣдней работѣ участвуетъ не одинъ чистый разумъ. Не подлежитъ никакому сомнѣнію актъ вниманія; мы думаемъ, воображаемъ, судимъ, разсуждаемъ, предаемся воспоминаніямъ, размышленіямъ и мечтамъ. Мы мыслимъ интуитивно и планомѣрно-логически. И всѣ эти душевныя явленія совершаются не случайно, а по нѣкоторымъ, иногда не извѣстнымъ намъ, законамъ. Напр., психологія мышленія еще не вполнѣ намѣчена въ отношеніи своихъ проблемъ, несмотря на то, что логика, одна изъ древнѣйшихъ философскихъ дисциплинъ, справедливо считается отраслью философіи, сравнительно хорошо разработанною. Даже явленіе такъ наз. «забыванія» еще недостаточно изучено, и, по Фрейду, которому наука психіатріи обязана методомъ психо-анализа особаго рода, мы часто забываемъ что-либо не совершенно случайно, а по личнымъ, можно сказать, чуть не эгоистическимъ, хотя и не осознаннымъ, мотивамъ, которые нами въ этомъ забываніи какъ бы руководятъ.

Другую область, менѣе изученную, чѣмъ явленія воспріятія, представленія, памяти, вниманія и мышленія, составляютъ явленія, хотя съ ними сосуществующія, но совсѣмъ иного порядка. Мы многимъ интересуемся сильно, слабо, совсѣмъ не интересуемся. Мы испытываемъ огорченія, радости; отвращеніе; грусть, горе, печаль; любовь, ненависть, презрѣніе; гнѣвъ, обиду, оскорбленіе; смущеніе, стыдъ; испугъ, страхъ, ужасъ. Мы часто вспоминаемъ о своей принадлежности къ тому или иному полу, безъ малѣйшей тѣни полового самочувствія: мы ее только вспоминаемъ. Мы испытываемъ чувства состраданія, сочувствія, пріязни, дружбы, уваженія, почтенія, благоговѣнія, умиленія, удивленія, восхищенія. Мы гордимся, завидуемъ, раскаиваемся, обижаемся, оскорбляемся, смиряемся, ревнуемъ, вѣримъ и вѣруемъ. Намъ доступны удовольствіе и неудовольствіе, нравственное и эстетическое удовлетвореніе, недовольство собою и другими, облегченіе, успокоеніе. Есть настроенія, которыхъ не охарактеризовать однимъ и даже нѣсколькими словами. Мы видимъ сновидѣнія, и во снѣ, не двигаясь съ мѣста, падаемъ, бѣгаемъ, летаемъ; во снѣ радуемся, страдаемъ, плачемъ и смѣемся.

У насъ есть чувство долга, собственнаго достоинства, чести и другія нравственныя чувства. Иногда мы живемъ двойственною жизнью, почти въ одно и то же время испытывая прямо, казалось бы, несовмѣстимыя чувствованія: любви и ненависти, тревоги и самоуспокоенія, плачемъ отъ радости и смѣемся въ безысходномъ горѣ, «горько» смѣемся. Мы любопытны, любознательны, поддаемся внушенію и самовнушенію и т. д., и т. д. Если я такъ долго говорилъ о мірѣ чувствованій, то только потому, что какъ-разъ этотъ моментъ, чрезвычайно важный для педагога и учителя, мы часто упускаемъ изъ виду, уча и воспитывая дѣтей и учащихся разныхъ возрастовъ. Нѣкоторыя изъ нашихъ чувствованій (напр., радость, горе, смущеніе, обида, оскорбленіе, гнѣвъ и т. п.) вызываютъ разстройство въ области и въ теченіи другихъ душевныхъ переживаній и даже въ физіологическихъ функціяхъ нѣкоторыхъ органовъ нашего тѣла и нѣкоторыхъ железъ (сердца, легкихъ, пищевого тракта, почекъ, слезныхъ и потовыхъ железъ), въ сферѣ вазомоторной системы и т. д.

Можетъ-быть, не безполезно отмѣтить, что у великихъ художниковъ слова (назову хотя бы только Шекспира, Гете, Толстого, Достоевскаго) мы знакомимся съ такими тонкими, сложными и едва уловимыми душевными явленіями, которыя могли быть подмѣчены и осознаны только великими знатоками человѣка и которыя въ научно-психологическомъ отношеніи еще не обслѣдованы. Въ частномъ разговорѣ И. И. Лапшинъ обратилъ мое вниманіе на то обстоятельство, что психологія, какъ наука, еще не добралась до научнаго изслѣдованія множества душевныхъ явленій, которыя подмѣчены и уже описаны великими художниками слова. Игнорировать область чувствованій и ихъ вліяніе на остальныя переживанія учащихся и стараться дѣйствовать только на отвлеченную мысль учащихся, на ихъ память и вниманіе, педагогъ XX вѣка уже не въ правѣ. Не въ правѣ это дѣлать и мы, учителя математики. Учитель, не умѣющій или не желающій считаться съ тѣмъ, что учащійся математикѣ долженъ интересоваться предметомъ и его вопросами, что онъ долженъ испытывать удовольствіе отъ самой работы надъ ними, долженъ испытывать радость по поводу преодолѣваемыхъ имъ трудностей, долженъ испытывать чувства умственнаго, нравственнаго и эстетическаго удовлетворенія, уваженія къ наукѣ, удивленія по поводу добываемыхъ ею результатовъ, и т. д.,—такой учитель, конечно, не удовлетворяетъ современнымъ требованіямъ психологіи. Онъ не считается съ тѣмъ, что учащійся—не бездушный сосудъ, въ который надо свалить полагающійся, по программѣ, учебный математическій матеріалъ, а человѣкъ въ полномъ смѣслѣ этого слова, съ безконечно богатымъ міромъ душевныхъ переживаній, на который онъ, какъ таковой, имѣетъ полное право. Это—уже вопросъ педагогической этики, который я, по необходимости, осмѣливаюсь затронуть въ этомъ мѣстѣ своего доклада.

Явленія душевной жизни, конечно, не исчерпываются только выше охарактизованными переживаніями. Мнѣ остается еще, хотя бы вкратцѣ, намѣтить одну сферу переживаній, крайне важныхъ въ жизни человѣка и извѣстныхъ подъ именемъ побужденій, стремленій, желаній, хотѣній, рѣшеній, влеченій и т. п. Эта область тѣснѣйше связана съ сопровождающимъ ихъ интересомъ къ чему-нибудь. Далѣе натыкаемся на безконечно важную область дѣйствій и поступковъ, вполнѣ сознательныхъ или не вполнѣ сознательныхъ, а также безсознательныхъ, привычныхъ или непривычныхъ. Въ дѣйствіяхъ переплетаются и объективируются различныя хотѣнія и стремленія. рѣшенія и влеченія, желанія и побужденія. Но, при этомъ, не всякій поступокъ, не всякое дѣйствіе является исполненіемъ сознаннаго желанія и стремленія, и не всякое желаніе или стремленіе влекутъ за собою соотвѣтствующій поступокъ, соотвѣтственное дѣйствіе. Рѣчь есть только одно изъ дѣйствій человѣка и для полной жизни человѣку, въ области дѣйствій. ограничиваться одной только рѣчью, конечно, недостаточно. Къ сожалѣнію, часто обученіе математикѣ сводится преимущественно къ тому, что отъ учащагося требуютъ того, чтобы онъ только говорилъ и произносилъ рядъ заученныхъ словъ. Этого, конечно, недостаточно для того, чтобы удовлетворить тому требованію психологіи, по которому жизнь человѣка не должна исчерпываться только однимъ какимъ-либо родомъ душевныхъ переживаній. Не объективируя своихъ душевныхъ переживаній разнаго рода наружу, человѣкъ живетъ только въ мірѣ безпорядочныхъ чувственныхъ воспріятій, болѣе или менѣе однообразныхъ ощущеній, ни къ чему его не обязывающихъ представленій, въ мірѣ немногихъ отвлеченныхъ понятій и идей, и ни къ чему не ведущихъ желаній, стремленій и настроеній. Такая жизнь — не жизнь. Человѣкъ, живущій такой только жизнью, несомнѣнно тяжко боленъ, какъ бы благородны ни были его мысли, чувствованія и настроенія, какъ бы философичны ни были его размышленія. Еще менѣе нормальною можно считать такую жизнь, которая ограничивается душевными переживаніями одного только рода.

Человѣкъ долженъ дѣйствовать. Вѣрнѣе: онъ долженъ откликаться на весь разнообразный міръ, такъ сказать, нападающихъ на него внѣшнихъ раздраженій, долженъ ихъ воспринимать и ими распоряжаться, долженъ ощущать, чувствовать, мыслить, разсуждать, стремиться, желать и—дѣйствовать. Безъ соблюденія этихъ условій нѣтъ радости жизни и, поэтому, нѣтъ настоящей жизни. Отсюда съ очевидностью вытекаетъ, что учить математикѣ такъ, чтобы учащіеся главнымъ образомъ «доказывали», «разсуждали», «опредѣляли» отвлеченныя понятія; «помнили» правила и рядъ словъ, взятыхъ въ извѣстномъ порядкѣ, и вычисляли,—что такъ учить математикѣ значитъ итти наперекоръ требованіямъ, вытекающимъ изъ данныхъ психологіи.

Въ каждый данный моментъ своей жизни (за исключеніемъ моментовъ психическаго отдыха, тоже крайне необходимаго, притомъ необходимаго съ физіологической точки зрѣнія) человѣкъ переживаетъ много переживаній, изъ которыхъ одно какъ будто бы доминируетъ надъ другими, а на самомъ дѣлѣ только проявляется сильнѣе другихъ, но безъ другихъ чаще всего и невозможно. Даже склонный къ особенно абстрактному мышленію философъ не всегда только мыслитъ. Мысля, онъ облекаетъ мысли въ невысказанныя слова, испытываетъ муки или радости творчества, чувствуетъ нравственное удовлетвореніе или неудовольствіе, стремится къ глубокому проникновенію въ существо вопроса, желаетъ его наилучшимъ образомъ разрѣшить, унываетъ и отчаивается по поводу своего безсилія или радуется тому, что вопросъ приближается къ своему разрѣшенію, руководится этическими и эстетическими чувствованіями и стремленіями. Иногда, притомъ весьма часто, этотъ мыслитель спускается съ высотъ отвлеченной мысли въ глубь переживаній, такъ сказать, низшаго порядка: въ область представленій не только общихъ, но частныхъ и единичныхъ. Наблюденіе показываетъ, что вполнѣ возможенъ волевой контроль надъ процессами ассоціаціи, что ритмъ необходимъ во всякой работѣ, что мимика и интонаціи составляютъ необходимый элементъ образнаго мышленія («большо-о-ой», «длин-н-н-ый»). И т. д.

Вотъ до чего сложна душевная жизнь человѣка вообще, а вѣдь ничто человѣческое не чуждо, въ той или иной степени, учащемуся математикѣ или какому угодно учебному предмету, въ возрастѣ учебномъ, когда человѣкъ еще не достигъ полнаго расцвѣта своихъ силъ. Игнорировать всю сложность душевныхъ переживаній, ихъ, такъ сказать, естественное «совмѣстительство» учащій не имѣетъ права съ точки зрѣнія этико-педагогической. Тѣмъ меньше у него правъ и основаній на ни къ чему не ведущее и совершенно, поэтому, нецѣлесообразное покушеніе на измѣненіе той закономѣрности, которая въ большей или меньшей степени наблюдается въ душевной жизни всякаго человѣка и всякаго учащагося человѣка въ частности. Въ эпоху большаго или меньшаго господства или абсолютнаго авторитета церковно-христіанской аскетики считалось, что духъ и тѣло чуть ли не созданы для борьбы двухъ началъ: божественнаго и діавольскаго. Тогда думали, что тѣло именно и есть вмѣстилище начала діавольскаго. Въ аналогичномъ положеніи въ XIX вѣкѣ находились логика и интуиція, отвлеченная мысль и чувственныя воспріятія, разумъ и фантазія, такъ наз. формальное развитіе и здравый смыслъ учащагося математикѣ. Нѣкоторые и понынѣ считаютъ интуицію чѣмъ-то низшимъ по сравненію съ отвлеченнымъ мышленіемъ. Психологіи, какъ таковой, чуждо стремленіе къ раздачѣ дипломовъ и ставить «баллы» тому или иному душевному явленію.

Требовать отъ учащагося, чтобы онъ только разсуждалъ, только мыслилъ и философствовалъ, чтобы онъ жилъ въ области только отвлеченныхъ понятій, считалось и понынѣ многими считается признакомъ наилучшаго тона. Но во всей строгости это требованіе не выполнимо. Путемъ школьныхъ наказаній и другихъ болѣе тонкихъ средствъ насилія можно добиться того, что учащійся, повидимому, будетъ исполнять подобныя требованія. Но онъ это будетъ дѣлать, только обременяя свою память словами и лишая себя радостей творческой и сообразной съ его природою работы. Вообще, исключительно отвлеченное, въ навязанныхъ схемахъ, мышленіе безполезно. А дѣйствительное и самостоятельное отвлеченное мышленіе, какъ и всякая исключительная черта натуры—достояніе немногихъ. Учитель можетъ только постепенно и планомѣрно ставить учащихся въ такія условія, при которыхъ учащіеся постепенно пріобрѣтали бы нѣкоторый, большій или меньшій, вкусъ къ отвлеченному мышленію и испытывали бы иногда, и именно тогда, когда это возможно, потребность въ такомъ мышленіи и эстетическое удовольствіе и нравственное удовлетвореніе при удовлетвореніи этой потребности. Безъ этой потребности и безъ этого удовольствія всѣ труды учителя не приведутъ ни къ чему, кромѣ подневольнаго и не цѣлесообразнаго исполненія учащимися этой повинности, совершенно не соотвѣтствующей ихъ потробностямъ. Вообще, каждый человѣкъ по самой натурѣ своей и по большей или меньшей ограниченности ея силъ, во всякомъ дѣлѣ, во всякомъ искусствѣ, во всякомъ ремеслѣ, во всякой дѣятельности своего ума и тѣла, можетъ достигнуть только извѣстнаго предѣла совершенства, его же не прейдеши.

Гауссы, Паскали, Абели, Галуа, уже въ раннемъ возрастѣ бывшіе геометрами и философами in spe, насчитываются единицами, и они достигаютъ высотъ, недостижимыхъ для остального человѣчества, не благодаря школѣ. Отсюда, конечно, не слѣдуетъ, что лишать учащихся возможности постепенно и посильно подыматься на высоты отвлеченной мысли и посильно стремиться на эти высоты, съ психологической точки зрѣнія, нѣтъ никакого основанія. Наоборотъ: это — тоже необходимо. Но подниматься на эти высоты они, опять-таки согласно требованіямъ психологіи, должны, повторяю, постепенно и по мѣрѣ силъ своихъ. Что совершенно недоступно въ дѣтскомъ возрастѣ, то можетъ оказаться цѣлесообразнымъ въ возрастѣ юношескомъ, и наоборотъ: что̀ приличествуетъ дѣтскому возрасту, то не приличествуетъ не только юношескому, но даже отроческому.

Судить о томъ, что̀ для даннаго возраста, на данной ступени обученія, цѣлесообразно, можно, только опираясь на положительныя, въ области психологіи, знанія, можно только при условіи внимательнаго, безъ предвзятыхъ взглядовъ, отношенія къ потребностямъ учащихся, къ мѣрѣ и степени ихъ, если можно такъ выразиться, душевнаго и физическаго, а не умственнаго только, развитія. Для пріобрѣтенія способности къ этому вниманію, конечно, для учителя недостаточно прочесть одну или двѣ книги по предмету психологіи. Надо читать и многое перечитывать, надо изучать то, что читаемъ по вопросамъ психологіи, и по мѣрѣ силъ и возможности — слѣдить за литературой предмета, слѣдить усердно и непрестанно. Готовыхъ рецептовъ для надлежащаго обученія психологія не даетъ и давать не обязана, какъ механика не даетъ готовыхъ рецептовъ для устройства машинъ, какъ физіологія не даетъ рецептовъ для воспитанія физическаго. Но психологія въ настоящее время установила массу фактовъ, наводящихъ на надлежащее пониманіе многихъ явленій душевной жизни. Она учитъ наблюдать и изучать душевныя явленія, и хотя прямо этого не говоритъ (да это и не ея дѣло), но наводитъ на мысль о необходимости наблюденій надъ жизнью учащихся, на мысль о необходимости изученія ихъ индивидуальностей, ихъ натуръ и характеровъ, вниманія къ ихъ возрасту и его особенностямъ. Она показываетъ намъ, что міръ душевныхъ переживаній каждаго человѣка (а, стало быть, и учащагося) гораздо сложнѣе, чѣмъ это кажется непосвященному «человѣку въ футлярѣ». Есть у человѣка стремленіе къ «игрѣ», а у учащихся это стремленіе очень сильно и вполнѣ естественно. Этимъ стремленіемъ надо воспользоваться, къ нему нельзя относиться, какъ къ душевному явленію, презрительно или пренебрежительно. Часто у людей замѣчаются обмолвки (вмѣсто «направо» — «налѣво», вмѣсто «непремѣнно» — «напремѣнно»), есть описки (вмѣсто *ѣ* буква *е* и обратно), есть боязнь обмолвки и зависящая именно отъ этой боязни обмолвка. Но вѣдь это—явленія душевной жизни, а не преступленія, и, какъ таковыя, они заслуживаютъ вниманія учителя. А, между тѣмъ, какъ много страданій мы, учителя математики, причиняемъ учащимся именно тѣмъ, что на всякую обмолвку и описку смотримъ, какъ на проступокъ и признакъ незнанія! Ученикъ, сказалъ «периметръ основанія» вм. «площадь основанія», «половина высоты» вм. «половина апоѳемы», и casus belli готовъ. А, между тѣмъ, это могло быть обмолвкой именно вслѣдствіе страха предъ обмолвкой и т. п.

Цѣлесообразность и пригодность того или иного учебнаго пособія, того или иного пріема обученія должна быть провѣрена и установлена, если къ тому есть возможность, путемъ экспериментальнымъ. Приведу конкретный примѣръ. Въ классѣ уже «усвоена» теорема о томъ, что діагональ квадрата и сторона его несоизмѣримы, т. е. ученики умѣютъ произнести рядъ словъ и выполнить чертежъ, относящіеся до этой теоремы. Но попробуйте классу предложить вопросъ, не равна ли сторона квадрата нѣкоторой части его діагонали. Отвѣтъ: «равна». Не составляетъ-ли она двухъ третей діагонали? И окажется, что нѣкоторые ученики отвѣтятъ: «можетъ-быть», несмотря на то, что вы доказали, и они себѣ «усвоили», что сторона квадрата и діагональ его несоизмѣримы. Дальше путемъ разспросовъ, вамъ, наконецъ, удастся добиться того, что никто изъ учащихся не будетъ утверждать, что сторона квадрата выражается какою-нибудь обыкновенной правильной дробью діагонали. Ученики уже чувствуютъ себя какъ бы припертыми къ стѣнѣ вашей діалектикой и «чувствуютъ», что они не въ состояніи васъ опровергнуть. Но попробуйте предложить вопросъ, кто изъ присутствующихъ въ классѣ увѣренъ въ томъ, что несоизмѣримые отрѣзки дѣйствительно существуютъ, и въ классѣ сразу намѣтятся двѣ «партіи», а можетъ-быть, и три. Одни, «безпартійные», не станутъ реагировать на вашъ вопросъ, другіе (ихъ будетъ очень немного) будутъ говорить (можетъ быть, руководясь самымъ тономъ вашего вопроса и угадывая, чего вы ждете отъ «хорошихъ» учениковъ), что несоизмѣримые отрѣзки существуютъ, а очень многіе, все-таки, будутъ утверждать, что «въ концѣ концовъ» всякіе два отрѣзка соизмѣримы... И вся ваша теорема о діагонали и сторонѣ квадрата провалилась въ пропасть. И это явленіе зависитъ не отъ васъ, а отъ самого существа вопроса и отъ несоотвѣтствія между совсѣмъ для насъ не замѣтною тонкостью вопроса и интересами возраста учащихся. Сразу, съ помощью доказательства одной теоремы, поднять ихъ до непоколебимой власти надъ своей отвлеченной мыслью, конечно, невозможно.—Этимъ конкретнымъ примѣромъ и многими ему подобными легко доказать всю нецѣлесообразность преподаванія математики ev cathedra, хотя бы мы въ это преподаваніе вносили пріемы такъ наз. «спрашиванія» уроковъ, которое, строго говоря, сводится въ большинствѣ случаевъ къ украшенію класснаго журнала большей или меньшей порціей единицъ и двоекъ.

Посильный докладъ мой, по самой темѣ своей болѣе касается психологіи, чѣмъ преподаванія математики, и болѣе преподаванія математики, чѣмъ математики, какъ таковой. Съ этимъ намъ приходится мириться. Но, въ цѣляхъ лучшаго освѣщенія занимающаго насъ вопроса, я обязанъ нѣсколько остановиться на нѣкоторыхъ математическихъ вопросахъ, изученіе которыхъ, съ психологической точки зрѣнія, въ высшей степени поучительно.

Начнемъ съ ариѳметики, какъ учебнаго предмета, въ ея современной постановкѣ. Счетъ и первыя представленія о числахъ, какъ ни смотрѣть на логическое построеніе ученія о натуральномъ числѣ, связаны несомнѣнно съ рядомъ чувственныхъ воспріятій, непремѣнно предшествующихъ представленіямъ числового порядка. Слова, обозначающія числа, большія десяти, подчиняются нѣкоторымъ *этимологическимъ законамъ* того или другого языка. Цифры же и ихъ сочетанія представляютъ собою уже условныя письменныя обозначенія. Всѣ эти элементы, выше подчеркнутые мною, вовсе не такъ просты, какъ это кажется непосвященному въ трудности начальнаго обученія. Условность въ письменномъ обозначеніи чиселъ по десятичной системѣ счисленія, съ помощью десяти такъ наз. арабскихъ цифръ, вовсе не такъ охотно пріемлется учащимися, какъ этого хотѣлось бы учителю, торопящемуся научить ихъ уму-разуму. Учащійся сразу не можетъ (а потому и не долженъ) усвоить себѣ всю технику чтенія чиселъ, ихъ записыванія и ихъ порядка. Не даромъ же всякая письменная нумерація была изобрѣтеніемъ, до котораго человѣчество добиралось въ теченіе тысячелѣтій, притомъ съ большимъ трудомъ.—Но въ ариѳметикѣ есть не только нумерація. Тамъ есть опредѣленія, техническіе *навыки*, правила, условный смыслъ нѣкоторыхъ терминовъ, для цѣлыхъ чиселъ имѣющихъ одинъ смыслъ, для нуля, единицы и дробей — другой. И т. д. Усвоеніе этихъ тонкостей, изъ которыхъ нѣкоторыя являются тонкостями логическаго порядка, требуетъ особенныхъ усилій не одного только ума учащагося. Нѣкоторыя тонкости, требуютъ прямо большого и увы! не всегда доступнаго учащимся труда. Психологія, конечно, вовсе не вооружается противъ труда: ее занимаетъ только мѣсто этого труда среди другихъ душевныхъ переживаній учащагося. И она можетъ констатировать только то, что безъ интереса къ этому труду не будетъ вниманія къ нему, не будетъ радости труда, радости преодолѣнія его трудостей, не будетъ и той работы, которая даетъ учащимся возможность запомнить то, чему ихъ учатъ, не будетъ творчества въ этомъ трудѣ, т. е. не будетъ того, что представляетъ собою естественное содержаніе душевныхъ переживаній при нормальномъ ихъ теченіи. Психологія должна намъ сказать, что «скоро сказка сказывается, но не скоро дѣло дѣлается».

Но этимъ еще не исчерпывается содержаніе ариѳметики: въ него входитъ рѣшеніе учащимися сотенъ сложныхъ и замысловатыхъ задачъ, не интересныхъ, безъ нужды неестественныхъ, не отвѣчающихъ запросамъ учащихся и не считающихся съ мѣрою ихъ вниманія и вкуса къ распутыванію клубка придуманныхъ ad hoc хитросплетеній. Но на этомъ я здѣсь останавливаться не буду. Несвоевременныя занятія этого рода, съ точки зрѣнія психологическихъ требованій, зло.

Перейдемъ къ такъ наз. курсу элементарной алгебры, насколько это возможно при бѣгломъ очеркѣ интересующихъ насъ требованій психологіи. Въ этомъ курсѣ къ учебному матеріалу неизбѣжно присоединяется новый рядъ опредѣленій, выростаетъ рядъ теоремъ, новыя условныя обозначенія, новыя понятія и появляются фиктивныя, созданныя человѣческимъ интеллектомъ, въ силу требованій неизвѣстной учащимся цѣлесообразности, «числа» sui generis, иногда даже противорѣчащія такъ наз. «здравому смыслу». Напр., нуль больше всякаго отрицательнаго числа, $-1 < +1$ и т. п. Получается какъ бы «парадоксъ», что такъ какъ $(-1).(-1)$ равняется $(+1).(+1)$, то произведеніе двухъ меньшихъ чиселъ, равно произведенію двухъ большихъ,—«парадоксъ», изъ затрудненій котораго учащійся не въ силахъ, при своемъ умственномъ развитіи, выйти побѣдителемъ. Получается противорѣчіе въ поведеніи учителя, всегда требующаго, чтобы учащійся разсуждалъ и «думалъ», что онъ говоритъ, а иногда требующій, чтобы учащійся не углублялся въ тонкости, и въ то же время предлагающій ему множество тонкостей для усвоенія. Говорить учащимся въ однихъ случаяхъ: «разсуждайте, думайте!», а въ другихъ: «не разсуждайте, не задумывайтесь надъ этимъ», конечно, можно. Но дѣлу математическаго образованія этотъ совѣтъ не поможетъ. Приходится прибѣгать къ такимъ пріемамъ, которые отвѣчаютъ требованіямъ не одной только логики, но которыя согласовались бы и съ требованіями психологіи. А такими пріемами являются всѣ дозволительныя геометрическія и механическія интерпретаціи, которыя отобразили бы геометрическій, механическій, до извѣстной степени реальный, хотя и условный, смыслъ опредѣленій, принятыхъ въ наукѣ въ цѣляхъ надлежащей конструкціи вопроса о четырехъ дѣйствіяхъ надъ числами извѣстной природы. Если считать, что натуральныя числа даны, а числа другой природы (нуль, числа дробныя, отрицательныя и положительныя, комплексныя вида $a+bi$ и ирраціональныя) суть числа фиктивныя, то придется признать, что учителю математики надо посмотрѣть на фикціи разнаго рода не только съ логической и гносеологической, но и съ психологической точки зрѣнія. Во всякомъ случаѣ для учащихся фикція, какъ средство къ познанію и описанію фактовъ, совершенно недоступна въ силу ихъ естественной склонности къ самому наивному интуитивизму.

Обратимся къ геометріи. Въ этомъ учебномъ предметѣ особенно настойчиво культивируется стремленіе раздѣлить всѣ предложенія геометріи на аксіомы, теоремы, задачи, а теоремы—на собственно теоремы, слѣдствія, леммы. Въ геометріи болѣе, чѣмъ въ курсѣ алгебры средней школы, господствуетъ прямо культъ, для учащихся мало понятный, доказательства во что бы то ни стало. Фигуры здѣсь предполагаются идеальныя, опять-таки фиктивныя. Но понятіе объ идеальныхъ фигурахъ предполагаетъ уже достаточный запасъ опыта и наблюденій надъ фигурами не идеальными. Необходимость точныхъ опредѣленій можетъ быть сознана учащимися только при условіи, что онъ уже доросъ до уразумѣнія того, для чего они нужны. Для чего доказываютъ предложенія совершенно безспорныя при данныхъ условіяхъ (противъ большаго угла треугольника лежитъ большая сторона, и т. п.), учащіеся геометріи не только на первыхъ ступеняхъ обученія, но и впослѣдствіи не понимаютъ. Многіе изъ нихъ этого понять и не въ состояніи. Поэтому они относятся къ геометрическимъ доказательствамъ съ отвращеніемъ, что отнюдь не способствуетъ ни ихъ благополучію, ни ихъ мышленію, ни ихъ творчеству, ни ихъ успѣхамъ. Указанные недочеты и многіе изъ не указанныхъ въ самомъ процессѣ усвоенія геометріи учащимися зависятъ, большею частью, отъ невниманія къ психологіи мышленія, впрочемъ, еще очень мало разработанной. А, между тѣмъ, извѣстно, что пространственныя воспріятія предшествуютъ счету: маленькія дѣти, еще не умѣющіе говорить (не только считать!), вѣрно указываютъ портреты родныхъ и знакомыхъ и отлично различаютъ большой кусокъ сахару отъ маленькаго. Вся бѣда въ томъ, что то количество и качество пространственныхъ воспріятій и представленій, которое находится въ распоряженіи всякаго приступающаго къ занятіямъ геометріей, считается достаточнымъ для «прохожденія» съ ними курса Евклидовой геометріи. Между тѣмъ, эти воспріятія и представленія недостаточны и въ количественномъ, и въ качественномъ отношеніяхъ для достиженія цѣли. А та высота логическаго усилія, на которую учитель хочетъ сразу поднять учащихся, для нихъ недоступна. Учащіеся либо выучиваютъ слова, либо падаютъ духомъ, и дѣло кончается тѣмъ, что у учащихся по геометріи оказывается и мало познаній, и мало навыковъ, что геометрія для нихъ не была ни школою мышленія и логическаго доказательства, ни школою пространственнаго воображенія. Причина такихъ результатовъ кроется въ отсутствіи у учащихся интереса къ подобнымъ занятіямъ и радости труда надъ преодолѣніемъ логическихъ и другихъ трудностей предмета.

Цѣль моего доклада—не проектированіе новыхъ программъ и учебныхъ плановъ. Съ такими предложеніями выступятъ на съѣздѣ другія лица. Я былъ бы безконечно счастливъ, если мнѣ хоть отчасти удалось освѣтить необходимость считаться съ тѣмъ, что, съ точки зрѣнія психологической, математика, какъ учебный предметъ, не можетъ имѣть въ виду только умъ и логическое мышленіе учащагося и требованія чисто-логическаго построенія, такъ наз., элементарной математики.

На другихъ отдѣлахъ учебнаго курса математики я останавливаться не буду и не могу. Укажу только на то, что идеи предѣла, ирраціональнаго числа, «безконечно-малой» величины, методъ доказательства отъ противнаго, методъ доказательства съ помощью такъ наз. «математической» индукціи.

требуютъ особенно осторожной и тщательной, во всѣхъ отношеніяхъ, обработки, прежде чѣмъ сдѣлаться достояніемъ учащихся. При этомъ не подлежитъ никакому сомнѣнію, что полной научности и строгости курса средней школы достигнуть не въ состояніи. Точнѣе говоря: учитель, вооружившись самъ всѣмъ арсеналомъ орудій, доставляемыхъ наукой въ этихъ вопросахъ, конечно, можетъ прочесть рядъ лекцій по этимъ вопросамъ своимъ хлопающимъ глазами и ушами ученикамъ. Но ученики при этомъ ничего себѣ ни усвоятъ изъ всѣхъ рѣчей учителя и ничего въ этихъ рѣчахъ не поймутъ. Да и вообще отъ всего курса математики почти никакого толку не будетъ, если учащій не будетъ считаться съ требованіями психологическими.

Требованія, которыя психологія можетъ предъявлять къ обученію математикѣ, сводятся, приблизительно, къ слѣдующему:

1) Воспріятія вообще, и математическаго порядка въ частности, предшествуютъ представленіямъ и имъ сопутствуютъ; представленія частныя предшествуютъ и сопутствуютъ общимъ; представленія общія предшествуютъ и сочувствуютъ понятіямъ и идеямъ; въ то же время представленія, понятія и идеи являются важнымъ условіемъ для надлежащей апперцепціи воспріятій; правъ Кантъ, утверждая, что «интуиціи безъ понятій слѣпы. а понятія безъ интуицій безсодержательны, пусты»; а потому учить надо такъ, чтобы ученики пользовались всѣми этими переживаніями, а не оперировали бы только надъ словами и отвлеченными понятіями;

2) Воспріятія, представленія и даже понятія и идеи очень часто сопровождаются и должны сопровождаться чувствованіями (удовольствія или неудовольствія, радости или огорченія и т. п.,—смотря по отношенію къ нимъ со стороны испытывающаго эти переживанія и эти продукты своей душевной дѣятельности); они ведутъ и должны вести къ извѣстнымъ сужденіямъ или къ ряду ихъ, къ нѣкоторымъ желаніямъ и стремленіямъ и къ нѣкоторымъ поступкамъ или дѣйствіямъ въ широкомъ смыслѣ этого слова, а дѣйствія и поступки, какъ бы завершающіе данный психическій процессъ, въ свою очередь, являются началомъ новаго цикла душевныхъ пере-

живаній, ведущихъ къ дальнѣйшей работѣ и т. д.; вслѣдствіе этого, раздѣленіе занятій математикой на теоретическія и практическія только отчасти пріемлемы въ математикѣ, какъ учебномъ предметѣ, ибо навыки, съ одной стороны, требуютъ теоретической основы, а теорія, со своей стороны, требуетъ основы практической; сверхъ того, стремленіе учащихъ математикѣ оказывать воздѣйствіе только на умъ и отвлеченное мышленіе учащихся обречено на безрезультатность въ силу того, что потокъ психическаго процесса захватываетъ всѣ области психическихъ переживаній учащагося, не ограничиваясь исключительно одною ихъ областью;

3) Возрастъ дѣтскій (лѣтъ до 12-ти у однихъ расъ, лѣтъ до 13-ти у другихъ,—это зависитъ и отъ климата, и отъ массы другихъ условій,—предъявляетъ къ учителю математики одни требованія; возрастъ, заключенный между началомъ полового созрѣванія и его наступленіемъ, предъявляетъ другія требованія; наконецъ, третій возрастъ — юношескій — новыя требованія.

4) Изъ этого раздѣленія возраста учащихся въ школѣ на три періода еще не слѣдуетъ, что каждый возрастъ свободенъ отъ особенностей другого; какъ показываетъ опытъ, признаки, такъ наз., «инфантилзности» встрѣчается и въ возрастахъ дальнѣйшихъ, и чаще всего *всякій* учащійся математикѣ является всегда болѣе или менѣе начинающимъ учиться, а не законченнымъ математикомъ, умѣющимся учиться; учиться математикѣ не научаются даже въ возрастѣ юношескомъ и въ возрастѣ зрѣломъ (напр., въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ); недостаточно только учиться, надо научиться учиться;

5) Такъ называемое преподаваніе математики, какъ таковое, требуетъ отъ учащихся такой мѣры активнаго вниманія, которое, большею частью, является результатомъ продолжительной работы и многихъ другихъ условій и значительной емкости ума и воображенія и силы воли; поэтому надо *не преподавать* математику, а *учить* ей всѣми доступными учителю и цѣлесообразными для учащихся способами;

6) Готовыя наглядныя пособія и такъ наз. наглядность и конкретность пріемовъ обученія полезны для снабженія учащихся нѣкоторыми, болѣе или менѣе, пассивными воспрі-

ятіями, для выработки нѣкоторыхъ представленій; но для надлежащаго обученія математикѣ они далеко не достаточны: необходимо, чтобы учащіеся сами изготовляли тѣ наглядныя пособія, изготовленіе которыхъ лежитъ въ предѣлахъ ихъ навыковъ въ ручномъ трудѣ (въ широкомъ смыслѣ этого слова); это требованіе приводитъ къ необходимости отведенія ручному труду подобающаго ему мѣста также въ обученіи математикѣ и къ необходимости вниманія къ такъ наз. «лабораторной» методѣ обученія этому предмету;

7) Не съ отвлеченныхъ опредѣленій, не съ провозглашенныхъ теоремъ и провозглашаемыхъ учителемъ доказательствъ этихъ теоремъ должна начинаться работа учащихся надъ каждой методической единицей (это противорѣчитъ роли творческаго труда въ душевной жизни человѣка), а съ такой активной работы учащихся, которая постепенно вводитъ учащихся in medias res вопроса; только систематизаціонная работа на высшихъ ступеняхъ обученія можетъ итти тѣмъ порядкомъ, который систематизаціи подобаетъ; воспитаніе воли учащихся и привитіе имъ приличествующихъ цѣлямъ обученія чувствованій и привычекъ дѣйствованія столь же необходима, какъ умѣніе его судить и разсуждать въ вопросахъ математическаго содержанія, и гораздо важнѣе, чѣмъ одно только умѣніе «отвѣчать» на вопросы учителя рядъ соотвѣтствующимъ требованіямъ минуты словъ;

8) Методы обученія (не преподаванія!) должны въ математикѣ сообразовываться не со схематическимъ раздѣленіемъ курса математики на обособленные отдѣлы (ариѳметики, алгебры, геометріи и т. д.), а съ самымъ содержаніемъ и существомъ вопросовъ, подлежащихъ изученію, съ цѣлями обученія, съ составомъ класса, его вкусами и интересами и т. д.;

9) Пріемы обученія должны считаться съ существованіемъ, въ каждомъ классѣ, учащихся разныхъ типовъ («оптиковъ», «акустиковъ», «механиковъ» и типовъ смѣшанныхъ); поэтому пріемы обученія должны быть столь разнообразны, чтобы каждый учащійся нашелъ свой путь къ усвоенію даннаго вопроса, сообразный съ требованіями его типа, и имѣлъ бы возможность посмотрѣть на всякій вопросъ также съ болѣе или менѣе чуждой его натурѣ точки зрѣнія;

10) Хотя раздѣленіе возраста учащагося на три періода болѣе или менѣе схематично, но періодъ полового созрѣванія не подлежитъ сомнѣнію, и въ этотъ періодъ надо споспѣшествовать надлежащему (въ области умственной, волевой, эмоціональной и эстетической дѣятельности) разряду накопляющейся въ этотъ періодъ болѣе или менѣе бурной энергіи въ сторону активной, творческой работы по изготовленію наглядныхъ математическихъ пособій, чертежей, графиковъ и т. п.;

11) Эмоціи, препятствующія нормальному ходу психической жизни учащагося (страхъ, уныніе, смущеніе, чувства обиды, оскорбленія, униженія и т. п.) и вредно отзывающіяся (особенно при занятіяхъ математикой, требующихъ, такъ сказать, всего человѣка) даже на физіологическихъ функціяхъ органовъ человѣческаго тѣла, въ обученіи вообще не умѣстны, и въ частности не умѣстны при обученіи математикѣ;

12) Если вѣрно то мнѣніе Ж. Ж. Руссо, по которому воспитаніе есть искусство терять время для того, чтобы его потомъ выиграть, то въ дѣлѣ математическаго образованія этимъ искусствомъ учитель долженъ владѣть въ значительной степени; для того же, чтобы въ немъ достигнуть достаточнаго совершенства, учитель долженъ быть внимательнымъ къ требованіямъ психологіи и сродниться съ интересами этой области человѣческаго знанія; къ этому насъ, учителей математики, обязываетъ наша профессіональная честь и этика и вообще этика педагогическая.

Будемъ же, мм. г-ни и мм. гг., учиться психологіи; будемъ работать надъ пріобрѣтеніемъ надлежащихъ психологическихъ взглядовъ на обученіе, которое должно итти на пользу ввѣренныхъ намъ учащихся поколѣній, на пользу русской школы и на пользу нашей дорогой родины!»

Пренія по докладу Шохоръ-Троцкаго.

А. П. Некрасовъ. (Спб.) „Мы выслушали чрезвычайно интересный докладъ весьма опытнаго педагога, и я не могу не выразить своего чувства удовлетворенія по поводу этого интереснаго доклада, но вмѣстѣ съ тѣмъ я позволю себѣ внести въ вопросъ другую точку зрѣнія не прямо противоположную, но нѣсколько отличную.

Я позволю себѣ назвать мою точку зрѣнія по топографическому признаку Московской. Въ Московскомъ Математическомъ Обществѣ я имѣлъ честь усвоить эту точку зрѣнія какъ наслѣдіе отъ высокоуважаемыхъ педагоговъ, Давидова и Бугаева. Вы изволили выслушать взглядъ глубоко уважаемаго главы Казанской математической школы проф. А. В. Васильева. Отъ Казанской математической школы Московская отличается взглядомъ на Лобачевскаго, своимъ освѣщеніемъ трудовъ этого всемірнаго генія. Московская математическая школа въ лицѣ проф. Цингера, моего учителя, высказала свои взгляды на съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ блестящей рѣчи: „О недоразумѣніяхъ во взглядахъ на аксіомы“, цитированной въ моей элементарной книгѣ—„Приложеніе алгебры къ геометріи“, истолковывающей систему Лобачевскаго именно въ качествѣ иносказательной. Отъ школы, только что высказавшейся въ лицѣ С. И. Шохоръ-Троцкаго, мы отличаемся и другими характерными чертами, но я остановлюсь на одной изъ нихъ и для этого возьму лишь одинъ пунктъ изъ рѣчи многоуважаемаго Семена Ильича. Онъ, напр., такъ формулировалъ одинъ изъ своихъ штриховъ: „взгляды Гербарта не увѣнчались успѣхомъ“. Московская математическая школа въ лицѣ проф. Бугаева и его продолжателей смотритъ на это иначе. Она можетъ утверждать, что въ математикѣ психологическіе взгляды Гербарта увѣнчались значительнымъ успѣхомъ. Въ Россіи труды учениковъ Бугаева, какъ Шишкинъ (см. „Вопросы философіи и психологіи“), В. Г. Алексѣевъ (см. „Сборникъ Учено-Литературнаго Общества при Императорскомъ Юрьевскомъ Университетѣ“), въ Германіи труды Штрюмпеля, Фехнера, антрополога Ранке и др. все болѣе и болѣе разрабатываютъ и утверждаютъ направленіе Гербарта“.

„Я позволю себѣ формулировать то, чего съ нашей точки зрѣнія, требуетъ психологія и философія отъ математики, если мы хотимъ преподавателей математики возвести въ достоинство преподавателей философской пропедевтики. Требованія психологіи отъ математики съ точки зрѣнія Московской группы, какъ я ее понимаю, выражены весьма широко и точно: психологія требуетъ отъ математики развитія въ ученикѣ не только извѣстнаго реализма, но и гуманизма и идеализма, какъ его понимаютъ великіе педагоги Песталоцци, Гербартъ, Ушинскій и группа московскихъ педагоговъ—Давидовъ, Бугаевъ, Лѣтниковъ, Цингеръ, Слудскій, Шишкинъ и другіе. Геометрія развиваетъ зрѣніе физическаго глаза; это, конечно, весьма необходимо, но совершенно недостаточно. У ребенка и юноши есть еще зрѣніе мысли съ ея высшими понятіями и измѣреніями, зрѣніе довѣрія и уваженія къ чужому „я“ и къ себѣ. Это зрѣніе – совершенно другого порядка. Его развиваетъ особая группа математическихъ дисциплинъ, именно—теорія чиселъ, исчисленіе вѣроятностей съ его законами чиселъ и взаимоотношеній, и символическое исчисленіе, являющееся родственникомъ филологіи, рѣшающимъ съ извѣстной точностью проблему цѣнности и другія высшія проблеммы біологической ариѳметики и гуманизма. Всю эту вторую группу способностей ребенка и юноши нельзя развить обыкновенной геометріей, ея логикой и ея интуиціей, но ее можно и должно развить иносказательной геометріей, которую Бугаевъ называетъ числовой геометріей, а Морисъ д'Окань и другіе инженеры—номографическимъ исчисленіемъ".

„Тутъ найдетъ себѣ достойное мѣсто и иносказательная геометрія Лобачевскаго, великаго русскаго пангеометра, но не геометра въ буквальномъ смыслѣ. Между прочимъ, мою книгу «Вѣра, знаніе и опытъ», если позволитъ Организаціонный Комитетъ, въ количествѣ 50 или болѣе экземпляровъ я передамъ для наиболѣе интересующихся этимъ направленіемъ. Отсюда можно почерпнуть много матеріаловъ для упражненій въ средней школѣ для развитія высшихъ понятій ученика. Лѣтъ болѣе 10 тому назадъ былъ съѣздъ учителей математики и физики, организованный мною вмѣстѣ съ проф. исторіи Виноградовымъ. То, что я говорю, отчасти есть повтореніе съ нѣкоторымъ развитіемъ того, что было, но теперь это сказано блѣднѣе. Кто хочетъ глубже проникнуть въ мысли Московской математической и психологической школы, пусть обратиться къ «Математическому сборнику» и другимъ трудамъ этой группы".

IV. Экспериментальныя проблеммы въ педагогикѣ математики.

Докладъ В. Р. Мрочека (Спб.).

«Вопросъ, котораго я хочу коснуться въ своемъ докладѣ, столь общиренъ и имѣется столь богатая о немъ литература, что одинъ только перечень работъ занялъ бы весь мой докладъ. Поэтому я приступилъ къ этому докладу съ извѣстнымъ чувствомъ страха, но, къ счастью, мнѣ удалось найти сотрудника, съ которымъ я раздѣлилъ свой трудъ пополамъ. Этимъ сотрудникомъ является пр.-доц. Нью-Іоркскаго Университета, д-ръ Радосавльевичъ. Его работа въ настоящее время печатается въ одномъ петербургскомъ журналѣ, именно—въ «Обновленіи Школы». Поэтому я ограничусь въ докладѣ упоминаніемъ тѣхъ резюме по психологіи ариѳметики, безъ которыхъ обойтись невозможно. Чтобы показать, насколько обширна литература, упомяну, что Радосавльевичъ въ своей работѣ приводитъ главные труды, относящіеся къ ариѳметикѣ, въ количествѣ 260. Слѣдовательно, литература уже достаточно обширна. Что касается вопроса о психологіи математическаго преподаванія, то начну съ его вступительныхъ словъ.

«Самое поле педагогики математики огромно. Вопросы ея—и многочисленны, и сложны. Авторы ихъ также многочисленны и разныхъ взглядовъ. Даже и тѣ, которые очень поверхностно слѣдятъ за современной педагогикой математики, замѣтятъ, что прошло то время, когда можно было писать о школьной математикѣ только со спеціально-математической (научной) точки зрѣнія. Современная экспериментальная, біологическая и педагогическая психологія подчеркиваютъ ясно, что эта научная точка зрѣнія должна быть дополнена и другими воззрѣніями. Я здѣсь не буду касаться этого вопроса, но зато съ большимъ удовольствіемъ констатирую, что въ настоящее время существуетъ нѣсколько направленій въ области математики».

Теперь позвольте перейти къ содержанію своего доклада. На первомъ мѣстѣ стоитъ изученіе *числовыхъ представленій* на младшихъ ступеняхъ обученія и даже въ дошкольномъ возрастѣ. По этому вопросу имѣется масса литературы. Такъ, одни авторы занимаются спеціально изученіемъ возникновенія числовыхъ представленій, другіе работаютъ надъ генезисомъ числа, третьи занимаются вопросами понятія числа и пространства и проблеммами развитія числовыхъ воспріятій, особая категорія занимается изученіемъ такъ называемыхъ великихъ счетчиковъ, у которыхъ особенно рѣзко проявляются вычислительныя способности. Разрабатывались вопросы о процессахъ навыка, вниманія, ассоціаціи, о созерцаніи чиселъ, патологическія явленія, порождаемыя изученіемъ ариѳметики, способность вычисленія и память на числа, ариѳметическія упражненія и проблеммы формальнаго характера, гигіена и дидактика ариѳметики. Всѣ эти вопросы достаточно разработаны, но я долженъ повторить то, что говоритъ Радосавльевичъ: есть много авторовъ, есть много направленій, но окончательнаго слова не сказано. Да это и понятно: психологія математическаго преподаванія разрабатывается еще такъ недавно и только недавно вступила на путь объективнаго изслѣдованія; но въ этомъ самомъ—залогъ ея дальнѣйшаго развитія и залогъ успѣха.

Что касается начальнаго развитія числовыхъ представленій, то съ этимъ русская публика достаточно знакома по работамъ Лая, въ которыхъ даны основныя проблеммы и намѣчены основанія ихъ рѣшенія. Я поэтому останавливаться на этихъ работахъ не буду, но укажу между прочимъ, что этой проблеммой занималась и Американская психологическая школа въ лицѣ своихъ выдающихся представителей-профессоровъ, главнымъ образомъ, Клеркскаго университета. Одной изъ такихъ извѣстныхъ работъ является работа проф. Чарльза Брауна: *) «Психологическое изученіе нѣкоторыхъ сторонъ вниманія и ассоціаціи въ простыхъ ариѳметическихъ процессахъ». Время не позволяетъ мнѣ вдаваться въ детали постановки этихъ опытовъ, но болѣе подробныя свѣдѣнія будутъ напечатаны въ одной изъ моихъ дальнѣйшихъ работъ.

Что касается моей задачи, то я укажу на тѣ разнообразныя стороны, на которыя было обращено вниманіе экспериментаторами при изслѣдованіяхъ; напр., въ сложеніи было изучено сложеніе простыхъ единицъ, удовлетворяющее образнымъ представленіямъ, роль сознанія въ сложеніи, ошибки спеціальнаго характера, общаго характера, чувство точности, чувство времени, сравнительная легкость и трудность комбинированія чиселъ, отношеніе величины слагаемаго къ трудности комбинацій, сложеніе десятковъ, суммированіе вообще, сложеніе комбинацій чиселъ и т. д. Подобнымъ образомъ были изучены и остальныя дѣйствія. Вообще выводы можно формулировать слѣдующимъ образомъ. Взрослые люди, прошедшіе среднюю школу, надъ которыми и производились опыты Брауна, даютъ цѣлый рядъ типичныхъ ошибокъ при дѣйствіяхъ, причемъ ни одно вычисленіе не сопровождается отсутствіемъ моторныхъ проявленій, такъ какъ одинъ шепчетъ про себя тѣ числа, надъ которыми производится вычисленіе, другой

---

*) Интересное совпаденіе: четыре Брауна работаютъ надъ вопросами, разсматриваемыми въ настоящемъ докладѣ.

непремѣнно рефлекторно повторяетъ какое-нибудь движеніе рукой, ногой или головой въ тактъ дѣйствіямъ, которыя производитъ, иной непремѣнно долженъ довольно внятнымъ шепотомъ повторять то, что дѣлаетъ, особая группа должна записывать карандашемъ, не будучи въ состояніи сидѣть спокойно и производить вычисленія. Эти и тому подобныя наблюденія показали, что ариѳметическія вычисленія непремѣнно связаны съ моторизаціей въ большей или меньшей степени.

Къ этому вопросу тѣсно примыкаютъ и изслѣдованія въ области такъ называемой гигіены умственной дѣятельности при занятіяхъ ариѳметикой и вообще математикой. Въ настоящее время существуетъ нѣсколько крупныхъ работъ по этому вопросу, и одна изъ нихъ, содержащая сводъ всѣхъ матеріаловъ, появилась недавно — весной текущаго года въ американскомъ психологическомъ журналѣ «Pedagogical Seminary», редактируемомъ Стенли Холломъ; она переведена на русскій языкъ въ одномъ петербургскомъ журналѣ «Народное Образованіе». Это работа проф. Бурнхэма «Гигіена умственной дѣятельности при занятіяхъ ариѳметикой». Затѣмъ довольно обширныя изслѣдованія задуманы на ту же тему проф. Будапештскаго университета Раншбургомъ. Они еще не закончены и поэтому я сообщу данныя лишь опубликованныхъ работъ. Онъ хочетъ рѣшить вопросы: какъ относится сумма успѣховъ по счисленію къ возрасту, т. е. количество вѣрныхъ рѣшеній къ опредѣленному классу учениковъ и къ степени способности, обозначаемой обычными у насъ школьными отмѣтками; какъ относится опредѣленность усвоенія (объективная увѣренность) къ возрасту и къ степени способности; какъ относится продолжительность счета къ возрасту и степени способности; каковъ размѣръ, увѣренность и продуктивность успѣховъ въ счетѣ при различныхъ элементарныхъ видахъ счета (1 и 2 ступени) отдѣльныхъ группъ возраста и способностей; затѣмъ, можно ли этимъ путемъ опредѣлить трудности отдѣльныхъ видовъ счета и ихъ послѣдовательность, можно ли ихъ объяснить; можно ли согласно этому опредѣлить основной минимумъ способностей къ счету 7—9 лѣтнихъ школьниковъ; каково отношеніе между всѣми изложенными факторами у малоспособныхъ; каково отношеніе успѣховъ самыхъ слабыхъ въ счетѣ среди нормальныхъ къ успѣхамъ мало способныхъ, и т. д. Часть этихъ проблеммъ изслѣдована Раншбургомъ и его учениками и опубликована въ различныхъ журналахъ заграницей. Далѣе я долженъ указать на работы въ другомъ направленiи, тоже тѣсно примыкающiя къ преподаванiю ариѳметики и вообще математики, напр. на книгу, появившуюся на русскомъ языкѣ, проф. Висконсинскаго университета О'Ши. Онъ затрагиваетъ вопросъ о гигiенѣ умственной дѣятельности съ той стороны, съ какой у насъ вопросъ не затрагивался. При обученiи математикѣ учащимся приходится выполнять довольно много письменныхъ работъ. Съ первыхъ годовъ обученiя приходится имѣть дѣло съ грифельной доской, затѣмъ съ бумагой и перомъ. Спрашивается, насколько вредны эти письменныя упражненiо для дѣтей? И вотъ разнообразные опыты, поставленные различными психологами, вообще сводятся къ слѣдующему. Вопросъ идетъ о расходованiи экономномъ или не экономномъ энергiи. Оказывается, что очень гладкая поверхность вызываетъ безполезную трату энергiи, такъ какъ въ этомъ случаѣ невозможно писать безъ чрезмѣрнаго напряженiя мускуловъ. Грифельная доска—это вѣроятно наиболѣе разорительная принадлежность школьной жизни. Царапающихъ перьевъ нужно избѣгать. Помимо производимаго ими раздраженiя нервной системы, они требуютъ такого осторожнаго обращенiя, что при этомъ невозможно избѣгнуть безполезной траты энергiи. О'Ши не разъ наблюдалъ, что никто не можетъ писать долго такимъ перомъ, не обнаруживая утомленiе.

Если человѣкъ занимается математикой, то въ его мозгу возникаетъ особенная дѣятельность какой-нибудь опредѣленной части и чѣмъ болѣе вниманiе человѣка сосредоточено на данномъ предметѣ, тѣмъ болѣе онъ разбирается въ тонкихъ соотношенiяхъ и быстрѣе работаетъ его голова. Въ неврологическомъ смыслѣ это обозначаетъ, что мозговая инерцiя въ опредѣленныхъ мѣстахъ побѣждена. Если вы предоставите вниманiю произвольно переходить на что-нибудь другое, оно должно возбуждать бездѣятельныя области, которыя въ данный моментъ, должны бы оставаться пассивными, а на это тратится какъ время, такъ и жизненныя силы. Цѣлый рядъ изслѣдователей Моссо, Ломбаръ, Стенли Холлъ, Бинэ и Анри, Ангель и Томпсонъ и др., занимались вопросомъ о томъ, насколько вліяютъ ариѳметическія вычисленія на дѣятельность спеціально мозговую. Моссо первый употреблялъ для этой цѣли очень остроумный приборъ—вѣсы, у которыхъ обѣ чашки представляли платформу, на которую ложился испытуемый. По мѣрѣ того, какъ ему давались для рѣшенія какія-нибудь ариѳметическія задачи и онъ старался рѣшать ихъ, вѣсы наклонялись въ сторону головы: это являлось слѣдствіемъ прилива крови къ головѣ. Эти опыты интересны тѣмъ, это испытуемому давались задачи приблизительно одного содержанія, и по мѣрѣ того, какъ опредѣленный типъ усваивался, наклоненіе въ сторону головы уменьшалось и, наконецъ, наступалъ день, когда приливовъ не наблюдалось. Отсюда вывели заключеніе, что какъ только типичная задача усвоилась, мозговой механизмъ не работаетъ, и отсюда вытекаетъ, что психологи — противъ задачъ типичныхъ и по правиламъ.

Относительно тѣхъ вычисленій, которыя производятся въ въ младшихъ классахъ и съ которыми приходится считаться врачамъ и психіатрамъ, можно вкратцѣ сказать слѣдующее. Были произведены нѣкоторыя изслѣдованія въ Германіи, Америкѣ и Англіи и оказалось, что какъ разъ не тѣ учебныя заведенія процвѣтаютъ по ариѳметикѣ, гдѣ больше отводится часовъ въ недѣлю на преподаваніе. По изслѣдованіямъ Стона, Райса и др. оказалось, что тамъ, гдѣ было удѣлено 14% школьнаго времени на ариѳметику, успѣхи оказались гораздо лучше, чѣмъ тамъ, гдѣ было 16—18%. Тамъ же, гдѣ было 12%, успѣхи оказались ниже. Отсюда выведено заключеніе, что много удѣлять времени на занятія ариѳметикой не слѣдуетъ, ибо это ведетъ къ совершенно противоположнымъ результатамъ. 16—14% въ этомъ отношеніи очень показательны.

Затѣмъ цѣлый рядъ изслѣдованій былъ произведенъ надъ явленіемъ ариѳмоманіи. Это печальное явленіе школы состоитъ въ томъ, что дѣти, привыкшіе къ постояннымъ умственнымъ вычисленіямъ, рѣшеніямъ мелкихъ задачъ, сложеніямъ и вычитаніямъ, которыя безконечной вереницей текутъ при рѣшеніи этихъ задачъ, начинаютъ совершенно безсознательно во всякій моментъ жизни считать, присчитывать, отсчитывать и т. д. У болѣе нервныхъ и слабыхъ натуръ это ведетъ къ опредѣленному заболѣванію, къ такъ называемой ариѳмоманіи. Очень большія и подробныя наблюденія въ Америкѣ, Англіи и Германіи показали, что муштровка въ одномъ и томъ же направленіи счета и пересчитыванія ведетъ къ тому, что умъ начинаетъ дѣйствовать тоже однообразно, именно—ассоціаціи начинаютъ складываться по одному опредѣленному направленію. Вотъ примѣръ, приводимый д-ромъ Триплетомъ: дѣвочка, обращаясь къ матери, сказала: «Я дошла до того, что когда я ѣду по улицамъ, то вижу въ окнахъ комбинаціи чиселъ»; увидѣвши однажды подругу въ новомъ платьѣ, она вскричала: «У тебя на платьѣ комбинація 5». Рисунокъ матеріи припомнилъ ей фигуру, при помощи которой она изучала число 5. Дальнѣйшее развитіе этой ариѳмоманіи—умственный автоматизмъ. Оказывается, что въ многолюдномъ классѣ можно всегда найти нѣсколько субъектовъ такого типа. Это доказываетъ, какъ осторожно нужно относиться къ чрезмѣрнымъ упражненіямъ въ этой области.

Воспріятія формъ тоже изслѣдованы въ настоящее время многими работами. Я позволю себѣ привести простое резюме этихъ работъ. Установлено, что зрительные центры развиваются ранѣе другихъ, болѣе специфицированныхъ. Это доказываетъ, что геометрію нужно начинать прежде всего съ зрительныхъ образовъ: «Мы видимъ формы въ значительной степени сквозь призму двигательныхъ навыковъ». Это доказываетъ, что изученіе формъ нужно начинать лѣпкой моделей, вырѣзываніемъ, склеиваніемъ, чтобы познать ихъ осязательнымъ путемъ и затѣмъ получить опредѣленныя представленія о формахъ. Работы Гирига, Бенусси, Моймана, Бинэ, Бирфлита и др. установили, что глазомѣръ въ 6—7 лѣтъ немного уступаетъ глазомѣру взрослаго. Слѣдовательно, пространственныя соотношенія можно изучать въ довольно раннемъ возрастѣ. Мойманъ идетъ далѣе и утверждаетъ, что къ 6 годамъ эта способность развита вполнѣ достаточно. По вопросу о пособіяхъ при изученіи формъ важную роль сейчасъ занимаетъ вопросъ объ окраскѣ приборовъ. Цѣлый рядъ изслѣдованій въ этой области показалъ, что реакціи на краски у дѣтей и взрослыхъ совершенно различны. Опредѣленный цвѣтъ вызываетъ опредѣленныя ощущенія. Такъ, напр., можно вызвать и сердцебіеніе, можно увеличить мускульную силу, сдѣлать болѣе глубокимъ дыханіе и т. п. Оказывается, что маленькія дѣти болѣе всего радуются желтымъ и оранжевымъ цвѣтамъ, а, между тѣмъ, въ зрѣломъ возрастѣ люди находятъ эти цвѣта слишкомъ яркими. Если мы расположимъ въ порядкѣ цвѣта, которымъ отдаютъ предпочтеніе маленькія дѣти 3 — 12 лѣтняго возраста, то получаются болѣе мягкіе тона по мѣрѣ того, какъ дѣти становятся старше.

Какія формы наиболѣе знакомы? Въ этомъ отношеніи психологи и логики рѣзко расходятся. Вы знаете, что Песталоци въ основу изученія формъ положилъ четыреугольникъ; Гербартъ, когда сталъ развивать систему Песталоци, положилъ треугольникъ и его книга о наглядномъ обученіи построена на различныхъ операціяхъ надъ треугольникомъ, какъ основной формой. Довольно долго думали, что нужно начинать съ треугольника, такъ какъ это понятіе наиболѣе простое и господствуетъ въ другихъ формахъ; но подробныя изслѣдованія путемъ такъ называемыхъ тестовъ (особенныхъ опросовъ), напр., опыты Гартмана, когда въ теченіе 4 лѣтъ было изслѣдовано 1312 дѣтей, показали, что треугольникъ былъ знакомъ 128, кругъ—564, а шаръ—1056, причемъ четыреугольникъ занимаетъ среднее мѣсто между шаромъ и кругомъ. Цѣлый рядъ опытовъ въ этомъ направленіи (я упомянулъ объ Аннабергскихъ, потому что они извѣстны), повторенныхъ въ настоящее время, показали, что общій выводъ правиленъ: треугольникъ менѣе знакомъ дѣтямъ, чѣмъ четыреугольникъ и шаръ. Такимъ образомъ логически простое и психологически простое въ данномъ случаѣ расходятся, и на эту сторону я предложилъ бы обратить особенное вниманіе не только въ области изученія формъ, но и вообще въ области всей методики начальнаго обученія. Намъ приходится различать 2 простоты: логическую, къ которой приспособленъ умъ взрослаго человѣка, умѣющаго разсуждать опредѣленнымъ образомъ, и психологическую, связанную опредѣленнымъ порядкомъ развитія представленій и понятій у дѣтей. Такимъ образомъ почти 60-лѣтній споръ между Гербартомъ и Песталоци рѣшенъ въ пользу Песталоци. Песталоци не имѣлъ въ своемъ распоряженіи опытныхъ данныхъ, которыя имѣются сейчасъ, но онъ понималъ, какая форма должна быть ближе дѣтямъ. Можетъ быть въ этомъ кроется секретъ того успѣха, который выпалъ на долю ученія Песталоцци.

Я перейду къ отдѣлу, который вызываетъ наибольше споровъ въ области математическаго преподаванія и является краеугольнымъ камнемъ новыхъ системъ. Я говорю о роли активности въ математикѣ. Этимъ вопросомъ занимались самыя разнообразныя группы ученыхъ, между прочимъ неврологи и психопатологи; они установили основной пунктъ, въ силу котораго считаютъ теперь ручной трудъ общеобразовательнымъ методомъ. Изслѣдованія Флексига, Мерсье, Дональдсона и др. привели къ слѣдующему положенію: «организація мозга въ началѣ такова, что всѣ пути ведутъ прямо къ двигательной области». Болтонъ въ своей большой работѣ «О зависимости между моторизаціей и интеллектомъ» устанавливаетъ, что «умственное развитіе и двигательная способность идутъ рука объ руку». Я не буду больше останавливаться на вопросахъ о рефлексахъ и объ ихъ значеніи для нашего предмета, потому что объ этомъ будетъ говорить слѣдующій докладчикъ, П. Д. Енько. Цѣлый рядъ основательныхъ работъ устанавливаетъ, что «сложность мышленія и двигательные процессы обратны другъ другу». Что это значитъ? Здѣсь возникаетъ вопросъ объ утилизаціи нервной энергіи. Чѣмъ сложнѣе тотъ процессъ, который должно обработать мыслительнымъ путемъ, тѣмъ больше нужно задержать наши рефлексы, тѣмъ больше должно сидѣть неподвижно; но это достигается лишь въ болѣе позднемъ періодѣ жизни. Съ этой точки зрѣнія правъ О'Ши, который говоритъ, что «ребенокъ думаетъ мускулами», правъ Холлъ, что «мышленіе—это подавленіе мускульныхъ усилій», правъ Фере, что «когда мозгъ находится въ дѣйствіи, все тѣло мыслитъ», и вся психо-физическая школа, которая говоритъ, что къ мышленію, какъ чистому процессу, мы приходимъ черезъ цѣлый рядъ двигательныхъ процессовъ. Я сейчасъ продемонстрирую нѣсколько кривыхъ, которыя показываютъ, насколько ручной трудъ, какъ общеобразовательное средство, помогаетъ намъ преодолѣть двѣ важныя задачи воспитанія: 1) поднятіе общей работоспособности, и 2) воспитаніе воли, а вы знаете, что современная педагогика ставитъ воспитанiе воли на первый планъ. Эти опыты, часть которыхъ я продемонстрирую, были сдѣланы въ Галицiи, гдѣ въ 37 среднихъ школахъ уже введены мастерскiя ручного труда. И вотъ изслѣдованiя надъ учениками старшихъ классовъ средней школы показали ясно, насколько успѣхи въ ручномъ трудѣ и успѣхи учебные, оцѣниваемые нашими 5, 4, 3 и 2, идутъ рука объ руку. Въ Галицiи, благодаря почину д-ра Iордана, устроены мастерскiя, въ которыхъ ученики, приходящiе на 1—2 часа, занимаются опредѣленной работой. Подобныя же мастерскiя введены уже и въ 18 среднихъ школахъ въ Варшавскомъ Учебномъ Округѣ.

Такимъ образомъ, не зная ученика, по той работѣ, которую онъ выполняетъ, зафиксированной опредѣленнымъ приборомъ, легко установить, насколько продуктивны его школьныя занятiя. Въ какой мѣрѣ вопросъ о ручномъ трудѣ сейчасъ разработанъ, можно судить по опубликованному въ прошломъ году (1910) большому изслѣдованiю Вейлера о взаимоотношенiи между мускульной силой и мускульнымъ трудомъ. Тамъ онъ устанавливаетъ опредѣленный законъ, напоминающiй законъ Вебера-Фехнера: «выполненiе мускульной работы относится къ способности ея выполненiя, какъ логариѳмъ выполненной работы». Такимъ образомъ логариѳмическое отношенiе устанавливается и здѣсь. Оказывается, что способность можетъ быть гораздо больше, чѣмъ степень выполненiя. Я упоминаю это для того, чтобы вамъ показать, насколько не только качественно, но и количественно изученъ уже этотъ вопросъ. При всякой работѣ, будетъ ли это мускульная или физическая, появляется нервно-мускульное утомленiе, появляется такъ называемое токсинное утомленiе, напоминающее ядовитые токсины при другихъ заболѣванiяхъ. Я упомяну объ извѣстныхъ опытахъ Моссо, Вейхарда и др. надъ собаками и мышами: если вспрыснуть антоксины животнымъ, то они парализуютъ токсинное утомленiе и данный субъектъ какъ бы оживаетъ вновь. Оказывается, что при ручномъ трудѣ волевая энергiя увели-

---

[1] Въ 1911 г. было произведено изслѣдованiе 25 учащихся старшихъ классовъ средней школы при помощи метронома эргографа и мiографа. Результаты, какъ видно изъ демонстрированныхъ дiаграммъ, ясно показали, что планомѣрный ручной трудъ повышаетъ общiе успѣхи.

чивается и ведетъ къ выработкѣ большаго количества антитоксиновъ, иначе, тѣ субъекты, которые занимаются правильно поставленнымъ ручнымъ трудомъ, имѣютъ организмы болѣе устойчивые и болѣе обезпечены въ борьбѣ съ токсинами, чѣмъ люди, занимающіеся исключительно умственнымъ трудомъ. По вопросу объ утомленіи, отдыхѣ и снѣ мы имѣемъ не менѣе важныя данныя. Одна работа была опубликована въ 1906 г. Это анкета, которую провелъ международный журналъ Enseignement Mathématique между математиками всѣхъ странъ. Изъ этой анкеты оказывается, что 45 человѣкъ должны спать 8 часовъ въ сутки и только 11 человѣкъ 6—7 час., если хотятъ успѣшно заниматься какой либо работой. Параллельныя изслѣдованія врачей установили болѣе или менѣе точно слѣдующее: ребенокъ 5—8 лѣтъ долженъ спать 11—12 час., 9 — 10 лѣтъ — 10 — 11 час., 11 — 13 лѣтъ — 9 — 10 час., 14 — 15 лѣтъ — $8^{1}/_{2}$ — 9 час. Это показываетъ, насколько вопросъ объ утомленіи связанъ съ вопросомъ о времени, отводимомъ на сонъ и на такъ называемое приготовленіе уроковъ. Можетъ быть, будутъ теперь понятны тѣ возгласы, которые раздаются рѣшительно въ Америкѣ и отчасти на материкѣ Европы противъ задаванія на домъ уроковъ по математикѣ, требующихъ 2—3 часа на ихъ приготовленіе.

Что касается активнаго и пассивнаго обученія, то по этому вопросу имѣемъ цѣлый рядъ капитальныхъ работъ Лойдъ Моргана, Вундта, Грооса и др. Вундтъ подробно разбиралъ этотъ вопросъ и установилъ слѣдующій фактъ: всякій разъ какъ происходитъ пассивное воспріятіе готовыхъ понятій, напр., въ математикѣ при изученіи готовыхъ правилъ, опредѣленныхъ типовъ задачъ и т. п., появляется въ организмѣ физіологическое чувство страданія, чувство непріятнаго, «Gefühl des Erleidens»; всякій разъ, какъ происходитъ активное напряженіе, стремленіе къ опредѣленной цѣли, появляется чувство удовлетворенія, «Lusttatigkeitsgefühl», которое дѣйствуетъ возбуждающимъ образомъ на организмъ. Если съ этимъ сопоставить данныя, клонящіяся къ выясненію такъ называемаго поногенетическаго коэффиціента (коэффиціента утомляемости), то математика займетъ безъ сомнѣнія весьма почетное, но печальное мѣсто. Наибольшій коэффиціентъ 100 даетъ наша школьная математика, все равно—производились-ли изслѣдованія въ Германіи (Вагнеръ, Кемзисъ) или въ Японіи (Сакаки).

Есть еще вопросы, которыхъ нужно было бы коснуться болѣе подробно, но я боюсь утомить ваше вниманіе, тѣмъ болѣе, что объ этихъ вопросахъ въ нѣсколькихъ словахъ довольно трудно сказать. Поэтому я ограничусь слѣдующимъ упоминаніемъ. Относительно развитія сужденій и умозаключеній въ настоящее время существуетъ достаточно большая литература и въ краткихъ словахъ ея данныя можно формулировать слѣдующимъ образомъ. До 14 лѣтъ способность къ умозаключеніямъ у нормальныхъ дѣтей почти отсутствуетъ. Начинать обученіе этимъ вопросамъ можно не ранѣе 14—15 лѣтъ. Желающіе могутъ найти довольно матеріала по этому вопросу у Моймана; есть цѣлый рядъ и другихъ работъ, между прочимъ рядъ такъ называемыхъ тестовъ, произведенныхъ въ разныхъ странахъ. Я сошлюсь на опросъ, произведенный въ Америкѣ Каролиной Ле-Роу. Она хотѣла выяснить, насколько вліяетъ на психику дѣтей въ смыслѣ ихъ развитія логически простое: что даетъ преподаваніе математики, начинающееся съ опредѣленій и готовыхъ правилъ или образцовъ. Я привожу эти образцы не съ цѣлью надъ ними иронизировать, потому что это печальное явленіе, но эти образцы заслуживаютъ вниманія, чтобы показать, насколько мы еще стоимъ на вредномъ пути. Я буду прямо читать отвѣты: «Вычитаніе есть уменьшенное число и вычтенный конецъ».

«Когда получаются два равныхъ числа, это называется умноженіемъ».

«Сложенное число это то же самое, что и первый числитель».

«Куртажемъ называется вознагражденіе за разбитіе бутылокъ или утечку изъ нихъ жидкости».

«Страхованіе—это, когда вы умираете или ваши деньги сгораютъ и страховая компанія платитъ вамъ».

«Биржа въ Европѣ это, когда вы ѣдете чрезъ Лондонъ, Парижъ и другія мѣста».

«Вѣсъ земли опредѣляется сравненіемъ массы извѣстнаго свинца съ массой свинца неизвѣстнаго».

«Аберрацiей называется, если мы увидѣвъ звѣзду стрѣляемъ въ нее и выстрѣлъ не попадаетъ въ ея центръ, но въ сторону».

«Звѣзды покрыли бы все небо, если бы онѣ были разсѣяны по нему, поэтому астрономы пришли къ заключенiю—распредѣлить ихъ по созвѣздiямъ».

Общая сводка мнѣнiй по этому вопросу можетъ быть формулирована такъ: «до 15 лѣтъ время дѣйствовать; послѣ будетъ достаточно времени для размышленiя».

Что касается психологiи математическихъ способностей, интуицiи и логики въ математикѣ, то и здѣсь имѣются уже нѣкоторые положительные принципы. По вопросу о психологiи математическихъ способностей существуетъ большая, довольно исчерпывающая работа проф. Лессинга. Въ ней онъ устанавливаетъ распредѣленiе всѣхъ людей на типы естественниковъ и математиковъ и находитъ, что исторiя наукъ показываетъ, что когда развивается естествознанiе, то абстрактная математика приходитъ въ упадокъ. Затѣмъ онъ устанавливаетъ, что есть умы, способные къ воспитанiю въ одномъ направленiи и есть умы, способные къ воспитанiю въ другомъ направленiи, а именно—есть типы интроспективные и типы экстроспективные. Наконецъ онъ устанавливаетъ, что математикъ обладаетъ не абстрактнымъ, а скорѣе конкретнымъ умомъ. Другiе изслѣдователи: французскiй философъ Бруншвигъ, посвятившiй этому вопросу большую работу, Клейнъ, писавшiй по тому же вопросу, Пуанкаре и другiе приходятъ къ тому же заключенiю, что есть 2 рѣзко выраженныхъ типа: одинъ думаетъ, начиная съ конкретнаго (интроспективный типъ); онъ желаетъ, прежде чѣмъ перейти къ выводу, сдѣлать модель и потомъ только разсуждаетъ по поводу ея. Другой отбрасываетъ всѣ представленiя въ сторону и начинаетъ съ уравненiй и системы уравненiй. Въ этомъ отношенiи представляетъ характерную фигуру Клейнъ. Ему приходилось изслѣдовать Римановы функцiи, и вотъ что онъ сдѣлалъ. Онъ по поверхности доски насыпалъ опилокъ и смотрѣлъ, какъ будутъ располагаться опилки подъ влiянiемъ тока. Тѣ кривыя, которыя онъ получилъ, послужили исходной точкой для веденiя его работъ. Что дѣлаетъ Софусъ Ли, когда ему приходится создавать новые пути въ геометрiи? Онъ составляетъ цѣлую систему дифференціальныхъ уравненій и на основаніи общаго рѣшенія (интегрированія) этихъ уравненій даетъ матеріалъ, который Клиффордъ осуществляетъ въ своей модели. Я ограничусь цитатой изъ письма Эрмита къ Штильтьесу (8 Мая 1890 г.), гдѣ онъ подчеркиваетъ это различіе: «Я не смогу вамъ описать, на какія усилія я былъ осужденъ, чтобы понять кое-что въ этюдахъ по начертательной геометріи, которую я ненавижу... Какъ счастливъ тотъ, кто можетъ думать лишь въ области анализа!»

Вотъ рѣзко выраженный типъ аналитика, которому даже непонятно значеніе математическихъ представленій въ области начертательной геометріи.

Теперь я долженъ сказать нѣсколько словъ о тѣхъ путяхъ изученія всѣхъ этихъ проблеммъ, о которыхъ я говорилъ въ началѣ своего конспекта. Эти пути разнообразны: опросы, анкеты и тесты, за которые высказывается большая группа изслѣдователей, путь единичнаго лабораторнаго изслѣдованія, массовыя изслѣдованія, которыя производятся въ такъ называемыхъ новыхъ школахъ Европы и Америки. На эти массовыя изслѣдованія должно направиться вниманіе учителей: эти новыя школы, это — лабораторіи въ большихъ размѣрахъ, въ которыхъ можно проводить новыя мысли и методы. (Снимки изъ дѣятельности нѣкоторыхъ школъ были продемонстрированы).

Я, кажется, использовалъ отведенное мнѣ время и могу только благодарить васъ за то вниманіе, съ которымъ вы меня выслушали. Позвольте закончить мое сообщеніе слѣдующимъ. Въ началѣ XIX в. возникло движеніе, какъ реакція противъ Песталоци, и выразитель его, Мартинъ Омъ, говорилъ: «Я хотѣлъ бы обладать краснорѣчіемъ Демосѳена или Цицерона, чтобы изгнать изъ нашихъ (не однѣхъ только гимназій, но и всѣхъ) нѣмецкихъ учительскихъ семинарій, реальныхъ, элементарныхъ и городскихъ школъ господствующій въ нихъ предразсудокъ, будто слѣдуетъ, вмѣсто элементовъ научной геометріи, проходить курсъ наглядной геометріи, т. е. давать, вмѣсто упражняющей всѣ духовныя силы человѣка строго научной математики, скудно и односторонне развивающіе суррогаты... Если бы Песталоци или Шмидъ испытали, насколько строго научная математика доступна и интересна десятилѣтнимъ дѣтямъ, то они не сбились бы съ пути».

И въ такомъ же духѣ шло все обученіе математикѣ въ первую половину XIX вѣка съ легкой руки Іоганна Шульце, около 30 лѣтъ державшаго въ своихъ рукахъ судьбы народнаго просвѣщенія въ Германіи. Ему принадлежитъ классическая фраза, что «въ одномъ строчкѣ Корнелія Непота заключается болѣе образовательнаго матеріала, чѣмъ въ 20 математическихъ формулахъ». Но жизнь отвергла этотъ взглядъ и педагоги повели борьбу на два фронта: за выясненіе практическаго значенія и за установленіе практическихъ методикъ математики. И современная математика дала теперь отвѣтъ Мартину Ому и иже съ нимъ: да, строго научная математика недоступна дѣтямъ!»

Конспектъ.

1. Задачи эксперимента въ математикѣ: a) изучить развитіе представленій и понятій, b) изучить методы математической работы, c) изслѣдовать взаимоотношенія интуиціи и логики, d) дать сравнительную оцѣнку различныхъ методическихъ принциповъ.

2) Различные виды дидактическихъ и психологическихъ экспериментовъ: a) лабораторныя—единичныя и групповыя—изслѣдованія, b) классные опыты, c) тесты, d) школьныя колоніи.

3) Результаты экспериментальныхъ изслѣдованій слѣдующихъ проблеммъ:

I. Развитіе числовыхъ представленій.
II. Изученіе вниманія и ассоціацій при простыхъ ариѳметическихъ процессахъ.
III. Гигіена умственной дѣятельности при занятіяхъ математикой.
IV. Воспріятіе, воспроизведеніе и изученіе формъ.
V. Роль активности въ школьной математикѣ.
VI. Психологія математическихъ способностей.
VII. Интуиція и логика въ математикѣ.
VIII. Способность построенія умозаключеній.

4. Важное значеніе школьныхъ колоній—лабораторій «Im Grossen»; результаты занятій. Нѣсколько иллюстрацій занятій по математикѣ въ «Новыхъ школахъ» Европы и Америки.

Примѣчаніе. Были показаны діапозитивы.

V. Новыя изслѣдованія по физіологіи центральной нервной системы и педагогика.

Докладъ П. Д. Енько (Спб.).

«Въ теченіи многихъ лѣтъ, въ институтѣ экспериментальной медицины, профессоромъ Павловымъ и его школой производятся изслѣдованія надъ образованіемъ и исчезновеніемъ условныхъ рефлексовъ у собакъ. Изслѣдованія эти пролили очень яркій свѣтъ на многія изъ, такъ называемыхъ, психическихъ явленій. Они пока не даютъ отвѣта на всѣ вопросы психологіи, но даютъ намъ удовлетворительный отвѣтъ на вопросъ: «въ чемъ состоитъ сущность воздѣйствій одного человѣка на другого» и въ частности—«въ чемъ состоитъ сущность педагогическихъ воздѣйствій при массовомъ обученіи въ школахъ».

Изъ нихъ вытекаетъ съ очевидностью, что все дѣло школьной педагогики сводится къ установленію условныхъ рефлексовъ, что все школьное умственное развитіе сводится только къ этому, только къ приспособленію мозговыхъ механизмовъ къ выполненію опредѣленныхъ работъ и только опредѣленныхъ, а не вообще какихъ бы то ни было.

Въ частномъ случаѣ обученія математикѣ дѣло сводится напр. къ тому, чтобы при видѣ двухъ предметовъ у ребенка появлялся рефлексъ на органы говоренія, и онъ произносилъ бы слово «два», или рефлексъ на руку, и онъ писалъ бы то же слово или цифру 2, и обратно; оно сводится къ тому, чтобы при видѣ, положимъ, цифры 2, крестика и еще цифры 2 у него появлялся рефлексъ на органы рѣчи, и онъ произносилъ бы слово «четыре», или же на руку, и онъ писалъ бы цифру 4; чтобы при взглядѣ на чертежъ кривой у него появлялись рефлексы на органы рѣчи или на руку, и онъ говорилъ бы или писалъ то, что слѣдуетъ и т. д., и т. д.

Внутреннія явленія, субъективныя представленія о говоримомъ, дѣлаемомъ,—могутъ быть, но могутъ и не быть: мы ихъ не видимъ и судимъ о нихъ только по аналогіи съ самими собою, судя по своимъ переживаніямъ, предположительно. Но наши предположенія о нихъ могутъ быть глубоко ошибочны, совсѣмъ не соотвѣтствовать истинному положенію дѣла. Въ опытахъ профессора Павлова мы видимъ, что собакѣ причиняютъ жесточайшую боль, а она смотритъ весело, очень весело, какъ будто ей даютъ ѣсть нѣчто очень вкусное; до такой степени можно извратить направленіе условныхъ рефлексовъ, до такой степени условные рефлексы могутъ не соотвѣтствовать нашимъ представленіямъ о переживаніяхъ, которыя должно бы вызывать данное воздѣйствіе. Поэтому и въ нашемъ частномъ случаѣ цѣлесообразность дѣйствій ребенка при отвѣтахъ и рѣшеніи задачъ вовсе не говоритъ въ пользу сознательнаго отношенія къ дѣлу, а только показываетъ цѣлесообразность установленныхъ учителемъ рефлексовъ. Только дальнѣйшее, именно—примѣненіе пріобрѣтенныхъ условныхъ рефлексовъ къ новымъ обстоятельствамъ, къ рѣшенію необычныхъ задачъ можетъ позволить сдѣлать предположеніе, что въ дѣйствіяхъ ученика участвовали не только установленные условные рефлексы, но и сознаніе и воля. Наблюденіе показываетъ, что это бываетъ рѣдко; учителю приходится объяснять каждый новый родъ задачъ снова, т. е. ему приходится на каждый новый случай устанавливать и новые условные рефлексы.

Созидая въ ребенкѣ условные рефлексы, мы можемъ идти по двумъ путямъ: мы можемъ имѣть въ виду только созиданіе такихъ условныхъ рефлексовъ, которые будутъ повторяться впослѣдствіи, или же мы можемъ заботиться преимущественно о внѣдреніи такихъ, которые не будутъ повторяться по выходѣ изъ школы, даже по переходѣ въ слѣдующій классъ, которые, поэтому, осуждены на исчезновеніе. Иначе говоря, передъ нами является тотъ же старый и вѣчно юный вопросъ о схоластическомъ развивательномъ направленіи, о занятіяхъ, нужныхъ для самой школы, и о естественномъ учебномъ направленіи, о занятіяхъ предметами, которыми придется заниматься и по оставленіи школы. Занимать ли учениковъ вещами безполезными, осложнять ли обученіе математикѣ разсужденіями, имѣющими значеніе только въ данной школѣ, при данныхъ учителяхъ, которыя при переходѣ къ инымъ учителямъ, въ школы иного направленія будутъ неизбѣжно забыты, будутъ даже служить тормазомъ для пріобрѣтенія дальнѣйшихъ знаній, или же учить ихъ только тому, что всегда и вездѣ будетъ нужно, что остается въ программахъ, несмотря на измѣненія педагогическихъ взглядовъ?

Совсѣмъ недавно можно было еще думать, что мы, занимая учениковъ условно полезными разсужденіями, приносимъ имъ пользу, развиваемъ ихъ, усиливаемъ ихъ умственныя способности, научаемъ ихъ мыслить.

Но теперь, послѣ великихъ открытій въ педагогіи собаки. мы не можемъ болѣе утверждать этого. Теперь мы должны признать, что, обучая ребенка, мы увеличиваемъ число условныхъ рефлексовъ, улучшаемъ механизмъ мозга, приспособляя его къ новымъ родамъ работы, но только къ даннымъ, тѣмъ, которымъ мы учимъ, а не ко всякимъ. Поэтому, теперь не позволительно расходовать время ребенка на установленіе условныхъ рефлексовъ, осужденныхъ на исчезновеніе, на занятія, которыя не будутъ имѣть примѣненія по окончаніи ученія. То-есть мы должны теперь отказаться отъ, такъ называемаго, развивательнаго направленія и вернуться къ старому, учебному: давать дѣтямъ полезныя знанія, въ возможно большемъ количествѣ, возможно простыми способами, по возможности облегчая обученіе, то-есть образованіе и упроченіе нужныхъ условныхъ рефлексовъ.

Этотъ путь труденъ; сбиться съ него и перейти на старый, привычный, схоластическій, очень легко; стоитъ только задуматься не надъ облегченіемъ обученія, а надъ усовершенствованіемъ его.

Вѣдь всякое усовершенствованіе пріемовъ обученія, не имѣющее непосредственною цѣлью сокращеніе времени, нужнаго для пріобрѣтенія знаній по данному предмету, ведетъ къ замедленію обученія и составляетъ сущность схоластики-ученія для ученія. Оно ведетъ къ проложенію такихъ путей въ мозгу, которые впослѣдствіи не будутъ болѣе нужны.

Но и не сходя съ пути естественнаго, учебнаго направленія должно быть осторожнымъ и не увлекаться. Не забывайте, что то, что несомнѣнно полезно вамъ, какъ преподавателямъ математики, совершенно безполезно для будущихъ врачей, юристовъ, земледѣльцевъ; что условные рефлексы, которые усвоили вы, которые сохраняются у васъ въ силу повторенія, по нуждамъ вашей профессіи, у людей иныхъ профессій безъ повтореній исчезнутъ очень быстро. Не забывайте, что емкость мозга ограничена, что всякое прокладываніе въ немъ путей для рефлексовъ, которые не будутъ нужны впослѣдствіи, ведетъ къ ограниченію мѣста для образованія путей для нужныхъ рефлексовъ; иначе говоря, не забывайте, что образованіе слишкомъ большого числа условныхъ рефлексовъ подавляетъ возможность дальнѣйшаго самостоятельнаго развитія. Все равно, будемъ ли мы заставлять повторять слова, излагающія чужія мысли по философіи математики, будемъ ли мы учить рѣшенію практически—полезныхъ задачъ, мы все равно не должны растягивать обученіе въ школѣ до безконечности, не должны перегружать дѣтей работой; мы должны оставить имъ время для самостоятельнаго развитія, для прокладыванія путей для тѣхъ рефлексовъ, которые имъ будутъ наиболѣе нужны по условіямъ жизни и свойствамъ организма каждаго.

Къ вамъ, къ Съѣзду, прислушивается вся Россія, рѣшенія ваши будутъ служить руководствомъ при установленіи программъ и методовъ, не увлекайтесь же логичностью разсужденій и помните, что не единою математикой живъ будетъ человѣкъ».

Пренія по докладамъ В. Р. Мрочека и П. Д. Енько.

А. П. Нечаевъ. (Спб.) „Сегодня съ этой каѳедры приводился цѣлый рядъ справокъ, показывающихъ, что современная психологія можетъ оказать извѣстную помощь въ смыслѣ разъясненія цѣлаго ряда вопросовъ, касающихся методовъ математики. Затѣмъ здѣсь было сдѣлано почтеннымъ представителемъ Московскаго Университета проф. Некрасовымъ очень цѣнное напоминаніе о томъ значеніи, которое имѣетъ для преподавателей математики Гербартъ и его взгляды. Мнѣ хочется напомнить, что однимъ изъ самыхъ великихъ завѣтовъ Гербарта было требованіе, чтобы всякое обученіе имѣло воспитательное значеніе. Если эту задачу мы будемъ помнить, то намъ прежде всего станетъ яснымъ, что преподаваніе математики, какъ и преподаваніе всякаго другого предмета, тогда только будетъ успѣшно достигать своей цѣли, когда мы будемъ отдавать себѣ ясный отчетъ въ томъ вліяніи, которое оказываетъ наше преподаваніе на всю личность воспитанника, на весь ходъ его психическаго развитія. Это вліяніе можетъ быть особенно цѣннымъ въ томъ случаѣ, когда будетъ координирована работа отдѣльныхъ преподавателей. Такой координаціи ближе всего можетъ способствовать изученіе психики учащихся. На этой общей почвѣ устанавливается общность педагогическихъ задачъ отдѣльныхъ членовъ учительской корпораціи; такъ что съ точки зрѣнія, выдвинутой представителемъ Московскаго направленія, особенно цѣненъ тотъ призывъ къ изученію психологіи, который былъ сдѣланъ со стороны почтеннаго С. И. Шохоръ-Троцкаго".

Я позволю себѣ привести маленькую справку относительно Павловскихъ опытовъ, о которыхъ сегодня много говорилось. Получившіе въ настоящее время міровую извѣстность опыты проф. Павлова объ условныхъ рефлексахъ имѣютъ несомнѣнно очень большое значеніе для психологіи, потому что выясняютъ біологическія основанія очень многихъ психологическихъ процессовъ запоминанія, установленія ассоціацій, утомленія и т. д. Но когда мы оцѣниваемъ этотъ матеріалъ съ точки зрѣнія педагогики, то мы должны этотъ матеріалъ учитывать такъ. какъ его учитываетъ самъ проф. Павловъ, именно—мы должны помнить, что эти изслѣдованія касаются процессовъ, наблюдаемыхъ у собакъ, и конечно то, что наблюдается нами у собакъ, не можетъ считаться охватывающимъ всю ту сложную область психофизіологическихъ процессовъ, которую долженъ имѣть въ виду педагогъ. Конечно, если будетъ доказано, что какой-либо педагогическій пріемъ явно противорѣчитъ тому, что наблюдается даже у собакъ, если мы увидимъ, что педагогъ въ своей работѣ нарушаетъ такіе біологическіе законы, которые даже у собакъ могутъ ясно быть наблюдаемы, то мы должны этотъ пріемъ забраковать, но, съ другой стороны, устанавливая свои педагогическіе идеалы, мы не можемъ руководиться знаніемъ только того, что даетъ намъ наблюденіе надъ собаками. Наша задача заключается въ томъ, чтобы психику ребенка довести до высшихъ ступеней развитія воли и разума. Нашимъ педагогическимъ идеаломъ должна быть душевная жизнь развитаго человѣка, а не душевная жизнь собаки, при какихъ бы тщательныхъ условіяхъ она ни наблюдалась. Возьмемъ отъ работъ проф. Павлова то, что онѣ дѣйствительно даютъ, но не будемъ дѣлать изъ нихъ произвольныхъ выводовъ".

Предсѣдатель. „Желая сконцентрировать пренія по одному и тому же вопросу Организаціонный Комитетъ находитъ необходимымъ продолженіе преній по сегодняшнимъ докладамъ назначить на 30 декабря, когда будутъ прочитаны еще доклады по тому же вопросу".

Докладъ М. Г. Попруженко: **«Анализъ безконечно-малыхъ въ средней школѣ»** помѣщенъ въ концѣ I части (см. оглавл.).

VI. Постановка преподаванія началъ анализа въ средней школѣ.

Докладъ Ф. В. Филипповича (Спб.).

«Наглядно-лабораторное обученіе, графики, функціональное мышленіе и начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій призваны реформировать традиціонное преподаваніе математики, какъ въ отношеніи содержанія, такъ и въ отношеніи методовъ.

Такъ какъ возраженія противниковъ реформы обученія математикѣ, между прочимъ, сводятся къ сомнѣніямъ и даже къ отрицаніямъ того, чтобы высшую математику можно было отнести къ предметамъ общаго образованія, то я позволю себѣ, по мѣрѣ возможности, разсмотрѣть этотъ вопросъ въ своемъ докладѣ.

I.

Необходимость введенія анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу вытекаетъ:

а) изъ тенденціи сближенія науки со школой.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ исторіи преподаванія намъ извѣстно, что развитіе науки всегда, хотя и съ большими опозданіями, вноситъ свой коррективъ въ школьныя программы. Но для того, чтобы провести реформу, необходима подготовительная работа обмѣна мнѣній, необходима суровая критика традиціоннаго обученія математикѣ.

За послѣднія десятилѣтія со стороны науки идутъ нападки на современное обученіе математикѣ. Представители научнаго міра (Ф. Клейнъ, Пуанкаре, Борель, Таннери и др.) горячо нападаютъ на отсталость школьной математики отъ науки. Дѣйствительно, средняя школа игнорируетъ почти все развитіе математики, начиная съ XVII столѣтія. Изъ всего богатства методовъ, внесенныхъ въ европейскую науку со временъ эпохи Возрожденія, только логариѳмы получили право гражданства. Такимъ образомъ, курсъ алгебры въ нашихъ гимназіяхъ заканчивается математическими открытіями начала XVII ст. Такъ какъ по взглядамъ новой педагогики одна изъ задачъ общаго образованія есть «способность понимать все наше культурное развитіе», то очевидно, что такая цѣль не можетъ быть достигнута безъ расширенія математическихъ знаній.

Итакъ, учащихся не слѣдуетъ искусственно задерживать на средневѣковомъ уровнѣ математики, и тогда мы успѣемъ ихъ познакомить съ великими открытіями творцовъ европейской математики; труды Декарта, Лейбница и Ньютона имъ будутъ извѣстны хотя бы въ самыхъ общихъ чертахъ.

b) Начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій должны быть призваны освѣжить школьную математику также и соотвѣтственно запросамъ жизни. Прошли безвозвратно тѣ добрыя старыя времена, когда возможно было обходиться безъ азбуки высшей математики. Теперь даже медики на своихъ собраніяхъ восклицаютъ: «давайте намъ побольше математики! Старый путь черезъ Эвклида къ Декарту и Лейбницу слишкомъ длинный и трудный. Сократите этотъ далекій путь по мѣрѣ возможности!» Г. Гельмгольцъ, А. Фикъ и Бернштейнъ въ Германіи давно указывали на необходимость расширенія школьнаго преподаванія не только по общеобразовательнымъ причинамъ, но также и въ пользу изученія медицины и вообще пониманія движущихъ силъ нашего современнаго развитія. Химію, физику, технику, страховое дѣло и проч. можно понять лишь въ слабой степени, если не имѣть хотя бы незначительныхъ свѣдѣній изъ области высшей математики. Но если мы желаемъ проникнуть глубже въ тайны вышеупомянутыхъ наукъ, то мы непремѣнно должны воспользоваться орудіемъ анализа безконечно-малыхъ. По словамъ проф. Дж. В. А. Юнга, «исчисленіе безконечно-малыхъ есть ученіе объ измѣненіяхъ и можетъ быть названо, въ строгомъ смыслѣ слова, математикой природы». Вообще безъ высшей математики явленія природы вполнѣ поняты быть не могутъ. Стало быть начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій должны войти въ общеобразовательный курсъ средней школы, ибо они даютъ намъ великолѣпное орудіе въ руки, чтобы удовлетворять запросамъ жизни.

c) И соображенія общепедагогическаго характера говорятъ въ пользу введенія анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу. На основаніи своей практики могу утверждать, что этотъ новый отдѣлъ возбуждаетъ въ высшей степени интересъ у учащихся къ изученію математики. А интересъ есть критерій пригодности той или другой части курса школьной математики. Ключъ настоящей реформы есть интересъ. И поэтому курсъ математики долженъ быть предложенъ ученикамъ въ наиболѣе интересной для нихъ формѣ.

Кромѣ того, въ курсѣ исчисленія безконечно-малыхъ и формальная цѣль будетъ хорошо представлена. Здѣсь лучше всего подчеркивается всемогущество математическаго метода. Въ самомъ дѣлѣ, какой отдѣлъ математики можетъ изящнѣе показать, что путемъ индукціи открывается законъ явленій, затѣмъ выражается зависимость, лежащая въ его основѣ въ формѣ математической функціи и подъ конецъ переносится изслѣдованіе въ область непогрѣшимой дедукціи математическаго анализа. Математика является какъ бы отвлеченной формой естествознанія, и въ данномъ случаѣ она, дѣйствительно, дисциплинируетъ мышленіе нашихъ учениковъ, даетъ драгоцѣнный матеріалъ для упражненія въ строго-логическомъ мышленіи. А это какъ разъ соотвѣтствуетъ новымъ взглядамъ на преподаваніе математики, т. е. тому, чтобы въ старшихъ классахъ средней школы преобладали логическія тенденціи. Слѣдовательно, цѣнность началъ исчисленія безконечно-малыхъ коренится въ томъ, что она является воплощеніемъ дѣйствительно существующихъ соотношеній, связываетъ реальный міръ съ математическимъ. Воспитательное значеніе анализа безконечно-малыхъ признается не только въ новыхъ французскихъ программахъ по математикѣ, но и въ Германіи. Англіи, Америкѣ, Австріи и др. начала анализа включены въ минимумъ требованій по математикѣ для средней школы.

II.

Въ связи съ введеніемъ анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу возникаютъ разногласія по поводу построенія самого курса. Новые французскіе учебные планы, «Меранская» программа въ Германіи и др. настаиваютъ на введеніи идеи функціональной зависимости. Реформаторы всѣхъ направленій присоединяются къ этому требованію. Дѣйствительно. объяснить какое-нибудь явленіе въ природѣ — это значить выяснить его генезисъ и связь съ другими явленіями. Въ виду этого лучше всего развивать идею функціональной зависимости (закономѣрности) въ математикѣ. Ученіе о функціяхъ есть центральное ученіе всей математики, потому что функціональная зависимость есть математическое выраженіе великаго закона измѣняемости соотношенія всѣхъ явленій; установленіе ея есть сущность и конечная цѣль всей науки. Поэтому мы, сторонники реформы, требуемъ, чтобы весь курсъ математики былъ сконцентрированъ около идеи функціональной зависимости и расширенъ первоначальными понятіями анализа безконечно-малыхъ. Стало быть, начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій не должны составлять самостоятельнаго отдѣла—«ученія о функціяхъ»—и являться какой то «надстройкой» надъ школьнымъ курсомъ, такъ наз.. элементарной математики. Практика показала, что такая метода (надстройки) преподаванія анализа безконечно-малыхъ теряетъ свою воспитательную и общеобразовательную цѣнность. Анализъ безконечно-малыхъ въ такомъ родѣ не только не возбуждаетъ и не поддерживаетъ интересъ къ математикѣ у учащихся, но даже и усваивается очень трудно.

Раньше еще, до начала анализа безконечно-малыхъ должны мы подготовлять почву для яснаго, отчетливаго и возбуждающаго новыя идеи—преподаванія элементовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Нѣкоторыя способности у учащихся поддаются развитію только въ извѣстномъ возрастѣ, разъ этотъ моментъ будетъ упущенъ, тогда довольно трудно наверстать пропущенное. Въ виду этого еще съ младшихъ классовъ средней школы на урокахъ ариѳметики. геометріи, алгебры,... слѣдуетъ проводить красной нитью въ теченіи всего курса школьной математики идею функціональной зависимости. Въ этомъ-то и заключается точное пониманіе аналитической геометріи и началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. «Послѣднія являются вѣнцомъ этого широкаго метода» (Ф. Клейнъ).

III.

Въ самомъ началѣ анализа безконечно-малыхъ мы должны исходить изъ болѣе конкретныхъ и простыхъ задачъ. Цѣлесообразно подобранными примѣрами изъ естествознанія слѣдуетъ проиллюстрировать учащимся, что изслѣдованіе какого нибудь явленія сводится къ достиженію двухъ результатовъ: а) найти общій законъ, выражающій ходъ этого явленія (функцію) и в) опредѣлить скорость измѣненія этого явленія природы въ каждый произвольно взятый моментъ (производную).

Цѣлью преподаванія высшей математики въ средней школѣ ни въ какомъ случаѣ не должно быть только усвоеніе механизма, техники дифференцированія и интегрированія. При такой методѣ начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій потеряли бы всю свою общеобразовательную и воспитательную цѣнность. Тоже самое можно было бы сказать, если бы весь курсъ анализа состоялъ изъ доказательствъ теоремъ и примѣненій ихъ къ дифференціаламъ и интеграламъ.

По моему мнѣнію, мы должны воспользоваться задачами изъ физики, химіи, техники и др., чтобы на нихъ выяснить происхожденіе основныхъ понятій дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Напримѣръ, какая-нибудь задача изъ естествознанія даетъ намъ возможность составить функцію. изобразить ее графически, затѣмъ изслѣдовать и подъ конецъ найти ея производную. Подходя такимъ образомъ къ понятію о производной, мы всегда должны выяснять въ чемъ сущность задачи дифференціальнаго исчисленія и давать наглядное представленіе (графическое изображеніе). Послѣ графическаго изображенія идетъ—идея и понятіе производной, а подъ конецъ—терминъ и символъ производной.

При такой системѣ преподаванія ученики вникаютъ въ математичность жизни природы и видятъ наглядно, какое колоссальное значеніе математики со стороны ея метода. Далѣе, при изученіи анализа, ученикамъ предоставляется большой просторъ, чтобы проявить свою самостоятельную работу, самодѣятельность и постоянно дѣлать умозаключенія. Кромѣ того, такой порядокъ вещей не сводитъ начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій къ собранію непонятныхъ значковъ и символовъ, какъ утверждаютъ нѣкоторые противники введенія анализа безконечно-малыхъ въ среднюю школу. Но въ этомъ-то и состоитъ задача педагогики — сдѣлать науку понятной, заставить ее говорить простымъ, обыкновеннымъ языкомъ. «Нѣтъ мысли, которую нельзя было бы высказать просто и ясно» (А. И. Герценъ). Въ самомъ дѣлѣ, кто слѣдилъ за учебной заграничной литературой въ теченіи послѣднихъ 25 — 30 лѣтъ, тотъ можетъ констатировать, что всюду замѣчается стремленіе къ упрощенію изложенія матеріала. Достаточно сравнить новѣйшія учебныя книги со старыми. То же самое можно утверждать и относительно школьныхъ программъ и учебныхъ плановъ. Что касается русскихъ учебниковъ по анализу безконечно-малыхъ, то въ этомъ отношеніи дѣло обстоитъ довольно плохо. Всѣ эти учебники для средней школы построены приблизительно по одному типу. Съ начала идетъ сухое изложеніе понятія о функціи, затѣмъ подраздѣленіе функцій, теоремы о предѣлахъ, непрерывность функцій, производная и дифференціалъ и т. д. Такое построеніе курса анализа наврядъ ли можетъ вызывать интересъ у учащихся. Нѣкоторые французскіе и нѣмецкіе учебники могли бы послужить хорошимъ примѣромъ, какъ надо составлять учебное руководство по анализу безконечно-малыхъ для средней школы.

Какъ всякій отдѣлъ математики, такъ и анализъ безконечно-малыхъ долженъ быть построенъ концентрически. Еще съ V класса при графическомъ изображеніи эмпирическихъ функцій мы должны подготовлять почву для дифференціальнаго счисленія. А въ VI и VII классахъ при проведеніи идеи функціональной зависимости на урокахъ алгебры слѣдуетъ учащихся знакомить съ понятіемъ о производной, а на урокахъ геометріи съ понятіемъ объ интегралѣ.

Въ VIII классѣ—связный обзоръ изученныхъ въ предыдущихъ классахъ функцій и элементы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

IV.

Ученіе о производной должно быть разрабатываемо съ различныхъ точекъ зрѣній. Прежде всего, разсматривая равномѣрное и неравномѣрное движеніе, мы подводимъ учащихся къ понятіямъ о постоянной скорости, средней скорости въ опредѣленный промежутокъ времени и скорости для нѣкотораго момента t. Такимъ образомъ, вводя понятіе о скорости измѣненія въ ученіе о функціяхъ, мы устанавливаемъ аналогію съ механическими процессами движенія. Сначала скорость есть производная пути по времени, на другомъ примѣрѣ у насъ получится, что скорость химической реакціи есть производная количества реагирующаго тѣла по времени, далѣе, по извѣстной формулѣ расширенія отъ теплоты, мы можемъ опредѣлить коэффиціентъ расширенія какъ мѣру скорости, съ которой идетъ процессъ расширенія при равномѣрномъ нагрѣваніи. Конечно, и другіе примѣры должны показать учащимся, какія разнообразныя задачи приводятъ насъ къ понятію о производной.

При помощи такихъ конкретныхъ задачъ можно одолѣть и другія методическія трудности въ началѣ ученія о производной, въ родѣ напр. того, что 1) отношеніе двухъ безконечно-малыхъ можетъ быть равно конечному и 2) предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближеніи Δx къ нулю для данной зависимости между y и x можетъ быть вычисленъ.

Аналогично выше-приведенному и задача о направленіи касательной къ параболѣ и т. п. должна показать учащимся, какъ можно подойти къ производной съ геометрической точки зрѣнія. Графически изображая какую-нибудь математическую функцію (напр. $y = x^2$) и опредѣляя направленіе касательной при помощи tangens'а угла, образуемаго касательной съ осью x, ученики приходятъ къ заключенію, что истинная скорость измѣненія ординатъ кривой въ какой-нибудь точкѣ равна угловому коэффиціенту касательной.

Сравнивая на частныхъ случаяхъ и числовыхъ примѣрахъ полученные результаты:

угловой коэффиціентъ $A = \frac{y'-y}{x'-x}$ при $x' = x$ и $V = \frac{s'-s}{t'-t}$ при $t' = t$

т. е. $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{ds}{dt}$

мы должны изъ этого извлечь въ чистомъ математическомъ видѣ понятіе о производной. Слѣдовательно, послѣ разнообразныхъ частныхъ примѣровъ и примѣненій производныхъ, мы обобщаемъ понятіе о производной въ видѣ формулы

$$lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Авторы русскихъ учебниковъ начинаютъ анти-педагогично понятіе о производной, т. е. съ конца: даютъ опредѣленіе производной при помощи отношенія $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, а потомъ слѣдуютъ примѣры на отысканіе производной и дифференціала.

Итакъ общее методическое положеніе, по моему мнѣнію, цѣлесообразно и здѣсь, при прохожденіи ученія о производной: «сначала примѣненіе, а затѣмъ уже правило».

V.

Въ преподаваніи математики вообще, а при прохожденіи интегральнаго исчисленія въ частности не слѣдуетъ давать одну только картину полнаго расцвѣта, безъ указаній на первые, робкіе шаги, послужившіе для этого развитія. Въ этомъ отношеніи развитіе науки иногда можетъ намъ оказать большую методическую услугу.

Методъ истощенія (Эвдоксъ Книдскій, 408—355 до Р. Х.) и законъ Кавальіери (1598—1647) могутъ еще въ систематическомъ курсѣ геометріи VI и VII кл. сыграть роль пропедевтики для интегральнаго исчисленія.

Таннери (въ Revue Pedagogique, іюль, 1903 г.) совѣтуетъ, напр., сдать разсужденіе, которымъ пользуются при доказательствѣ равенства объемовъ призмъ наклонной и прямой, «въ историческій музей, какъ свидѣтельство того, насколько развиты были наши предки». Онъ сообщаетъ два способа замѣны этого доказательства. «Первый состоитъ въ томъ, что призмы разрѣзаютъ на тонкіе слои или изготовляютъ призмы изъ бумаги. При помощи такихъ моделей можно сдѣлать ученикамъ доказываемыя положенія «ясными, какъ день». Второй способъ превосходенъ, но требуетъ замѣтнаго напряженія. Онъ состоитъ въ изученіи нѣкоторыхъ вопросовъ интегральнаго исчисленія до того, какъ мы приступимъ къ измѣренію этихъ объемовъ. Интегральное исчисленіе! Въ средней школѣ! Да, я не шучу. Усиліе, требующееся для того, чтобы ознакомиться съ производной и интеграломъ и съ тѣмъ, какъ при помощи этихъ удивительныхъ орудій можно вычислять поверхность и объемы, будетъ не столь значительнымъ, какъ тѣ усилія, которыя приходится дѣлать для установленія равновеликости прямой и наклонной призмъ или двухъ пирамидъ (чертежъ извѣстный въ гимназическихъ кругахъ подъ названіемъ «чортовой лѣстницы), и затѣмъ эти невыносимые объемы тѣлъ вращенія. По сей даже день я не знаю выраженія объема тѣла, получающагося при вращеніи сегмента круга около его діаметра»...

Уже и теперь въ многихъ новыхъ нѣмецкихъ и французскихъ учебникахъ по геометріи убраны громоздкія и схоластическія теоремы объ объемахъ пирамидъ, тѣлъ вращенія и т. д. Вмѣсто нихъ включены въ геометрію методъ истощенія или законъ Кавальери. Такъ напр., въ новомъ учебникѣ геометріи Бореля—Штеккеля теоремы объ объемахъ пирамидъ изложены методомъ истощенія. На русскомъ языкѣ, въ элементарномъ курсѣ геометріи Д. В. Ройтмана измѣренія объемовъ нѣкоторыхъ тѣлъ проходятся при помощи закона Кавальери. Въ самомъ дѣлѣ «законъ Кавальери», обогатившій математику и начинающій собою новую эпоху величайшихъ открытій, сдѣланныхъ въ новѣйшее время, также удобный для опредѣленія площадей и объемовъ тѣлъ. Онъ замѣнялъ собою въ теченіи 50-ти лѣтъ съ большимъ успѣхомъ интегральное исчисленіе и поэтому тоже можетъ въ курсѣ геометріи сослужить роль пропедевтики для интегральнаго исчисленія.

Стало быть, съ педагогической точки зрѣнія не будетъ никакой ошибки, если въ самомъ началѣ не давать точнаго опредѣленія интеграла. Я придерживаюсь того взгляда, что сначала надо опредѣлять интегралъ, какъ площадь, и лишь когда учащіеся познакомятся съ нимъ побольше, надо дать болѣе точное опредѣленіе. На основаніи своей практики позволю себѣ сообщить вамъ, какъ я подхожу къ опредѣленному интегралу.

Сначала ученики чертятъ прямоугольникъ съ основаніемъ (a—b) на оси X и высотой c на оси $У$. Разбивая этотъ прямоугольникъ на большое число прямоугольниковъ съ основаніемъ δx и высотой c мы получаемъ, что площадь его выражается слѣдующей формулой:

$$\sum_{b}^{a} c\,\delta x = c\sum_{b}^{a}\delta x = c x\Big|_{b}^{a} = c a - c b.$$

2) Послѣ прямоугольника переходимъ къ площади трапеціи. Чертимъ прямую $y = m x$ и послѣ нѣкоторыхъ суммированій и нетрудныхъ преобразованій получаемъ формулу для площади трапеціи:

$$lim\sum_{x=b}^{x=a} m\,x\,\delta x = lim\ m\sum_{b}^{a} x\,\delta x = m\frac{x^2}{2}\Big|_{b}^{a} = \frac{a\,y_1}{2} - \frac{b\,y_2}{2}.$$

3) Графически изображая уравненіе параболы $y = x^2$, мы опредѣляемъ ея площадь при помощи суммы квадратовъ чиселъ натуральнаго ряда и находимъ:

$$lim\sum_{x=b}^{x=a} y\,\delta x = lim\sum_{x=b}^{x=a} x^2\,\delta x = \frac{x^3}{3}\Big|_{b}^{a} = \frac{1}{3}a\,y_1 - \frac{1}{3}b\,y_2\ldots$$

4) Затѣмъ чертимъ кубическую параболу $y = x^3$ и, разсуждая по предыдущему, получаемъ:

$$lim\sum_{x=b}^{x=a} y\,\delta x = \frac{x^4}{4}\Big|_{b}^{a} = \frac{a\,y_1}{4} - \frac{b\,y_2}{4}\ldots$$

5) Подъ конецъ изображаемъ графику уравненія $y = x^4$ и при помощи суммированія находимъ, что

$$\lim \sum_{x=b}^{x=a} y \delta x = \frac{a^5}{5} - \frac{b^5}{5} \text{ и т. д.}$$

Обобщая всѣ эти частные случаи, мы въ концѣ концовъ получаемъ извѣстную формулу интегральнаго исчисленія:

$$\int_{x=b}^{x=a} x^n \, dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_b^a \text{ и т. д.}$$

Такимъ способомъ «отъ частнаго къ общему» и отъ «конкретнаго къ абстрактному» доходимъ и до другихъ интеграловъ $\left(\int_0^x \cos x \, dx, \int_0^x \sin x \, dx \text{ и т. д.} \right)$. А нѣсколько такихъ интеграловъ достаточно будетъ для установленія всѣхъ объемовъ и площадей элементарной геометріи.

Въ VIII классѣ я излагаю второй циклъ интегральнаго исчисленія. Но и здѣсь я считаю цѣлесообразнымъ подчеркивать все время на частныхъ примѣрахъ, задачахъ изъ естествознанія сущность задачи интегральнаго исчисленія. Стало быть, зная безконечно-малыя измѣненія одной перемѣнной величины, которыя соотвѣтствуютъ безконечно-малымъ измѣненіямъ другой (производную), найти функціональное отношеніе. которое имѣетъ мѣсто между этими двумя величинами, т. е. найти законъ, управляющій общимъ ходомъ явленія (интегралъ).

Что касается понятія о дифференціалѣ, я не могу согласиться съ авторами русскихъ учебниковъ по анализу, что дифференціалъ слѣдуетъ опредѣлять сразу послѣ производной. Помня общее дидактическое положеніе—«по одной трудности заразъ» я откладываю понятіе о дифференціалѣ до тѣхъ поръ, пока онъ намъ не понадобится. А это какъ разъ наступитъ тогда, когда мы подойдемъ къ изученію неопредѣленныхъ интеграловъ.

VI.

Такъ какъ цѣль анализа безконечно-малыхъ въ средней школѣ не только формальная—расширеніе кругозора нашихъ учащихся, но и матеріальная, то необходимо, чтобы учащіеся на конкретныхъ примѣрахъ изъ естествознанія и техники усвоили и вѣрно поняли идеи, методы и нѣкоторые навыки, необходимые для изученія явленій природы и современной техники. Въ зависимости отъ этого и опредѣляется содержаніе и методика анализа безконечно-малыхъ въ средней школѣ.

По дифференціальному исчисленію: производныя простѣйшихъ функцій, встрѣчаемыхъ въ естествознаніи и техникѣ, maximum и minimum въ связи съ изслѣдованіемъ функцій, уравненіе касательной. По интегральному исчисленію: понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ, основныя формулы интегрированія ($\int x^n dx$, $\int sin\, x\, dx$, $\int cos\, x\, dx$, $\int e^x dx$, $\int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dx}{cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{sin^2 x} \ldots$), понятіе о дифференціалѣ функціи и неопредѣленномъ интегралѣ, простѣйшіе пріемы интегрированія. Подъ конецъ—понятіе о дифференціальномъ уравеніи—какъ высшее обобщеніе въ анализѣ функцій одного независимаго перемѣннаго. Дифференціальныя уравненія даютъ вѣрное представленіе «о необъятной приложимости основныхъ построеній анализа безконечно-малыхъ, составляющаго, безъ сомнѣнія, самую возвышенную изъ абстракцій, до которыхъ когда-либо поднималась мысль человѣка» (О. Контъ).

Относительно методики анализа могу сказать, что я въ своей практикѣ не останавливался детально ни на теоріи предѣловъ, ни на непрерывности функцій. Я добивался отчетливыхъ понятій у учащихся, а механическая часть, относящаяся къ дифференцированію и интегрированію, имѣла у меня второстепенное значеніе. Строгихъ аналитическихъ доказательствъ я избѣгалъ и ихъ замѣнялъ графическими иллюстраціями.

Съ такимъ небольшимъ содержаніемъ курса анализа безконечно-малыхъ можно рѣшать массу трудныхъ и важныхъ задачъ какъ въ научномъ, такъ и въ практическомъ отношеніи. Интересъ, возбуждаемый въ ученикахъ этими задачами, отражается и на ихъ успѣшности по другимъ отдѣламъ математики.

VII.

Откуда взять время для анализа безконечно-малыхъ, если мы не желаемъ непедагогичной и чрезмѣрной перегрузки общаго школьнаго курса математики новыми требованіями?

Изученіе необходимыхъ вопросовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія не потребуетъ увеличенія числа уроковъ по математикѣ. «Когда мы освободимъ начала ариѳметики, алгебры и геометріи отъ множества чужеядныхъ предложеній и ограничимся передачей руководящихъ идей и существенныхъ методовъ, мы не только сбережемъ цѣнное время, но достигнемъ еще большой ясности въ пониманіи идей. А это позволитъ ввести начала аналитической геометріи и исчисленія безконечно-малыхъ» (Ш. Лезанъ) К. М. Щербина въ своей книгѣ «Математика въ русской средней школѣ» дѣлаетъ слѣдующій выводъ на основаніи обзора трудовъ и мнѣній по вопросу объ улучшеніи программъ математики въ средней школѣ за послѣдніе девять лѣтъ (1899—1907): «чтобы представилась возможность оживить... курсъ средней школы безъ обремененія ея, необходимо сократить и упростить учебный матеріалъ нынѣ дѣйствующихъ программъ. Это слѣдуетъ сдѣлать не только съ цѣлью изыскать время для ознакомленія съ болѣе существенными вопросами (т. н. высшей математики), но и для того, чтобы курсъ освободить отъ всего, что не является особенно необходимымъ и что не заключаетъ въ себѣ общеобразовательнаго элемента. Съ этой цѣлью изъ курса нужно опустить тѣ статьи, которыя отмѣчены нами при обзорѣ программъ»... По моему мнѣнію изъ курса ариѳметики надо исключить слишкомъ сложныя задачи на сложное тройное правило, правило учета векселей, задачи на правило смѣшенія, такъ наз., второго рода, пропорцій и т. п. Изъ курса алгебры слѣдуетъ исключить слишкомъ искусственные многочлены, дроби и радикалы, неопредѣленныя уравненія, возвратныя уравненія, уравненія показательныя, непрерывныя дроби, теорію соединеній и «биномъ Ньютона». Также можно сократить и упростить курсы геометріи и тригонометріи. Такимъ образомъ о непедагогичной и чрезмѣрной перегрузкѣ школьнаго курса математики и рѣчи быть не можетъ.

Что же касается до программъ по математикѣ мужскихъ и женскихъ гимназій, то онѣ столь же стары, какъ старо то далекое время, когда они впервые были введены въ школьную жизнь, да такъ и пребываютъ въ школѣ до нашихъ дней. Въ самомъ дѣлѣ, до сихъ поръ преподаватели гимназій должны руководствоваться планами, программами и объяснительною запискою, утвержденными въ 1890 г. и представляющими лишь незначительное видоизмѣненіе программъ 1872 г.!

Сознавая потребность въ реформѣ школьнаго курса математики, Кіевское Физико-Математическое общество еще въ 1906—7учебномъ году обсуждало и вырабатывало проектъ желательнаго плана по математикѣ для мужскихъ гимназій. По этому проекту съ IV класса развивается понятіе о функціональной зависимости. Въ программу VII кл. вошли понятія о производной и объ интегралѣ, а въ VIII классѣ элементы аналитической геометріи. Но за то изъ нынѣ дѣйствующихъ программъ исключены нѣкоторые отдѣлы, не имѣющіе самостоятельной цѣнности, и кромѣ того, приводящіе къ утомительнымъ передѣлкамъ.

Въ 1908 году Варшавскій кружокъ преподавателей физики и математики, вырабатывавшій проектъ учебнаго плана по математикѣ для мужскихъ гимназій, высказался за введеніе анализа б.-м. въ среднюю школу. «Преподаваніе анализа безконечно-малыхъ должно итти въ тѣсной связи съ преподаваніемъ, какъ математики, такъ и прикладныхъ наукъ. Съ этою цѣлью первоначальное понятіе о производной и интегралѣ должно быть дано учащимся возможно ранѣе, не позже начала VII класса»...

Математическій отдѣлъ учебно-воспитательнаго Комитета при СПБ. Педагогическомъ музеѣ военно-учебныхъ заведеній, разрабатывавшій въ теченіе послѣднихъ (1908—11 г.) лѣтъ разные вопросы, касающіеся обученія математикѣ, также признавалъ необходимымъ включить въ курсъ средней школы элементы анализа безконечно-малыхъ.

Подъ конецъ и оффиціальныя программы дѣлаютъ уступку времени. Для реальныхъ училищъ введены новыя программы, болѣе отвѣчающія запросамъ жизни и содержащія начало дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій и элементы аналитической геометріи. Для кадетскихъ корпусовъ 17 Іюня 1911 г. утверждена программа по математикѣ на новыхъ началахъ. По этой программѣ цѣль математикѣ заключается между прочимъ и въ развитіи функціональнаго мышленія. Начала аналитической геометріи и основанія анализа безконечно-малыхъ вошли въ программу VII класса.

Гимназіи и среднія школы различныхъ типовъ все ждутъ того времени, когда новая струя живой науки вольется въ нашу устарѣлую программу. Но частная инпціатива и здѣсь разрабатываетъ новые планы. Такъ, напр. ,математическая комиссія при Преображенской Новой Школѣ (восьмиклассная женская гимназія, въ младшихъ классахъ совмѣстное обученіе) выработала программу по математикѣ съ реформаторскими тенденціями, по которой и преподается математика уже 4-й годъ. Я имѣю честь въ этой школѣ третій годъ проводить курсъ по анализу б.-м. въ VII и VIII классахъ. Благодаря этой практикѣ я и пришелъ къ тѣмъ положеніямъ, о которыхъ я имѣлъ честь сейчасъ вамъ докладывамть.

Я надѣюсь, что Съѣздъ выскажется точно, опредѣленно и въ положительномъ смыслѣ въ пользу введенія началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій съ элементами аналитической геометріи въ общеобразовательный курсъ средней школы. И послѣ такого компетентнаго и авторитетнаго голоса я глубоко увѣренъ, что мы отъ единичныхъ усилій перейдемъ къ коллективному труду. Передъ всѣми нами—педагогами математики стоитъ общее дѣло, успѣхъ котораго требуетъ совмѣстныхъ усилій, обмѣна мнѣній, взаимной критики и провѣрки нашихъ опытовъ.

Конспектъ.

I. Необходимость введенія анализа безконечно-малыхъ—началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій—въ среднюю школу вытекаетъ:

a) изъ тенденціи сближенія науки со школой,

b) изъ запросовъ жизни,

c) изъ соображеній общепедагогическаго характера.

II. Ввести начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій въ среднюю школу нужно не въ видѣ «надстройки» надъ, т. наз., школьнымъ курсомъ элементарной математики, а въ связи съ понятіемъ о функціи, проходящимъ красной нитью черезъ всю программу математики. Въ виду этого, весь курсъ математики въ средней школѣ долженъ быть сконцентрированъ около идеи функціальной зависимости и расширенъ первоначальными понятіями анализа безконечно-малыхъ.

III. Методическое распредѣленіе матеріала анализа б.-м. должно согласоваться съ общимъ дидактическимъ правиломъ: прежде всего—сущность дѣла и наглядное представленіе (графика), затѣмъ—идеи и понятія, а подъ конецъ—терминъ и символъ. Необходимо и здѣсь, для анализа б.-м., установить два концентра (VII и VIII кл.).

IV. Ученіе о производной разрабатывается съ трехъ точекъ зрѣнія: физической, геометрической и математической (обобщающей), въ связи съ разнообразными примѣрами изъ механики, физики, химіи и т. п. Общее методическое положеніе цѣлесообразно и здѣсь, при прохожденіи ученія о производной: «сначала примѣненіе, а затѣмъ уже правило».

V. Что касается интегральнаго исчисленія, то въ первое время слѣдуетъ опредѣлять интегралъ, какъ площадь, и лишь когда учащіеся познакомятся съ нимъ побольше, надо дать болѣе точное опредѣленіе. Въ виду этого, въ систематическомъ курсѣ геометріи, законъ Каваліери и его приложенія къ вычисленію площадей плоскихъ фигуръ и объемовъ тѣлъ должны подготовить почву для интегральнаго исчисленія. Первые элементы интегральнаго исчисленія въ ихъ историческомъ развитіи вносятъ тоже и историческій элементъ въ преподаваніи математики.

Понятіе о дифференціалѣ надо давать только при прохожденіи неопредѣленныхъ интеграловъ.

VI. Такъ какъ цѣль анализа б.-м. въ средней школѣ не только формальная—расширеніе кругозора нашихъ учащихся, но и матеріальная, то необходимо, чтобы учащіеся на конкретныхъ примѣрахъ изъ естествознанія и техники усвоили и вѣрно поняли идеи, методы и нѣкоторые навыки, необходимые для изученія явленій природы и современной техники. Въ зависимости отъ этого и опредѣляется содержаніе курса анализа б.-м. въ средней школѣ. По дифференціальному исчисленію: производныя функцій, встрѣчаемыхъ въ естествознаніи и техникѣ, а по интегральному исчисленію: $\int x^n dx$; $\int \sin x\, dx$ $\int \cos x\, dx$; $\int \frac{dx}{x}$ и $\int e^x dx$.

VII. Заключеніе. Откуда взять время для анализа б.-м.? Исключеніе устарѣлыхъ отдѣловъ: неопред. ур-ія, непрерывныя дроби, теорія соединеній, биномъ Ньютона. Программы по анализу б.-м. реальн. уч., кадетскихъ корпусовъ, Кіевскаго и Варш. кружковъ, Преображенской школы etc.- Резюме.

Пренія по докладамъ М. Г. Попруженко и Ф. В. Филипповича.

А. Н. Шапошниковъ (Щелково, Сѣв. дор.). «Въ докладѣ г. Попруженко былъ высказанъ цѣлый рядъ чрезвычайно цѣнныхъ замѣчаній въ чрезвычайно доступной формѣ, но съ однимъ изъ его заключеній придется рѣзко несогласиться. Конечно, если отъ преподаванія высшей математики желать только, чтобы ученикъ рисовалъ графики, или кое-что узналъ изъ курса высшей математики, то это легко исполнимо и можно сказать, что мы стали на твердую дорогу и вѣрнымъ шагомъ идемъ впередъ. Несчастье нашей высшей математики было въ томъ, что за нее принялся ограниченный кругъ лицъ, которыя и намѣтили программу, на мой взглядъ, чрезвычайно опаснымъ путемъ: безъ съѣздовъ, безъ широкаго обсужденія былъ изданъ указъ обучить учениковъ *все дифференцировать и кое что интегрировать* и т. д. Въ своей положительной творческой части программа содержала ровно столько, сколько можетъ дать бѣглая размѣтка курса лекцій рукою студента 2-го курса; но кромѣ этой положительной части была оригинальная часть, именно—чрезвычайно широкое развитіе ученія о предѣлахъ и рѣшеніе связанныхъ съ ними вопросовъ. Господа, оригиналенъ былъ бы совѣтъ попросить сначала выстругать всѣ доски перочиннымъ ножемъ, а потомъ озаботиться пріобрѣтеніемъ рубанка, также оригиналенъ совѣтъ—всѣ сложные вопросы объ объемахъ, о поверхностяхъ рѣшать элементарнымъ методомъ съ большимъ трудомъ и только потомъ приступить къ анализу безконечно-малыхъ, поговорить объ интегрированіи и его не использовать. Русскому педагогическому міру досталось тяжелое наслѣдіе, состоящее въ томъ, что ученику показанъ путь къ недоступнымъ университетскимъ идеямъ, которыя мы можемъ обрисовать очень приблизительно, и въ его распоряженіи оставленъ огромный запасъ неиспользованныхъ формулъ. Исторія введенія безконечно-малыхъ въ математическую науку была совершенно иная. Не сухое созерцаніе формулъ предлагалъ Ньютонъ, а возбуждалъ интересъ къ вопросу о безконечно-малыхъ, разрѣшая серьезнѣйшіе вопросы математики и прикладной науки ея—механики. Если мы посмотримъ на пропедевтическіе курсы заграницей, то не этотъ методъ, который выбрали у насъ въ средней школѣ, намѣчается какъ лучшій способъ ознакомить съ пріемами анализа“.

„Въ ученикахъ нашихъ замѣтны признаки разочарованія въ математикѣ. Огромную потенціальную энергію скопило общество въ формѣ полубезсознательнаго преклоненія передъ идеаломъ этой великой науки. Огромныя средства внушенія использовали корифеи математики для той же цѣли. А мы, предлагая по оффиціальной указкѣ молодому поколѣнію науку въ одностороннемъ схоластическомъ освѣщеніи, рискуемъ разрушить плоды ихъ вѣковыхъ усилій, поселивъ въ умахъ подрастающаго поколѣнія превратныя понятія о высшей математикѣ“.

„Я думаю, что г.-л. Попруженко вѣрно намѣтилъ тотъ путь, которымъ лучше итти: сначала какъ можно меньше фактовъ и какъ можно больше идей. Для того, чтобы ввести учащихся въ пониманіе метода нѣтъ надобности обращаться къ труднымъ случаямъ интегрированія и дифференцированія — достаточно имѣть дѣло только съ цѣлыми функціями. Конечно, учащіеся не будутъ въ состояніи пользоваться этимъ методомъ тамъ, гдѣ придется имѣть дѣло съ синусами и косинусами, съ функціей e^x и т. д., но можно сдѣлать такъ, чтобы они прониклись убѣжденіемъ, что имъ показанъ уголокъ великой науки, т. е. можно поставить дѣло обученія анализу на тотъ путь внушенія имъ величія математики, на которомъ стояли величайшіе ея представители, оставившіе намъ въ наслѣдіе глубокое къ ней уваженіе. Я думаю, что мы сдѣлаемъ хорошо, если будемъ считать, что мы никакого великаго дѣла не дѣлаемъ, вводя анализъ: мы сдѣлали опытъ, и къ этому опыту нужно относиться съ чрезвычайно большимъ вниманіемъ и посмотрѣть, вноситъ-ли онъ что-нибудь дѣйствительно или составляетъ потерю времени, и путемъ всестороннихъ поисковъ отыскать новые пути. Для этого нужно прежде всего дать преподавателямъ извѣстную свободу, стѣснивъ ихъ самыми малыми рамками. Можно дать возможность преподавателямъ идти нѣсколькими путями, эти пути нужно изслѣдовать, но во всякомъ случаѣ становиться на тѣ рельсы, на которыя мы стали, и думать, что сдѣлали что-нибудь великое, по моему преждевременно“.

А. В. Полторацкій (Спб). „Намъ сообщена попытка введенія анализа, но меня одно поразило, что я не слышалъ, что такія попытки дѣлались въ англо-саксонскихъ странахъ и Скандинавіи. Тутъ больше, чѣмъ гдѣ-либо въ среднихъ школахъ учатся для жизни, а не только для того, чтобы учиться; наукой ради науки занимаются только въ университетахъ“.

„Относительно перемѣнъ программъ въ Швеціи существуетъ система, которая къ сожалѣнію у насъ не примѣняется. Тамъ программа является не опытомъ, а результатомъ уже произведенныхъ опытовъ. Тамъ существуетъ спеціальное заведеніе, новая элементарная 9-классная школа въ Стокгольмѣ, гдѣ примѣняются всѣ новые методы. Преподаватели—новаторы приглашаются туда, имъ дается курсъ, который они проводятъ 3 года подъ наблюденіемъ коллегіи спеціалистовъ, и параллельно такой же курсъ ведутъ другіе преподаватели; полученные результаты обсуждаются и въ концѣ-концовъ вводится или новый предметъ, или новая программа. У насъ же въ реальныхъ училищахъ и кадетскихъ корпусахъ анализъ преподается уже нѣсколько лѣтъ, но оказывается, что послѣ нѣсколькихъ лѣтъ опыта нѣтъ даже учебника, который можно было бы рекомендовать цѣликомъ, нѣтъ подготовленныхъ преподавателей, методика предмета разбросана по отдѣльнымъ статьямъ журналовъ. О результатахъ опытовъ одни говорятъ, что въ нѣкоторыхъ заведеніяхъ хорошо преподается, другіе—что удовлетворительно, третьи—что неудовлетворительно, и при этомъ всѣми упуспускается изъ виду одно: какъ эти успѣхи отражаются на успѣхахъ по другимъ предметамъ. Въ нашихъ заведеніяхъ математика почти поглощаетъ все время, между тѣмъ времени этого немного. Въ одномъ кадетскомъ корпусѣ производились интересныя вычисленія, сколько у кадета остается въ сутки свободнаго времени. Оказалось, что у 20% свободнаго времени 5 мин. въ сутки, причемъ они обязаны это время заниматься внѣкласснымъ чтеніемъ по русскому и иностраннымъ языкамъ. Поэтому при введеніи высшей математики упускать изъ виду успѣхи по другимъ наукамъ рисковано. У насъ производится очень обширный опытъ одновременно въ массѣ заведеній. Опытъ несомнѣнно будетъ очень дорогой, особенно въ смыслѣ затраты времени. Между тѣмъ судить объ этомъ опытѣ будетъ чрезвычайно трудно, потому что онъ будетъ производиться въ совершенно несоизмѣримыхъ условіяхъ: разные курсы, разные преподаватели и т. д.“

„Наконецъ, нельзя себѣ представить, чтобы одна комиссія могла одновременно оцѣнить эти результаты. Придется довольствоваться письменными отчетами, которымъ придется вѣрить на слово. Между прочимъ указывалось, что для полнаго успѣха этого новаго предмета нужно начинать его не съ 7 класса, а съ 5“.

„А другой докладчикъ (Ф. В. Филипповичъ) находитъ, что этого мало для того, чтобы курсъ высшаго анализа соотвѣтствовалъ своему назначенію: должно проходить его во всѣхъ классахъ, нужно перестроить весь курсъ математики. Можетъ быть, этотъ дорогой опытъ дастъ результаты благіе, но пока это говорить рано. Въ настоящее же время мы не видимъ передъ собой великаго культурнаго завоеванія, а одно изъ благихъ намѣреній, которыми вымощена дорога въ адъ“.

С. И. Шохоръ-Троцкій (Спб.). „Адъ уже перестали мостить благими намѣреніями: ихъ ужъ больно много. Дѣло не въ этомъ, а въ томъ, нужно ли пріобщить среднюю школу къ интересамъ науки и культуры. Я не могу согласиться съ мнѣніемъ моего уважаемаго предшественника и, наоборотъ, вполнѣ согласенъ съ М. Г. Попруженко и Ф. В. Филипповичемъ. Если я взялъ слово, то для нѣкоторыхъ дополненій.

1) Не нужно отдѣлять элементарный курсъ исчисленія безконечно малыхъ отъ другихъ отдѣловъ математики.

Учениками могутъ быть исчислены производныя такихъ алгебраическихъ функцій, какъ x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ въ свое время, напр., при прохожденіи дѣлимости разности $x^n - a^n$ на разность $x-a$ при натуральномъ значеніи буквы n; въ геометріи — дифференціалъ квадрата, сторона котораго обозначена буквой x, какъ $2x \,.\, dx$, и т. п.; въ тригонометріи—при изученіи отношенія $\frac{\operatorname{Sin} h}{h}$, стремящемся къ единицѣ съ приближеніемъ значеній буквы h къ нулю, и т. п.

2) Только систематизацію понятій о производной, дифференціалѣ, интегралѣ алгебраической функціи надо отнести непремѣнно къ курсу одного изъ высшихъ классовъ; это тѣмъ важнѣе, что исключительно интуитивныя точки зрѣнія не всегда цѣлесообразны для учащихся высшихъ классовъ.

3) Въ занимающей насъ составной части курса тоже необходимо соблюдать принципъ такъ называемаго „переплетенія“, „вклиненія“, „фузіонизма“, который требуетъ соблюденія хотя логически вѣрныхъ, но методически вредныхъ перегородокъ между различными отдѣлами; педагогически полезны сближенія между однимъ и тѣмъ же въ логическомъ отношеніи матеріаломъ, имѣющимся въ разныхъ отдѣлахъ элементарнаго курса математики.

4) Начатки дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія гораздо легче цѣлой массы вопросовъ не только алгебры. геометріи и ученія о тригонометрическихъ числахъ, но даже ученій такъ называемой теоретической ариѳметики.

5) Но введеніе курса, подобнаго предлагаемымъ съ разныхъ сторонъ, возможно только по исключеніи изъ курса элементарной математики всего того, что не необходимо, а такого матеріала много и въ ариѳметикѣ, и въ алгебрѣ, и въ геометріи“.

В. Р. Мрочекъ (Спб.). „Когда я кончалъ университетъ, то у меня ни на минуту не возникало даже мысли, что курсъ анализа безконечно-малыхъ величинъ можетъ настолько „опошлиться“, чтобы снизойти до средней школы. Когда я говорилъ со своими профессорами о томъ, какая существуетъ разница между элементарной и высшей математикой, то профессора мнѣ отвѣчали:

„Въ элементарной математикѣ разсматриваются независимыя *постоянныя* величины, а въ высшей математикѣ—независимыя *перемѣнныя*; тамъ разсматриваются все время числа неизвѣстныя *немѣняющіяся*, а тутъ предметомъ изученія все время являются неизвѣстныя *мѣняющіяся*". Затѣмъ, когда я пріобщился къ той точкѣ зрѣнія, которая радикально переворачиваетъ всю школьную математику, мнѣ пришлось, конечно, прежде всего самому научиться какъ вообще математикѣ, такъ и тѣмъ немногимъ существующимъ точкамъ зрѣнія методики на постановку преподаванія высшей математики. Прежде всего, пришлось „открывать америки", что неизбѣжно случается съ каждымъ изъ насъ вслѣдствіе того, что мы всѣ не получаемъ спеціальной педагогической подготовки. Я не буду сейчасъ касаться этого вопроса. Намъ придется къ нему еще вернуться въ связи съ докладомъ профессора Кагана о подготовкѣ преподавателей. Но я долженъ сказать, что если въ настоящее время мы не имѣемъ хорошихъ учебниковъ и хорошихъ преподавателей курса анализа безконечно-малыхъ величинъ въ средней школѣ, то этимъ мы главнымъ образомъ обязаны тому, что въ этой области мы сами слишкомъ мало знаемъ. Какъ насъ учили, такъ и мы въ большинствѣ случаевъ учимъ нашихъ учениковъ. А что такое оффиціальная программа? Взяли университетскую программу, посредствомъ хорошаго прибора ее уменьшили и въ такомъ укороченномъ видѣ перенесли въ среднюю школу. Конечно, это плодъ оффиціальнаго творчества, но, какъ совершенно правильно сказалъ А. Н. Шапошниковъ, оффиціальное творчество для насъ не обязательно. Заграницей уже раздаются голоса въ защиту того взгляда, который говоритъ, что не нужно дѣлать надстроекъ надъ пятымъ и шестымъ годами стараго курса, не нужно копаться въ верхушкахъ этого курса, а нужно разъ навсегда радикально измѣнить математическое образованіе. Профессоръ Тезаръ въ 1909 году на австрійскомъ съѣздѣ высказалъ слѣдующее: „Разъ навсегда надо покончить съ системой, существующей отъ Гомера до нашихъ дней, пусть она остается въ музеяхъ исторіи, начнемъ изученіе съ настоящаго времени". А вотъ тотъ лозунгъ, который превозглашенъ въ Германіи теперь: химическое преобразованіе, смѣшеніе всѣхъ элементовъ средне-школьной математики. Этотъ лозунгъ долженъ быть поставленъ во главу будущаго строительства школы. Что касается раздѣленія математики на элементарную и высшую, то тотъ, кто это утверждаетъ, не знакомъ съ завоеваніями послѣднихъ десятилѣтій. Кромѣ того прибавлю, что вопросы элементарной математики оказались гораздо сложнѣе и гораздо недоступнѣе курса анализа безконечно-малыхъ величинъ. Школа, несомнѣнно, не должна отставать отъ общаго научнаго развитія. Это азбучная истина. Но школа должна также считаться съ особенностями учащихся. Поэтому мы должны принять къ свѣдѣнію положеніе, которое написано на обложкѣ одной старой книги Д'Алямбера: „Allez en avant, la foi vous viendra!"—ступайте впередъ, а вѣра придетъ послѣ. Это изреченіе нужно примѣнять въ школѣ къ изученію математики, ибо оно служило руководящимъ началомъ для науки. Первые разрабатывавшіе анализъ безконечно-малыхъ величинъ часто не заботились о строгости всѣхъ доказательствъ. Очевидно, стремленіе докопаться до аксіомъ возникло въ то время, когда созидательная работа по анализу безконечно-малыхъ величинъ была закончена. Въ заключеніе я приведу только-что процитированныя слова: „Allez en avant, la foi vous viendra"! Нужно сначала идти впередъ, а вѣра придетъ со всѣми богатыми приложеніями анализа".

Б. Б. Піотровскій (Спб.). „Когда возбуждался вопросъ о созывѣ перваго всероссійскаго съѣзда математиковъ, то мнѣ казалось, что вопросъ, разбираемый нами сегодня, явится однимъ изъ самыхъ существенныхъ, однимъ изъ самыхъ важныхъ и въ то-же время найдетъ наибольшій откликъ въ средѣ преподавателей, которые выступятъ на защиту его отъ могущихъ быть враговъ, какъ оффиціальныхъ, такъ и неоффиціальныхъ. Сегодняшніе доклады, видимо, выслушаны были съ большимъ интересомъ, но, къ сожалѣнію, на пренія осталось весьма незначительное число членовъ, и я лично опасаюсь, что какъ бы этотъ вопросъ такъ и не остался бы невыясненнымъ. Каково же отношеніе членовъ съѣзда къ вопросу о введеніи анализа безконечно-малыхъ въ курсъ средней школы? Я записался заранѣе съ тѣмъ, чтобы съ противниками введенія анализа въ среднюю школу, если бы такіе нашлись, сойтись грудь съ грудью. Но, въ сущности, противниковъ не оказалось. А. Н. Шапошниковъ началъ говорить какъ бы противъ этого введенія, но то, чѣмъ онъ закончилъ свою рѣчь, удовлетворило бы самаго яраго сторонника введенія анализа безконечно-малыхъ величинъ въ курсъ средней школы. Вѣдь именно въ томъ смыслѣ, какъ онъ высказался, и понимается необходимость введенія въ курсъ средней школы анализа безконечно-малыхъ величинъ. Дѣйствительно, Боже упаси отъ того, чтобы ученики умѣли только продифференцировать нѣсколько формулъ и вслѣдствіе этого, заразившись верхоглядствомъ, говорили-бы, что они знаютъ высшую математику. Что касается полковника Полторацкаго, то его возраженіе собственно свелось къ тому, что въ Швеціи и Англо-саксонскихъ странахъ анализъ безконечно-малыхъ величинъ не введенъ въ курсъ средней школы. Но мнѣ кажется, что это не доводъ. Изъ того, что въ Швеціи этого нѣтъ, отнюдь не слѣдуетъ, что этого и быть не должно. Далѣе было высказано соображеніе, что у насъ нѣтъ ни хорошихъ учебниковъ, ни хорошихъ преподавателей. Но вѣдь въ такомъ случаѣ ни на одномъ новомъ вопросѣ нельзя было-бы остановиться, потому что пока не было потребности въ этомъ, пока это ясно не сознавалось ни обществомъ, ни педагогической средой, откуда же было явиться преподавателямъ? учебникамъ? методикамъ? Совершенно вѣрно: какъ-бы программы ни писались, разъ сама педагогическая среда не будетъ чувствовать желательности проведенія даннаго курса, онъ не пройдетъ никогда. Затѣмъ было указано, что математика поглощаетъ все время ученика, причемъ довольно опредѣленно намекалось на военно-учебныя заведенія. Но это настолько было голословно и бездоказательно, что я этого опровергать не берусь. Наконецъ, еще говорили, что это будетъ слишкомъ дорогой опытъ въ смыслѣ затраты времени". „Я думаю, что если введеніе анализа безконечно-малыхъ величинъ существенно и желательно, то этотъ опытъ окажется навѣрно недорогимъ. Времени онъ, конечно, потребуетъ много, но вѣдь намъ и не желательно вводить скороспѣлые опыты. Такимъ образомъ, оказалось, что у меня нѣтъ противниковъ, ибо со всѣми тѣми, которые высказывались, я вполнѣ согласенъ. Но мнѣ только кажется, что атмосфера, создавшаяся здѣсь, слишкомъ малаго напряженія по сравненію съ тѣмъ, чего заслуживаетъ данный вопросъ".

Б. А. Марковичъ (Спб.). „Господа, если то, что нѣкоторые называютъ крупнымъ завоеваніемъ, и что несомнѣнно глубоко вѣрно, по мнѣнію другихъ является лишь опытомъ, пусть это будетъ опытъ, но опытъ широкій, свободный по возможности. Я имѣю въ виду сдѣлать фактическія дополненія къ прекрасному докладу генералъ-лейтенанта М. Г. Попруженко. Цитируемая имъ превосходная книга Tannery написана *специально „для классиковъ"* французской средней школы, у которыхъ математическая подготовка значительно меньше, чѣмъ у французскихъ реалистовъ (Sections: c) latin—sciences и d) sciences—langues vivantes), и даже, въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ, меньше, чѣмъ у нашихъ гимназистовъ. Въ послѣднемъ классѣ классическихъ отдѣленій (Classe de philosophie — вѣнецъ секцій: a) latin-grec, b) latin-langues vivantes) книга Tannery служитъ учебникомъ или пособіемъ и составлена она прямо по офиціальной программѣ этого класса".

„Французской реформѣ въ предстоящемъ 1912 году минетъ десятилѣтіе; программы пересматривались и дополнялись въ 1905 году; слѣдовательно, „опытъ" преподаванія „началъ анализа" въ средней школѣ, даже въ чисто классическихъ отдѣленіяхъ, есть и опытъ, давшій благопріятные результаты".

„Когда я былъ во Франціи, то я еще засталъ старое изданіе алгебры Бріо, гдѣ во второй части имѣются теорія производныхъ.

ученіе о максимумѣ, ряды Мэкъ-Лорена и Тейлора. Насколько мнѣ помнится, у насъ съ сороковыхъ годовъ дѣлались попытки въ этомъ направленіи. Я самъ засталъ такого рода опытъ, который касался, собственно говоря, производныхъ, но онъ не принесъ никакихъ результатовъ. Затѣмъ, я хотѣлъ сказать только о боязни А. В. Полторацкаго, что опытъ этотъ будетъ очень дорогой. Я сдѣлалъ этотъ опытъ въ нѣмецкой женской гимназіи и могу сказать, что кромѣ увлеченія этимъ предметомъ, кромѣ благодарности и хорошихъ результатовъ, я ничего не видѣлъ. Поэтому я полагаю, что при введеніи этого курса въ восьмомъ классѣ, при разумномъ проведеніи программы, при раціональной постановкѣ общаго математическаго преподаванія—результаты несомнѣнно будутъ хорошіе. Но говорятъ, что у насъ нѣтъ методикъ, оффиціально одобренныхъ. Нѣтъ, такія методики существуютъ и даже въ большомъ количествѣ, напримѣръ, методика Евтушевскаго, Шохоръ-Троцкаго и др. И такъ, я думаю, что останавливаться нельзя, нужно начать производить опыты и производить ихъ возможно лучше".

В. А. Соколовъ (Майкопъ, Куб. обл.). „Я скажу на основаніи личнаго опыта, который я вынесъ учительствуя въ захолустьѣ. У меня никакихъ учебниковъ не было. Я вытащилъ университетскій курсъ Серре, курсъ дифференціальнаго исчисленія, единственный элементарный курсъ, затѣмъ взялъ главу изъ алгебры Бертрана и такимъ образомъ самъ составилъ курсъ. Оффиціальная программа, конечно, не удовлетворительна, но вѣдь она не связываетъ насъ. Почему я могу отступить отъ нее, а другой не можетъ? Я не выпустилъ изъ оффиціальной программы ни одного пункта. Я только измѣнилъ распредѣленіе матеріала. Одинъ годъ я началъ неудачно именно съ того самаго введенія, которое здѣсь было такъ справедливо раскритиковано, дѣйствительно оно нѣсколько громоздко. Я прошелъ его полностью, такъ что только во второй четверти могъ приступить къ выясненію понятія о производныхъ, но, несмотря на это, въ концѣ года я могъ при помощи интегральнаго исчисленія вычислить объемъ произвольнаго цилиндра, объемъ конусовъ съ какимъ угодно основаніемъ, объемъ шара и объемъ тѣлъ вращенія. По словамъ учениковъ, эти вычисленія помогли имъ составить понятіе о значеніи этого курса". „Здѣсь говорилось о томъ, что анализъ безконечно-малыхъ потребуетъ много времени у учениковъ. Конечно, но во всякомъ случаѣ въ этотъ годъ процентъ окончившихъ курсъ и получившихъ аттестатъ зрѣлости выразился въ цифрѣ 100. Такимъ образомъ эта лишняя работа, этотъ опытъ вовсе не такъ опасенъ. Успѣха я достигъ постепенностью въ введеніи новыхъ понятій и новыхъ методовъ. Прежде всего, въ первомъ полугодіи я имѣлъ дѣло только съ производными. Въ настоящемъ году, напримѣръ, я прошелъ производныя, цѣлыя раціональныя функціи. Прошелъ все это на примѣрахъ. Примѣнялъ построеніе графиковъ, прошелъ приложеніе графиковъ, уравненіе касательной. Затѣмъ мы рѣшали задачи, затѣмъ разсмотрѣли измѣненіе функцій, разсмотрѣли теорему Ролля на основаніи интегрированія, разсмотрѣли кривыя, направленіе касательной и по виду кривыхъ опредѣляли направленіе касательной. Долженъ сказать, что только эта теорема была принята на основаніи интуиціи, остальное все было доказано вполнѣ обоснованно. Затѣмъ прошли о максимумѣ, минимумѣ, дѣлали задачки на разложеніе, которыя вовсе не являются такими пустыми. Для примѣра приведу слѣдующее: дано уравненіе прямой, дана точка съ координатами, надо на прямой назвать точку, которая лежала-бы ближе всѣхъ къ данной точкѣ. Говорятъ, надо найти производную корня. Это неизвѣстное пришлось подсказать, а именно, что можетъ быть можно было-бы найти квадратъ. Стали искать квадратъ, и задача рѣшена. Задача несомнѣнно имѣетъ интересъ, ибо показываетъ примѣненіе новаго метода, показываетъ разницу между старымъ и новымъ методами. Прежде, когда ученики получали линію, они составляли уравненіе, получался перпендикуляръ. Но это совершенно невѣрный методъ. Теперь всѣ затрудненія устранены. Я думаю, что весь курсъ я несомнѣнно успѣю закончить во второмъ полугодіи". „Что касается до анализа безконечно-малыхъ величинъ, то я, напримѣръ, проходилъ такую теорему если сумма конечна и всѣ слагаемыя положительны, то, если эти слагаемыя помножить на число, имѣющее предѣломъ единицу, то сумма измѣнится на величину безконечно малую. Затѣмъ, говоря о линіи окружности, я внесъ измѣненія по сравненію съ учебникомъ. Я сказалъ, что предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписаннаго многоугольника, не зависитъ ни отъ вида многоугольника, ни отъ его свойствъ. Тоже доказывалъ и относительно пирамиды. При этомъ долженъ сказать, что весь курсъ я велъ лекціоннымъ способомъ, за исключеніемъ нѣкоторыхъ теоремъ о безконечно-малыхъ величинахъ относительно окружности. Ученики принимали активное участіе въ этой работѣ—они всѣ продѣлывали сами на задачахъ. Собственно и дифференціальное исчисленіе пройдено было все на задачахъ. Это несомнѣнно—выполнимо Замѣчу кстати, что въ настоящемъ учебномъ году классъ у меня не изъ сильныхъ, и если онъ справится съ этимъ матеріаломъ, то навѣрно всякій другой классъ справится. Польза же отъ такихъ занятій несомнѣнно будетъ".

К. И. Зрене (Спб.). „Здѣсь всѣ говорили объ этомъ вопросѣ съ точки зрѣнія научнаго развитія и никто не подошелъ къ нему съ практической точки зрѣнія. Большинство изъ насъ, окончившихъ высшее учебное заведеніе, несомнѣнно испытывало на себѣ то непріятное ощущеніе, которое приходится переживать при переходѣ изъ средней школы въ высшую. Въ теченіи почти цѣлаго года, если не больше, большинство изъ насъ, слушая дифференціальное и интегральное исчисленія въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, выходили изъ аудиторіи какъ бы въ чаду. Обыкновенно никакого впечатлѣнія отъ такихъ лекцій не получалось. Съ первой же лекціи преподаватели говорятъ: «забудьте все то, чему васъ учили въ гимназіи, учитесь снова». Такое привѣтствіе несомнѣнно имѣетъ свои результаты. По прошествіи перваго года большинство изъ насъ или окончательно покидало учебное заведеніе, или оставалось на второй годъ и потомъ снова держало конкурсные экзамены. Слѣдовательно, въ настоящее время, если будутъ введены дифференціальное и интегральное исчисленія, то получится польза не только моральная, но и чисто практическая, и въ молодыхъ людяхъ, оканчивающихъ среднее учебное заведеніе, будетъ поддерживаться вѣра въ то, что ученіе въ средней школѣ не было для нихъ безполезной тратой времени и такимъ образомъ будетъ развиваться въ юношахъ любовь къ математической наукѣ".

М. Е. Волокобинскій (Рига). „Я очень благодаренъ за докладъ Ф. В. Филипповича, который я услышалъ. Онъ въ высшей стеоени обоснованъ и мотивированъ. Но я долженъ сказать, что реформы преподаванія математики отразятся на всемъ учебномъ планѣ. Я мечталъ давно о введеніи курса безконечно-малыхъ въ среднюю школу и, дождавшись, наконецъ, этого времени, на практикѣ убѣдился, что программа по анализу безконечно-малыхъ очень трудна для VII класса. Масса учениковъ изъ за анализа безконечно-малыхъ оказалась неуспѣвающей. Чѣмъ можно объяснить этотъ фактъ? Я думаю, что отчасти виновата оффиціальная программа: трудно насадить казеннымъ путемъ какой бы то ни было новый учебный предметъ. Далѣе, виноваты и русскіе учебники по анализу безконечно-малыхъ для средней школы, которые отличаются иногда математическимъ и педагогическимъ невѣжествомъ. Составители сами часто плохо понимаютъ то, о чемъ пишутъ, у нихъ часто нѣтъ математическаго образа мышленія. Наконецъ, въ большинствѣ случаевъ, по крайней мѣрѣ 90%, какъ это ни печально признавать, виноваты сами преподаватели. Поэтому, привѣтствуя введеніе преподаванія началъ анализа въ среднюю школу, я считаю, что Съѣздъ оказалъ бы этому введенію большую услугу, если бы вынесъ, слѣдующую резолюцію: введеніе анализа обязательно связать съ общей реформой преподаванія математики и сдѣлать этотъ предметъ для учащихся необязательнымъ. Я увѣренъ, что если бы мы сдѣлали опросъ учениковъ относительно преподаванія высшей математики, то у хорошихъ учителей число желающихъ заниматься было бы велико и непрерывно бы росло, а у плохихъ уменьшилось бы или даже вовсе свелось бы къ нулю".

М. Г. Попруженко. (Спб.). „Я скажу два слова по поводу того, что англо-саксонскія школы совершенно чужды дѣлу введенія анализа въ средней школѣ. Долженъ сказать, что я недостаточно освѣдомленъ о томъ, какъ рѣшается этотъ вопросъ въ англійскихъ школахъ, но тенденція къ популяризаціи и даже вульгаризаціи основъ анализа безконечно малыхъ величинъ въ Англіи несомнѣнно существуетъ и имѣетъ тамъ такихъ видныхъ представителей, какъ Перри и Лоджъ. Что же касается до замѣчанія о томъ, что у насъ никто не готовъ къ преподаванію анализа безконечно-малыхъ величинъ, то я съ этимъ рѣшительно не могу согласиться. Говорятъ, что учебниковъ нѣтъ, но это невѣрно, учебники есть. Быть можетъ—нѣтъ идеальныхъ учебниковъ, но порядочные несомнѣнно существуютъ. Затѣмъ—я не говорилъ, что учителя не готовы. Я сказалъ, что господамъ преподавателямъ придется подготовиться, много поработать. Но я думаю, что молодой человѣкъ, только что окончившій университетъ, болѣе подготовленъ къ преподаванію анализа безконечно-малыхъ величинъ, чѣмъ къ преподаванію ариѳметики, ибо съ первымъ онъ имѣлъ дѣло въ университетѣ, а со второй—не имѣлъ.

„Что же касается того, что преподаваніе анализа безконечно-малыхъ величинъ отниметъ время отъ другихъ предметовъ, то я долженъ сказать, что по крайней мѣрѣ въ корпусахъ время назначенное на математику при введеніи анализа нисколько не увеличено, т. е. число часовъ, которое было раньше, сохраняется и теперь. Что же касается благихъ намѣреній, которыми вымощенъ адъ, то на этотъ предметъ имѣются разныя мнѣнія, и я на этомъ вопросѣ останавливаться не буду. И такъ, я всецѣло поддерживаю ту мысль, что каждый изъ насъ долженъ много любовно поработать для этого дѣла, къ чему я господъ преподавателей и призываю".

Предсѣдатель. „Списокъ ораторовъ исчерпанъ. Заключая пренія по этому чрезвычайно важному вопросу, вызвавшему такой, скажу, ожесточенный споръ, вызвавшему въ Западной Европѣ коренныя реформы преподаванія, я хочу сказать нѣсколько словъ".

„Организаціонный Комитетъ несомнѣнно не дастъ этому вопросу потонуть въ морѣ вопросовъ, которые у насъ возникли на этомъ съѣздѣ. Будетъ-ли возможно подготовить окончательную резолюцію къ концу съѣда, будутъ ли приняты другія какія-нибудь мѣры, о которыхъ я сейчасъ ничего не могу сообщить, такъ какъ послѣднее постановленіе объ этомъ не состоялось,—но въ томъ или другомъ смыслѣ Организаціонный Комитетъ несомнѣнно приметъ мѣры къ тому, чтобы выяснить возможно полно взглядъ на это дѣло преподавателей, и если быть можетъ не къ концу Перваго, то ко Второму Съѣзду подготовитъ и сведетъ къ цѣлому авторитетное мнѣніе преподавательскаго персонала“.

„Къ этому позвольте мнѣ прибавить отъ себя нѣсколько словъ. Я самъ много читалъ и думалъ относительно доводовъ „за“ и „противъ“ введенія высшей математики въ среднюю шкозу. Много доводовъ „за“ и „противъ“ было приведено и здѣсь съ каѳедры. Но именно здѣсь, съ этой каѳедры я услышалъ одинъ доводъ, который я теперь хочу подчеркнуть. Мнѣ не надо говорить о томъ, съ какой рѣшительностью оканчивающій математическій факультетъ, къ великому нашему сожалѣнію, сбрасываетъ этотъ багажъ высшей математики, оставляетъ его въ вестибюлѣ университета и рѣдко когда потомъ возвращается къ нему. Проходятъ два, три года, и забывается вся эта высшая математика. Поэтому я съ великой радостію слушалъ о томъ, какъ одинъ преподаватель вытащилъ изъ своего университетскаго сундука старичка Серре, свои старыя записки и заставилъ себя въ нихъ разобраться, чтобы составить курсъ для своихъ учениковъ. Такимъ образомъ, введеніе анализа безконечно-малыхъ величинъ заставитъ преподавателей обратиться къ изученію высшей математики. Конечно, не нужно говорить какую могущественную роль играетъ повышеніе умственнаго уровня преподавателей“.

„И вотъ то, что я здѣсь слышалъ, было сильнымъ доводомъ для меня въ пользу введенія преподаванія высшей математики, ибо она повышаетъ не только уровень знанія и идей учениковъ, она послужитъ къ возвышенію уровня тѣхъ идей, среди которыхъ вращаются сами учителя“.

ТРЕТЬЕ ЗАСѢДАНІЕ.

29 декабря $10^{1}/_{2}$ час. дня.

Въ предсѣдатели избранъ проф. П. А. Некрасовъ. Въ почетные секретари—І. И. Чистяковъ.

VII. Цѣли, формы и средства введенія историческихъ элементовъ въ курсъ математики средней школы.

Докладъ пр.-доц. В. В. Бобынина (Москва).

«Своимъ состоявшимся уже въ отдаленной древности введеніемъ въ сочиненія учебнаго характера по элементарной математикѣ историческіе элементы обязаны тому же коренящемуся въ свойствахъ духовной природы человѣка стремленію къ познанію генезиса находящихся въ распоряженіи человѣчества знаній, которое въ отдаленной древности создало миѳы для объясненія этого генезиса, а позднѣе привело къ созданію исторіи наукъ. Въ учебной математической литературѣ Среднихъ Вѣковъ, а черезъ нея и въ русской допетровскаго времени, историческіе элементы представлялись сказаніями миѳическаго характера въ родѣ слѣдующаго: «Книга, глаголемая ариѳмосъ, еже есть счетъ, иже древле-еллинскій мудрецъ Пиѳагоръ, сынъ Алинаноровъ, изобрѣтъ сію мудрость и на свѣтъ предаде наипаче хотящимъ сей ариѳметической мудрости учителя». Такъ представляется изобрѣтеніе ариѳметики въ одномъ типѣ рукописей. Въ рукописяхъ другого типа изобрѣтателемъ ариѳметики представляется лицо уже совершенно миѳическое, именно «Сиръ, сынъ Асиноровъ», написавшій «численную сію Философію (то-есть ариѳметику) финическими (финикійскими) письменами».

Въ томъ же приблизительно видѣ представлялись историческіе элементы и въ большинствѣ учебниковъ послѣдующихъ эпохъ до новѣйшаго времени включительно. Въ нихъ, наприм., излагаются сказанія объ изобрѣтеніи Пиѳагоромъ предложенія о квадратѣ гипотенузы и о принесеніи имъ въ благодарность богамъ за это изобрѣтеніе гекатомбы, то-есть жертвы, состоящей изъ 100 быковъ. И сказанія эти содержатъ въ себѣ такъ же мало правды, какъ и приведенныя сейчасъ повѣствованія древнерусскихъ ариѳметическихъ рукописей объ изобрѣтателяхъ ариѳметики. Изобрѣтеніе Пиѳагоромъ приписываемаго ему предложенія уже давно подвергалось вполнѣ основательнымъ сомнѣніямъ. Теперь же, послѣ открытія и изученія древне-индусскихъ Sulva-Sutra's (правило веревки), все чаще и чаще начинаютъ приходить къ заключенію, что предложеніе о квадратѣ гипотенузы было вынесено Пиѳагоромъ изъ Индостана. Если это заключеніе является результатомъ изслѣдованій послѣдняго времени, то ложность сказанія о принесеніи Пиѳагоромъ въ жертву 100 быковъ была извѣстна очень давно, такъ какъ уже давно знали о безусловномъ запрещеніи въ религіозно-философскомъ ученіи древнихъ пиѳагорейцевъ всякой кровавой жертвы. Чтобы спасти это сказаніе отъ грозившаго ему изгнанія изъ науки, неопиѳагорейцы, представители философской школы, возникшей въ I вѣкѣ послѣ Р. Хр., утверждали, что принесенные Пиѳагоромъ въ жертву быки были сдѣланы изъ муки. Если для древнихъ временъ, создавшихъ приведенныя сказанія, эти послѣднія являются выраженіемъ недостаточной разработки или даже совершеннаго несуществованія Исторіи математики, то ничего подобнаго нельзя сказать о настоящемъ времени. Повтореніе тѣхъ же сказаній авторами учебниковъ элементарной геометріи въ новѣйшее время свидѣтельствуетъ только о недостаткѣ серьезнаго отношенія къ дѣлу и о важномъ пробѣлѣ современнаго математическаго образованія, происходящемъ отъ игнорированія Исторіи математики.

Ни съ какими опредѣленными и сколько-нибудь ясно сознанными цѣлями такая постановка историческихъ элементовъ въ учебникахъ элементарной математики связываться, конечно, не могла. А между тѣмъ правильная постановка въ курсѣ математики средней школы историческихъ элементовъ только и можетъ быть достигнута при наличности цѣлей указаннаго характера. Въ чемъ же эти цѣли должны состоять?

Извѣстный, какъ крупный дѣятель въ области преподаванія элементарной математики, германскій педагогъ первой половины XIX вѣка Дистервегъ говорилъ, что въ нѣмецкой публикѣ на математику смотрятъ, какъ на безплодную науку. Для этой публики «математикъ» и «сухой, непрактичный, поглощенный отвлеченностями и чуждый свѣту человѣкъ»—синонимы. Въ школахъ, по тѣмъ же ходячимъ въ публикѣ мнѣніямъ, изъ этой сухой науки и очень рѣдко и только нѣкоторая часть учащихся можетъ что-нибудь себѣ усвоить. Представители этой части въ общественномъ мнѣніи считались рѣдкими исключеніями и какъ бы для пустыхъ отвлеченій созданными умами. Переходя, хотя и въ значительно болѣе рѣдкихъ случаяхъ, къ противоположной крайности, вѣроятно подъ вліяніемъ сознанія собственной неспособности подняться на соотвѣтствующую высоту, «на нихъ смотрѣли, какъ на недосягаемыхъ геніевъ».

Если прежде таковы были въ большинствѣ случаевъ взгляды профановъ, то теперь они сдѣлались достояніемъ людей, мнящихъ себя компетентными. Довольно яркую характеристику отношеній къ математикѣ германскаго образованнаго общества въ настоящее время даетъ мюнхенскій профессоръ А. Фоссъ въ своей рѣчи Über das Wesen der Mathematik, произнесенной имъ 11 марта 1908 года въ публичномъ засѣданіи Королевской Баварской Академіи Наукъ. Указавъ на основное значеніе математики для современной культуры, онъ говоритъ: «И тѣмъ не менѣе математика, это твореніе человѣческаго духа, съ которымъ не можетъ быть сравниваемо по древности никакое другое, начало котораго мы съ увѣренностью можемъ прослѣдить болѣе чѣмъ на шесть тысячъ лѣтъ назадъ отъ нашего времени, все еще является изъ всѣхъ наукъ самою непопулярною! Конечно, быть непопулярною составляетъ неотъемлемое свойство существа каждой истинной науки. Овладѣть такою наукою можно не черезъ пріятное случайное чтеніе, а только путемъ продолжительной неустанной работы. И въ то время, какъ всякій въ общемъ сколько-нибудь образованный человѣкъ владѣетъ нѣкоторымъ пониманіемъ въ отношеніи самыхъ выдающихся изъ другихъ областей знанія, именно въ отношеніи физики, астрономіи, описательныхъ естественныхъ наукъ, результатовъ языковѣдѣнія, исторіи философіи, такъ же какъ и порядка историческаго развитія, и считаетъ себя въ состояніи съ бо́льшимъ или меньшимъ успѣхомъ чувствовать и понимать прогрессъ этихъ наукъ, въ отношеніи математики вообще и въ обширныхъ размѣрахъ проявляется поразительно недостаточное разумѣніе, которое только въ очень малой мѣрѣ согласуется съ указанною выше общею высотою ея значенія, а въ отдѣльныхъ случаяхъ даже сказывается въ невѣроятномъ умаленіи ея значенія. Какъ часто приходится слышать о непреодолимомъ отвращеніи, которое питаютъ къ употребленію математическихъ формулъ даже люди, высоко-стоящіе въ духовномъ отношеніи. Какъ часто ставится вопросъ: чѣмъ собственно занимается математика и какъ могло случиться, что она играетъ въ нашей культурѣ ту важную роль, которая, какъ кажется, принадлежитъ ей и на самомъ дѣлѣ» [1]).

Причины выражающагося во всемъ этомъ непониманія того, въ чемъ собственно состоитъ сущность математики, Фоссъ видитъ частью въ трудности математическихъ изслѣдованій, какъ требующихъ по своему абстрактному характеру напряженной и упорно продолжаемой работы, для которой у погруженнаго въ практическую дѣятельность большинства человѣчества не легко даже можетъ быть найдено свободное время, частью же—въ общемъ строѣ современнаго воспитанія юношества. Ставя себѣ цѣлями развитіе логическаго мышленія и доставленіе практическихъ свѣдѣній, преподаваніе математики въ нашихъ школахъ строго замыкается въ той законченной области, которая называется элементарною математикою, и тѣмъ дѣлаетъ для себя невозможнымъ дать хотя какое-нибудь представленіе о той глубинѣ воззрѣній, которая характеризуетъ съ XVIII вѣка математическія изслѣдованія. Къ этому изложенію въ печат-

---

[1]) A. Voss, Über d. Wesen der Mathem. S. 4—5. (Есть русскій переводъ.)

номъ изданіи своей рѣчи Фоссъ прибавляетъ примѣчаніе, въ которомъ между прочимъ говоритъ: «Кто не пріобрѣлъ болѣе широкаго взгляда, тому не остается ничего другого, какъ только думать на основаніи вынесенныхъ изъ школы воспоминаній, что дѣятельность математика состоитъ въ рѣшеніи болѣе трудныхъ задачъ на построеніе и въ усовершенствованіи счета, или также, что открытіе возможно болѣе многихъ формулъ служитъ само себѣ цѣлью, при чемъ оно имѣетъ и практическую цѣнность» [1]).

Одинъ небезъизвѣстный въ русской педагогической литературѣ авторъ говорилъ въ 1901 году. Въ «общеобразовательномъ школьномъ курсѣ нѣтъ достаточныхъ основаній дѣлать математику обязательной для всѣхъ: она слишкомъ отвлеченна и далека отъ жизни, слишкомъ трудна для многихъ. Ея вліяніе на развитіе ума не представляетъ чего-либо особеннаго: тѣ основные мыслительные процессы, которые господствуютъ въ математикѣ, имѣютъ мѣсто и въ другихъ наукахъ, математика въ логическомъ отношеніи не даетъ ничего абсолютно новаго, что не могло бы быть достигнуто знакомствомъ съ другими науками... По этому намъ казалось бы излишнимъ включать математику, какъ самостоятельный предметъ, въ обязательный учебный курсъ для всѣхъ, предоставивъ ея изученіе тѣмъ, которые владѣютъ соотвѣтствующими способностями и которымъ отвлеченность математическихъ разсужденій не представитъ слишкомъ большихъ затрудненій» [2]). Не таковы, какъ извѣстно, взгляды на математику не только спеціалистовъ этой науки, но и простыхъ ея любителей. Они находятъ въ ней своеобразную высокую поэзію, а въ отношеніи достигнутой въ ней требуемыми ею мыслительными процессами степени развитія, а также и ихъ напряженности, они не знаютъ соперниковъ ей въ средѣ другихъ наукъ.

Оставлять учащихся при указанныхъ неправильныхъ взглядахъ на математику, выносимыхъ ими изъ семьи, общества и литературы, школа не должна и не можетъ, такъ какъ эти взгляды способны отбить у очень многихъ изъ учащихся, если

---

[1]) A. Voss. Üb. d. Wes. d. Math. S. 6.

[2]) Каптеревъ. Общеобразовательный школьный курсъ. Образованіе, 1901 г. (№ 12). Стр. 7—8.

не у большинства, всякую охоту къ занятіямъ математикою и тѣмъ въ корнѣ парализовать всѣ усилія школы къ достиженію въ дѣлѣ преподаванія математики положительныхъ результатовъ. Борясь съ упомянутыми взглядами въ средѣ учащихся, школа, какъ не трудно видѣть, беретъ на себя не менѣе важную задачу борьбы при посредствѣ учащихся съ тѣми же взглядами и въ самомъ ихъ источникѣ, то-есть, въ обществѣ и во вліяющей на него литературѣ. Къ устраненію между учащимися неправильныхъ взглядовъ на математику и къ замѣнѣ ихъ правильными, можетъ быть, могъ бы вести самый строй преподаванія математики, если бы таковой былъ выработанъ. За отсутствіемъ же его, единственнымъ источникомъ средствъ, ведущихъ къ той же цѣли, является Исторія математики съ такими своими фактами и эпизодами, какъ взаимоотношенія между философіею и математическими ученіями въ пиѳагорейской школѣ, какъ кипучая дѣятельность итальянскихъ математиковъ въ Эпоху Возрожденія и многіе другіе.

Бороться съ упомянутыми неправильными взглядами на математику не только въ школѣ, но и внѣ ея, въ обществѣ и литературѣ, въ настоящее время необходимо болѣе, чѣмъ когда-либо. Подъ вліяніемъ равнодушія большинства современныхъ представителей математики къ судьбамъ своей науки, доходящаго до оставленія безъ возраженій нападокъ графа Льва Толстого на математику, сторонники упомянутыхъ неправильныхъ взглядовъ начинаютъ уже переходить отъ словъ къ дѣлу, именно къ находящемуся въ полномъ согласіи со взглядами вышеуказаннаго автора устраненію математики изъ числа наукъ, избранныхъ для распространенія въ широкихъ слояхъ населенія. Наше время, и особенно у насъ въ Россіи, представляетъ въ отношеніи стремленія къ этому распространенію нѣкоторую аналогію съ Эпохою Возрожденія. Но какая громадная разница въ отношеніяхъ той и другой эпохи къ математикѣ. Предметами публичныхъ курсовъ и отдѣльныхъ публичныхъ чтеній, устраиваемыхъ въ наши дни обществами народныхъ университетовъ, различными учрежденіями и отдѣльными лицами, являются главнымъ образомъ политическія и юридическія науки и въ меньшей степени естественныя, но никогда, или почти никогда, математика. Не такъ было въ Эпоху Возрожденія въ Италіи.

Муниципалитеты городовъ Венеціи, Перуджіи, Брешіи и другихъ учреждали на городскія средства публичные курсы по различнымъ математическимъ наукамъ. Лука Пачіуоло, наприм., изучалъ ставшія для него позднѣе главными спеціальностями ариѳметику и алгебру въ Венеціи у Доменико Брагадино, назначеннаго городскимъ управленіемъ публичнымъ преподавателемъ этихъ наукъ. Многіе итальянскіе математики и въ числѣ ихъ такіе выдающіеся, какъ тотъ же Лука Пачіуоло, Николай Тарталья, Карданъ, переѣзжали изъ города въ городъ для преподаванія математическихъ наукъ, при чемъ аудиторіями служили обыкновенно церкви.

Многочисленные слушатели свободно заявляли лекторамъ о своихъ нуждахъ и желаніяхъ, которыми тѣ нерѣдко и руководствовались при выборѣ предметовъ своихъ чтеній. Въ Германіи знаменитый художникъ Альбрехтъ Дюреръ, подобно Леонардо-да-Винчи въ Италіи, указывалъ на пользу и даже необходимость для художниковъ и ремесленниковъ математическихъ и въ частности геометрическихъ знаній.

Чтобы дать архитекторамъ и живописцамъ возможность пріобрѣсть эти знанія, онъ написалъ свои извѣстныя Institutionum geometricarum libri IV, явившіяся первымъ звеномъ въ длинной цѣпи работъ, создавшихъ въ Западной Европѣ науку о высшихъ кривыхъ въ томъ видѣ, какой она имѣетъ въ настоящее время. Подъ непосредственнымъ вліяніемъ указанныхъ взглядовъ Дюрера городское управленіе Нюренберга учредило для ремесленниковъ и художниковъ публичные курсы математики и въ особенности геометріи. Въ соединеніи съ существовавшими уже ранѣе въ городѣ цыфирными школами эти курсы сдѣлали его на нѣкоторое время, какъ извѣстно, центромъ математическаго образованія въ Германіи.

Въ школѣ, въ средѣ учащихся, вопросъ о пользѣ математики возникаетъ тогда же, когда онъ возникалъ и во всемъ человѣчествѣ, то-есть послѣ перехода отъ занятій практическимъ искусствомъ счета и измѣреніемъ простѣйшихъ геометрическихъ протяженій къ изученію теоретической геометріи и началъ теоретической ариѳметики и алгебры. Этотъ переходъ соотвѣтствуетъ, дѣйствительно, въ исторіи человѣчества смѣнѣ до-научнаго періода развитія математики научнымъ. До этого перехода не было мѣста ни для какихъ сомнѣній въ значеніи и пользѣ математики, такъ какъ и повседневный житейскій опытъ и подборъ предлагаемыхъ задачъ равно показывали учащемуся ея практическую пользу. Послѣ упомянутаго перехода прежняя ясность значенія и пользы математики смѣнилась полною неясностью и притомъ не только для ученика средней школы, но и для такихъ умовъ, какими были Сократъ и многіе другіе философы. Для чего нужна чистая наука, неспособная, повидимому, ни къ какимъ нрактическимъ приложеніямъ, а потому и не приносящая никакой пользы? Какое значеніе могутъ имѣть доказательства предложеній ариѳметики и геометріи, когда ихъ справедливость можетъ быть повѣрена на частныхъ числовыхъ примѣрахъ въ первой и при помощи чертежа во второй? Вотъ вопросы, которые обыкновенно представляются уму ученика. Оставить ихъ, а также и указанныя сомнѣнія, неразрѣшенными — это значитъ обречь учащагося на болѣе или менѣе скорую утрату всякаго интереса къ математикѣ, на занятія ею только по преслѣдующему невѣдомыя цѣли приказу и, наконецъ, къ болѣе или менѣе ясно сознаваемому взгляду на этотъ приказъ, какъ на насиліе, совершаемое надъ учащимися, противъ котораго являются допустимыми всякія находящіяся въ распоряженіи учащагося средства, не исключая даже и несогласныхъ съ нравственными правилами. Все это въ прежнее время сознавалось и преподавателями и авторами учебниковъ. Первые произносили въ присутствіи учащихся и посторонней публики рѣчи о пользѣ математики, вторые посвящали тому же предмету предисловія и введенія въ свои сочиненія. Вначалѣ риторичность и напыщенность этихъ рѣчей и писаній при скудости содержанія и слабости аргументаціи, а позднѣе—отвлеченность, дѣлали ихъ вліяніе на учащихся и постороннюю публику настолько незначительными, что ихъ пришлось, какъ это наблюдается въ настоящее время, почти совсѣмъ оставить. На мѣсто ихъ для достиженія вліянія, по крайней мѣрѣ, на учащихся въ разсматриваемомъ направленіи необходимо поставить заимствованные изъ Исторіи наукъ матемитическихъ конкретные примѣры.

Крупнѣйшими между примѣрами указаннаго рода изъ числа не выходящихъ за предѣлы элементарной математики являются слѣдующіе. Во-первыхъ, крайняя отсталость и жалкое вообще состояніе, которыя сдѣлались удѣломъ древнегреческаго землемѣрія послѣ того, какъ въ своемъ качествѣ прикладной отрасли знанія оно сдѣлалось предметомъ игнорированія для геометровъ пиѳагорейской школы, а затѣмъ въ школѣ Аристотеля и совсѣмъ было исключено изъ области вѣдѣнія теоретической геометріи. Когда древнегреческая геометрія обладала уже твореніями Архимеда и александрійскихъ геометровъ, тогда въ современномъ ей древнегреческомъ землемѣріи исповѣдывалось еще ложное ученіе до-научнаго періода развитія наукъ математическихъ о равенствѣ площадей при равенствѣ периметровъ.

Во-вторыхъ, вызванное подобнымъ же исключеніемъ механики въ школѣ Платона изъ области вѣдѣнія теоретической геометріи, отсутствіе въ Аѳинахъ и вообще въ коренной Греціи, а также и въ Александріи сколько-нибудь замѣтнаго движенія этой науки впередъ. Тѣми успѣхами, которыхъ она достигла въ это время и которые выразились въ трудахъ Архимеда по Статикѣ и Гидростатикѣ, она была обязана Архиту Тарентскому и вообще итальянскимъ пиѳагорейцамъ и ихъ позднѣйшимъ ученикамъ, какъ не послѣдовавшимъ примѣру школы Платона и не исключившимъ механику изъ области вѣдѣнія теоретической геометріи. Послѣ этихъ двухъ примѣровъ, какъ относящихся къ теоретической геометріи, третій слѣдуетъ выбрать изъ числа, относящихся къ теоретической ариѳметикѣ. Такимъ примѣромъ могутъ послужить нужды калькуляторскаго искусства, нашедшія свое удовлетвореніе въ изобрѣтеніи логариѳмовъ. Въ эпохи, предшествующія этому изобрѣтенію, совершившемуся, какъ извѣстно, въ области чуждой ариѳметикѣ, именно на почвѣ соображеній, заимствованныхъ изъ механики, сколько-нибудь значительныя вычисленія встрѣчались съ очень большими трудностями и требовали очень много времени и труда. Всѣ эти трудности и тяжелыя неудобства были бы устранены, если-бы теоретическія изслѣдованія и ихъ философскій характеръ стояли въ области теоретической ариѳметики на болѣе значительной высотѣ, чѣмъ это было въ дѣйствительности! Тогда можно бы было, говоря относительно, довольно рано усмотрѣть наряду съ извлеченіемъ корня существованіе еще и другого обращенія дѣйствія возвышенія въ степень и тѣмъ придти къ открытію логариѳмовъ гораздо ранѣе, чѣмъ это совершилось въ дѣйствительности.

Въ курсѣ математики средней школы существуютъ статьи, которыя при нынѣшней постановкѣ преподаванія не только трудно даются учащимся при первоначальномъ изученіи, но и затѣмъ для большинства ихъ остаются на все время пребыванія въ средней школѣ усвоенными недостаточно и поверхностно. Какъ на болѣе крупныя и важныя изъ такихъ статей можно указать въ ариѳметикѣ на посвященныя системамъ счисленія (преимущественно десятичной), ихъ законамъ и приложеніямъ, а въ геометріи на пользующіяся методомъ исчерпыванія древнихъ и его видоизмѣненіями. Углубить въ достаточной степени пониманіе учащимися этихъ предметовъ можетъ только ознакомленіе съ исторіею ихъ развитія. При этомъ главное вниманіе должно быть обращено въ первомъ изъ указанныхъ случаевъ на исторію развитія системъ счисленія и ихъ приложеній, главнѣйшими изъ которыхъ являются словесная и письменная нумераціи, а во второмъ—на изложеніе болѣе характеристичныхъ и полныхъ изъ примѣровъ употребленія метода исчерпыванія въ математической литературѣ древней Греціи. Изученіе всего указаннаго сейчасъ не только углубитъ пониманіе учащимися относящихся сюда предметовъ, но и въ значительной степени расширитъ уже пріобрѣтенныя ими въ соотвѣтствующихъ областяхъ познанія. Цѣнность и важность этихъ пріобрѣтеній для учащихся на столько очевидны, что останавливаться на нихъ далѣе нѣтъ надобности. Для примѣра же достаточно замѣтить, что во второмъ изъ указанныхъ случаевъ учащіеся ознакомятся съ такими важными для изученія высшей математики предметами, какъ начало и первыя формы Высшаго Анализа.

Также какъ на одинъ изъ видовъ пользы, которую могутъ извлечь учащіеся изъ введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ слѣдуетъ указать на производимое ими установленіе передъ сознаніемъ учащихся связи отдѣльныхъ частей элементарной математики съ реальными образами, представляемыми личностями ученыхъ и историческими фактами, и съ духовными—въ видѣ идей изъ области логики и философіи. Эта связь, что ясно само собою, является могущественнымъ средствомъ укрѣпленія въ памяти учащихся преподаннаго имъ содержанія элементарной математики не только въ теченіе прохожденія школьнаго курса, но и на время болѣе продолжительное, чѣмъ при существующихъ условіяхъ, послѣ выхода изъ школы.

Кромѣ указанныхъ главныхъ цѣлей введенія историческихъ элементовъ въ курсъ математики средней школы могутъ быть преслѣдуемы и еще нѣкоторыя, въ родѣ, наприм., во-первыхъ, развитія если не у всѣхъ учащихся, то, по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторой ихъ части сознательнаго и глубокаго интереса къ математикѣ и ея успѣхамъ и, во-вторыхъ, возбужденія въ той же части учащихся стремленій къ самостоятельной творческой работѣ въ области математики. Достиженію этой послѣдней цѣли особенно большое содѣйствіе можетъ оказать изученіе учащимися біографій выдающихся математиковъ Древняго Міра и болѣе позднихъ эпохъ, какъ это уже много разъ наблюдалось и въ самой математикѣ и въ другихъ наукахъ, а также въ искусствахъ и различныхъ отрасляхъ человѣческой дѣятельности.

Историческіе элементы могутъ быть введены въ преподаваніе математики въ средней школѣ въ одномъ изъ двухъ видовъ: въ формѣ систематическаго изученія исторіи элементарной математики или въ формѣ эпизодическаго. Главными препятствіями употребленію первой формы являются: во-первыхъ, недостатокъ времени и, во-вторыхъ, несоотвѣтствіе умственнаго развитія большинства учащихся, если не всѣхъ, той его ступени, которая требуется природою предмета, какъ имѣющаго философскій характеръ. Остается, слѣдовательно, вторая форма, да и то подъ условіемъ изложенія заимствуемыхъ изъ исторіи математики статей въ формѣ, доступной для учащихся.

При недостаточности времени, которое обыкновенно отводится преподаванію математики въ средней школѣ, едва ли можно серьезно думать о введеніи исторіи математики, даже при эпизодической формѣ ея изученія, въ число предметовъ, непосредственно преподаваемыхъ въ школѣ. Это изученіе должно быть предоставлено самодѣятельности учащихся, конечно, подъ условіемъ контроля, а въ случаяхъ необходимости, также и помощи со стороны преподавателя. Цѣлесообразно подобранный и въ строгомъ соотвѣтствіи со степенью умственнаго развитія учащихся изложенный матеріалъ для приложенія въ настоящемъ случаѣ ихъ самодѣятельности долженъ быть соединенъ въ сборники. Такъ какъ въ этомъ матеріалѣ могутъ и даже должны быть введены наряду со статьями историко-математическаго содержанія также и удовлетворяющіе условіямъ цѣлесообразности и доступности для учащихся отрывки произведеній древней математической литературы, то самою удобною для этихъ сборниковъ формою является форма историко-математической христоматіи, которая, поэтому, и должна быть избрана».

Конспектъ.

1. Состоявшееся уже въ глубокой древности введеніе историческаго элемента въ сочиненія, назначенныя для первоначальнаго изученія элементарной математики, было разультатомъ коренящагося въ свойствахъ духовной природы человѣка стремленія къ познанію генезиса находящихся въ распоряженіи человѣчества знаній. Это стремленіе выразилось въ созданіи сперва миѳовъ для объясненія упомянутаго генезиса, и позднѣе исторіи наукъ.

2. Въ изложеніи упомянутыхъ миѳовъ съ бо́льшими или меньшими подробностями и состояло введеніе историческаго элемента въ учебныя сочиненія по элементарной математикѣ, какъ въ древности, такъ и въ новое и даже новѣйшее время. Примѣромъ могутъ служить дошедшіе черезъ преемственную передачу до учебниковъ элементарной геометріи послѣдняго времени миѳы объ изобрѣтеніи Пиѳагоромъ теоремы о квадратѣ гипотенузы и о принесеніи имъ въ благодарность богамъ за это изобрѣтеніе жертвы въ 100 быковъ.

3. Никакого сколько-нибудь яснаго представленія о цѣляхъ введенія въ учебники элементарной математики историческаго элемента при такомъ его положеніи существовать, конечно, не могло.

4. Учащимся въ средней школѣ обыкновенно приходится встрѣчаться въ семьѣ и обществѣ съ отрицательными взглядами на математику, поддерживаемыми и распространяемыми не только Л. Н. Толстымъ и его послѣдователями, но даже и нѣкоторыми произведеніями педагогической литературы. Оставлять учащихся при этихъ взглядахъ школа не можетъ, такъ какъ ими обрекаются на неудачу всѣ ея усилія къ достиженію положительныхъ результатовъ въ дѣлѣ преподаванія математики. Наиболѣе дѣйствительныя для настоящаго времени средства устраненія отрицательныхъ взглядовъ на математику можетъ дать только исторія математики. Въ этомъ и должна состоять *одна* изъ цѣлей введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ. Необходимость преслѣдованія этой цѣли дѣлается въ настоящее время особенно настоятельною, такъ какъ сторонники отрицательныхъ взглядовъ на математику начинаютъ мало-по-малу переходить отъ словъ къ дѣлу, именно—къ проведенію своихъ взглядовъ въ самую организацію школьнаго преподаванія, хотя пока и въ очень ограниченной области, имѣвшей несчастіе сдѣлаться имъ доступною.

5. Переходъ отъ занятій практическимъ искусствомъ счета и связанными съ нимъ измѣреніями также практическаго характера къ изученію теоретической части элементарной математики приводитъ учащихся въ средней школѣ, какъ въ свое время и все человѣчество, къ вопросу о пользѣ математики. Употреблявшіяся прежде для рѣшенія этого вопроса въ положительномъ смыслѣ діалектическія средства обыкновенно или совсѣмъ не достигали своей цѣли или если и достигали то на непродолжительное время и въ очень ограниченной сферѣ дѣйствія. На смѣну имъ въ качествѣ болѣе дѣйствительныхъ могутъ быть поставлены въ настоящее время прямыя доказательства пользы и значенія математики, доставляемыя ея Исторіею. Въ этомъ нельзя не видѣть *другой*

цѣли введенія историческихъ элементовъ въ проподаваніе математики въ средней школѣ.

6. Въ курсѣ математики средней школы существуютъ статьи, которыя при нынѣшней постановкѣ преподаванія не только трудно даются учащимся при первоначальномъ изученіи, но и затѣмъ для большинства ихъ остаются на все время пребыванія въ средней школѣ усвоенными недостаточно и поверхностно. Углубить въ достаточной степени пониманіе учащимися предметовъ упомянутыхъ статей можетъ только ознакомленіе съ исторіею развитія этихъ предметовъ. Неминуемымъ слѣдствіемъ такого ознакомленія должно быть также, какъ это понятно само собою, болѣе или менѣе значительное расширеніе въ количественномъ отношеніи тѣхъ свѣдѣній по соотвѣтствующимъ предметамъ, которые были оставлены учащимся преподаваніемъ математики. Углубленіе пониманія и расширеніе свѣдѣній учащихся при помощи Исторіи математики въ разсматриваемыхъ сейчасъ случаяхъ составляютъ *третью* цѣль введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ.

7. Кромѣ указанныхъ до сихъ поръ цѣлей, имѣющихъ въ виду всѣхъ учащихся средней школы, введенію историческихъ элементовъ въ преподаваніе въ ней математики могутъ быть поставлены еще и спеціальныя цѣли, имѣющія въ виду вербовки лицъ, склонныхъ посвятить свою будущую дѣятельность математикѣ. Одною изъ такихъ спеціальныхъ цѣлей является развитіе у учащихся упомянутой категоріи сознательнаго и возможно болѣе глубокаго интереса къ математикѣ и ея успѣхамъ, а другою—возбужденіе въ той же категоріи учащихся стремленій къ самостоятельной творческой работѣ въ области математики. Какъ на важнѣйшее изъ средствъ достиженія этихъ цѣлей, и въ особенности второй, слѣдуетъ указать на ознакомленіе учащихся съ біографіями выдающихся математиковъ Древняго Міра и болѣе позднихъ эпохъ.

8. Историческіе элементы могутъ быть введены въ преподаваніе математики въ средней школѣ въ одномъ изъ двухъ видовъ: въ формѣ систематическаго изученія исторіи элементарной математики или въ формѣ эпизодическаго. Недостатокъ времени, а также и несоотвѣтствіе умственнаго развитія

большинства учащихся, если не всѣхъ, той его ступени, которая требуется природою исторіи математики, какъ предмета, имѣющаго философскій характеръ, являются главными препятствіями употребленію первой изъ указанныхъ формъ введенія историческихъ элементовъ въ преподаваніе математики въ средней школѣ. Остается, слѣдовательно, вторая форма, да и то подъ условіемъ изложенія заимствуемыхъ изъ Исторіи математики статей въ формѣ, доступной для учащихся.

9. При недостаточности времени, которое обыкновенно отводится преподаванію математики въ средней школѣ, едва ли можно серьезно думать о введеніи Исторіи математики, даже при эпизодической формѣ ея изученія, въ число предметовъ, непосредственно преподаваемыхъ въ школѣ. Это изученіе должно быть предоставлено самодѣятельности учащихся, конечно, подъ условіемъ контроля, а въ случаяхъ необходимости также и помощи со стороны преподавателя. Цѣлесообразно подобранный и въ строгомъ соотвѣтствіи со степенью умственнаго развитія учащихся изложенный матеріалъ для приложенія въ настоящемъ случаѣ ихъ самодѣятельности долженъ быть соединенъ въ сборники. Такъ какъ въ этотъ матеріалъ могутъ и даже должны быть введены наряду со статьями историко-математическаго содержанія также и удовлетворяющіе условіямъ цѣлесообразности и доступности для учащихся отрывки произведеній древней математической литературы, то самою удобною для этихъ сборниковъ формою является форма историко-математической христоматіи, которая поэтому и должна быть избрана.

Пренія по докладу В. В. Бобынина.

А. И. Лещенко (Кіевъ). „Большого значенія историческаго элемента въ преподаваніи ариѳметики, конечно, отрицать не приходится, но нельзя видѣть въ немъ панацею отъ всѣхъ золъ. И въ докладѣ, и въ конспектѣ, и въ самой рѣчи высказывалось, что нужно ввести въ школу не только эпизодическій, но даже систематическій курсъ исторіи математики. Съ этимъ я не могу согласиться. Переходя къ практической сторонѣ занятій, къ искусству счета, я нахожу неправильной мысль относительно пользы математики понятія—интересъ и польза смѣшаны. Затѣмъ я отмѣтилъ бы то обстоятельство, что слишкомъ неопредѣленно высказаны тѣ способы, какими будетъ ученикамъ преподноситься историческій матеріалъ. Конкретное предложеніе доклада сводится лишь къ изданію хрестоматіи. Отрицать значеніе хрестоматіи я не стану, но желалъ бы чтобы, во-первыхъ, были указаны тѣ практическіе пріемы, которые нужны для работы съ историческимъ матеріаломъ; во-вторыхъ, чтобы болѣе опредѣленно былъ отмѣченъ возрастъ, когда слѣдуетъ подходить къ ученику съ элементами математики. Эта сторона въ докладѣ совершенно упущена".

С. И. Шохоръ-Троцкій (Спб). „Какъ учитель я долженъ сказать, что ученики интересуются вопросами историческими. Они не знаютъ, какъ великъ возрастъ *современной* ариѳметики. Они не понимаютъ, какъ велико то благодѣяніе, которое представляетъ собою ариѳметика. Они не знаютъ, что она еще не было извѣстна въ XV—XVI вв. въ той формѣ, какъ извѣстна намъ".

„Одно лицо, бывшее ревизоромъ по учебной части въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ одного вѣдомства, пріѣхало въ среднюю школу случайно на урокъ космографіи и предложило взрослому ученику, отвѣчавшему по космографіи, вопросъ: „Когда жилъ Коперникъ — до Рождества Христова или послѣ? Мальчикъ нисколько не смутился и сказалъ: „Конечно, до Рождества Христова".

„Ученики не знаютъ ничего по исторіи математики. Въ извѣстной книгѣ Рихарда Бальцера «Элементы математики» есть подстрочныя примѣчанія; если бы учителя пользовались хотя бы только ими, то и это принесло бы пользу. Они своевременно могли бы на классной доскѣ записывать имена: Аполлонія, Архимеда, Эвклида съ нумерами столѣтій въ скобкахъ; имя Гаусса — при изученіи правильныхъ многоугольниковъ; имя Лагранжа—при изученіи разложенія всякихъ чиселъ на сумму 4-хъ квадратовъ, и т. п. Если бы преподаватели сообщали эти свои замѣчанія такимъ образомъ, чтобы ученики познакомились съ Ньютономъ и чувствовали благоговѣніе передъ этимъ именемъ, то это было бы полезно для умственнаго, нравственнаго и культурнаго развитія учениковъ. Это чувство благоговѣнія передъ наукою будетъ вызывать и чувство уваженія къ учебному предмету".

М. Г. Ребиндеръ (Юрьевъ). „Я лично ничего не имѣю противъ введенія историческихъ свѣдѣній въ курсъ математики, но долженъ обратить вниманіе на слѣдующее обстоятельство: если мы будемъ вводить свѣдѣнія по исторіи математики въ курсъ самой математики, то мы раздвоимъ вниманіе ученика. Мнѣ кажется, что введеніе этой исторіи непосредственно на урокахъ математики представляетъ значительныя техническія трудности потому, что мы при этомъ нарушаемъ опредѣленныя дидактическія правила, именно—направлять вниманіе учениковъ на опредѣленную точку, сосредоточивать его въ одномъ центрѣ. Если будемъ раздваивать вниманіе, то, гоняясь за двумя зайцами, не поймаемъ ни одного. Что касается указанія, что ученикъ можетъ ошибаться въ хронологіи, то эти ошибки онъ дѣлаетъ и на урокахъ исторіи, такъ что введеніе историческаго элемента въ курсъ математики вовсе не гарантируетъ ученика, что онъ не отдалитъ время Коперника до Рождества Христова. Оканчивая свое замѣчаніе, я могу пожелать, чтобы на исторію математики обратили вниманіе гораздо больше чѣмъ въ настоящее время, такъ же какъ и на исторію другихъ наукъ, но какъ на отдѣльный предметъ, а не какъ на суррогатъ къ математикѣ“.

В. М. Куперштейнъ (Елизаветградъ). „Совершенно понятно, что здѣсь приходится слышать нѣкоторыя прибавки къ тому, что было сказано докладчикомъ В. В. Бобынинымъ, такъ какъ вопросъ объ исторіи математики въ школьномъ курсѣ для многихъ является совершенно новымъ. Мнѣ кажется, что исторія математики непремѣнно должна изучаться въ школѣ. Значенія, прелести, красоты математики не понимаютъ ни дѣти начальныхъ школъ, ни ученицы, оканчивающія 8-й классъ гимназіи. Если не вся наша молодежь, то огромная часть учащихся въ средней школѣ и представленія объ этомъ не имѣетъ. Если бы дѣти поняли, что математика есть нѣчто, цѣльное красивое, они съ бо́льшей охотой занимались бы ею, особенно въ старшихъ классахъ. Какъ исторію математики преподавать, какими средствами—въ докладѣ не указано, но развѣ можно въ одномъ докладѣ все это сказать. Мы должны пожелать, чтобы исторія математики была введена въ курсъ средней школы“.

С. А. Неаполитанскій (Варшава). „Одинъ изъ предыдущихъ ораторовъ говорилъ, какими способами можно знакомить учениковъ съ историческими элементами. Я полагаю, что наилучшій способъ рефератный. Такъ, напр., въ Кавказскомъ Округѣ при нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ устраиваются рефераты: преподавателемъ избирается для разработки какой-нибудь практическій или теоретическій вопросъ и указывается ученикамъ матеріалъ по этому вопросу. Для рефератовъ назначается время не урочное, а праздничное, въ присутствіи желающихъ заниматься учениковъ. Послѣ реферата происходятъ пренія. Если на ряду съ обработкой теоретическихъ и практическихъ вопросовъ въ темы рефератовъ ставить разработку историческихъ вопросовъ, то такимъ образомъ можно познакомить учениковъ хоть немного съ историческимъ элементомъ“.

В. Е. Загулинъ (Екатеринославъ). „Уважаемый докладчикъ В. В. Бобынинъ поднялъ вопросъ высокой важности, именно, онъ указалъ на важное значеніе исторіи математики. Въ средней школѣ безъ особеннаго труда можно провести этотъ курсъ въ достаточно полномъ объемѣ. Для этого нужно или ввести отдѣльные уроки, или отвести небольшое время на самыхъ урокахъ математики. Конечно, на урокахъ математики можно знакомить учениковъ лишь очень кратко съ исторіей математики, указывая, напр., дату, когда была установлена или доказана та или другая теорема. Это имѣло-бы значеніе и для удержанія въ памяти самой теоремы, ибо память учениковъ лучше удерживаетъ то, что освѣщено съ нѣсколькихъ сторонъ. Кромѣ этого, необходимо рекомендовать для чтенія различныя сочиненія по исторіи математики. Въ настояшее время такихъ сочиненій имѣется уже нѣсколько на русскомъ языкѣ, какъ оригинальныхъ, такъ и переводныхъ; они могутъ доставить ученикамъ среднихъ школъ матеріалъ для самостоятельныхъ работъ по исторіи математики".

В. Я. Гебель (Москва). „Я принадлежу къ горячимъ сторонникамъ введенія историческаго элемента въ преподаваніе математики. Я думаю, что въ этой залѣ едва ли будетъ кто-нибудь принципіально отвергать воспитательную, образовательную и глубокогуманитарную сторону историческаго элемента въ какой-либо наукѣ, и поэтому я думаю, что противниковъ введенія историческаго элемента въ преподаваніе математики въ этой залѣ нѣтъ; но, съ другой стороны, представимъ себѣ положеніе преподавателя. Мои предшественники высказали мысль, что у насъ есть въ настоящее время довольно много историческихъ сочиненій по математикѣ. Съ этимъ я не могу согласиться. Вѣдь, кромѣ Кэджори, у насъ ни одного систематическаго сочиненія нѣтъ. Къ этому я могу причислить еще Лоренца и труды почтеннаго докладчика, но труды докладчика относятся къ различнымъ отдѣльнымъ моментамъ и эпохамъ исторіи математики и не представляютъ цѣльной исторіи математики. Точно такъ же еще можно назвать и нѣсколько другихъ монографій по отдѣльнымъ предметамъ оригинальныхъ или переводныхъ, но исторіи, кромѣ Кэджори, нѣтъ, да и тамъ значительная часть свѣдѣній, цѣнныхъ для школъ англійскихъ, но мало интересныхъ для русскихъ. А если литературы по этому вопросу нѣтъ, то нельзя и спрашивать отъ преподавателя, чтобы онъ этотъ вопросъ рѣшилъ въ положительномъ смыслѣ. Я высказываю пожеланіе, чтобы у насъ какъ можно больше явилось элементарныхъ и болѣе подробныхъ сочиненій по исторіи математики".

Б. К. Чачхіани (Ярославль). „Тутъ были указаны нѣкоторыя сочиненія на русскомъ языкѣ по исторіи математики, но была пропущена книжка Белюстина: «Какъ люди дошли до настоящей ариѳметики» и книга по исторіи математики проф. Кіевскаго

Университета Ващенко-Захарченко; также пропущено сочиненіе Неводовскаго по геометріи съ предисловіемъ объ Эвклидовой геометріи Ващенко-Захарченко“.

„Кромѣ недостатка на русскомъ языкѣ книгъ по исторіи математики, тормазомъ для практическаго введенія историческаго элемента въ курсъ средней школы могутъ быть и другія причины. Мнѣ приходится преподавать въ учительскомъ институтѣ и въ средней школѣ. Тогда какъ въ учительскомъ институтѣ очень легко ввести историческій элементъ, въ среднихъ школахъ мужскихъ и женскихъ не представляю себѣ возможнымъ это сдѣлать при существующемъ положеніи: изъ своей практики могу сказать, что тамъ по недостатку времени, которое уходитъ на систематическій курсъ, это почти невозможно. Указывали также на то раздвоеніе, которое получится на урокѣ математики, если вводить въ эти уроки историческій элементъ. Съ этимъ нельзя не согласиться, и слѣдовательно, надо назначать отдѣльные уроки для исторіи математики. Что касается рефератовъ, то они будутъ отчасти помогать этому дѣлу. Но откуда взять времени преподавателю и на подготовку къ этимъ рефератамъ, и на отдѣльныя вечернія практическія занятія, когда у него большею частью отъ 25 до 40 уроковъ; откуда найдется, наконецъ, время, чтобы прослушать эти рефераты? Дѣлая такія пожеланія, мы отойдемъ отъ жизни“.

О. П. Перли (Ростовъ-на-Дону). „Позвольте высказать одно пожеланіе, относящееся къ преподавателямъ высшихъ школъ. Когда я былъ студентомъ и учился въ университетѣ, то курсъ исторіи математики не читался. Правда, я получилъ указаніе на труды Ващенко-Захарченко, но оттуда можно извлечь только нѣкоторыя свѣдѣнія, напр., хронологическія даты. Къ сожалѣнію, я сегодня не пришелъ къ началу доклада и не слышалъ многоуважаемаго референта, именно не слышалъ—въ какой формѣ и какими средствами можно, по его мнѣнію, на практикѣ осуществить введеніе историческаго элемента въ курсъ средней школы,—тѣмъ болѣе я благодаренъ тѣмъ ораторамъ, которые указали нѣкоторыя средства, напримѣръ—реферативную систему. Я повторяю еще разъ пожеланіе, чтобы побольше высказывались о томъ, какъ вести это преподаваніе и откуда взять на это средства“.

В. И. Андріановъ (Спб.). „Я долго не буду занимать ваше вниманіе, но скажу о преподаваніи исторіи математики слѣдующее. Здѣсь ставился вопросъ такъ: или преподавать исторію математики, какъ отдѣльный предметъ, или вводить ее эпизодически въ уроки математики. Что-же имѣетъ преимущество,—тотъ или другой способъ преподаванія исторіи математики? Если вводить ее какъ отдѣльный предметъ, то то же само нужно сдѣлать и для другихъ предметовъ школьнаго курса, напр., физики, химіи и проч. Но цѣлесообразно ли это будетъ? Я думаю, что это будетъ крайне нецѣлесообразно, такъ какъ въ нашихъ учебныхъ заведеніяхъ и такъ достаточно предметовъ, и введеніе новаго отдѣльнаго предмета при существующей уже многопредметности не имѣетъ смысла. Другое дѣло, если бы признали, что исторія математики должна входить, какъ она и можетъ входить, эпизодически: это внесло бы полезное разнообразіе въ уроки математики. Такимъ способомъ можно и должно отвлекать вниманіе учениковъ, потому что нельзя себѣ представить, чтобы учащіеся въ теченіе 50 мин. могли сосредоточить вниманіе на одномъ предметѣ безраздѣльно. Противъ этого нельзя возражать, тогда пришлось бы возражать противъ опытовъ на урокахъ физики и химіи. Въ этихъ случаяхъ вниманіе учащихся отвлекается въ желательномъ направленіи“.

В. В. Бобынинъ (Москва). „По поводу замѣчаній перваго оппонента я могу замѣтить слѣдующее. Можетъ быть я не ясно выразился, но только я не видѣлъ панацеи отъ всѣхъ золъ въ введеніи историческаго элемента въ преподаваніе математики въ средней школѣ. Напротивъ, въ своей рѣчи я началъ съ того, что можетъ быть прежде всего слѣдуетъ строй преподаванія математики установить такъ, чтобы онъ самымъ своимъ содержаніемъ, своимъ характеромъ и направленіемъ устранялъ тѣ направленія и взгляды, которые учащіеся въ средней школѣ выносятъ изъ семьи, общества, литературы. Я сказалъ, что только при отсутствіи организаціи этого строя приходится обращаться къ исторіи математики, къ ея фактическимъ и эпизодическимъ примѣрамъ, которые я и привелъ. Относительно второго замѣчанія, въ которомъ говорилось, что въ докладѣ смѣшаны были—понятіе о пользѣ математики и понятіе объ интересѣ, я скажу, что такого смѣшенія не было, да и быть не могло. Замѣчаніе устраняется указаніемъ, что то, что становится не выясненнымъ для учениковъ въ указанное мною время прохожденія школьнаго курса, то это оказалось не яснымъ для такого великаго ума, какъ Сократъ. Сократъ, по свидѣтельству его ученика Ксенократа, говоритъ, что геометріи слѣдуетъ учить только по стольку, поскольку этого требуетъ практическая жизнь. Всякое возвышеніе надъ этимъ указаніемъ не только безполезно, но даже вредно въ глазахъ Сократа. Что же, спрашивается, Сократъ смѣшивалъ здѣсь вопросъ о пользѣ съ вопросомъ объ интересѣ? Я думаю, отвѣтъ ясный: онъ имѣлъ въ виду исключительно практическую пользу, а о поддержаніи интереса въ комъ-либо въ такихъ случаяхъ и рѣчи быть не можетъ. Относительно третьяго замѣчанія, указывающаго на неполноту и неопредѣленность содержащихся въ докладѣ указаній, относительно средствъ введенія историческаго элемента въ преподаваніе математики въ средней школѣ, я отвѣчу, что неполнота, дѣйствительно, была, неопредѣленность также, но онѣ и не могли не быть, потому что предметъ этотъ только поставленъ на очередь не только у насъ, но и въ Западной Европѣ; не только нѣтъ рѣшеній, но и указаній, ведущихъ къ рѣшеніямъ, къ устраненію неопредѣленности и неполноты не имѣется. Въ подтвержденіе своихъ словъ укажу, что въ ломбардскомъ Институтѣ Искусствъ и Наукъ въ Венеціи еще въ началѣ 90-хъ годовъ прошлаго 19-го столѣтія поставили на конкурсъ составленіе, во-первыхъ, доступнаго для учащихся учебника по исторіи математики, и, во-вторыхъ, составленіе историко-математической хрестоматіи, правда, уже не для учениковъ, а для слушателей высшихъ учебныхъ заведеній. Что же получилось? Премія осталась не присужденной, и даже не потому, что на конкурсъ были представлены сочиненія, незаслуживающія преміи, а потому, что этихъ сочиненій совсѣмъ не было представлено“.

„Въ остальныхъ замѣчаніяхъ указывалось постоянно на отсутствіе времени, на невозможность или, по крайней мѣрѣ, на значительныя препятствія къ введенію историческаго элемента въ преподаваніе математики въ среднихъ школахъ. Съ этими замѣчаніями я вполнѣ согласенъ и въ своемъ докладѣ я постоянно имѣлъ въ виду и подчеркивалъ недостатокъ времени, находящагося въ распоряженіи преподавателей математики въ среднихъ школахъ. Въ виду этого я, именно, и указывалъ на невозможность введенія преподаванія историческаго элемента математики въ составъ непосредственно преподаваемыхъ предметовъ. Я указывалъ на необходимость предоставить этотъ вопросъ самодѣятельности учащихся, конечно, подъ контролемъ преподавателя и при его содѣйствіи въ тѣхъ случаяхъ, когда это является особенно нужнымъ. Затѣмъ, я долженъ выразить свое глубокое сочувствіе тѣмъ пріемамъ и средствамъ, которыя сейчасъ были указаны, къ которымъ уже обращались для введенія историческаго элемента въ преподаваніе математики въ среднихъ школахъ, также и всему тому, что я слышалъ о желаніи ввести этотъ элементъ, о разныхъ средствахъ и пріемахъ для осуществленія этого желанія. Все это меня только порадовало, за все это я могу только благодарить, такъ какъ вижу въ этомъ начало осуществленія того, что—могу сказать—всю жизнь меня интересовало“.

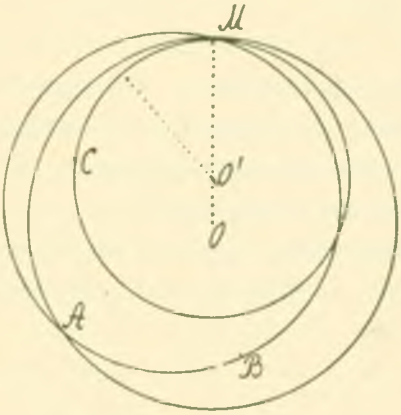
VIII. Неевклидова геометрія въ средней школѣ.

Докладъ П. А. Долгушина (Кіевъ).

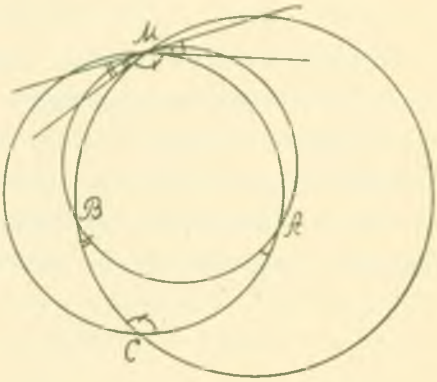
«С. А. Богомоловъ въ своемъ блестящемъ докладѣ 27 дек. 1911 года: «Обоснованіе геометріи въ связи съ постановкой ея преподаванія» предлагаетъ отдѣлить обширный пропедевтическій курсъ геометріи отъ строго—обоснованнаго систематическаго, мечтая увѣнчать послѣдній нѣкоторыми свѣдѣніями о геометріи нашего геніальнаго соотечественника Н. И. Лобачевскаго. Горячо присоединяясь къ основной мысли докладчика о раздѣленіи курса геометріи на пропедевтическій и систематическій, я вмѣстѣ съ тѣмъ утверждаю, что нѣтъ никакой надобности ожидать осуществленія такого раздѣленія для полученія возможности знакомить учащихся высшаго класса средней школы съ начатками Неевкидовой геометріи. Все дѣло въ выборѣ формы изложенія.

Въ 1905 и 1907 г.г. вышла въ свѣтъ въ двухъ громадныхъ томахъ замѣчательная работа В. Ѳ. Кагана «Основанія геометріи». Познакомившись изъ историческаго очерка развитія ученія объ основаніяхъ геометріи (стр. 204—213) съ интерпретаціей Неевклидовой геометріи французскимъ академикомъ Пуанкаре, я попробовалъ изложить эти идеи въ элементарной обработкѣ въ VIII кл. женской и мужской гимназіи. Опытъ оказался удачнымъ, и это дало мнѣ смѣлость выступить передъ Вами со своимъ докладомъ «Нееклидова геометрія въ средней школѣ». Мы съ дѣтства привыкаемъ связывать геометрію Евклида съ прямой и плоскостью. Чтобы показать независимость Евклидовой геометріи, какъ логической системы, отъ тѣхъ геометрическихъ образовъ, къ которымъ мы ее прилагаемъ, воспользуемся (по идеѣ Пуанкаре) связкой окружностей, лежащихъ въ одной плоскости и проходящихъ черезъ одну и ту же точку M (черт. 1), которая, предполагается, недоступна. Такимъ образомъ, каждая окружность связки является линіей разомкнутой (въ точкѣ M). Черезъ данную точку A, очевидно, можно провести безчисленное множество окружностей связки; эти окружности пересѣкаются въ точкѣ A; черезъ двѣ данныя точки A и B проходитъ только одна окружность связки, потому что она вполнѣ опредѣляется точками A, B и M. Видимъ, что окружность связки осуществляетъ всѣ аксіоматическія свойства прямой Евклида. *Параллельными* окружностями связки называются окружности, не имѣющія ни одной общей доступной точки, т. е. касающіяся въ точкѣ M. Черезъ точку C, взятую внѣ окружности AB съ центромъ O, проходитъ только одна окружность связки, параллельная ей, потому что центръ такой окружности O^1 долженъ лежать на прямой MO и на оси симметріи отрѣзка ~~AB~~. Выводы Евклидовой геометріи, основанные на свойствахъ прямыхъ и аксіомѣ параллельныхъ, справедливы и для образовъ, составленныхъ съ помощью окружностей разсматриваемой связки.

CM



Черт. 1

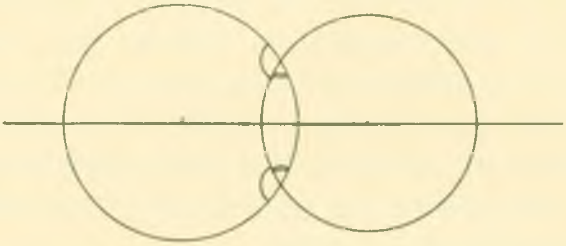


Черт. 2.

Интересно, напр., провѣрить, что сумма внутреннихъ угловъ тр-ка ABC (черт. 2) равняется выпрямленному. Подъ угломъ двухъ пересѣкающихся кривыхъ разумѣется уголъ между касательными, проведенными къ кривымъ изъ точки ихъ пересѣченія.

Углы, образованные двумя пересѣкающимися окружностями при той и другой точкѣ ихъ пересѣченія, равны (черт. 3), такъ какъ фигура симметрична относительно прямой, проходящей черезъ центры окружностей. На черт. 2 углы, равные на основаніи этой теоремы, отмѣчены одинаковыми значками; видимъ, что сумма внутреннихъ угловъ тр-ка, образованнаго тремя пересѣкающимися окружностями связки, равняется суммѣ угловъ, лежащихъ около точки M по одну сторону касательной, т. е. выпрямленному.

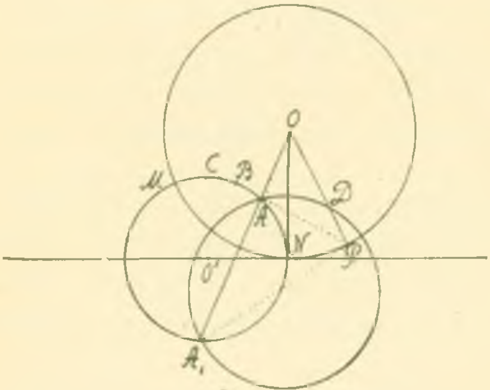
Такое толкованіе геометріи Евклида представляетъ прекрасный переходъ отъ обычной геометріи къ геометріи Неевклидовой.



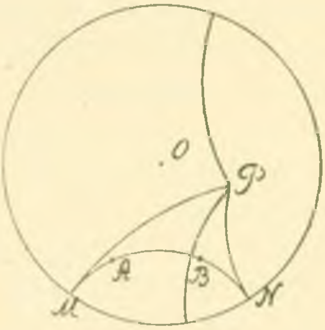
Черт. 3.

Связка окружностей, перпендикулярныхъ къ данной *(основной)* окружности, можетъ дать намъ понятіе о геометріи Лобачевскаго, которая въ своихъ основаніяхъ отличается отъ геометріи Евклида только аксіомой параллельныхъ.

Если окружность O^1 перпендикулярна *(ортогональна)* къ основной окружности O, то (черт. 4) радіусы O^1N и ON,



Черт. 4.



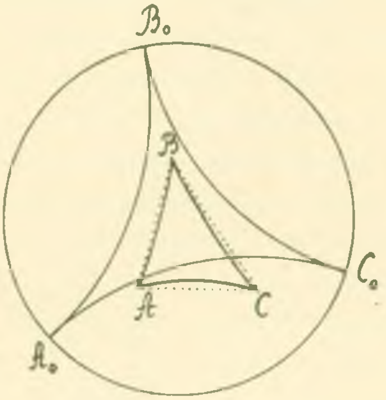
Черт. 5.

проведенные въ точку N пересѣченія окружностей O и O^1, взаимно перпендикулярны, такъ какъ перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ касательнымъ; значитъ, всякая окружность O^1, центръ которой лежитъ на касательной къ окружности O, а радіусъ O^1N пересѣкаетъ послѣднюю подъ прямымъ угломъ.

Если полупрямая, исходящая изъ центра O, пересѣкаетъ ортогональную окружность O^1 въ точкахъ A и A_1, то $OA.OA_1 = ON^2$. Точки A и A_1 называются *взаимными относительно окружности* O. Изъ предыдущаго равенства видно, что точка A вполнѣ опредѣляетъ точку A_1 и наоборотъ. Чтобы построить точку A_1 по данной A, достаточно взять любую точку P на окружности O и въ углѣ POA провести изъ точки P антипараллель для PA, которая и пересѣчетъ полупрямую OA въ искомой точкѣ A_1. Наоборотъ, всякая окружность, проходящая черезъ пару взаимныхъ точекъ, перпендикулярна къ основной. Пусть точки A и A_1 взаимны относительно окружности O, т. е. $OA.OA_1 = OP^2$. Проведя изъ центра O касательную ON къ окружности O^1, найдемъ, что $ON^2 = OA.OA_1 = OP^2$, откуда $ON = OP$, т. е. точка N принадлежитъ окружности O^1 и окружности O, есть точка ихъ пересѣченія, причемъ O^1N и ON взаимно перпендикулярны, значитъ, окружности O^1 и O ортогональны. Если M и N точки пересѣченія окружностей O и O^1, то дуга MAN, заключающаяся внутри окружности O, играетъ роль прямой Лобачевскаго, при чемъ предполагается, что точки основной окружности недоступны. Очевидно, черезъ данную точку A проходитъ безчисленное множество прямыхъ Лобачевскаго, такъ какъ точки A и A_1 не опредѣляютъ окружности; черезъ двѣ данныя точки A и D проходитъ только одна прямая Лобачевскаго, потому что точки A, A_1 и D вполнѣ опредѣляютъ окружность связки.

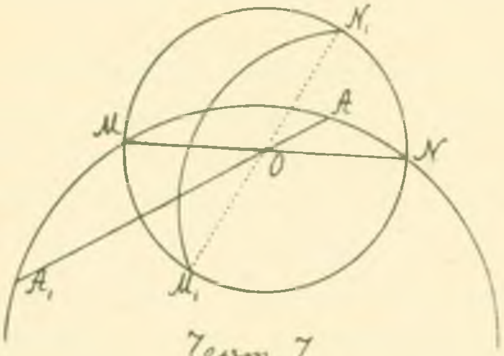
Подъ длиной отрѣзка прямой Лобачевскаго (AB) разумѣютъ $k.\,lg\left(\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}\right)$, гдѣ AM, BM, AN, BN выражаютъ Евклидовскую длину дугъ. Пользуясь этимъ опредѣленіемъ, находимъ для трехъ послѣдовательныхъ точекъ A, B и C прямой Лобачевскаго, что $(AB) + (BC) = k\,.\,lg\left(\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}\right) + k.\,lg\left(\frac{BM}{CM} : \frac{BN}{CN}\right) = k\,.\,lg\left(\frac{AM}{CM} : \frac{AN}{CN}\right) = (AC)$: отрѣзки (AB) и (BC) аддитивны. Если точка B приближается къ M, то отношеніе $\frac{AM}{BM}$ возрастаетъ, а $\frac{AN}{BN}$ убываетъ, (AM) безконечно большой положительный отрѣзокъ; подобнымъ образомъ (AN) отрицательный отрѣзокъ, абсолютная величина котораго безконечно-велика: точки M и N—безконечно-далекія точки.

Возьмемъ P внѣ AB (черт. 5) и проведемъ полупрямыя Лобачевскаго PM и PN. Всякая полупрямая Лобачевскаго, идущая внутри угла MPN пересѣкаетъ MAN, остальныя полупрямыя, проведенныя изъ точки P, не встрѣчаютъ MAN; полупрямыя PM и PN называются *параллельными* прямой MAN (PM—по одному, PN—по другому направленію). Итакъ **черезъ точку внѣ прямой Лобачевскаго можно провести двѣ и только двѣ ей параллельныя полупрямыя.**

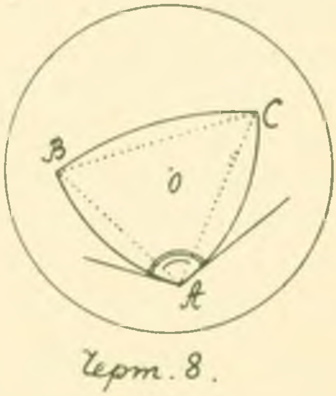


Черт. 6,

Замѣна Евклидовой аксіомы параллельныхъ аксіомой Лобачевскаго влечетъ за собой теорему: сумма внутреннихъ угловъ тр-ка, ограниченнаго отрѣзками прямыхъ Лобачевскаго, меньше выпрямленнаго. На черт. 6 въ тр-кѣ Лобачевскаго ABC каждый уголъ меньше соотвѣтствующаго угла Евклидовскаго тр-ка ABC, и сумма ихъ, оче-



Черт. 7.



Черт. 8.

видно, меньше выпрямленнаго. Тр-къ Лобачевскаго $A_0B_0C_0$ наибольшій изъ всѣхъ возможныхъ, стороны его попарно параллельны, каждый уголъ равенъ нулю.

Связка окружностей, пересѣкающая данную (*основную*) окружность O по діаметру (черт. 7), даетъ намъ толкованіе геометріи Римана (точнѣе—одной изъ двухъ эллиптическихъ геометрій). Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, для точки A есть взаимная A, при чемъ $OA.OA_1 = ON^2$; дуга MAN прямая Римана; аксіоматическія свойства прямой тѣ же, что прямой Лобачевскаго, но **параллельныхъ нѣтъ**, такъ какъ всѣ діаметры основной окружности пересѣкаются въ центрѣ, а потому пересѣкаются и соотвѣтствующія дуги (на черт. 7 дуги MN и M_1N_1). Сумма внутреннихъ угловъ тр-ка, образованнаго Римановскими прямыми, больше выпрямленнаго, что совершенно очевидно изъ черт. 8.

Итакъ, пользуясь идеей Пуанкаре, мы можемъ съ помощью троякаго рода связокъ истолковать параллельно геометрію Евклида (*параболическую*), Лобачевскаго (*гиперболическую*) и Римана (*эллиптическую*). Въ каждой изъ этихъ геометрій устанавливается понятіе о движеніи и о разстояніи между точками.

Благодаря трудамъ Софуса Ли (S. Lee), мы можемъ обратить теорему и сказать: Если геометрическая система въ пространствѣ трехъ измѣреній имѣетъ конечную непрерывную группу движеній, если каждымъ двумъ точкамъ отвѣчаетъ опредѣленное разстояніе, которое не измѣняется при движеніи и обращается въ нуль только для двухъ совпадающихъ точекъ, а другихъ инваріантныхъ соотношеній между точками, не опредѣляемыхъ ихъ разстояніемъ, не существуетъ, то такая геометрическая система приводится либо къ геометріи Евклида, либо къ геометріи Лобачевскаго, либо къ геометріи Римана (см. «Основаніе геометріи» В. Ѳ. Кагана, 1907, стр. 384).

Изъ сопоставленія трехъ геометрій можемъ сдѣлать выводъ: аксіома параллельныхъ Евклида не зависитъ отъ остальныхъ аксіомъ».

IX. Содержаніе курса школьной математики.

Докладъ А. Г. Пичугина (Красноуфимскъ, Пермск. губ.).

«При переходѣ изъ гимназіи въ университетъ чувствуется большая пропасть между школьной и «высшей» математикой. Эта пропасть обусловливается самимъ матеріаломъ того и другого учебнаго заведенія.

Въ среднемъ преподносится ветхій матеріалъ: геометрическій, слегка подновленный, но почти неприкосновенный, созданный за 300 лѣтъ до Р. X. Эвклидомъ и алгебраическій—накопившійся до 1620 года. Весь же богатый матеріалъ, пріобрѣтенный за послѣднія почти 300 лѣтъ, является достояніемъ высшей школы.

Но, кромѣ того, въ средней школѣ разсматриваются мертвыя, отвердѣлыя формы, въ высшей—живыя, измѣнчивыя—въ ихъ ростѣ, измѣненіи.

Вышеуказанное породило убѣжденіе, будто школьная математика—созданная въ древности, болѣе или менѣе отшлифованная въ средніе вѣка, завершенная въ новое время—мертвая наука и, вылившись въ твердую, неизмѣнчивую форму, должна существовать въ такомъ видѣ во вѣки вѣковъ...

Но съ этимъ взглядомъ не соглашается F. Klein. «Математика,—говоритъ онъ,—наука живая, она постепенно принимаетъ въ себя и перерабатываетъ новыя проблемы, отбрасываетъ устарѣлое и такимъ образомъ постоянно совершенствуется (verjungt). И это справедливо теперь только по отношенію къ высшей математикѣ, но тоже должно быть и съ школьной: она должна непрерывно преобразовываться соотвѣтственно медленно измѣняющимся общимъ запросамъ жизни и, конечно, въ предѣлахъ пониманія учащейся молодежи».

Сообразно этому новому взгляду на школьную математику и намѣчается суть реформы въ преподаваніи математики.

Основное понятіе о перемѣнной величинѣ и функціональной зависимости, изложенной въ наглядной формѣ (графически) должно проходить красною нитью черезъ курсъ средней школы.

Можетъ быть кто-нибудь скажетъ: весь смыслъ этой реформы заключается въ томъ, чтобы начала аналитической геометріи, которая у насъ преподается въ VII кл. реальныхъ училищъ, совершенно, такъ сказать, растворить въ остальномъ математическомъ матеріалѣ.—Пожалуй, да! Но еще нужно замѣтить слѣдующее: здѣсь идетъ рѣчь не о той аналитической геометріи, данное уравненіе съ x и y которой разсматривается какъ геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ данному уравненію,—каковой смыслъ и имѣетъ это отвердѣвшее уравненіе; нѣтъ, реформаторы имѣютъ въ виду такую аналитическую геометрію, въ которой господствуетъ вышеуказанный принципъ, въ которой, слѣдовательно, всегда проглядываетъ мысль, что съ измѣненіемъ независимаго перемѣннаго x измѣняется и зависящее отъ него y.

Далѣе, понятіе о функціи должно быть центральнымъ пунктомъ всего преподаванія математики. Но и здѣсь нужно оговориться. Не объ абстрактной идеи о функціональной зависимости здѣсь идетъ рѣчь, не объ обобщающей формулѣ этого понятія,—но только о конкретныхъ функціяхъ, наглядно представленныхъ въ декартовыхъ координатахъ и дающихъ возможность постичь яснѣе сущность указанной зависимости величинъ.

Эту точку зрѣнія не нужно забывать при преподаваніи ариѳметики.

При такомъ освѣщеніи алгебраическій матеріалъ представится въ иномъ видѣ: не только уже алгебраическія преобразованія, но и уравненія, рѣшеніе и изслѣдованіе ихъ (formale Gleichungstheorie) теряютъ главную роль и уступаютъ ее функціи, аналитическая геометрія въ указанномъ смыслѣ вкрапляется, вплетается въ алгебру. «Существенное области математическаго мышленія элементарной математики,—говоритъ F. Klein (1907 г., стр. 103),—заключается не въ формальномъ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій, а въ приближенномъ опредѣленіи корней уравненія графическимъ методомъ».

Неопредѣленныя уравненія и непрерывныя дроби теряютъ то значеніе, которое имъ придавали раньше.

И потому еще въ 1892 году, они, по предложенію G. Holzmüller'а, были изгнаны изъ программъ нѣмецкихъ гимназій и замѣнены ученіемъ о координатахъ и коническихъ сѣченіяхъ. «Такимъ образомъ, какъ говоритъ F. Klein, была сдѣлана попытка нѣсколько подновить традиціонный матеріалъ согласно современнымъ требованіямъ». Кіевскій и Варшавскій планы дѣлаютъ уступку времени: первый исключаетъ непрерывныя дроби, а второй и неопредѣленныя уравненія. Ф. И. Павловъ эти отдѣлы находитъ «весьма цѣнными, ибо въ связи съ прочимъ матеріаломъ значительно повышаютъ математическій уровень развитія учащихся и закругляютъ ихъ знанія». (Р. III. 1909. X).

Противъ такой формальной мотивировки борется A. Höfler въ своей дидактикѣ и указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ на критерій, который опредѣляетъ содержаніе математическаго матеріала средней школы: это—понятіе о функціи. Его (понятіе о функціи) онъ называетъ естественнымъ вѣнцомъ математическаго преподаванія въ средней школѣ. Съ этой точки зрѣнія A. Höfler желаетъ оставить въ программѣ только неопредѣленныя уравненія 1 степени, какъ введеніе въ теорію чиселъ (Gitterpunkten). (Didaktik, стр. 359), а относительно непрерывныхъ дробей восклицаетъ: «Oder wird auch ihnen noch einmal ein Tag der Rückkehr kommen?» Новыя австрійскія программы въ духѣ реформы (1908 г.) уже не содержатъ ни того, ни другого.

F. Klein только условно допускаетъ теорію соединеній и биномъ Ньютона лишь въ программу реальныхъ училищъ: изъ теоріи соединеній только основы, да и то въ связи съ теоріей вѣроятности, а биномъ Ньютона—только въ положительныхъ и цѣлыхъ показателяхъ и то въ приложеніи къ приближенному вычисленію значенія функціи разверткой въ рядъ (графически). Меранская и Кіевская программы не содержатъ ни того, ни другого.

Такимъ образомъ освобождается время въ курсѣ школьной математики для началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія и вообще т. н. высшей математики, въ которой назрѣла потребность въ обыденной жизни съ прогрессомъ техники и въ сосѣднихъ областяхъ науки. Въ ней нуждаются и техники, и естественники, и медики, и юристы (въ статистикѣ: теорія вѣроятностей), и даже филологи-философы, если послѣдніе желаютъ изучать полнѣйшую философію.

Введеніемъ началъ высшей математики мы удовлетворимъ еще одному требованію жизни—уничтожимъ ту пропасть, которая существуетъ между среднимъ и высшимъ учебнымъ заведеніемъ.

Но здѣсь идетъ рѣчь о началахъ высшей математики не въ округленномъ и законченномъ видѣ; эти начала должны слиться съ остальнымъ математическимъ матеріаломъ, должны вытекать изъ него. Тоже самое мы должны сказать и относительно ариѳметики, алгебры, геометріи и тригонометріи: долой китайскую стѣну между отдѣлами математики, между математикой и физикой съ космографіей.

Ариѳметика должна незамѣтно переходить въ алгебру и служить пропедевтикой къ алгебрѣ. Алгебра должна быть поставлена въ болѣе тѣсную связь съ геометріей...

Но здѣсь я забѣжалъ нѣсколько впередъ. Нужно еще установить взаимоотношеніе между ариѳметикой и геометріей, пропедевтикой геометріи. «Этотъ подготовительный курсъ,—говоритъ F. Klein,—теперь пожалуй введенъ во всѣхъ странахъ, даже и тамъ, гдѣ преподаваніе геометріи ведется по устарѣлому Эвклидовскому построенію». Къ сожалѣнію у насъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи нѣтъ пропедевтическаго курса геометріи, который въ Германіи существуетъ уже почти 30 лѣтъ (съ 1882 г.), а геометрію мы изучаемъ почти что по Эвклиду, т. е. дедуктивнымъ методомъ».

«Какъ опытъ показываетъ, я говорю только о Франціи, заявляетъ Э. Борель, «строгое» изложеніе элементовъ дѣйствуетъ запугивающимъ образомъ на учениковъ. Они не понимаютъ, почему доказываются и при томъ тяжеловѣсно такія положенія, которыя для нихъ и безъ того столь очевидны, и видятъ въ доказательствахъ только игру словъ.»—Это я говорю только о Франціи, заявляетъ Э. Борель и этимъ какъ бы хочетъ указать на интернаціональный характеръ этого явленія!

Дедуктивный методъ и недостатокъ развитія пространственнаго представленія у учениковъ являются главными камнями преткновенія въ началѣ изученія математики, а въ частности—геометріи.

«Уже очень часто,—говоритъ A. Höfler, поборникъ реформы—съ 1887 г., раздавалось требованіе преподавать алгебру и геометрію въ низшихъ классахъ «эмпирически», «индуктивно»... И давно уже сознано, что апріорная, чисто дедуктивная математика для дѣтей 10—13 лѣтняго (I, II и III кл.) возраста вообще еще не существуетъ, что только на средней ступени можно и должно понемногу пробуждать потребность въ такомъ изложеніи».

F. Klein также выдвигаетъ «генетическій» методъ преподаванія вмѣсто господствующаго въ теченіи нѣсколькихъ десятилѣтій дедуктивнаго, и кромѣ того требуетъ развитія пространственнаго представленія построеніемъ и черченіемъ, логическій же элементъ не долженъ глохнуть, но пусть постепенно углубляется отъ класса къ классу сообразно развитію учениковъ.

Словомъ: «Zuerst die Anwendung, dann die Regel» (сначала примѣненіе, а затѣмъ уже правило) — общее положеніе A. Höfler'a для всякой школьной науки.

Теперь укажу на тѣ требованія со стороны реформаторовъ, которымъ долженъ удовлетворятъ математическій матеріалъ средней школы. Было время, когда математику изучали только потому, что она обѣщала непосредственную пользу въ практической жизни (17 и 18 вѣкъ). Затѣмъ (19 вѣкъ) математикѣ придавали только развивающее значеніе (формальное развитіе). «Но ни одностороннее формальное образованіе,—говоритъ F. Klein,—ни только утилитарное будетъ руководящимъ принципомъ въ преподаваніи математики, но правильное согласованіе обоихъ—идеалъ, къ которому нужно стремиться... То, что мы теперь преслѣдуемъ, есть, короче говоря, средняя линія тѣхъ двухъ крайностей, проведеніе въ жизнь одной которой-нибудь (изъ нихъ) является въ нашихъ глазахъ не современнымъ. Мы высоко цѣнимъ и признаемъ, продолжаетъ F. Klein, формально-развивающее значеніе математики, но въ тоже время желаемъ такого выбора учебнаго матеріала, изученіе котораго было бы полезнымъ для жизни. При этомъ здѣсь разумѣется польза не въ смыслѣ той пошлой утилитарности, отвергающей всякую мысль, которую нельзя сейчасъ же промѣнять на звонкую монету, но той чистой, которая обѣщаетъ широкіе горизонты всесторонняго образованія».

I. Изъ курса школьной математики исключить все, что, не развиваетъ «функціональнаго мышленія».

А именно: неопредѣл. уравненія, непрерывн. дроби, неравенства, теорію соединеній и биномъ Ньютона, дополнит. статьи изъ ариѳметики въ VIII кл.

II. Въ курсъ школьной математики включить то, что развиваетъ:

1) функціональное мышленіе

и 2) пространственное представленіе, а именно: начальную геометрію, аналитическую геометрію, пропедевтику тригонометріи и стереометріи, дифференцированіе и интегрированіе отдѣльныхъ функцій, а не теорію диф. и инт. исчисленія».

X. Содержаніе курса школьной математики съ точки зрѣнія современныхъ запросовъ жизни и пріемы для посильнаго выполненія школою этихъ требованій.

Докладъ пр.-доц. В. В. Лермантова (Спб.)

«Общее недовольство современнымъ состояніемъ школьнаго обученія какъ заграницею, такъ и у насъ, объясняется тѣмъ, что эволюція жизни вездѣ опередила эволюцію педагогики. Внушая своимъ ученикамъ изъ года въ годъ одни и тѣ же «предметы», педагоги невольно и незамѣтно для себя укрѣпляются въ поклоненіи своимъ «пещернымъ» и «площаднымъ идоламъ» Бэконовскимъ и не хотятъ знать новыхъ требованій жизни. «У насъ всегда такъ поступали» и «вездѣ такъ поступаютъ», постоянно можно слышать отъ заправителей школьнаго дѣла, когда жизнь требуетъ отъ нихъ измѣненій старыхъ порядковъ. А уступая, они невольно такъ ставятъ новое дѣло, что «все остается по старому», поклоненіе старымъ «идоламъ» продолжается въ новой жизни.

Какъ сложились современныя предвзятыя идеи педагогіи.

Эти предвзятыя идеи, столь удачно названныя «идолами» Бэкономъ Веруламскимъ, создались у педагоговъ въ давно-прошедшія времена. Намъ необходимо прослѣдить исторію ихъ образованія, чтобы выяснить современное положеніе дѣла и требованія, предъявляемыя современной школѣ обывателями.

О методахъ обученія и воспитанія юношества въ самыя древнія времена до насъ почти ничего не дошло, кромѣ отрывочныхъ указаній. Нѣсколько больше узнали антропологи въ послѣднее время о постановкѣ этого дѣла у многихъ современныхъ «дикихъ» и «варварскихъ» народовъ и, къ удивленію, оказалось, что это дѣло у нихъ поставлено было значительно цѣлесообразнѣе, чѣмъ у насъ, народовъ «культурныхъ», конечно, не абсолютно, а лишь относительно условій жизни этихъ народовъ.

Науку изучать у нихъ юношамъ не приходилось за полнымъ отсутствіемъ таковыхъ, нужно было лишь приготовляться къ профессіи гражданина своего племени. Необходимыя ремесленныя умѣнья и правила обхожденія съ другими людьми внушались въ семьѣ, главнымъ образомъ примѣромъ старшихъ съ помощью «жезла и палицы» родительской, по рецепту Іисуса, сына Сирахова. Путешественники привезли много странныхъ разсказовъ объ обрядахъ и истязаніяхъ, которымъ подвергаются подростки у многихъ дикихъ народовъ при возведеніи въ санъ взрослыхъ. Но при ближайшемъ изученіи обряды эти оказались высшимъ курсомъ воспитанія. Въ теченіи нѣсколькихъ дней юношамъ сообщались всѣ тайныя знанія ихъ племени и внушались правила поведенія. Въ то же время испытывалась ихъ способность переносить лишенія и страданія. Все это совершалось при таинственной обстановкѣ, способной внушить неприложность сообщенныхъ правилъ и необходимость держать сообщенныя свѣдѣнія въ глубокой тайнѣ; за нарушенія угрожали карою божествъ и въ сей и въ будущей жизни.

Цѣль достигалась хорошо: извѣстно, что многіе изъ этихъ народовъ, напримѣръ, краснокожіе индѣйцы Америки, отличаются большою корректностью въ своихъ взаимныхъ отношеніяхъ, а у многихъ африканскихъ народовъ уваженіе къ своему закону такъ велико, что тюремъ не существуетъ, и виновный добровольно подчиняется рѣшенію суда, напримѣръ, безъ предупрежденія отрабатываетъ заимодавцу неуплаченный долгъ, если судьи приговорятъ къ этому. Цивилизующіе европейцы только разрушили эти своеобразные порядки, не замѣнивъ ихъ лучшими.

Эти воспитательные пріемы, несмотря на свою кажущуюся дикость, были очень цѣлесообразны. Въ обыденныхъ случаяхъ жизненныхъ разсуждать некогда, рѣшеніе нужно немедленное, и человѣкъ не сомнѣвающійся, какъ ему поступить, будетъ обыкновенно имѣть больше шансовъ на успѣхъ, чѣмъ разсуждающій и медлящій. Очевидно также, что эти пріемы консервативны; въ этомъ ихъ сила и слабость, такъ какъ они легко обращаются въ «пережитокъ», неудовлетворяющій болѣе новымъ условіямъ жизни.

Однако эти воспитательныя системы первобытныхъ народовъ остались почти безъ вліянія на современную систему, знакомство съ ними намъ пригодится лишь для лучшей оцѣнки нашихъ пріемовъ, всецѣло основанныхъ на обычаяхъ классической Греціи. Мы и теперь еще слѣдуемъ рецепту обученія «свободнаго юноши греческаго», данному Аристотелемъ: «учи всему, что украшаетъ жизнь, избѣгая всего практическаго, ремесленнаго: это удѣлъ рабовъ и илотовъ». Какъ поясненіе приводится примѣръ: «учить играть на флейтѣ надо, но не слѣдуетъ доводить до виртуозной игры: это тоже удѣлъ рабовъ». Свободный юноша греческій давно прекратилъ свое существованіе, предметы, изученіе которыхъ было призвано украшать его жизнь, многократно замѣнялись другими, а педагоги съ постоянствомъ, достойнымъ лучшей доли, по прежнему старательно избѣгаютъ: «всего практическаго, ремесленнаго» и еще старательнѣе не доучиваютъ до степени «виртуозности», не замѣчая, что теперь учить имъ приходится уже «дѣтей рабовъ и илотовъ», желающихъ увеличить свою работоспособность при посредствѣ школы, очень мало заботясь объ «украшеніи жизни».

Многостолѣтній рецептъ Аристотелевъ соотвѣтствовалъ требованіямъ жизни: искусственному обученію подвергались только юноши изъ достаточныхъ и богатыхъ семействъ, науки еще не давали тогда никакихъ умѣній, примѣнимыхъ къ жизни, даже грамотность не была нужна для всѣхъ, своими знаніями можно было только блеснуть въ разговорѣ и отличаться отъ толпы. Учились по прежнему только для «украшенія жизни», а практическія знанія пріобрѣтались помимо школы «по преемству въ тайнѣ» отъ мастеровъ ихъ учениками. Грамотность, нужная духовенству и судейскимъ, тоже пріобрѣталась въ монастыряхъ и отъ старшихъ дѣятелей той же спеціальности. Только съ половины прошлаго столѣтія прогрессъ наукъ о природѣ сдѣлалъ нужнымъ для всѣхъ обывателей пріобрѣтеніе многихъ умѣній, основанныхъ на изученіи наукъ, которое можетъ дать лишь школа; съ этого времени и началось общее недовольство существующими системами обученія.

Современныя требованія жизни.

Чего же теперь требуетъ обыватель отъ школы? Требованія эти разнообразны, ихъ вообще удачно охарактеризовалъ О. Лоджъ словами: «въ наше время надо обучать тому, что увеличиваетъ работоспособность обучаемыхъ». Но слова эти требуютъ многосторонняго поясненія. Знанія фактовъ науки остаются не примѣнимыми, если изъ нихъ не вытекаютъ соотвѣтственныя умѣнья. Такъ, Лоджъ приводитъ примѣръ, что изученіе ариѳметики начинаетъ приносить пользу лишь съ того момента, когда изучающій получитъ, по крайней мѣрѣ, возможность провѣрить итогъ лавочнаго счета. Нерѣдко преподаваніе ариѳметики ведется такъ, что даже послѣ двухъ—трехъ лѣтъ обученія ученикъ и этого сдѣлать не можетъ, хотя сдаетъ экзамены удовлетворительно: вся его учеба направлена была въ другую сторону и сообщенныя знанія оказались «стерилизованы».

Узнавъ законы многихъ «силъ природы», люди начали примѣнять ихъ, заставляя работать усиленно на свою пользу. Этимъ путемъ въ короткое время преобразовали весь строй жизни, благосостояніе людей возросло, но скоро передовые ученые замѣтили, что такъ дальше идти нельзя: быстро истощатся запасы, накопленные природою въ теченіи многихъ вѣковъ и тысячелѣтій, и людямъ станетъ жить хуже прежняго. Необходимо распространеніе болѣе основательныхъ знаній наукъ о природѣ, чтобы всякій обыватель зналъ мѣру въ эксплуатаціи ея богатствъ, только при этихъ условіяхъ процессъ людского благосостоянія можетъ оказаться устойчивымъ.

Такая степень знанія недоступна всѣмъ: возможно лишь сообщать выводы и заключенія, полученные въ такихъ случаяхъ учеными, и внушать при элементарномъ преподаваніи необходимость слѣдовать этимъ указаніямъ. Для всѣхъ нужно и доступно лишь умѣнье примѣнять законы природы, а средствомъ для его пріобрѣтенія служитъ цѣлесообразное преподаваніе математики въ школахъ.

Умственное развитіе и умѣнье вычитывать свѣдѣнія изъ книгъ.

Дѣло въ томъ, что идеи Аристотеля у современныхъ педагоговъ приняли приблизительно такую форму: «учи основаніямъ всѣхъ наукъ и доводи до умѣнья разсуждать (называемаго «умственнымъ развитіемъ»). Тогда ученикъ будетъ въ состояніи премѣнить свои общія знанія ко всякому частному случаю, который ему встрѣтится въ жизни».

Идеалъ этотъ очень высокій, замѣнить его лучшими мы еще не можемъ, но онъ доступенъ въ полезной степени только немногимъ первостатейнымъ ученымъ, двигающимъ свою науку впередъ. Заурядные люди достигаютъ только такой «степени умственнаго развитія», что могутъ вести умные разговоры въ обществѣ и понимать газетныя статьи. Въ недавнемъ прошломъ другого пути для примѣненія результатовъ науки къ требованіямъ жизни и не существовало, отъ того-то это дѣло и оставалось доступнымъ лишь немногимъ ученымъ. И имъ самимъ нужно было затрачивать много времени и труда для рѣшенія каждаго такого вопроса.

Въ наше время накопилось множество уже рѣшенныхъ вопросовъ такого рода, они давно записаны въ систематическомъ порядкѣ въ разнаго рода справочныхъ книгахъ, и было бы безсмысленно рѣшать ихъ вновь, исключая, конечно, очень простые случаи, которые спеціалистъ рѣшаетъ не думавши, по памяти. Все сводится къ доступному многимъ умѣнью пользоваться главными справочными книгами и вычитывать нужныя свѣдѣнія изъ другихъ книгъ,—болѣе основательныхъ когда это становиться нужнымъ.

Для этой же цѣли и необходимо стало цѣлесообразное изученіе математики въ школахъ. Законы природы выражаютъ зависимость между обстоятельствами явленія; зависимость эту только въ простѣйшихъ случаяхъ можно выразить словами разговорнаго языка; въ болѣе сложныхъ случаяхъ только условный языкъ математики способенъ выразить эту зависимость столь опредѣленно, что становятся возможными численныя предсказанія результатовъ соотвѣтственныхъ явленій. Вся сила науки въ такихъ предсказаніяхъ: въ обыденныхъ случаяхъ люди поступаютъ по рутинѣ и знаютъ, что выйдетъ изъ ихъ начинаній. Въ случаяхъ болѣе сложныхъ и новыхъ, для которыхъ подходящихъ «прецедентовъ» еще не было, остается вопрошать ученыхъ соотвѣтствующей спеціальности, и они могутъ вычислить предсказанія по методамъ своей науки. Въ наше время такія умѣнья для простѣйшихъ, безспорныхъ случаевъ стали необходимы и для заурядныхъ обывателей, не спеціалистовъ. Не сознавая еще вполнѣ ясно свои нужды, они инстинктивно начинаютъ отворачиваться отъ общеобразовательныхъ школъ стараго образца, работающихъ еще въ аристотелевскомъ духѣ, и ищутъ обученія, увеличивающаго ихъ жизненную работоспособность. Слишкомъ ясно обыватели начали чувствовать, что вся учеба общеобразовательныхъ заведеній для нихъ «ни къ чему», такъ какъ она стерилизована недосказываніемъ нужнаго и представляетъ только нѣчто вродѣ истязанія, выдержавшіе которое получаютъ въ награду права для занятія привиллегированнаго положенія въ обществѣ.

Значитъ, въ настоящее время, сверхъ навыка въ скоромъ и правильномъ счетѣ, необходимы каждому математическія знанія, пріучающія къ «функціональному мышленію», какъ выражаются нѣмцы. Надо изучать алгебру не только какъ «общую ариѳметику», а усвоить значеніе уравненія, какъ выраженія зависимости между двумя перемѣнными, графическій методъ и понятіе о производной, какъ о мѣрѣ быстроты прироста зависимой перемѣнной. Другими словами: надо замѣнить ненужныя никому части современнаго курса математики среднихъ училищъ начатками высшей математики, изложенными нѣсколько иначе, чѣмъ ихъ излагаетъ наука академическая.

Три главные разряда учениковъ, по ихъ способностямъ.

Но прежде чѣмъ подробнѣе разобрать этотъ вопросъ необходимо разсмотрѣть другую сторону дѣла: качества матеріала, подвергаемаго обученію въ нашихъ школахъ. Я былъ поставленъ въ особенно благопріятныя условія для такого рода наблюденій и поэтому могъ подмѣтить многое, ускользающее отъ вниманія настоящихъ учителей и профессоровъ; въ теченіи почти 50 лѣтъ я наблюдалъ изъ-за кулисъ за тѣмъ, какъ только что выпущенные со школьной скамьи гимназисты примѣняли въ университетѣ свои математическія познанія къ вычисленію результатовъ собственныхъ физическихъ опытовъ. Такъ какъ я не былъ раздавателемъ благъ земныхъ, то этимъ юношамъ не было надобности стараться меня обмануть, какъ обманываютъ своихъ экзаменаторовъ, и я наблюдалъ ихъ познанія въ натуральномъ видѣ.

Главный выводъ получался тотъ, что величайшая ошибка нашей системы заключается въ стремленіи, научая «всѣхъ всему», довести всѣхъ ихъ до одного уровня познаній по всѣмъ предметамъ обученія. Это стремленіе само по себѣ совершенно логично: если благополучное окончаніе курса даетъ всѣмъ одинаковыя права, то и требованія должны быть для всѣхъ одинаковы. Не принято во вниманіе лишь то обстоятельство, что природныя способности учениковъ очень разнообразны, и что нѣтъ физической возможности довести всѣхъ до одинаково высокаго уровня знаній; стремленіе къ этому приводитъ лишь къ тому, что болѣе способные недоучиваются, а наибольшимъ успѣхомъ въ школѣ пользуются заурядные ученики съ отличной памятью и отсутствіемъ интереса къ какой-либо изъ преподаваемыхъ наукъ. Желая повысить уровень знаній, его понижаютъ, такъ какъ въ силу вещей приходится довольствоваться уровнемъ знаній, доступнымъ большинству.

Около двухъ третей, обучающихся въ университетахъ, принадлежитъ къ этому разряду «заурядныхъ» учениковъ. Многіе изъ нихъ показываютъ большой интересъ къ самому процессу ученія, вѣрнѣе къ добыванію хорошихъ отмѣтокъ и отличій, оставаясь въ то же время вполнѣ «свободными отъ науки». Они справляются о томъ, что обязательно, и никогда не сдѣлаютъ лишней работы для лучшаго усвоенія изучаемаго. Для нихъ важно лишь то, что стоитъ въ запискахъ и программахъ экзаменовъ, хотя бы это была явная опечатка. Такъ мнѣ достовѣрно извѣстно, какъ въ одномъ учебномъ заведеніи цѣлый классъ рапортовалъ профессору на экзаменѣ о «законѣ сивыхъ жилъ», потому что такъ онъ былъ названъ въ литографированныхъ запискахъ писцами по ошибкѣ или въ шутку. Но дѣлать что либо по указанному, это «заурядные» выучиваются хорошо, только думать самостоятельно они никакъ не могутъ.

Изъ этого разряда выходятъ полезные общественные дѣятели, ими держатся установленные порядки во всѣхъ отрасляхъ жизненной дѣятельности, только въ главные распорядители такіе не годятся. Не годятся они и въ учителя юношества, особенно въ высшихъ школахъ: научить умѣнью самостоятельно изслѣдовать истину они не могутъ, потому что это дѣло имъ самимъ недоступно. Они даже не замѣчаютъ разницы между «первыми учениками» училищъ изъ разряда «заурядныхъ» и дѣйствительно талантливыми юношами, способными мыслить самостоятельно. Безсильными они оказываются и во всѣхъ случаяхъ, когда установившіеся пріемы оказываются не примѣнимыми къ новымъ обстоятельствамъ и необходимо принимать новыя мѣры. Зато во время своего ученія они обыкновенно становятся первыми учениками, потому что точно и ровно исполняютъ всѣ требованія своихъ учителей.

Способныхъ къ самостоятельному мышленію, прирожденныхъ изслѣдователей истины нарождается немного, едва ли 1°/o всего числа достигающихъ высшихъ школъ. Изъ этого числа большая часть не одарена значительной работоспособностью, частью по слабому здоровью, частью по нѣкоторой медленности мысли. Многіе изъ нихъ «тиходумы»: заботятся усиленно и продолжительно, они способны одолѣть большія трудности, вполнѣ овладѣть изучаемымъ предметомъ, но работа у нихъ идетъ такъ медленно, что они отстаютъ и не успѣваютъ использовать свои силы, пока не наступила старость. Изъ тысячъ пяти студентовъ, прошедшихъ на моихъ глазахъ чрезъ нашу физическую лабораторію съ 1865 года, я могу насчитать лишь трехъ, показавшихъ безъ сомнѣнія выдающуюся способность самостоятельнаго научнаго мышленія, да десятка два, оказавшихся болѣе или менѣе способными къ этому дѣлу. (Молодыхъ, еще не успѣвшихъ показать свои силы, я въ это число не включаю).

Замѣчательно, что граница между этими перворазрядными и лицами съ заурядными способностями довольно рѣзкая.

На моихъ глазахъ было не мало примѣровъ того, какъ ученики отлично сдававшіе экзамены, несмотря на свое желаніе, ничего не могли сдѣлать, когда принимались за самостоятельную научную работу. У тѣхъ же лицъ дѣло начинало идти снова отлично, когда они попадали на мѣста, гдѣ требовалась лишь добросовѣстная рутинная работа. Экзамены же сдаютъ отлично лишь очень сильные изъ перворазрядныхъ, потому только, что имъ это дается легко. Тѣ же, у которыхъ силъ поменьше, обыкновенно не могутъ принудить себя посвятить достаточно труда и времени на неизлюбленные предметы и отстаютъ отъ наиболѣе прилежныхъ заурядныхъ.

Ближе къ перворазряднымъ «паріи» нашихъ школъ—личности со способностями «ограниченными» одною узкою спеціальностью. По этой спеціальности они часто бываютъ близки къ геніальности, но отказываются понимать и изучать другіе отдѣлы «общихъ знаній». За это наши школы выбрасываютъ ихъ за бортъ въ самомъ началѣ курса, до высшихъ заведеній они рѣдко доходятъ. Но заграницей болѣе половины признанныхъ ученыхъ (конечно не первостепенныхъ), а также выдающихся передовыхъ техниковъ принадлежатъ къ разряду такихъ «ограниченныхъ». Успѣха они добились именно потому только, что сосредоточились каждый въ своей узкой сферѣ дѣятельности. Одинъ изучаетъ только жуковъ, другой только кинетическую теорію газовъ, а иной техникъ только изготовленіе одного продукта, поэтому каждый и можетъ изучить свое дѣло до тонкости и открыть новые факты, служащіе кирпичиками, изъ которыхъ созидается зданіе науки. Наша система требуетъ отъ такихъ непосильной работы, и поэтому общество теряетъ своихъ полезныхъ работниковъ-спеціалистовъ и принуждено выписывать ихъ изъ-заграницы.

Названіе «ограниченные» я заимствовалъ со словъ нашего знаменитаго математика Чебышева. Онъ былъ членомъ Парижской Академіи и часто ѣздилъ туда, чтобы поддерживать знакомства съ академиками. Въ послѣдніе годы своей долгой жизни Чебышевъ занимался исключительно разработкой частныхъ случаевъ найденной имъ общей формулы для выраженія движенія шарнирныхъ механизмовъ и придавалъ такую важность этому предмету, что называлъ «ограниченными» всѣхъ, кто не интересовался этими вопросами. Я не разъ разспрашивалъ его о разныхъ академикахъ и всегда получалъ отвѣтъ: «такой-то? Это ограниченный человѣкъ». Случалось такъ, что эта характеристика всегда оказывалась вѣрна: я потому и разспрашивалъ, что по статьямъ этихъ ученыхъ было ясно: или что они не знали о другихъ работахъ по тому же вопросу или что не хотѣли познакомиться съ другими науками, къ нему касающимися. Однако такое самоограниченіе не помѣшало имъ сдѣлать свой посильный вкладъ въ сокровищницу науки; напротивъ того, этимъ обусловливалась всякая сила.

Особенно цѣнны такіе ограниченно—талантливые люди въ разныхъ отрасляхъ технической дѣятельности. Разностороннія знанія и способности нужны главнымъ руководителямъ дѣла, но они даже мѣщаютъ человѣку сосредоточиться надъ одною узкою спеціальностью. Но такой ограниченно-талантливый нерѣдко такъ хорошо изучилъ свой станокъ, свою печь или машину, что получаетъ необычные результаты, недоступные для другихъ, но обусловливающіе успѣхъ дѣла.

Пользуюсь случаемъ, чтобы напомнить объ одномъ весьма цѣнномъ качествѣ Чебышева какъ учителя, навѣрно ускользнувшемъ отъ его біографовъ. Изъ всѣхъ профессоровъ, у которыхъ я учился въ университетѣ въ 1863—7 годахъ, онъ одинъ былъ истиннымъ учителемъ математики. На первый взглядъ онъ казался даже смѣшонъ: размахивалъ руками, шепелявилъ, прихрамывалъ на одну ногу, а подъ старость поражалъ въ разговорѣ нерѣдко самомнѣніемъ, граничащимъ съ маніей величія, но при всемъ этомъ онъ одинъ не ограничивался сообщеніемъ голыхъ фактовъ математики, а выяснялъ ихъ значеніе. И дѣлалъ это въ такой формѣ, которая не всякому доступна, но сильно поднимала авторитетъ въ глазахъ слушателей. «Когда мы сидѣли съ Гермитомъ за кофе, въ кофейнѣ, въ Парижѣ, я говорю то-то, а онъ на это: то-то, но, мы тутъ же эту формулу и вывели». Изъ того, что они говорили, выяснялось значеніе формулы въ наукѣ.

Въ начальныхъ и среднеучебныхъ заведеніяхъ процентное отношеніе учениковъ этихъ трехъ разрядовъ способностей должно быть нѣсколько иное, многіе перворязрядные не доходятъ до конца ученія, поэтому вначалѣ ихъ должно быть больше, но еще больше ограниченныхъ и даже вовсе не способныхъ къ ученію. Поэтому можно ожидать въ начальныхъ училищахъ уменьшенія процентнаго отношенія заурядныхъ учениковъ къ общему числу учащихся. Отъ этого-то поощренія заурядныхъ у насъ и оказывается недостатокъ въ талантливыхъ общественныхъ дѣятеляхъ.

Примѣнимая математика, съ которой нужно теперь начинать ея преподаваніе.

Если принять за истину такого рода раздѣленіе учащихся по степенямъ ихъ способностей и необходимость научать въ школахъ умѣнью правильно пользоваться знаніемъ законовъ природы, то постановка преподаванія математики, отвѣчающая требованіямъ жизни, опредѣляется сама собою. Мы еще не имѣемъ средствъ опредѣлять степень способности дѣтей по признакамъ, подлежащимъ измѣренію; пока экспериментальная психологія такихъ пріемовъ не выработаетъ, приходится начать учить всѣхъ одинаково и судить по результатамъ. Начало обученія математикѣ поставлено у насъ вообще удовлетворительно: дѣти довольно скоро выучиваются считать и производить четыре ариѳметическія дѣйствія въ умѣ и на письмѣ. Пререканія продолжаются лишь о выборѣ метода, ведущаго быстрѣе къ цѣли, достигаемой и другими употребительными пріемами. Ариѳметику, такимъ образомъ, нужно доводить до изученія дѣйствій надъ употребительными именованными числами, тройного правила и понятія о дробяхъ. Дѣйствія съ десятичными дробями слѣдуетъ вести одновременно съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами, указавъ, что цифра налѣво отъ мѣста единицъ обозначаетъ десятки, а направо десятыя части. При такой постановкѣ трудностей ученія о десятичныхъ дробяхъ не будетъ вовсе. Все остальное изъ ариѳметики слѣдуетъ сначала отбросить какъ ненужный пережитокъ старины и прямо перейти къ алгебрѣ. Начатки алгебры, если ихъ излагать, не мудрствуя лукаво, какъ средство для рѣшенія задачъ, доступнѣе дѣтямъ, чѣмъ сложныя ариѳметическія «правила», превращенія періодическихъ дробей въ обыкновенныя и дѣйствія надъ этими дробями, весьма рѣдко примѣняемыя при нужныхъ для дѣла вычисленіяхъ.

Не надо забывать, что дѣти мыслятъ образно и становятся способными къ отвлеченному мышленію лишь годамъ къ 14, когда ученіе въ начальныхъ школахъ уже кончено. Поэтому о сообщеніи «математическаго развитія» не можетъ быть и рѣчи даже въ городскихъ училищахъ. Цѣлью обученія математикѣ можетъ быть только наученіе умѣнью дѣлать разсчеты, нужные для обыденной жизни. Посильное математическое развитіе до 14-лѣтняго возраста могутъ получить лишь немногіе, особенно одаренные ученики. Ихъ учителя должны стараться отличать и дать имъ указанія и помощь для лучшаго внѣкласснаго изученія этого предмета.

Обывателямъ нужно умѣнье дѣлать слѣдующаго рода разсчеты.

1. Всякому нужно умѣнье подводить итоги высокихъ столбцевъ счетной книги. Какъ не смѣшно такое утвержденіе, но я убѣдился, что наша школа этому искусству не выучиваетъ. Я много лѣтъ состоялъ казначеемъ одного ученаго общества, ежегодно производилась ревизія счетной книги, и въ число ревизоровъ обыкновенно попадали учителя математики; однако и у нихъ итоги столбцевъ немногихъ страницъ рѣдко получались сразу, безъ пререканій.

2. Приходится не рѣдко вычислять проценты по своимъ долговымъ и процентнымъ бумагамъ.

3. Нерѣдко требуется подсчитывать стоимость проѣзда или провоза, на основаніи данныхъ соотвѣтственныхъ таблицъ.

Болѣе хитрыя вычисленія и разсчеты нужны бываютъ лишь профессіоналамъ, а именно:

4. Разные разсчеты коммерческой и банковой ариѳметики. Разсчеты эти большею частью немудрые, но дѣлаются сообразно обычаямъ, остающимся тайною для учениковъ общеобразовательныхъ школъ.

5. Разсчеты стоимости работъ, по даннымъ «урочнаго положенія» и подобныхъ ему справочныхъ книгъ. Въ нихъ дается количество матеріала и рабочихъ дней на единицу работы, напримѣръ на 1 кв. саж. паркетнаго пола. Вычисленія сводятся къ умноженіямъ и сложеніямъ.

6. Наконецъ, разсчеты при составленіи разнаго рода проэктовъ съ помощью справочныхъ книгъ. Въ нихъ даются алгебраическія формулы, въ которыя надо подставлять численныя значенія, сооотвѣтствующія данному случаю. Для пониманія этихъ справочныхъ книгъ необходимы спеціальныя техническія знанія, но пріемы вычисленій очень просты: надо лишь знать обычныя обозначенія алгебры. Нерѣдко формулы этихъ книгъ содержатъ дифференціалы и интегралы, но это лишь для сокращенія рѣчи: подставлять числа приходится всегда въ правую, конечную часть формулы, по правиламъ начальной алгебры, а высшая математика послужила ученымъ для вывода этихъ формулъ, предлагаемыхъ для пользованія уже въ готовомъ видѣ. Въ этихъ-то случаяхъ и нужно бываетъ знакомство съ геометріей, тригонометріей и умѣнье пользоваться таблицами логариѳмовъ и счетною линейкою; не лишнее и знакомство съ высшею математикою. Какъ видно, эти разсчеты, нужные для разныхъ случаевъ жизни, весьма мало похожи на тѣ упражненія и задачи, которыя теперь приходится ученикамъ рѣшать въ классѣ «для учителя математики».

Книги, изложенныя въ новомъ духѣ

Чтобы преподавать по новому, нужны новые учебники. Англичане уже давно начали составлять такіе, по иниціативѣ Пр. I. Perry, который въ 1901 году положилъ основаніе новой такого рода системы преподаванія элементарной математики своею рѣчью на собраніи «Британской Ассоціаціи». Его взгляды и «силлабусъ» курса математики изложены въ «Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики»*), а изложеніе начатковъ Высшей Математики, подъ заглавіемъ: „Вычисленія для Инженеровъ", переведено на русскій языкъ. Эта книга неудобна для русскихъ читателей, потому что порядокъ изложенія приспособленъ для надобностей изучающихъ «Практическую Механику» того же автора и кажется экономическимъ для читателя, незнакомаго съ этой второй книгой, но содержитъ очень много оригинальнаго, очень простое, доступное всякому изложеніе начатковъ анализа безконечно-малыхъ и много удобныхъ пріемовъ вычисленія, пренебрегаемыхъ соста-

---

*) XXVIII семестръ 1902 г. и XXIX, 1903.

вителями «академическихъ» курсовъ. На русскомъ языкѣ, насколько мнѣ извѣстно, только мои: «Примѣнимая алгебра» и «Математика для нематематиковъ», составлены въ такомъ духѣ. Попытки изложенія въ такомъ же духѣ у французовъ и нѣмцевъ пока сводятся къ старому: содержаніе указывается, но методы и направленіе изложенія мало отличаются отъ обычныхъ.

Какъ вести преподаваніе математики, чтобы поднять уровень математическихъ знаній въ школахъ.

Изложенный въ такомъ духѣ курсъ математики будетъ удовлетворять лишь «заурядныхъ» учениковъ. Если имъ однимъ ограничиться, то скоро у насъ «математики переведутся». Чтобы этого не случилось, необходимо радикально измѣнить учебные порядки. Понизивъ, такимъ образомъ, общія требованія до уровня доступнаго почти всѣмъ ученикамъ, надо повысить его для однихъ способныхъ къ математикѣ. Это нельзя сдѣлать, не увеличивъ нѣсколько трудъ учителей, но лишнихъ уроковъ почти не потребуется: учителю придется лишь указывать лучшимъ ученикамъ, желающимъ основательнѣе изучать математику и заслужить «отличіе» при переходѣ изъ класса въ классъ, книги и статьи для внѣкласснаго изученія. При этомъ придется удѣлить нѣсколько часовъ въ годъ на бесѣды съ этими учениками для объясненія ихъ сомнѣній и контроля пріобрѣтенныхъ ими познаній.

Такое изученіе серіознаго предмета по книгѣ будетъ само по себѣ чрезвычайно полезнымъ упражненіемъ для болѣе способныхъ учениковъ. Выше уже было указано, что умѣнье вычитывать изъ книгъ нужныя знанія замѣняетъ въ наше время для обыденныхъ случаевъ «умственное развитіе», котораго однако добивались безуспѣшно учителя въ старину. Въ младшихъ классахъ, гдѣ ученики моложе лѣтъ четырнадцати, конечно, этотъ методъ можно примѣнить лишь очень умѣренно и осторожно, только къ самымъ способнымъ ученикамъ; вполнѣ примѣнимымъ онъ становится лишь въ старшихъ классахъ.

Неумѣнье „вычитывать изъ книгъ нужныя свѣдѣнія“ у насъ поразительное: этому искусству нигдѣ не учатъ. „Паинька-гимназистъ“ прочтетъ всякую книгу отъ начала до конца, «не пай» начнетъ съ конца и прочитаетъ не въ порядкѣ, по случайно выбраннымъ клочкамъ, а просмотрѣть книгу, найти, прочитать и даже изучить лишь то, что стало нужнымъ, никто не умѣетъ. Мало того, не научившись этому искусству въ школахъ, наши специалисты-практики не слѣдятъ за текущей литературой своего предмета по непривычкѣ къ этому и, достигнувъ до степеней высокихъ, оказываются отсталыми, неспособными больше основательно судить о новшествахъ. Поэтому такое дополнительное ученье для однихъ способныхъ къ математикѣ, будетъ имъ чрезвычайно полезно.—Понятно, что такой же прiемъ необходимо примѣнять и къ оказывающимъ способности и желанiе больше учиться по другимъ предметамъ курса.

Такой прiемъ лишь немного принесетъ пользы, если ограничиться имъ однимъ. Необходимо придать школьному ученью возможно большую степень индивидуальности въ противоположность современному стремленiю привести всѣхъ къ одному уровню знанiй, который въ силу вещей можетъ быть лишь довольно низкiй, такъ какъ онъ долженъ быть доступенъ для большинства. Люди родятся весьма съ неровными способностями къ ученiю и къ исполненiю своей житейской работы. Доступнымъ идеаломъ общественнаго образованiя можетъ быть только стремленiе довести всякаго до доступной ему степени обученiя и добровольно выпустить съ честью каждаго для начала своей жизненной дѣятельности, какъ только дальнѣйшее ученiе окажется ему непосильнымъ. При такихъ порядкахъ будетъ меньше считающихъ себя обиженными судьбою: продолженiе ученья дало бы имъ права на лучшее положенiе въ обществѣ, но они сами не пожелали, чувствуя, что это имъ не подъ силу.—Напомню, что такая система практикуется въ Китаѣ со временъ Конфуцiя, ею государство это продержалось тысячу лѣтъ, несмотря даже на то, что предметы обученiя давно стали пережиткомъ старины.

Постановка экзаменовъ. Итакъ, чтобы удовлетворять требованiямъ обывателей, школа должна быть одной, но ученiе должно быть вовсе не одинаково для всѣхъ: для перевода въ слѣдующiй классъ каждый долженъ показать, что прiобрѣлъ минимальное количество умѣнiй, соотвѣтствующихъ пройденному курсу. Но поощрять продолжать ученiе надо лишь тѣхъ, кто показалъ хотя бы по одному предмету знанія большія, выдержалъ испытаніе съ «отличіемъ». Другимъ надо предоставлять возможность оставить ученіе «съ честью» на многихъ ступеняхъ обученія, но не принуждать къ этому, потому что очень многія дѣти развиваются позднѣе большинства; это даже считается признакомъ высшей расы. Такъ въ Америкѣ негритянскіе мальчики опережаютъ бѣлыхъ въ начальныхъ школахъ, но скоро ихъ успѣхи и дальнѣйшее развитіе останавливается, тогда какъ бѣлые идутъ дальше.

При такой системѣ школьное обученіе получитъ характеръ системы созидающей, а не разрушающей строй жизни: поощряться оставлять профессію и высокое общественное положеніе своихъ отцовъ и дѣдовъ будутъ лишь тѣ, которые покажутъ въ школѣ свои выдающіяся способности къ дѣятельности, требующей большого напряженія умственныхъ силъ. Болѣе слабые будутъ раньше приступать къ жизненной дѣятельности, не теряя лишнее время въ школѣ, и будутъ сознавать, что идти дальше и подняться выше имъ не подъ силу.

Современная школа была создана для приготовленія образованныхъ слугъ государства—чиновниковъ, и дѣйствовала цѣлесообразно до пятидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія, когда обнаружилось впервые перепроизводство. Къ этому времени представленіе о неразрывной связи окончанія курса въ какомъ-либо училищѣ съ пріобрѣтеніемъ правъ на болѣе высокое общественное положеніе такъ вкоренилось въ сознаніи обывателей и администраторовъ, что несмотря на всѣ преобразованія, школа оказалась лишь средствомъ «выйти въ люди». Даже кончающіе хорошо деревенскую начальную школу чувствуютъ себя въ деревнѣ не по себѣ и стремятся на болѣе легкіе городскіе хлѣба, вмѣсто того, чтобы стараться своими знаніями улучшать обстановку своей родной деревни. Это стремленіе прошедшихъ современную школу «прекращать собственное существованіе» и стремиться перейти въ болѣе привиллегированное положеніе замѣчается не только у насъ, но и во Франціи и другихъ европейскихъ странахъ. Оно ведетъ къ улучшенію общественнаго строя только въ томъ случаѣ, когда подвигаются впередъ одни сильные, обладающіе работоспособностью соотвѣтствующею новому положенію. Но дальше это осуществляется лишь въ немногихъ случаяхъ, и большинство умножаетъ лишь непроизводительный и несчастный «интеллигентный пролетаріатъ».

Въ этомъ-то отношеніи воспитательныя системы первобытныхъ народовъ и оказываются цѣлесообразнѣе современныхъ.

Пріемы, допускающіе нѣкоторую степень индивидуализаціи обученія въ школѣ.

Недостаточно сказать, что необходимо индивидуализировать школьное преподаваніе, необходимо указать пріемы, позволяющіе этого достигнуть. Вѣдь, общественное обученіе многихъ одновременно этимъ самымъ какъ-бы исключаетъ всякую возможность приспособляться къ особенностямъ каждаго ученика. Это вполнѣ вѣрно, но при всемъ своемъ разнообразіи способности учениковъ позволяютъ раздѣлять ихъ на три главныхъ разряда, а приспособлять обученіе только къ этимъ разрядамъ вполнѣ возможно. Главное средство уже указано выше: цѣлью обученія надо ставить пріобрѣтеніе умѣній, вытекающихъ изъ преподаванія. Надо установить, какія умѣнія составляютъ цѣль ученія въ каждомъ классѣ, и для перевода въ слѣдующій испытывать каждаго въ этомъ направленіи. Такое испытаніе не требуетъ спеціальной подготовки отъ учениковъ и поэтому для нихъ необременительно. Если ученикъ, исполнивъ работу, можетъ дать отчетъ, почему онъ дѣлаетъ такъ, а не иначе, надо считать, что онъ прошелъ «съ отличіемъ». Другіе предметы, какъ исторія и географія, состоятъ больше изъ фактовъ для запоминанія: хорошее запоминаніе этихъ фактовъ тоже надо считать отличіемъ, но второго разряда. Наивысшимъ отличіемъ надо считать занятія по нѣкоторымъ предметамъ сверхъ обязательнаго для всѣхъ уровня и доказательства успѣшности этихъ занятій.

Проведеніе такихъ порядковъ увеличитъ трудъ учителей. Для его облегченія и увеличенія производительности труда учениковъ необходимо привлечь на помощь самыхъ сильныхъ учениковъ, на подобіе семинарскихъ «авдиторовъ» стараго времени и «Ланкастерскихъ школъ взаимнаго обученія», но не впадая въ ошибки этихъ давно брошенныхъ методовъ. Когда ученикъ «отстаетъ», родители берутъ ему репетитора и почти всегда ученикъ «поправляется». Отчего не ввести это въ систему? Учителю нужна лишь небольшая часть времени, чтобы пройти курсъ, большая часть уходитъ на «спрашиваніе» и упражненія, особенно въ младшихъ классахъ. Отчего бы не завести такіе порядки: по утрамъ учитель идетъ впередъ: разсказываетъ новое и бѣглыми разспросами лучшихъ учениковъ удостовѣряется, что они поняли. Послѣ-обѣденные часы посвящаются репетиціямъ: тотъ же учитель спрашиваетъ, не надо ли повторить что-либо изъ послѣдняго урока, задаетъ классныя упражненія и поручаетъ лучшимъ ученикамъ помогать слабѣйшимъ, пока и они не достигнутъ посильнаго знанія. Право помогать такимъ образомъ слабымъ товарищамъ должно считаться за отличіе. Учениковъ, достаточно понимающихъ, но слабыхъ здоровьемъ, можно отпускать на время ненужныхъ имъ репетицій домой или давать имъ заниматься въ это же время въ училищѣ дополнительнымъ изученіемъ излюбленныхъ предметовъ. Въ помощь учителю достаточно будетъ немногихъ лучшихъ учениковъ на каждый репетиціонный урокъ, остальныхъ можно будетъ освобождать поочереди для дополнительныхъ занятій. Точно такъ же можно будетъ вести репетиціи не со всѣми учениками класса заразъ, а повторять ихъ съ немногими, отпуская на это время другихъ. Лишнее время, проведенное въ классѣ, приноситъ только вредъ. Какая польза хорошему ученику сидѣть въ классѣ, пока дурные, отвѣчая урокъ, стараются обмануть учителя? Только лѣнтяи, не занимающіеся дома, при этомъ слушаютъ и кое-что запоминаютъ, не упуская изъ вида подмѣчать любимые учителемъ пріемы отвѣтовъ.

На репетиціяхъ такого рода учитель никакихъ отмѣтокъ не ставитъ, поэтому онъ является не врагомъ, а другомъ учениковъ, помогающимъ ихъ работѣ, а не карающимъ неуспѣхи. Еще лучшія отношенія установятся къ ученикамъ-репетиторамъ, а они сами не только лучше изучатъ предметъ, но пріучатся дѣлать добросовѣстно принятое на себя общественное дѣло. Вѣдь товарищи не спустятъ отлыниванія или только формальнаго исполненія такихъ полезныхъ для нихъ обязанностей. Не только не будетъ вполнѣ неуспѣшныхъ, но выработается методъ воспитанія добросовѣстныхъ исполнителей своихъ гражданскихъ обязанностей.

Не лишнее и завести дежурства по классу для завѣдыванія завтраками въ складчину, продажей пособій и учебниковъ, чтобы съ дѣтства ученики пріучались бережно относиться къ общественнымъ суммамъ. Все это не трудно контролировать и давать распоряжаться лишь ничтожными суммами заразъ, а товарищескій контроль будетъ еще строже и окажетъ важное воспитательное вліяніе.

Не дурно было-бы предоставлять дежурнымъ ученикамъ и убирать самимъ классную комнату послѣ занятій, особенно въ школахъ для достаточныхъ учениковъ, чтобы отучать отъ мысли, что физическая работа унизительная. Но это уже лежитъ за предѣломъ обсужденія нашего Съѣзда.

Резюме доклада и заключеніе.

Итакъ, съ точки зрѣнія запросовъ современной жизни курсъ школьной математики слѣдуетъ начинать съ сообщенія умѣнья дѣлать нужные расчеты при помощи начальныхъ пріемовъ ариѳметики, алгебры, графическаго метода и логариѳмовъ. Для этого, отбросивъ ненужныя, трудныя части ариѳметики, слѣдуетъ сообщать основы алгебры, геометріи и тригонометріи, включая даже начатки анализа безконечно малыхъ, излагая все въ духѣ «функціональнаго мышленія».

Изложеніе математическихъ ученій въ духѣ «академическомъ» слѣдуетъ начинать не ранѣе 14 лѣтняго возраста. такъ какъ раньше большинство учениковъ можетъ лишь запомнить и повторить слова учителя, а къ «математическому развитію» еще неспособно. И въ старшихъ классахъ знаніе ученій математики—академической надо требовать не отъ всѣхъ, а только въ видѣ «отличія», прощая ихъ незнаніе ученикамъ, показывавшимъ отличіе въ другихъ предметахъ.

Для достиженія лучшихъ результатовъ обученія слѣдуетъ требовать отъ всѣхъ только умѣній, для пріобрѣтенія которыхъ предназначено изученіе предметовъ программы каждаго класса, а знанія «академическаго характера» изъ пройденныхъ считать за отличіе.

Въ помощь учителю слѣдуетъ привлекать лучшихъ учениковъ класса въ качествѣ репетиторовъ. Эта мѣра не только можетъ довести до минимума число неуспѣшныхъ, но обѣщаетъ школѣ огромное воспитательное значеніе, не говоря уже о поднятіи уровня знаній самихъ учениковъ-репетиторовъ.

Такая постановка математики въ начальной школѣ покажется преподавателямъ математики какой-то профанаціей науки. А я скажу, что профанируютъ свою науку они, а не проводящіе новую систему. «Насильно милъ не будешь», говоритъ пословица, большинство учениковъ ни мало не жаждетъ проникнуть въ тайны математики, это желаніе—удѣлъ немногихъ, прирожденныхъ математиковъ, способныхъ созерцать красоту «изящныхъ формулъ». Я хорошо помню, какъ смѣшно было намъ въ гимназіи слышать, какъ однажды учитель назвалъ «изящною» выведенную имъ передъ классомъ формулу; только къ концу университетскаго курса мы почувствовали правильность такого эпитета.

А учиться дѣлать разсчеты, которые будутъ нужны въ жизненной практикѣ, всякій не лѣнтяй будетъ охотно. По этому преподавать истины математики—академической, давлеющей сама себѣ, дѣтямъ, моложе лѣтъ четырнадцати, значитъ профанировать науку, «метать бисеръ свой передъ свиньями».

Во время засѣданія была получена изъ Москвы отъ проф. Б. К. Млодзѣевскаго слѣдующая телеграмма:

«Приношу глубокую благодарность за честь, оказанную мнѣ избраніемъ, и за сердечное привѣтствіе и приглашеніе. Крайнѣ жалѣю, что нездоровье не позволяетъ прибыть на Съѣздъ. Горячо желаю, чтобы Съѣздъ былъ началомъ общей дружной работы преподавателей математики на пользу дорогого всѣмъ намъ дѣла обновленія нашей школы». *Б. К. Млодзѣевскій.*

Пренія по докладамъ В. В. Лермантова и А. Г. Пичугина.

Д. М. Левитусъ (Спб.) „Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! Два послѣднихъ доклада о содержаніи курса школьной математики затронули цѣлый рядъ вопросовъ о томъ, какія ея части нужны и какія излишни. Мнѣ кажется, вопросъ о томъ, что нужно выкинуть изъ программы, что вставить въ нее, рѣшить нужно, но не въ сегодняшнемъ многочисленномъ собраніи. Для этого дѣла нужна особая комиссія, которая явилась бы дѣйствительнымъ выразителемъ мнѣній Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики, и отъ Съѣзда будетъ зависѣть, чтобы такая комиссія создалась. Сегодня намъ важно другое! Намъ нужно установить въ общихъ чертахъ, каково должно быть содержаніе школьнаго курса математики. Оставлять все по старому нельзя: жизнь не ждетъ, и плохо придется намъ, если наша школа не удовлетворитъ быстро растущихъ запросовъ жизни. Насъ, учителей математики, не мало, насъ тысячи. Неужели же мы, сознавая свой долгъ передъ нашей совѣстью, не двинемся впередъ, несмотря на холодный вѣтеръ, порывъ котораго становился иногда черезъчуръ рѣзкимъ? Бояться этого вѣтра въ настоящее время не нужно: это не настоящій вѣтеръ, это дыханіе, оздоровляющее культуру, которая должна охватить и нашу школу для того, чтобы мы могли двинуться впередъ и перестроить фактически современный курсъ математики".

Н. А. Извольскій (Москва). „Я буду говорить по основному вопросу, выдвинутому А. Г. Пичугинымъ, по вопросу объ измѣненіи программъ въ нашей школѣ. Является желаніе обновить наши программы такъ, чтобы на первый планъ была выдвинута идея функціональности—прибавить въ программу изученіе функцій и ввести графическій методъ. Я долженъ сказать, что это мнѣніе получило широкое распространеніе, и вотъ какіе доводы за это: во-первыхъ, идея функціи обнимаетъ собою весь курсъ дальнѣйшей математики; во-вторыхъ, таково авторитетное мнѣніе людей науки; въ третьихъ, указываютъ на то, что такъ дѣлается у нашихъ западныхъ сосѣдей. Что касается доводовъ послѣдней категоріи, то съ моей точки зрѣнія они не должны имѣть мѣста; мы не должны слѣпо слѣдовать авторитетамъ, но наоборотъ, должны относиться къ нимъ критически; въ этомъ заключается воспитательная сторона математики".

„Что касается отрицательныхъ сторонъ этого нововведенія, то эти стороны таковы: во-первыхъ, введеніе изслѣдованія функцій $y = ax + b$ и $y = ax^2 + bx + c$ является какъ бы оторваннымъ отъ общаго направленія курса 5-го и 6-го класса, куда хотятъ это ввести, и которое заключается въ томъ, чтобы учащіеся выработали извѣстные навыки. Если бы мы ограничились только изслѣдованіями этихъ двухъ функцій, то можетъ быть и для насъ самихъ было бы это неинтересно. Другое дѣло, если бы этотъ вопросъ расширили и стали бы изучать алгебраическія функціи на задачахъ, рѣшаемыхъ графиками. Можетъ быть, я ошибаюсь, но повидимому, это легко и интересно; такъ напр., у Лезана есть опредѣленнаго рода задачи, которыя рѣшаются графиками. Но правда ли, что онѣ такъ интересны, что графическій способъ удобнѣе къ нимъ примѣнить? Если дадите одинъ видъ задачъ, то онъ несомнѣнно интересенъ и способенъ заинтересовать учениковъ на болѣе длинный или короткій промежутокъ времени, — это задачи объ измѣненіи температуры наружной или комнатной въ зависимости отъ времени года или у больныхъ; но другія задачи, которыя постоянно выдвигаются и находятъ мѣсто въ нашихъ учебникахъ, напр., задачи о желѣзнодорожныхъ графикахъ, по моему, не только учащимся, но и никому не интересны, (напр., на какихъ станціяхъ встрѣчаются всѣ поѣзда, выходящіе изъ Петербурга,съ поѣздами выходящими изъ Москвы?) Я думаю, что эти задачи были бы интересны для желѣзнодорожныхъ дѣятелей. Есть у Лезана видъ головоломныхъ задачъ — о собакахъ, бѣгущихъ навстрѣчу одна другой, о велосипедахъ; на нѣкоторыя изъ нихъ и надо смотрѣть, какъ на задачи головоломныя; онѣ рѣшаются графическимъ методомъ, а нѣкоторыя при помощи простыхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Не скрою, что и я хотѣлъ бы, чтобы аналитическая геометрія, хотя бы въ видѣ графиковъ, была введена въ курсъ среднихъ школъ. Привлекательныя стороны этого нововведенія заключаются въ пользѣ метода координатъ и для самой математики, и для близкихъ ей наукъ—космографіи, геометріи и проч. Повидимому, безъ прибавленія времени нельзя прибавлять къ обычнымъ программамъ требуемыя статьи“.

В. Ѳ. Каганъ (Одесса). „Я хочу сказать о реформѣ курса всякаго, какъ низшаго, такъ и средняго учебнаго заведенія. Можно, конечно, при этомъ столкнуться со словомъ, которое было такъ крылато сказано на этомъ собраніи, которое громко звучитъ уже 10 лѣтъ, это слово «реформа». Представители реформы, сторонники реформаторскаго теченія съ твердо-опредѣленной тенденціей нѣсколько разъ выступали здѣсь передъ нами и выражали желаніе, чтобы мы поддержали то теченіе, которое идетъ главнымъ образомъ изъ Германіи. Организаціонный Комитетъ въ свое время оказалъ мнѣ честь, предложивъ мнѣ составить докладъ о содержаніи курса школьной математики. Я воздержался отъ того, чтобы это сдѣлать, потому что у меня на этотъ счетъ больше сомнѣній, чѣмъ убѣжденій, и въ данный моментъ я хочу воспользоваться тѣми нѣсколькими минутами, которыми я располагаю, для того, чтобы нѣкоторыя изъ этихъ сомнѣній здѣсь вамъ изложить“.

„Я очень тщательно изучилъ вопросъ о реформѣ въ его обширной литературѣ. Какъ я уже сказалъ, этотъ вопросъ имѣетъ за собой десятилѣтнюю исторію. Его литература обширна, но состоитъ главнымъ образомъ изъ журнальныхъ статей, которыя изложены съ различныхъ точекъ зрѣній, такъ какъ всегда въ журнальныхъ статьяхъ разсматривается вопросъ въ общихъ чертахъ и намѣчаются чаянія и вожделѣнія. Если же говорить о реформѣ, то нужно дать общія разъясненія, опредѣленныя указанія, а также и то, что́ нужно включить въ курсъ математики. Поэтому естественно было бы желать, чтобы намъ дали дѣйствительно опредѣленный матеріалъ“.

„Что можетъ служить такимъ опредѣленнымъ матеріаломъ? На мой взглядъ—учебникъ. Попытки создать такой учебникъ, если не прошедшій уже черезъ школу, то, во всякомъ случаѣ, проектъ такого учебника,—дѣлали новые реформисты. Если посмотрите на эти учебники, то увидите, что они очень кратки, удивитесь тому, какъ ихъ мало. Даже Лицманъ въ отчетѣ, опубликованномъ въ международной комиссіи, указываетъ на очень немногіе. Изъ нихъ болѣе серьезные находимъ въ Германской литературѣ, какъ напр., Берендсонъ—Гётингъ. Клейнъ, говоря объ этой книгѣ, съ горечью замѣчаетъ, что главная идея о функціи слабо намѣчена, что этой идеѣ тамъ и сямъ удѣлено лишь немного мѣста. Клейнъ говоритъ, что французы счастливѣе нѣмцевъ, что у нихъ реформа уже проведена и есть учебники, и онъ указываетъ на одно такое руководство, на книгу Бореля. Эту книгу мы издали на русскомъ языкѣ подъ моей редакціей. Книга была, конечно, замѣчена, и мнѣ пришлось выслушать и прочитать не мало отзывовъ и замѣчаній. Позвольте подѣлиться нѣкоторыми замѣчаніями, какъ редактору выпущенной книги. Я былъ бы радъ указать вамъ хвалебные отзывы. Къ сожалѣнію, я долженъ не скрыть отъ васъ, что въ большинствѣ случаевъ я слышалъ упреки. Въ журналѣ Министерства Н. П. появилась рецензія Кояловича, въ которой многое въ этой книгѣ осуждалось. Я былъ бы очень счастливъ, если бы могъ сказать, что эти возраженія несправедливы; но нѣтъ, я долженъ сказать, что Кояловичъ правильно указываетъ: нужно удивляться, что такой математикъ, какъ Борель, написалъ такую слабую статью о логариѳмахъ. Мой добрый другъ С. И. Шохоръ-Троцкій мнѣ писалъ: «Веніаминъ Федоровичъ, книга меня не удовлетворяетъ и очень не удовлетворяетъ». А. А. Марковъ мнѣ писалъ: «Я былъ сторонникъ, если не рѣшительный сторонникъ реформы, то, во всякомъ случаѣ, стоялъ къ ней ближе, чѣмъ теперь, но если будетъ реформа такъ проведена, какъ представляетъ ее книга Бореля, то, извините, я буду противъ реформы“.

„Я нарочно назвалъ нѣсколько лицъ, совершенно различныхъ по своему образу мыслей, по своему положенію, по своимъ отношеніямъ къ математическимъ вопросамъ, чтобы показать вамъ, что здѣсь не пристрастныя мнѣнія, что въ книгѣ есть что-то, что́ не удовлетворяетъ многихъ. Марковъ говоритъ, что въ книгѣ выброшена математика и сохранено только приложеніе. Я не скажу вамъ, что книга дурная: если бы она была плоха, то я не взялся бы ее редактировать; но скажу, что съ этими указаніями необходимо считаться“.

„Итакъ, реформа требуетъ введенія новыхъ идей. Если эти идеи должны свестись къ тому, чтобы сказать ученикамъ, что это функціи, указать графикъ при случаѣ, то о реформѣ не приходится говорить. Каждый изъ насъ въ предѣлахъ дѣйствующихъ программъ свободно можетъ сдѣлать все это, но тогда не было бы никакой реформы. Но рѣчь идетъ о томъ, чтобы попытаться провести эти идеи черезъ весь курсъ, а въ такомъ случаѣ есть два пути: либо увеличить время, либо ввести это взамѣнъ того, что входитъ сейчасъ въ курсъ школьной математики. Но время увеличить и Клейнъ не рѣшается, онъ рѣшительно противъ этого. Значитъ, надо сократить существующій курсъ и сократить основательно. Борель сдѣлалъ такъ: онъ выбросилъ неопредѣленныя уравненія, непрерывныя дроби, теорію соединеній, биномъ Ньютона, большую часть того, что́ относится къ дѣйствіямъ надъ радикалами. Можетъ быть, Марковъ выразился очень сильно, но я не могу сочувствовать тому, чтобы эти капитальныя вещи выбросить изъ обученія. Есть мнѣнія, что можно выбросить изъ нашихъ учебниковъ много хламу, много устарѣлаго; простите, но я не вѣрю этому“.

„Я приведу характерный фактъ: Лермантовъ несомнѣнный сторонникъ того, чтобы выбросить возможно больше; но что же онъ выбросилъ: извлеченіе корней изъ многочленовъ. Ничего существеннаго не было указано: и я почти не знаю этого существеннаго, и никто изъ ораторовъ еще мнѣ этого не сказалъ. Я считаю, что за ничтожнымъ исключеніемъ тотъ матеріалъ, который составляетъ въ настоящее время школьную программу, необходимъ. Ко всему этому присоединяются многія другія обстоятельства. Говоря о томъ, что можно выбросить, нужно имѣть въ виду, что Клейнъ располагалъ болѣе обширной программой, когда говорилъ о сокращеніи программы, а именно: рѣшеніемъ уравненій 3-й и 4-й степени. Онъ выбросилъ это съ легкимъ сердцемъ, но и мы это давно выбросили“.

„Я не могу останавливаться очень долго на томъ, на чемъ хотѣлъ бы остановиться, и прежде всего на болѣе продолжительномъ курсѣ учебнаго года, дающемъ несомнѣнно большую успѣшность, чѣмъ та, которую мы получаемъ. У насъ небольшой учебный годъ, а въ Германіи къ тому же и 9-ти-лѣтній курсъ, вмѣсто 8-ми-лѣтняго. Все это вмѣстѣ взятое ставитъ насъ въ такія условія, что съ легкимъ сердцемъ перенести на нашу почву все то, что предлагаетъ реформа въ Германіи, нельзя“.

„Господа, я ни на минуту не хотѣлъ бы, чтобы меня отнесли къ противникамъ реформы и въ особенности къ противникамъ идеи введенія въ среднюю школу началъ анализа. Я только думаю, что вопросъ въ томъ, какъ это выполнить? Это очень серьезный вопросъ, къ которому, на мой взглядъ, нельзя относиться очень легко“.

„Еще одно: я не знаю хорошихъ учебниковъ, основанныхъ на новыхъ идеяхъ. Я долженъ сказать, что курсъ алгебры на русскомъ языкѣ Лебединцева представляется мнѣ написаннымъ наиболѣе удачно для осуществленія идеи реформы. Клейнъ читалъ лекціи студентамъ, будущимъ учителямъ, съ каѳедры онъ говорилъ имъ о реформѣ то, что проповѣдывалъ въ обществахъ и собраніяхъ педагоговъ. Эти лекціи напечатаны. Первая часть книги выходитъ въ русскомъ переводѣ подъ редакціей вашего покорнаго слуги. Вчера въ одной изъ аудиторій я слышалъ необычайно восторженные отзывы объ этой книгѣ: говорили, что въ ней вы найдете если не все, то почти все то, что должна дать книга, говорящая о новыхъ теченіяхъ. Это указаніе опять неудачно. Я былъ бы очень счастливъ, если бы могъ сказать: „Вотъ книга, пріобрѣтите ее, и въ вашихъ рукахъ будетъ сочиненіе, которое можетъ служить ключемъ для рѣшенія вопроса о реформѣ“. Увы, я этого не могу сказать. Книга въ высшей степени интересна, но врядъ ли для будущихъ учителей, для осуществленія реформы На мой взглядъ, эта книга въ высшей степени интересна для математика и вызываетъ удивленіе въ томъ отношеніи, что показываетъ, какая глубокая пропасть отдѣляетъ общую проповѣдь о реформѣ отъ реальнаго ея осуществленія. Мнѣ не легко объ этомъ говорить, господа, но я считаю себя обязаннымъ сказать это“.

„Я кончаю и хочу повторить, что я далекъ отъ того, чтобы быть противникомъ реформы. Но въ одномъ изъ сочиненій, недавно появившемся на русскомъ языкѣ, сочиненіи, которое я считаю очень цѣннымъ, сказано, что математики уяснили себѣ, наконецъ, всю безсмысленность того, что они дѣлаютъ въ настоящее время. На этой точкѣ зрѣнія я не могу стоять. То, что мы дѣлаемъ, въ настоящее время подлежитъ реформѣ. Я сдѣлалъ нѣкоторыя предложенія въ Организаціонномъ Комитетѣ для осуществленія этой идеи. Я полагаю, что эти соображенія нужно представить Общему Собранію *), но я считаю, что всѣ эти реформы должны быть проведены съ крайней осторожностью, и что легче ихъ широкое значеніе провозглашать, чѣмъ дѣйствительно осуществлять“.

А. Р. Кулишеръ (Спб.). „Я съ большимъ вниманіемъ прослушалъ тѣ соображенія, которыя высказалъ Веніаминъ Ѳедоровичъ;

---

*) См. Резолюціи Съѣзда. *Прим. Ред.*

я ихъ прослушалъ съ особеннымъ вниманіемъ. во-первыхъ, потому, что перу Веніамина Ѳедоровича принадлежатъ два тома интереснѣйшаго сочиненія по вопросамъ геометріи, и, во-вторыхъ, потому, что онъ постоянно слѣдитъ за всѣмъ тѣмъ, что дѣлается въ средней школѣ“.

„Веніаминъ Ѳедоровичъ разсказалъ о томъ, какъ у насъ былъ встрѣченъ курсъ Бореля, и прибавилъ, что онъ совершенно согласенъ съ тѣми возраженіями, какія дѣлаются противъ этого курса. Я присоединяюсь къ этимъ возраженіямъ, причемъ прибавлю, что они должны возникнуть у каждаго ревностнаго поклонника реформы, когда онъ внимательно отнесется къ книгѣ Бореля. Вчера я имѣлъ честь въ одной изъ аудиторій разбирать книги, написанныя по Эвклиду. Я разобралъ 5 или 6 книгъ и въ каждой изъ нихъ я выдѣлилъ части, написанныя замѣчательно и дѣйствительно осуществляющія пожеланіе, которое было такъ прекрасно выражено въ рѣчи Богомолова. Разсматривая большіе тома этихъ учебниковъ: два итальянскихъ—Басани и Веронезе, два французскихъ и нѣмецкій Трейтлейна,—я показалъ, что́ удалось каждому изъ этихъ авторовъ осуществить. Въ учебникѣ Басани обосновано движеніе конкретнаго—реальнаго міра, въ которомъ мы живемъ. Веронезе отмѣтилъ роль движенія въ развитіи геометріи, онъ блестяще справился съ своей задачей. У него можно взять матеріалъ и составить учебникъ. Что касается учебниковъ Бореля и Бурле, то изложеніе у Бореля лучше. Наконецъ, нѣмецкій педагогъ Трейтлейнъ, составившій новѣйшую книгу—начальный и основной курсъ геометріи,—показалъ, какъ педагоги должны писать учебники и ввелъ новыя идеи въ среднюю школу“.

„Мы теперь на перепутьи: есть учебники и руководства, написанные достаточно талантливыми людьми; нѣкоторые курсы написаны спѣшно, безъ достаточнаго вниманія, но все-таки новые курсы есть. Не слѣдуетъ смотрѣть пессимистически на то, что не удается осуществить сразу эту задачу, надо только идти по вѣрному пути и наряду съ новыми пріемами не забывать о богатствѣ, накопленномъ старыми педагогическими пріемами. Если мы не забудемъ, того, что дѣлала старая школа, и внесемъ тѣ начала и самодѣятельности, которыя вліяютъ не только на характеръ учениковъ, но и на интеллектуальную ихъ сторону, то скоро осуществимъ первыя начинанія; основанія для пессимизма нѣтъ никакого“.

М. Г. Ребиндеръ (Юрьевъ). „По поводу доклада А. Г. Пичугина я долженъ сказать, что давно уже являюсь горячимъ сторонникомъ введенія въ среднюю школу понятія о функціи. Но способы введенія подобнаго рода понятій могутъ быть различны. Въ этихъ способахъ я расхожусь съ кіевскими математиками. Кіевскіе математики, какъ извѣстно, для того, чтобы ввести понятіе о функціи, считаютъ умѣстнымъ исключить цѣлый рядъ статей, между прочимъ биномъ Ньютона. По этому поводу я долженъ сказать, что я горячій противникъ исключенія бинома Ньютона, такъ какъ онъ, по моему мнѣнію, существенно важенъ для математическаго образованія учениковъ средней школы".

С. С. Григорьевъ (Спб.). „Я остановлю вниманіе Собранія на томъ же вопросѣ, но съ другой точки зрѣнія. Дѣло въ томъ, что содержаніе курса математики разсматривается прежде всего съ точки зрѣнія чисто научной. Затѣмъ оно разсматривается съ точки зрѣнія учениковъ такъ, какъ мы этихъ учениковъ понимаемъ, или такъ, какъ мы ихъ можемъ понимать по тѣмъ обрывкамъ, какіе намъ даетъ психологія. Я позволю себѣ обратить вниманіе Собранія на совершенно другую точку зрѣнія. Я бы хотѣлъ, чтобы при сужденіяхъ о программахъ преподаванія математики, какъ и всѣхъ другихъ, принималась во вниманіе прежде всего точка зрѣнія самого ученика. Я не берусь толковать его точку зрѣнія, но я позволю себѣ обратить вниманіе Собранія на это положеніе и внести особое реальное предложеніе. Чтобы это сдѣлать, я долженъ хотя бы вкратцѣ затронуть слѣдующій вопросъ: чѣмъ глубже, чѣмъ основательнѣе вы изучаете вашъ предметъ, чѣмъ вы больше имъ интересуетесь, кромѣ того, чѣмъ больше любите вашихъ учениковъ, тѣмъ естественнѣе является стремленіе дать этимъ ученикамъ какъ можно больше и какъ можно глубже ввести ихъ въ нѣдра своей науки. Господа, не забывайте, что на этой же точкѣ зрѣнія стоятъ и ваши товарищи — преподаватели физики, естествознанія и пр. Я не буду говорить о тѣхъ задачахъ, которыя лежатъ также и на нихъ. Вѣдь они должны ознакомить учениковъ съ жизнью природы, они должны дать хоть легкій намекъ на міропониманіе, а для этого нужно коснуться жизни не только земли, но и солнца, какъ источника энергіи, которое даетъ жизнь и правитъ ею на землѣ. Учитель долженъ показать и силу человѣческаго генія, который даетъ возможность заглянуть и въ созданіе міра. Дальше, онъ долженъ ознакомить съ жизнью земли, съ жизнью органической и неорганической природы. Развѣ онъ не долженъ этого сдѣлать?"

„Загляните къ преподавателю исторіи: у него на очереди еще болѣе важные вопросы: вѣдь онъ долженъ, преподавая исторію, ознакомить съ жизнью людей, со всѣми ея формами, съ исторіей этихъ формъ, для того, чтобы человѣкъ, вышедшій изъ школы, зналъ свое мѣсто, зналъ окружающій міръ людей. Возьмите преподавателя литературы: онъ долженъ раскрыть ученику человѣческую душу, чтобы ученикъ могъ познать самого себя. Я не буду уже говорить о другихъ предметахъ преподаванія, достаточно и этого, но вы должны задать себѣ вопросъ: если каждый преподаватель увеличитъ свой предметъ, то что же будетъ съ ученикомъ?“

„Трагизмъ положенія увеличится еще болѣе, если каждый изъ насъ, имѣя совершенно ясное представленіе о зданіи изучаемаго предмета, о всѣхъ частяхъ его, о формахъ дѣйствія, планахъ, гармоніи, захотѣлъ бы все это передать ученикамъ: развѣ это возможно? Нѣтъ, потому что ученикъ не можетъ воспринять всего этого. Учитель изъ этого зданія долженъ вынимать кирпичики и систематически знакомить съ ними учащихся. Смотрите, что́ остается у ученика? У него не красивое зданіе, а повседневная работа, совершенно, можетъ быть, не входящая въ его интересы. Что же изъ этого можетъ выйти? Совсѣмъ не то, чего мы желаемъ: ученики будутъ лишь выучивать преподносимое вами. Но развѣ вы только этого хотите? А чтобы они усвоили все передаваемое нужно стать на другую точку зрѣнія, на точку зрѣнія ихъ самихъ. Какъ же это сдѣлать?“

„Я позволилъ бы себѣ внести предложеніе, имѣя за собой авторитетъ великаго мудреца не только русскаго, но и всемірнаго, Л. Н. Толстого. Онъ говоритъ, что мы должны учиться у нашихъ учениковъ, а какъ же мы можемъ учиться? Надо дать ученику право заявлять о своихъ интересахъ, о своихъ желаніяхъ, о томъ, что́ онъ хочетъ въ данную минуту учить. Этого права у ученика нашей школы и даже Западно-Европейской, за единичными исключеніями, нѣтъ. Поэтому желательно, чтобы каждая школа отводила ежедневно время не только для тѣхъ лабораторныхъ занятій, которыя связаны съ курсомъ, но и для занятій по тѣмъ вопросамъ, которые интересуютъ самого ученика въ данный моментъ, чтобы— одинъ ли ученикъ, много ли учениковъ—имѣли возможность и мѣсто, нашли бы и руководство и орудія для удовлетворенія въ данную минуту ихъ интересовъ. Я боюсь дальше объ этомъ говорить такъ какъ это связано со многимъ другимъ. Не смѣю больше задерживать ваше вниманіе, но мнѣ хотѣлось бы, чтобы эта точка зрѣнія—самихъ учениковъ—принималась во вниманіе въ программѣ и въ постановкѣ школьнаго дѣла и имѣла бы значеніе“.

А. Д. Санько (Курскъ). „Я придаю особенное значеніе Первому Всероссійскому Съѣзду Преподавателей Математики. Въ Западной Европѣ уже приступили къ реформѣ, и во Франціи она даже отчасти уже проведена въ жизнь. И эта реформа будетъ главной задачей, главнымъ вопросомъ нашего Съѣзда. Но тутъ возможно увлеченіе какъ въ одну сторону, такъ и въ другую. Съ одной стороны, желательно провести реформу, съ другой — желательно расширить программу, ввести, напр., понятіе о функціяхъ. Но какъ же ввести, когда времени нѣтъ? Поэтому предлагаютъ сократить нѣкоторые отдѣлы. Но какъ ни стараются, сокращенія выходятъ очень незначительны. Предполагается выбросить извлеченіе корней и неопредѣленныя уравненія изъ курса средней школы. Это уже одна изъ тѣхъ крайностей, на которую стремятся, лишь бы только найти мѣсто для началъ анализа".

„Мнѣ кажется, что книга Бореля имѣетъ большое значеніе. Можетъ быть, изложеніе Бореля не вполнѣ удовлетворительно, но это—первая ласточка, это — первая книга, которая можетъ подходить къ современнымъ требованіямъ курса средней школы. „Книга Бореля есть тотъ минимумъ, который наши ученики могутъ усвоить. Она даетъ понятіе о функціяхъ, графическія изображенія функцій. Если бы у насъ были, какъ во Франціи, классическія и гуманитарныя отдѣленія въ школахъ, то можно было бы ограничиться изученіемъ курса Бореля. Курсъ Бореля не даетъ научнаго изложенія математики, но онъ знакомитъ съ самой математикой и даетъ очень много важныхъ знаній для большинства современныхъ учащихся".

„Главная задача и значеніе средней школы въ томъ, чтобы не только дать понятія, но и познакомить съ методомъ, развить научное мышленіе и не только математическое, но и философское. Нельзя ограничиться изученіемъ производныхъ и простыхъ способовъ дифференцированія и интегрированія, но въ старшихъ классахъ нужно приступить уже къ началамъ анализа; въ немъ сущность философско-математическаго мышленія".

К. Г. Краевскій (Бѣлый, Смол. г.) развиваетъ мысль, что реформа преподаванія математики должна быть проводима въ соотвѣтствіи съ другими предметами обученія, чтобы ученики имѣли достаточно времени для занятій каждымъ предметомъ. Далѣе ораторъ предлагаетъ Съѣзду вынести резолюцію объ уничтоженіи существующаго дѣленія среднихъ учебныхъ заведеній на классическія и реальныя. Такое дѣленіе, по его мнѣнію, умѣстно лишь въ старшихъ классахъ сообразно съ опредѣлившимися индивидуальными особенностями учениковъ и съ ихъ умственными запросами. Ораторъ полагаетъ, что безъ этой общей школьной реформы никакія частныя поправки—введеніе графикъ, введеніе началъ анализа взамѣнъ бинома Ньютона и непрерывныхъ дробей—не достигнутъ цѣли".

А. Г. Пичугинъ (Красноуфимскъ). „Здѣсь такъ много высказалось лицъ по вопросу о реформѣ, что у меня нѣтъ возможности отвѣтить каждому въ деталяхъ, но я хочу все-таки указать на нѣкоторые недочеты и недомолвки, а, можетъ быть, и на непониманіе того, что я предлагаю со своей стороны. Мнѣ кажется что общее впечатлѣніе таково: всѣ соглашаются съ тѣмъ положеніемъ, что реформа необходима въ духѣ, указанномъ Клейномъ и западными учеными, что эта реформа рано или поздно придетъ и къ намъ, какъ пришла во Францію, но что въ данный моментъ у насъ нѣтъ учебниковъ. Но вѣдь это вопросъ времени. Учебникъ Бореля составленъ только для 3, 4 и 5 классовъ, и я обращаю вниманіе Собранія на то обстоятельство, что въ немъ, дѣйствительно, нѣтъ строго-обоснованной теоріи (такъ, напр., тамъ плохо изложены логариѳмы). Но какъ Борель, такъ и Берендсонъ и Гётингъ, о которыхъ сейчасъ говорили, въ своихъ учебникахъ ставили себѣ цѣлью дать ученикамъ элементы анализа въ наиболѣе понятной формѣ. У насъ у русскихъ есть большое стремленіе все строго обосновать; но этотъ позолоченный орѣхъ не по дѣтскимъ зубамъ".

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

30 декабря $10^1/_2$ ч. дня.

Въ предсѣдатели избранъ проф. П. А. Некрасовъ. Въ почетные секретари—І. И. Чистяковъ.

XI. Докладъ пр.-доц. В. Ѳ. Кагана «**О преобразованіяхъ многогранниковъ**», помѣщенъ дальше (см. огл.).

XII. Курсъ теоретической ариѳметики въ старшихъ классахъ средней школы.

Докладъ Б. Б. Піотровскаго (Спб.).

«Въ программахъ послѣдняго класса большинства нашихъ средне-учебныхъ заведеній имѣетъ мѣсто курсъ ариѳметики. Матеріаломъ этого курса является повтореніе всѣхъ отдѣловъ курса ариѳметики младшихъ классовъ съ дополненіемъ теоретическихъ обоснованій нѣкоторыхъ вопросовъ. Этому курсу часто даютъ наименованіе курса «теоретической ариѳметики».

Нерѣдко приходится встрѣчать среди преподавателей математики отрицательное отношеніе къ этому курсу. При этомъ нѣкоторые, совершенно отрицая умѣстность болѣе или менѣе строгаго логическаго обоснованія ариѳметическихъ понятій въ средней школѣ, указываютъ въ то же время на безполезность нынѣ практикуемаго въ старшемъ классѣ курса въ смыслѣ укрѣпленія въ ученикахъ навыковъ въ вычисленіяхъ и сознательнаго къ нимъ отношенія. Другіе же, признавая необходимымъ въ послѣднемъ концентрѣ преподаванія обосновать, обобщить и систематизировать вопросы, относящіеся къ ученію о числѣ, находятъ, что эта цѣль совершенно не достигается нынѣ практикуемымъ курсомъ.

Среди учениковъ этотъ курсъ въ большинствѣ случаевъ не вызываетъ никакого интереса, представляя въ то же время не малыя трудности съ точки зрѣнія экзаменныхъ требованій, согласно которымъ ученики должны изучать формальныя доказательства нѣкоторыхъ теоремъ, очень мало связанныхъ между собой какой-либо общей руководящей идеей и потому усваиваемыхъ лишь внѣшнимъ образомъ, преимущественно памятью, и, кромѣ того, ученики должны «натаскаться» къ экзамену въ рѣшеніи трудныхъ задачъ «чисто-ариѳметическими» пріемами. Подъ «ариѳметическимъ» пріемомъ при этомъ обыкновенно разумѣется пріемъ рѣшенія задачи, воспрещающій употребленіе буквъ для обозначенія неизвѣстныхъ чиселъ и составленія уравненій изъ условій задачи. Помимо того, что такое требованіе налагаетъ на учениковъ непонятное для нихъ ограниченіе пользованія при рѣшеніи задачъ такимъ цѣннымъ усвоеннымъ ими орудіемъ, какъ составленіе уравненій, это требованіе вноситъ еще въ сознаніе учениковъ совершенно превратное понятіе о томъ, что такое алгебра.

Мнѣ кажется, что было бы весьма желательно на настоящемъ Съѣздѣ обсудить вопросъ: должно ли имѣть мѣсто въ послѣднемъ концентрѣ курса математики средней школы обобщеніе вопросовъ, относящихся къ ученію о числѣ, и ихъ болѣе или менѣе строгое логическое обоснованіе.

Въ случаѣ положительнаго рѣшенія этого вопроса придется обсудить: каковы должны быть матеріалъ и характеръ изложенія курса ариѳметики въ послѣднемъ концентрѣ съ тѣмъ, чтобы была, дѣйствительно, достигнута поставленная цѣль.

Въ случаѣ же отрицательнаго рѣшенія этого вопроса, по моему мнѣнію, слѣдуетъ вовсе отказаться отъ какого бы то ни было повторенія ариѳметики въ послѣднемъ классѣ, употребивъ освободившіеся при этомъ часы на что либо болѣе производительное—напр., на упражненія учениковъ въ приближенныхъ вычисленіяхъ съ выясненіемъ тѣхъ положеній, на основаніи которыхъ можетъ быть полученъ результатъ съ данной степенью точности, при этомъ, конечно, извлеченіе квадратнаго корня и употребленіе при вычисленіяхъ логариѳмическихъ таблицъ не должно быть игнорируемо на томъ основаніи, что эти вопросы при настоящемъ построеніи курса попали въ «загородку», именуемую «курсомъ алгебры».

Въ настоящемъ докладѣ я предлагаю рѣшеніе поставленнаго выше вопроса въ утвердительномъ смыслѣ и для обоснованія такого рѣшенія вопроса ставлю слѣдующія положенія: а) математикѣ, какъ наукѣ, присущи абстрактность и строгая дедукція; этими свойствами опредѣляется мѣсто, занимаемое математикой въ ряду другихъ наукъ, и ея значеніе. Въ средней школѣ, конечно, не можетъ быть изучаема «наука» въ строгомъ смыслѣ этого слова; не подлежитъ сомнѣнію, что это недопустимо, какъ съ точки зрѣнія психологическихъ и дидактическихъ требованій, такъ и съ точки зрѣнія требованій практической жизни, но я полагаю, что при преподаваніи того или иного учебнаго предмета совершенно необходимо считаться съ «наукой» и ея современными тенденціями.

Относясь съ полнымъ уваженіемъ къ тому современному теченію, согласно которому психологія возраста учащихся, наглядность обученія, практичность изучаемаго матеріала должны занять подобающее имъ мѣсто въ вопросахъ обученія, я иногда опасаюсь, какъ бы одностороннее увлеченіе не отодвинуло совсѣмъ назадъ тѣ требованія, которыя въ правѣ предъявлять наука къ учебному предмету.

До сихъ поръ математика признавалась почти единственнымъ предметомъ школьнаго курса, болѣе или менѣе строгое изложеніе котораго является возможнымъ въ средней школѣ, и въ этомъ смыслѣ математикѣ придавалось особое среди другихъ предметовъ значеніе въ отношеніи формальнаго развитія учащихся, выработки въ нихъ способности къ строгости и осторожности въ сужденіяхъ; логическому элементу въ курсѣ математики отводилось видное мѣсто. Я вполнѣ согласенъ съ тѣмъ, что въ этомъ отношеніи курсъ математики грѣшилъ односторонностью, вредившей, какъ разностороннему развитію учащихся, такъ и успѣху преподаванія математики, но я полагаю, что намѣчаемая реформа въ преподаваніи математики дастъ возможность отвести подобающее мѣсто въ послѣднемъ концентрѣ курса и такимъ вопросамъ, какъ, напримѣръ, расширеніе понятія о числѣ, значеніе аксіомъ въ построеніи геометрической системы и т. п. При этомъ логическій элементъ будетъ представленъ по существу, ученики будутъ введены въ кругъ нѣкоторыхъ обобщающихъ идей, необходимыхъ для болѣе глубокаго усвоенія математическихъ понятій и имѣющихъ широкое общеобразовательное значеніе.

b) Понятія о натуральномъ числѣ и основныхъ операціяхъ надъ натуральными числами вмѣстѣ съ идеей расширенія понятія о числѣ являются основными понятіями, безъ которыхъ невозможно дальнѣйшее обоснованіе методовъ математическаго анализа.

Въ курсѣ средней школы необходимо обратить вниманіе на «ариѳметизацію» основныхъ символовъ и понятій—въ этомъ отношеніи въ настоящее время царитъ полный безпорядокъ. Между тѣми символами и понятіями, съ которыми оперируютъ ученики въ курсѣ алгебры и нѣкоторыхъ другихъ отдѣлахъ, и идеей о числѣ не устанавливливается почти никакой связи. Въ реформированномъ курсѣ математики предполагается ввести въ средней школѣ преподаваніе началъ анализа безконечно-малыхъ, при этомъ понятія о предѣлѣ, непрерывности потребуютъ, мнѣ кажется, прочнаго ариѳметическаго фундамента, безъ котораго эти понятія могутъ быть истолкованы учениками въ совершенно нежелательномъ смыслѣ.

Обращу еще ваше вниманіе на слѣдующее: въ то время, когда установленіе основныхъ геометрическихъ понятій признается необходимымъ провести на извѣстной ступени обученія болѣе или менѣе строго, на установленіе основныхъ ариѳметическихъ понятій въ средней школѣ почти не обращается никакого вниманія.

Я не имѣю въ виду разсмотрѣніе вопроса, какимъ образомъ расширеніе понятія о числѣ должно быть методически проведено черезъ весь курсъ средней школы, я хочу лишь обратиться къ послѣднему концентру этого курса и, исходя изъ изложенныхъ выше соображеній, намѣтить курсъ ариѳметики послѣдняго класса такъ, чтобы въ этомъ курсѣ былъ систематизированъ, обобщенъ и изложенъ съ доступной для учениковъ этого класса строгостью весь ариѳметическій матеріалъ, съ которымъ они уже фактически были ознакомлены въ различныхъ отдѣлахъ курса математики.

На ряду съ ученіемъ о числѣ натуральномъ и дробномъ я предполагаю включить также въ этотъ курсъ и ученіе о числѣ отрицательномъ и ирраціональномъ.

Конечно было бы желательно провести въ этомъ курсѣ и дальнѣйшее расширеніе понятія о числѣ, изложивъ статью о комплексномъ числѣ вида $a+bi$, но я боюсь, что это слишкомъ увеличитъ объемъ курса, хотя я долженъ признать, что совершенно обойти вопросъ о комплексномъ числѣ въ курсѣ средней школы—врядъ ли возможно.

Предлагаемый мною курсъ и долженъ замѣнить собою повторительный курсъ ариѳметики, практикуемый нынѣ въ старшихъ классахъ средне-учебныхъ заведеній.

Что касается до статей о дѣлимости чиселъ, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ, то не отрицая ихъ цѣнности въ курсѣ средней школы, я полагаю, что эти статьи могутъ быть достаточно развиты въ среднихъ классахъ; курсъ же ариѳметики послѣдняго класса долженъ быть отъ нихъ освобожденъ съ тѣмъ, чтобы дать возможность учителю сосредоточить вниманіе учащихся на отчетливомъ проведеніи идеи расширенія понятія о числѣ.

Если и повторительный курсъ геометріи послѣдняго класса будетъ посвященъ не сплошному повторенію матеріала, а его систематизированію и обобщенію, съ должнымъ подчеркиваніемъ значенія аксіомъ, методовъ доказательствъ, возможности построенія различныхъ геометрическихъ системъ, то эти два курса, ариѳметики и геометріи, будутъ помогать другъ другу и вводить учащихся въ кругъ широко обобщающихъ идей.

Долженъ еще обратить ваше вниманіе на то, что повторительный курсъ алгебры въ послѣднемъ классѣ будетъ весьма значительно разгруженъ—весь числовой матеріалъ отойдетъ къ предлагаемому мною курсу ариѳметики, а въ курсѣ алгебры должны быть оставлены лишь тѣ немногія и коротенькія статьи, въ которыхъ излагаются нѣкоторыя свойства цѣлой алгебраической функціи и которыя, дѣйствительно, должны быть отнесены къ курсу алгебры.

Исходя изъ изложенныхъ мною выше соображеній, я намѣчаю ниже программу курса ариѳметики старшаго класса, которую я, благодаря особенно благопріятно сложившимся для меня обстоятельствамъ, имѣлъ возможность провести въ одномъ изъ учебныхъ заведеній.

1) *Понятіе о рядѣ натуральныхъ чиселъ* устанавливается, исходя изъ понятія о рядѣ символовъ, слѣдующихъ другъ за другомъ въ опредѣленномъ, разъ навсегда установленномъ порядкѣ. Основныя свойства этого ряда символовъ.

Установленіе понятій: равенства и неравенства (аксіомы равенства и аксіомы порядка). Однозначное соотвѣтствіе между элементами нѣкоторой совокупности и символами ряда натуральныхъ чиселъ—численность совокупности предметовъ.

2) *Операція сложенія натуральныхъ чиселъ.* Операція эта опредѣляется слѣдующими условіемъ и аксіомой:

1) $a+1$ — есть число непосредственно слѣдующее за числомъ a въ ряду натуральныхъ чиселъ.

2) $a+(b+1)=(a+b)+1$ — аксіома Грассмана.

Я сознаю, что такой аксіоматическій способъ опредѣленія сложенія своей абстрактностью можетъ сначала оказаться очень трудно усваиваемымъ учениками, привыкшими со словомъ «сложеніе» соединять не понятіе о нѣкоторой формальной операціи надъ символами, а представленіе о соединеніи элементовъ нѣсколькихъ совокупностей въ одну совокупность. Придется не мало поработать учителю надъ тѣмъ, чтобы ученики усвоили совершенно новую для нихъ и весьма отвлеченную точку зрѣнія, но мнѣ кажется, что безъ этого врядъ ли удастся провести идею расширенія понятія о числѣ: вѣдь три плюсъ пять, если держаться конкретной точки зрѣнія на сложеніе, не имѣетъ ничего общаго съ операціей сложенія чиселъ: «2» и «—7», «$\sqrt{2}$» и «$\sqrt{5}$»—общность этихъ операцій заключается лишь въ постоянствѣ формальныхъ законовъ этихъ операцій, поэтому, если мы хотимъ эту общность установить, то отъ формальной точки зрѣнія на операціи намъ не уйти.

Я позволю себѣ обратить вниманіе собранія на тѣ моменты работы учителя въ классѣ, которые мнѣ представляются особенно важными при формальномъ опредѣленіи операціи сложенія:

1) Надо выяснить ученикамъ, что понятія—сумма чиселъ и сложеніе чиселъ—до сихъ поръ ими не опредѣлялись, между тѣмъ надо же какъ-нибудь логически установить эти основныя понятія, которыми они пользуются на каждомъ шагу.

Можетъ быть умѣстно будетъ провести параллель между этими понятіями и геометрическимъ понятіемъ о прямой—ученики сами при этомъ укажутъ, что понятіе о прямой устанавливается посредствомъ нѣкоторыхъ аксіомъ и послѣ этого будетъ умѣстно предложить ихъ вниманію и аксіоматическій способъ опредѣленія операціи сложенія.

2) Надо тщательно озаботиться о томъ, чтобы подъ символомъ $a+1$ ученики не разумѣли бы ничего другого, кромѣ числа, непосредственно слѣдующаго въ ряду натуральныхъ чиселъ за даннымъ числомъ a; при этомъ надо подчеркнуть слѣдующее: символъ a данъ, подъ $a+1$, по условію, разумѣется символъ непосредственно слѣдующій за символомъ a; такъ какъ за каждымъ членомъ ряда натуральныхъ чиселъ слѣдуетъ одно и только одно число, то симвомъ $a+1$ является вполнѣ опредѣленнымъ.

3) Для выясненія значенія аксіомы сложенія я предложилъ бы поступить слѣдующимъ образомъ: надо подробно разсмотрѣть элементы каждой изъ частей тожества: $a+(b+1)=$ $=(a+b)+1$ и при этомъ подчеркнуть слѣдующее:

a—заданный символъ въ ряду натуральныхъ чиселъ;

b—тоже;

$b+1$—число, непосредственно слѣдующее за числомъ b.

Который изъ символовъ ряда натуральныхъ чиселъ разумѣть подъ $a+(b+1)$—не знаю, но написанное тожество говоритъ мнѣ, что я зналъ бы его, если бы зналъ тотъ символъ, который слѣдуетъ разумѣть подъ $a+b$, такъ какъ $(a+b)+1$, по условію, есть число, непосредственно слѣдующее за числомъ $a+b$.

Послѣ этого надо предложить ученикамъ цѣлый рядъ упражненій, съ повтореніемъ при этомъ предыдущихъ разсужденій.

Напримѣръ: какое число слѣдуетъ разумѣть подъ символомъ $4+3$—не знаю. Число 3 въ ряду натуральныхъ чиселъ непосредственно слѣдуетъ за числомъ 2, а потому, согласно условію, $3=2+1$; $4+3=4+(2+1)$; на основаніи же аксіомы сложенія: $4+3=4+(2+1)=(4+2)+1$; далѣе, по условію $2=1+1$ и слѣдовательно: $4+3=4+(2+1)==(4+2)+1=[4+(1+1)]+1$; примѣняя опять аксіому сложенія, имѣю: $4+3=4+(2+1)=(4+2)+1=[(4+1)+1]+1$; по условію $4+1=5$ и слѣдов.: $4+3=4+(2+1)=(4+2)+1=+[4+(1+1)]+1=[(4+1)+1]+1=(5+1)+1=6+1=7$.

Обращаю вниманіе на то, что проведенный при выясненіи значенія аксіомы сложенія способъ разсужденія уже подготовляетъ учениковъ къ усвоенію метода математической индукціи, которымъ я предполагаю въ дальнѣйшемъ пользоваться.

Законы операціи сложенія:

соединительный: $a+(b+c)=(a+b)+c;$ (1)

перемѣстительный: $a+b=b+a.$ (2)

Обративъ вниманіе учениковъ, что тожество, выражающее аксіому сложенія есть частный случай тожества (1) для $c=1$, надлежитъ обстоятельно выяснить ученикамъ сущность метода математической индукціи и затѣмъ доказать этимъ методомъ справедливость тожествъ (1) и (2).

На рядѣ частныхъ примѣровъ надо показать ученикамъ, что на основаніи законовъ соединительнаго и перемѣстительнаго можетъ быть выполнено всякое преобразованіе одного выраженія, въ которомъ натуральныя числа соединены знакомъ плюсъ, въ другое ему тожественное.

Напримѣръ: доказать справедливость тожества: $[a+(b++c)]+d=(a+c)+(b+d)$.

$$[a+(b+c)]+d=[(a+(c+b)]+d\ldots$$

на основаніи закона перемѣстительнаго;

$$[a+(c+b)]+d=[(a+c)+b]+d\ldots$$

на основаніи закона соединительнаго;

$$[(a+c)+b]+d=(a+c)+(b+d)\ldots$$

на основаніи закона соединительнаго.

Учитель уже тутъ долженъ имѣть въ виду, что, установивъ законы основныхъ операцій надъ натуральными числами и создавъ далѣе новые числовые символы, при условіи соблюденія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій, онъ даетъ обоснованіе всей алгебрѣ преобразованій.

3) *Операція умноженія натуральныхъ чиселъ.*

Операція умноженія опредѣляется слѣдующими аксіомами:

1) $a.\ 1=a$

2) $a.\ (b+1)=ab+a$

Всѣ методическія указанія, сдѣланныя мною при разсмотрѣніи вопроса о сложеніи натуральныхъ чиселъ, относятся въ полной мѣрѣ и къ вопросу объ умноженіи. Въ виду полной аналогичности постановки этого вопроса по существу съ постановкой вопроса о сложеніи, при изложеніи его могутъ быть въ значительной степени использованы самодѣятельность и активное участіе учениковъ.

Законы операціи умноженія:

распредѣлительные: $a.(b+c)=a.b+a.c$;

$(a+b).c=a.c+b.c$;

соединительный: $a.(b.c)=(a.b).c$;

перемѣстительный: $a.b=b.a$.

Эти законы доказываются методомъ математической индукціи. Въ интересахъ экономіи времени «передѣлку» этихъ доказательствъ можно опустить, напомнивъ лишь ученикамъ сущность метода математической индукціи и предоставивъ желающимъ и болѣе сильнымъ провести доказательство вполнѣ самостоятельно въ видѣ упражненій. Вообще я долженъ обратить ваше вниманіе на то, что предлагаемый мною курсъ только тогда будетъ имѣть цѣнность, если при изученіи его учениками главное вниманіе будетъ обращено на идейную его сторону, а не на передѣлку доказательствъ, довольно однообразную, но подчасъ утомительную—въ особенности это слѣдуетъ имѣть въ виду по отношенію къ экзаменнымъ требованіямъ, гдѣ всѣ второстепенные вопросы, требующіе значительной работы памяти, должны быть рѣшительно выпущены.

Здѣсь также необходимо указать на рядѣ частныхъ примѣровъ, разрѣшенныхъ учениками самостоятельно, что всякое выраженіе, въ которомъ натуральныя числа соединены знаками сложенія и умноженія, можетъ быть преобразовано въ другое ему тожественное, исходя только изъ законовъ операцій сложенія и умноженія.

Напримѣръ: 1) $[(a.b).c].d = [(c.d).b]a$—перестановка множителей въ произведеніи любого числа множителей.

2) $(a+b).(c+d)=ac+ad+bc+bd.$

4) *Операція возведенія въ степень.*

Аксіомы, опредѣляющія эту операцію: $a^1 = a;\ a^{m+1}=a^m a.$
$5^3 = 5^{2+1} = 5^2.5 = 5^{1+1}.5 = (5.5).5 = 5.5.5.$

Основныя тожества:

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$
$$a^m.b^m = (ab)^m$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

доказательства этихъ тожествъ методомъ математической индукціи, при этомъ остается въ силѣ то замѣчаніе, которое было сдѣлано выше по поводу доказательства законовъ операціи умноженія.

5) Послѣ этого необходимо при активномъ участіи учениковъ сдѣлать общій обзоръ трехъ основныхъ операцій съ точки зрѣнія тѣхъ законовъ, которымъ онѣ подчиняются.

Для этого полезно ввести нѣкоторыя общія обозначенія вродѣ слѣдующихъ:

(1) $a \uparrow b = b \uparrow a$—запись закона перемѣстительнаго для нѣкоторой операціи, обозначенной знакомъ «$\uparrow$»;

(2) $a \uparrow (b \uparrow c) = (a \uparrow b) \uparrow c$—запись закона соединительнаго;

(3) $a \uparrow (b \underset{\curlywedge}{\uparrow} c) = (a \uparrow b) \underset{\curlywedge}{\uparrow} (a \uparrow c)$ — тожество, устанавливающее, что операція, обозначенная знакомъ «$\uparrow$», подчиняется одному изъ распредѣлительныхъ законовъ по отношенію къ операціи, обозначенной знакомъ «$\underset{\curlywedge}{\uparrow}$»;

(4) $(a \underset{\curlywedge}{\uparrow} b) \uparrow c = (a \uparrow c) \underset{\curlywedge}{\uparrow} (b \uparrow c)$ — тожество, устанавливающее, что операція, обозначенная знакомъ «$\uparrow$» по отношенію къ операціи, обозначенной знакомъ «$\underset{\curlywedge}{\uparrow}$», подчиняется и второму распредѣлительному закону.

Принявъ эти обозначенія можно предложить ученикамъ рѣшить вопросы въ родѣ слѣдующихъ: 1) подчиняется ли операція возведенія въ степень закону соединительному? 2) имѣютъ ли мѣсто законы распредѣлительные для операціи возведенія въ степень по отношенію къ суммѣ? 3) имѣютъ ли мѣсто законы распредѣлительные для операціи возведенія въ степень по отношенію къ произведенію?

Подобные вопросы необходимо возбуждать и въ дальнѣйшемъ при изученіи обратныхъ операцій.

Опытъ мнѣ показалъ, что такой общій обзоръ операцій интересуетъ учениковъ и способствуетъ выработкѣ въ нихъ сознательнаго отношенія къ преобразованіямъ выраженій.

6) Операція, обратная операціи сложенія—вычитаніе.

Обращается вниманіе учениковъ, что вслѣдствіе коммутативности (перемѣстительный законъ) операціи сложенія возникаетъ лишь одна операція, обратная операціи сложенія.

Невозможность операціи вычитанія $a - b$, въ случаѣ $a < b$, оставаясь въ области натуральныхъ чиселъ.

Изъ опредѣленія вычитанія, какъ операціи обратной сложенію, и изъ законовъ операціи сложенія, выводится справедливость слѣдующихъ основныхъ тожествъ:

1) $a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b;$
2) $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b;$
3) $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b;$
4) $a - b = (a + n) - (b + n);$
5) $a - b = (a - n) - (b - n).$

достаточно показать сущность доказательства на примѣрѣ одного или двухъ тожествъ, не требуя «передѣлки» доказательствъ всѣхъ этихъ тожествъ.

Комбинируя примѣненіе законовъ сложенія, вычитанія и умноженія, ученики, въ видѣ упражненій, могутъ доказать справедливость, напримѣръ, слѣдующихъ тожествъ:

1) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$—убѣжденіе въ доказуемости этого тожества на случай $a > b$ и $c > d$, будетъ цѣнно при опредѣленіи сложенія относительныхъ чиселъ.

2) $a(b - c) = ab - ac;$

3) $(a - b) . c = ac - bc;$

4) $a - b + c - d + f = (a + c + f) - (b + d);$

5) $(a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$ — это тожество будетъ имѣть значеніе при опредѣленіи умноженія относительныхъ чиселъ.

7) *Дѣленіе*, какъ операція обратная умноженію.

Вопросъ о дѣленіи натуральныхъ чиселъ проводится вполнѣ аналогично вопросу о вычитаніи.

Изъ опредѣленія дѣленія и изъ законовъ операціи умноженія выводятся слѣдующія тожества:

1) $a.(b:c)=(a.b):c;$
2) $a:(b.c)=(a:b):c;$
3) $a:(b.c)=(a:b).c;$
4) $a:b=(a.n):(b.n);$
5) $a:b=(a:n):(b:n).$

Надлежитъ обратить вниманіе учениковъ на аналогію этихъ тожествъ и тожествъ, вытекающихъ изъ опредѣленія вычитанія и законовъ сложенія.

Комбинируя примѣненіе законовъ сложенія, умноженія, вычитанія и дѣленія, ученики могутъ самостоятельно доказать справедливость слѣдующихъ тожествъ:

1) $(a:m)+(b:m)=(a+b):m$ —это тожество будетъ имѣть значеніе при опредѣленіи сложенія дробныхъ чиселъ.
2) $(a:m)-(b:m)=(a-b):m;$
3) $(a.b.c.k.l):m=a.b.(c:m)...k.l;$
4) $(a.b).(c:d)=(ac):(bd)$—это тожество имѣетъ значеніе при опредѣленіи умноженія дробныхъ чиселъ.
5) $(a:b):(c:d)=(ad):(bc).$

8) Дѣйствія, обратныя возведенію въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе.

Обращается вниманіе на то, что, вслѣдствіе отсутствія закона перемѣстительнаго для операціи возведенія въ степень, возникаютъ двѣ обратныя операціи.

Невозможность выполненія этихъ операцій въ нѣкоторыхъ случаяхъ, оставаясь въ области натуральныхъ чиселъ.

Изъ опредѣленія операцій извлеченія корня и логариѳмированія и изъ законовъ операціи возведенія въ степень выводятся слѣдующія тожества:

1) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$
2) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$
3) $(\sqrt[p]{a})^q=\sqrt[p]{a.q}$
4) $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[pq]{a}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$

1) $log_a (pq)=log_a p+log_a q$
2) $log_a (p:q)=log_a p-log_a q$
3) $log_a p^m=m\, log_a p$
4) $log_b a=\frac{log_c a}{log\ b}$

Расширеніе понятія о числѣ.

9) Изъ разсмотрѣнія разности $a-b$, въ случаѣ $a=b$, устанавливается понятіе о символѣ o, какъ модулѣ операціи сложенія: $a+o=a$. Вообще если $a \uparrow m=a$, то говорятъ, что символъ m есть модуль операціи $\uparrow$.

10) Статьи о числѣ отрицательномъ и о числѣ дробномъ я полагаю умѣстнымъ провести, исходя изъ понятія *о парѣ чиселъ*, какъ ариѳметическомъ символѣ. Такое изложеніе дастъ возможность установить общую точку зрѣнія по отношенію къ отрицательнымъ и дробнымъ числамъ. При этомъ учитель долженъ особенно внимательно отнестись къ усвоенію учениками понятія объ *ариѳметизаціи* символовъ, установивъ слѣдующія положенія:

1) при расширеніи понятія о числѣ для вновь создаваемаго символа должны быть опредѣлены понятія: «равно», «больше» и «меньше» и при томъ такъ, чтобы были удовлетворены аксіомы равенства и аксіомы порядка;

2) для вновь создаваемаго символа должны быть опредѣлены операціи сложенія и умноженія и при томъ такъ, чтобы эти операціи подчинялись тѣмъ же законамъ, что и операціи сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ—*принципъ* постоянства формальныхъ законовъ операцій;

3) натуральное число должно являться частнымъ случаемъ вновь созданнаго символа; такимъ образомъ, понятіе о числѣ будетъ обобщено, расширено.

Ниже я привожу схему параллельнаго изложенія статей о числѣ относительномъ (пара вида: $a—b$) и о числѣ дробномъ (пара вида $a:b$). Въ классѣ эти статьи могутъ быть проведены послѣдовательно одна за другою, а повтореніе ихъ слѣдуетъ провести параллельно.

$(a—b)$—символъ, опредѣляемый парою какихъ угодно натуральныхъ чиселъ a и b.	$\frac{a}{b}$ —символъ, опредѣляемый парою какихъ угодно натуральныхъ чиселъ.
1) Равенство паръ чиселъ вида: $a—b$.	**1) Равенство паръ чиселъ вида: $\frac{a}{b}$.**
Къ необходимости расширенія понятія о числѣ мы были приведены разсмотрѣніемъ операціи обратной сложенію; обращаясь къ этой операціи, видимъ, что разности $a—b$ и	Къ необходимости расширенія понятія о числѣ мы были приведены разсмотрѣніемъ операціи обратной умноженію; обращаясь къ этой операціи, видимъ, что частныя

$c-d$, въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, равны тогда и только тогда, если $a+d=b+c$. Это условіе и примемъ, какъ опредѣленіе равенства символовъ $(a-b)$ и $(c-d)$.

$a:b$ и $c:d$, въ случаѣ a кратнаго b и c кратнаго d, равны тогда и только тогда, если $a\,.\,d=b\,.\,c$. Это условіе и примемъ, какъ опредѣленіе равенства символовъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Эти опредѣленія должны быть оправданы тѣмъ, что они удовлетворяютъ аксіомамъ равенства.

2) Неравенство паръ чиселъ вида: $(a-b)$.

Въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, разность $a-b$ больше разности $c-d$ тогда и только тогда. если $a+d > b+c$. Это условіе и примемъ, какъ опредѣленіе понятій больше и меньше для паръ чиселъ вида $(a-b)$.

2) Неравенство паръ чиселъ вида: $\frac{a}{b}$.

Въ случаѣ a кратнаго b и c кратнаго d, частное $a:b$ больше частнаго $c:d$ тогда и только тогда, если $a\,.\,d > b\,c$. Это условіе примемъ, какъ опредѣленіе понятій больше и меньше для паръ чиселъ вида $\frac{a}{b}$.

Эти опредѣленія должны быть оправданы тѣмъ, что они удовлетворяютъ аксіомамъ порядка.

3) Основное свойство пары $(a-b)$ и приведеніе ея къ простѣйшему виду.

На основаніи даннаго выше опредѣленія доказывается: $(a-b)=[(a+m)-(b+m)]$ — пара вида $(a-b)$ не измѣнится, если къ каждому изъ ея членовъ прибавить или отъ каждаго изъ нихъ отнять одно и то же число.

Напр.: $(5-7)=(8-10)=(2-4)$.

3) Основное свойство пары $\frac{a}{b}$ и приведеніе ея къ простѣйшему виду.

На основаніи даннаго выше опредѣленія доказывается: $\frac{a}{b}=\frac{a\,.\,m}{b\,.\,m}$ т. е. пара вида $\frac{a}{b}$ не измѣнится, если каждый изъ ея членовъ умножить или каждый изъ нихъ раздѣлить на одно и то же число.

Напримѣръ: $\frac{12}{18}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=\frac{24}{36}$.

Въ случаѣ $a > b$, $(a-b) = (m-o)$, гдѣ m есть натуральное число, разность чиселъ a и b. Символъ $(m-o)$ условимся считать тожественнымъ натуральному числу m. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ символъ $(a-b)$ представляетъ собою натуральное число.

Въ случаѣ $a < b$, $(a-b) = (o-m)$, гдѣ m есть натуральное число, разность чиселъ b и a. Символъ $(o-m)$ условимся обозначать «$-m$» и будемъ его называть отрицательнымъ числомъ. Напр.: $(5-7) = (0-2) = -2$.

Въ случаѣ $a = b$, $(a-b) = (o-o)$.

Символъ $(o-o)$ условимся считать тожественнымъ символу o.

Въ случаѣ a кратнаго b, $\frac{a}{b} = \frac{m}{1}$, гдѣ m есть натуральное число, частное отъ дѣленія a на b. Символъ $\frac{m}{1}$ условимся считать тожественнымъ натуральному числу m. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ симвомъ $\frac{a}{b}$ представляетъ собою натуральное число.

Въ случаѣ a не кратнаго числа b, символъ $\frac{a}{b}$ будемъ называть дробью; если a и b имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя d, не равнаго единицѣ, такъ что $a = a_1 d$ и $b = b_1 d$, то $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, гдѣ a_1 и b_1 суть числа первыя между собой. Символъ $\frac{a_1}{b_1}$ будемъ называть несократимой дробью.

Въ случаѣ $a = b$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$. Символъ $\frac{1}{1}$ условимся считать тожественнымъ символу 1.

Сравнимъ символъ $\frac{a}{b}$ съ символомъ $\frac{1}{1}$; $\frac{a}{b} < \frac{1}{1}$, если $a \,.\, 1 < b \,.\, 1$ или, если $a < b$— въ этомъ случаѣ символъ $\frac{a}{b}$ называется правильной дробью, если же $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$ и символъ $\frac{a}{b}$ назыв. неправильной дробью.

Символъ $\frac{o}{b}$ условимся считать тожественнымъ символу o.

4) Операція сложенія паръ чиселъ вида $(a—b)$.

Въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, имѣемъ: $(a—b)+(c—d)=(a+c)-(b+d)$. Это тожество примемъ, какъ опредѣленіе суммы паръ чиселъ $(a—b)$ и $(c—d)$:

$$(a—b)+(c—d)=$$
$$=\left[(a+c)-(b+d)\right]$$

Символу $\frac{b}{o}$ никакого ариѳметическаго значенія не придается.

4) Операція сложенія паръ чиселъ вида $\frac{a}{b}$.

Въ случаѣ a и b кратныхъ m, имѣемъ: $(a:m)+(b:m)=(a+b):m$.

Опредѣленіе: суммой двухъ дробей $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$ будемъ называть дробь $\frac{a+b}{m}$.

Эти опредѣленія должны быть оправданы съ точки зрѣнія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій; для этого надо показать, что законы перемѣстительный и соединительный имѣютъ мѣсто при этихъ опредѣленіяхъ операціи сложенія.

Опредѣливъ операцію сложенія относительныхъ чиселъ надо показать, что $a—b$, въ случаѣ $a < b$, равно парѣ чиселъ $(a—b)$, для этого достаточно показать, что $b+=(a—b)=a$.

Дѣйствительно: $(b—o)+(a—b)=\left[(b+a)—(o+b)\right]=\left[(b+a)-b\right]=(a—o)=a$.

Замѣтимъ, что вообще учитель долженъ проводить различіе между знакомъ «—» въ выраженіяхъ $a—b$ и $(a—b)$: въ первомъ случаѣ это знакъ дѣйствія вычитанія, во второмъ случаѣ это обозначеніе сочетанія натуральныхъ чиселъ a и b для образованія новаго символа, пары $(a—b)$. Для устраненія сбивчивости въ значеніи знака минусъ нѣкоторые авторы обозначаютъ пару чпселъ, отдѣляя числа этой пары запятой: (a, b).

5) Операція умноженія символовъ $(a—b)$.

Въ случаѣ $a > b$ и $c > d$, имѣемъ: $(a—b)\ (c—d) = (ac + bd) — (ad + bc)$.

Опредѣленіе: произведеніемъ паръ чиселъ $(a—b)$ и $(c—d)$ называется пара чиселъ, первый членъ которой равенъ натуральному числу $ac + bd$ и второй членъ — натуральному числу $ad + bc$.

5) Операція умноженія символовъ $\frac{a}{b}$.

Въ случаѣ a кратнаго b и c кратнаго d, имѣемъ: $(a : b) . (c : d) = ac : b : d$.

Опредѣленіе: произведеніемъ паръ чиселъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется пара чиселъ $\frac{ac}{bd}$, первый членъ которой равенъ произведенію первыхъ членовъ (числителей) данныхъ паръ и второй—произведенію вторыхъ членовъ (знаменателей) данныхъ паръ.

Это опредѣленіе должно быть оправдано съ точки зрѣнія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій; для этого надо показать, что законы перемѣстительный, соединительный и распредѣлительный имѣютъ мѣсто при этомъ опредѣленіи операціи умноженія.

Исходя изъ общихъ опредѣленій сложенія и умноженія паръ чиселъ вида $(a—b)$, надо напомнить ученикамъ правила сложенія и умноженія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, пользуясь при этомъ и частными примѣрами.

Опредѣливъ операцію умноженія символовъ $\frac{a}{b}$, надо показать, что $a : b = \frac{a}{b}$, для этого достаточно убѣдиться въ томъ, что $\frac{a}{b} . b = a$.

Дѣйствительно: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a . b}{b} = \frac{a}{1} = a$.

Напримѣръ: сложеніе положительнаго числа съ отрицательнымъ $(m-o)+(o-n)=[(m+o)-(o+n]=(m-n)$ если $m>n$, то $(m-n)$ есть число натуральное, если $m<n$, то $(m-n)$ есть число отрицательное.

$$8+(-11)=(8-0)+(0-11)=[(8+0)-(0+11)]=(8-11)=(0-3)=-3.$$

6) *Операціи вычитанія и дѣленія для паръ чиселъ вида $a-b$ и вида $\frac{a}{b}$.*

Свойства этихъ операцій вытекаютъ изъ ихъ опредѣленія, какъ операцій соотвѣтственно обратныхъ сложенію и умноженію и изъ законовъ этихъ послѣднихъ.

Законы операцій сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ остаются справедливыми и для вновь созданныхъ символовъ, а потому и всѣ свойства вычитанія и дѣленія тоже остаются для нихъ справедливыми. Такимъ образомъ, установлена общность тожественныхъ преобразованій для всей области раціональныхъ чиселъ.

11) *Ирраціональное число.* При изложеніи вопроса объ ирраціональномъ числѣ можно придерживаться или теоріи Дедекинда или теоріи Мере-Кантора.

Я имѣю опытъ изложенія въ классѣ теоріи ирраціональнаго числа, придерживаясь точки зрѣнія Дедекинда.

Это изложеніе я проводилъ по слѣдующей программѣ.

1) Исходя изъ частныхъ примѣровъ, я устанавливаю понятіе о сѣченіи всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса такъ, чтобы всякое число перваго класса было меньше всякаго числа второго класса. Число, какъ символъ сѣченія. Числа раціональныя и ирраціональныя, какъ частные случаи обобщеннаго понятія о числѣ.

2) Понятія «равно», «больше» и «меньше» для чиселъ, какъ символовъ сѣченія.
3) Опредѣленіе операцій сложенія и умноженія чиселъ, какъ символовъ сѣченія. Оправданіе этихъ опредѣленій съ точки зрѣнія принципа постоянства формальныхъ законовъ операцій.
4) Операціи вычитанія и дѣленія, какъ операціи обратныя сложенію и умноженію.

Общность тожественныхъ преобразованій для всей области вещественныхъ чиселъ.

Опытъ показываетъ, что самымъ труднымъ въ изложеніи теоріи ирраціональнаго числа является моментъ ариѳметизаціи символа сѣченія. Ученики сочтутъ возможнымъ признавать символъ сѣченія за число лишь при томъ условіи, что они уже нѣсколько освоились съ абстрактнымъ понятіемъ о числѣ, освоились съ возможностью созданія, при соблюденіи опредѣленныхъ условій, новыхъ числовыхъ символовъ, исходя изъ понятія о числѣ натуральномъ. Поэтому я считаю существенно важнымъ обобщить въ послѣднемъ классѣ ученіе о числѣ, освѣтивъ это ученіе нѣкоторыми общими идеями и понятіями—безъ этого невозможно дать сколько-нибудь обоснованную теорію ирраціональнаго числа.

Можетъ быть точка зрѣнія Мере-Кантора, основанная на разсмотрѣніи правильныхъ послѣдовательностей раціональныхъ чиселъ, имѣющихъ или не имѣющихъ раціональный предѣлъ, имѣетъ нѣкоторое преимущество передъ теоріей Дедекинда. Это преимущество мнѣ представляется въ слѣдующемъ: понятіе о правильной послѣдовательности раціональныхъ чиселъ болѣе связано съ накопленными уже учениками ариѳметическими понятіями, чѣмъ понятіе о сѣченіи, съ которымъ приходится оперировать, становясь на точку зрѣнія Дедекинда; по крайней мѣрѣ, мнѣ при разработкѣ вопроса объ операціяхъ надъ числами, какъ символами сѣченія, приходилось прибѣгать къ понятію о правильной послѣдовательности раціональныхъ чиселъ въ интересахъ большей отчетливости понятій и ихъ зафиксированія въ видѣ болѣе удобныхъ и наглядныхъ записей.

Въ видѣ заключительной главы курса теоретической ариѳметики въ старшихъ классахъ, я считаю необходимымъ дать статью объ измѣреніи величинъ, устанавливающую соотвѣтствіе между числовыми символами и значеніями величины.

Въ заключеніе своего доклада считаю долгомъ обратить вниманіе Собранія, что на затронутые мною вопросы въ русской учебной литературѣ обращаетъ особое вниманіе нашъ уважаемый предсѣдатель, профессоръ А. В. Васильевъ его лекціи «Введеніе въ анализъ» оказались для меня неоцѣнимымъ пособіемъ въ практикѣ преподаванія.

А. В. Васильевъ въ своей рѣчи произнесенной имъ въ день открытія нашего Съѣзда обратилъ вниманіе собранія на необходимость проведенія при преподаваніи математики въ старшихъ классахъ нѣкоторыхъ обобщающихъ идей, имѣющихъ широкое общеобразовательное, философское значеніе. Мой опытъ построенія курса ученія о числѣ для старшаго класса средней школы пусть будетъ отвѣтомъ рядоваго преподавателя на призывъ уважаемаго профессора А. В. Васильева».

Пренія по докладу Б. Б. Піотровскаго.

*А. І. Филиппов*ъ (Могилевъ-Подол.). „Я хотѣлъ сказать нѣсколько словъ относительно опредѣленій, которыя введены докладчикомъ. Здѣсь говорилось относительно индуктивныхъ опредѣленій. Конечно, теоретическую ариѳметику можно строго обосновать только такимъ образомъ, но является вопросъ, понятны ли эти опредѣленія юношеству: мнѣ кажется, что совершенно непонятны. Надо постараться использовать эти опредѣленія не въ видѣ формулы, а изложить ихъ словесно. Какъ это сдѣлать? Существуетъ брошюра Волкова, гдѣ опредѣленіе суммы дается такимъ образомъ: суммой двухъ чиселъ $(a + b)$ называется *b-ое* число послѣ *a*. Это, конечно, можно пояснить сразу на примѣрѣ. Данъ, допустимъ, натуральный рядъ чиселъ. Что называется суммой двухъ чиселъ, напримѣръ, 3 и 4? Это будетъ четвертое число послѣ трехъ, т. е.

семь. Вотъ и все. Это опредѣленіе есть не что иное, какъ словесный переводъ формулъ: $a + 1 =$ слѣдующему числу послѣ a; $a + (b + 1) = (a + b) + 1$“.

Т. Г. Соболевъ (Гжатскъ, Смол. губ.) высказалъ мысль, что при предлагаемомъ изложеніи будетъ порвано съ тѣми представленіями о числѣ и дѣйствіяхъ надъ числами, которыя уже имѣются у учениковъ. Переходъ отъ понятія о числѣ, какъ числѣ количественномъ, къ понятію о числѣ, какъ о числѣ порядковомъ, можетъ вызвать многія недоразумѣнія и во всякомъ случаѣ долженъ быть сдѣланъ въ высшей степени осторожно.

Е. Е. Кедринъ (Самара). „Мнѣ кажется совершенно невозможнымъ введеніе въ школу понятія о числѣ, какъ о символѣ. Этотъ взглядъ, введенный въ науку Гельмгольцемъ, остается еще и сейчасъ спорнымъ. Кромѣ того, опредѣленіе числа, какъ символа, является крайне неопредѣленнымъ, туманнымъ, такъ какъ опредѣляемое понятіе (число) выводится изъ понятія еще болѣе неяснаго и, такъ сказать, крайне расплывчатаго (символъ). Что въ данномъ случаѣ разумѣется подъ словомъ «символъ»? Я думаю, конечно, не цыфра и не имя числительное. Вѣдь тогда бы вышло, что число есть цыфра или слово. Съ этимъ согласиться нельзя, и, несмотря на громадный авторитетъ Гельмгольца, онъ, по моему мнѣнію, дѣлаетъ ошибку, смѣшивая символъ объекта съ самимъ объектомъ“.

М. Н. Песоцкій (Тифлисъ). „Я вполнѣ присоединяюсь къ идеѣ, высказанной въ докладѣ. Эта идея не новая; этотъ методъ математической индукціи высказанъ еще Пуанкарэ. Но я бы хотѣлъ здѣсь сдѣлать дополненіе относительно того, чего такъ осторожно коснулся г. докладчикъ, а именно — относительно комплексныхъ чиселъ. По моему, слѣдовало бы ввести въ школу и ученіе о комплексныхъ числахъ. Затѣмъ, слѣдуетъ слегка познакомить и съ кватерніонами, потому что они имѣютъ громадное значеніе въ физикѣ. Они расширяютъ вообще идею о дѣйствіи съ точки зрѣнія не только ариѳметической, но и геометрической. Это имѣетъ большое значеніе для развитія міросозерцанія учениковъ“.

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.). „Вношу фактическую поправку: ни въ VIII кл. гимназій, ни въ 7 кл. реальныхъ училищъ никакихъ задачъ по ариѳметикѣ не предлагается, причемъ изъ программы реальныхъ училищъ вовсе выкинуты не только тройное правило, правило смѣшенія и прочее, но даже и дроби (простыя и десятичныя). Въ виду этого, предложеніе докладчика использовать время, потребное на изложеніе этихъ выкинутыхъ отдѣловъ, на введеніе ученія о числѣ является неосуществимымъ".

„Вполнѣ соглашаясь съ необходимостью замѣны всего настоящаго курса теоретической ариѳметики предлагаемымъ (съ введеніемъ комплексныхъ чиселъ и съ предпочтеніемъ метода Кантора методу Дедекинда), считаю необходимымъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе, не противорѣчащее мысли докладчика, что «требованіе всѣхъ выводовъ при отвѣтѣ не должно являться обязательнымъ». Изъ практики я убѣдился, что предлагаемый курсъ усваивается большинствомъ учениковъ, но изложеніе его (т. е. отвѣты учениковъ), требуя дара слова и исключительной точности въ выбираемыхъ выраженіяхъ, представляетъ для нихъ большія затрудненія".

„Въ виду сего я полагалъ бы возможнымъ допустить отвѣты учениковъ по конспектамъ, составленнымъ въ символической формѣ, безъ записи разсужденій".

М. Е. Волокобинскій (Рига). „Я боюсь, что положенія, высказанныя въ докладѣ, учителя станутъ проводить въ школу. 10 лѣтъ тому назадъ мнѣ въ первый разъ пришлось заинтересоваться вопросомъ о теоріи чиселъ и ариѳметическихъ дѣйствій и, заинтересовавшись, я сейчасъ все преподнесъ ученикамъ. Прошло два-три года, и мое мнѣніе по вопросу, который былъ изложенъ уважаемымъ г. Піотровскимъ, измѣнилось; я сталъ чувствовать, что эти вещи преподносить ученикамъ не слѣдуетъ: они займутся игрой въ логику. Повторяю если это ученіе будетъ введено въ старшіе классы средней школы, ученики не только будутъ скучать и не понимать объясненій, но даже не будутъ ихъ слушать".

М. Ѳ. Бергъ (Москва), вполнѣ раздѣляя мнѣніе, высказанное докладчикомъ, находитъ предлагаемую имъ программу желательною.

С. Б. Шарое (Екатеринославъ). „То, что было здѣсь изложено докладчикомъ, я излагалъ даже и не въ старшихъ классахъ, а въ самомъ началѣ преподаванія алгебры, и утверждаю, что опасаться этого курса нѣтъ основанія. Только тогда, когда ученикъ начнетъ понимать, какъ расширяется понятіе о числѣ, о дѣйствіи, онъ относительно созрѣлъ къ переходу отъ ариѳметики къ алгебрѣ".

„Кромѣ того, было бы въ высшей степени желательно, чтобы въ старшихъ классахъ останавливались не только на ирраціональныхъ, но и на мнимыхъ числахъ. Вспомнимъ, съ какимъ трудомъ человѣчество овладѣвало понятіемъ о числѣ; въ обобщенномъ видѣ; Эйлеръ, вводя отрицательныя числа, осторожно выражается о нихъ, говоря, что они очень удобны для вычисленій; великій Гауссъ въ своей диссертаціи извиняется, что позволяетъ себѣ заниматься мнимыми числами. Для ученика современной намъ средней школы мнимыя числа не должны казаться чѣмъ-то спиритическимъ; ученики должны понять, что совокупность чиселъ отрицательныхъ, дробныхъ, раціональныхъ и комплексныхъ—есть одно цѣлое".

А. И. Шапошниковъ (Щелково, Сѣв. дор.). „Я усматриваю два теченія на нашемъ Съѣздѣ. Во-первыхъ, теченіе, которое стремится облегчить начальное ученіе; во-вторыхъ, теченіе, которое старается перенести научные факты и выводы непосредственно въ среднюю школу. Я не вижу, какъ согласовать эти два теченія. Отъ конкретныхъ представленій надо осторожнымъ и медленнымъ путемъ переходить къ абстрактнымъ. Когда же въ младшихъ классахъ занимаются интуиціей, а въ старшихъ классахъ философіей, тогда очень можно опасаться, что интуиція и философія въ умахъ среднихъ или слабыхъ учениковъ столкнутся и не подѣлятъ поля сознанія. Примѣръ философіи и очень сложной далъ намъ г. Долгушинъ въ своемъ докладѣ. Онъ взялъ пучекъ круговъ, представилъ ихъ прямою линіею, взялъ другую систему круговъ и эти круги представилъ уже неэвклидовыми геодезическими линіями. Какъ прямыя не есть пучки, а пучки—не прямыя въ эвклидовомъ смыслѣ, такъ и круги не были неэвклидовыми геодезическими линіями: докладчикъ замѣнилъ символомъ реальные образы. Онъ говорилъ, что учащіеся съ чрезвычайнымъ интересомъ набрасываются на неэвклидову геометрію; но, вѣдь, ученики ничего не постигаютъ изъ этого: связь теоремъ представляется имъ не въ дѣйствительномъ видѣ, а лишь въ фиктивномъ, приспособленномъ къ легкости воспріятія".

„Въ Петербургѣ имѣется школа, гдѣ преподаются ариѳметическіе символы. Я присоединяюсь къ тѣмъ лицамъ, которые спрашивали здѣсь, что такое эти символы. Это то, что совершенно непохоже на то простое понятіе о числѣ, которое было сообщено ученикамъ въ младшихъ классахъ, и замѣняетъ его такъ же, какъ тѣ круги, которые были замѣнены прямыми линіями; вотъ что это. Такіе учителя какъ Грассманъ, которые примкнули къ этому изложенію, знали, что они дѣлаютъ. Они имѣли дѣло съ философіей, а въ философіи для нихъ было задачей отрѣзать, уничтожить всякую наглядность. Они истребили всѣ слѣды конкретности для того, чтобы оставить чистую логику, и производили логическія операціи, которыя пріобрѣтали особую красоту, чисто математическую, то, что они называютъ аксіоматикой. Ими была построена система логическаго сложенія, изображающая его какъ систему формальныхъ правилъ, но это не была система сложенія реальныхъ чиселъ. Попытки заинтересовать интуиціей въ первыхъ классахъ и—совершенно безъ всякой связи—началами философіи въ послѣднихъ классахъ, представляютъ систему разорваннаго преподаванія, которое несомнѣнно представляетъ жесточайшее зло и, когда мы видимъ въ учебникахъ Билибина, что тамъ о раціональныхъ числахъ прямо говорится ученику младшаго класса, что это есть символъ, мы можемъ сказать, что подобное изложеніе абсолютно не выдерживаетъ критики. Въ среднюю школу можно вводить только элементы этого ученія, показывая, напр., какъ, исходя изъ того или иного положенія, переходить къ послѣдующимъ выводамъ; но этимъ надо и ограничиться".

Е. Д. Ханакадопуло (Одесса). „По новой программѣ кадетскихъ корпусовъ этотъ вопросъ уже введенъ въ школу, и я уже обладаю одногодичнымъ опытомъ въ этомъ направленіи. Я какъ разъ излагалъ учащимся этотъ курсъ и затрудненія я встрѣтилъ только въ томъ клубкѣ, откуда потомъ легко все развернуть; дальше все идетъ гладко. Но именно въ этомъ клубкѣ, въ аксіомѣ Грассмана — громаднѣйшее затрудненіе. Когда я предлагалъ ее ученикамъ и говорилъ: «примите ее, дальше все будетъ хорошо», ученики отвѣчали: «мы не можемъ съ этимъ опредѣленіемъ согласиться, ибо оно не согласуется съ тѣми опредѣленіями, которыя раньше у насъ были». И вотъ только во «Введеніи въ анализъ» Васильева я нашелъ то, что мнѣ было нужно. Это формула: $a+(b+1)=(a+b)+1$. Поэтому, если я къ a хочу прибавить 2, то это значитъ, что я хочу прибавить $1+1$. По этой аксіомѣ мнѣ кажется очевиднымъ, что это будетъ $a+1+1$".

В. Ѳ. Каганъ (Одесса). „Я не буду останавливаться на педагогической сторонѣ дѣла. Я думаю, учебное заведеніе учебному заведенію—рознь, классъ классу—рознь и преподаватель преподавателю—рознь. Когда преподаватель чувствуетъ, что его классъ подготовленъ для воспріятія этихъ идей, когда онъ чувствуетъ умѣніе и силы сдѣлать это ученикамъ объяснимымъ, когда онъ убѣжденъ, что онъ съумѣетъ сдѣлать такъ, что ученики, повторяя, не будутъ говорить заученныя вещи, то тогда это полезно. Но я взялъ слово для другой цѣли, для того, чтобы сказать о тѣхъ идеяхъ, которыя вложены въ систему Грассмана. Здѣсь раздавались голоса по поводу того, что изложенная система смотритъ на число, какъ на символъ, и лишаетъ числа ихъ реальнаго конкретнаго, жизненнаго значенія, къ которому мы привыкли и которое ученикъ принесъ съ собой изъ низшей школы. Идея, которая изложена г. Піотровскимъ, принадлежитъ Грассману. Формула Грассмана однако встрѣтила здѣсь возраженіе по существу, и надо сказать, что тѣ голоса, которые здѣсь раздавались, имѣютъ основанія и на нихъ стоитъ остановиться“.

„Идея Грассмана въ свое время была выдвинута въ наукѣ. Она приводитъ ариѳметическія цѣлыя числа въ извѣстный порядокъ; но тотъ, кто думаетъ, что Грассманъ узаконяетъ идею исчисленія и способы развитія ариѳметики до степени символовъ, заблуждается. Въ самомъ дѣлѣ, возьмите такую теорему Грассмана: «для того, чтобы къ числу *a* прибавить сумму *n* чиселъ, нужно прибавить *n*—1, а потомъ послѣднее число». Въ этой формулѣ: число *n* есть символъ специфицированный, или ему придано частное значеніе? Да и раньше, когда мы говоримъ: «возьмемъ 1-ое число, 2-ое число и затѣмъ составимъ 3-ье», то эта идея двухъ чиселъ фигурируетъ какъ символъ или имѣетъ содержаніе нѣкотораго ансамбля? Внѣ всякаго сомнѣнія, какъ бы намъ ни было пріятно сказать, что ариѳметика обоснована и проводится у Грассмана аксіоматически, это не будетъ справедливо. Вотъ что заставило въ послѣднее время Георга Кантора и др. стать на иную точку зрѣнія. Они начинаютъ съ другой идеи, съ идеи объ ансамбляхъ. Они хотятъ оживить тѣ идеи, которыя до нихъ претворили въ символы. Отсюда возникло другое теченіе въ теоріи ариѳметики. Если вы возьмете Вебера, то не найдете системы Грассмана, а другую, но эта система тоже оказалась, невыдерживающей критики: она не довела теорію до послѣдняго момента. Можно сказать, что теоріи ариѳметики, обоснованной до конца, мы до сихъ поръ не имѣемъ. Труднѣйшая часть ариѳметики, начиная съ дробей, идетъ благополучно до конца; ариѳметика же цѣлыхъ чиселъ до сихъ поръ считается необоснованной“.

„Въ тѣсной связи съ этимъ находится другой вопросъ, стоящій на пути системы Грассмана, такъ сказать—у ея дверей. Г. Піотровскій прекрасно формулировалъ, въ чемъ заключается идея индуктивности Грассмановскихъ опредѣленій. Она заключается въ томъ, что если умѣешь прибавить b, то вмѣстѣ съ тѣмъ научаешься прибавить $b+1$; разъ я съумѣю прибавить число 2, то сумѣю прибавить число 3, и т. д. Но что вложено въ это «и т. д.»? Это «и т. д.» заключается въ законѣ математической индукціи, въ увѣренности, что, двигаясь этимъ путемъ по натуральному ряду, я дойду до любого числа. Спрашивается: это положеніе—коренное и исходное, или оно тоже можетъ быть подведено къ болѣе общимъ областямъ неариѳметическихъ идей? Отсюда тенденція — доказать самый законъ математической индукціи. Вопросъ въ томъ: если я буду двигаться черезъ эти интервалы, дойду ли я до любой точки прямой, захвачу каждую точку этого ряда или нѣтъ?“

„Вы знаете, что уже великій геометръ древности Эвклидъ усмотрѣлъ эту логическую трудность и формулировалъ ее въ 7-ой книгѣ «Началъ». Положеніе, что, двигаясь равными шагами по прямой или по ариѳметическому ряду, можно перешагнуть черезъ любую точку, было давно формулировано въ видѣ основной аксіомы. Возникаетъ вопросъ: въ какой мѣрѣ этотъ законъ математической индукціи является основнымъ орудіемъ нашего мышленія, въ какомъ смыслѣ онъ является орудіемъ ариѳметики и общимъ достояніемъ логики. Въ этомъ отношеніи за послѣднее время были сдѣланы чрезвычайно глубокія изслѣдованія Веронезе, и другими. Удалось доказать, что мы можемъ строить совершенно аналогичные ряды такъ, чтобы, шествуя по нимъ, не перескочить черезъ любую точку, т. е. — можно построить рядъ такимъ образомъ, что къ нему Грассмановская ариѳметика не будетъ примѣнима. Грассмановскимъ принципомъ вы этой ариѳметики не построите. Это—такъ называемая, неархимедова ариѳметика, на которой строится неархимедова геометрія. Такимъ образомъ, вопросъ о томъ, гдѣ тѣ основныя положенія, на которыхъ можетъ быть построена ариѳметика цѣлыхъ чиселъ, еще виситъ въ воздухѣ, и въ наукѣ нельзя считать его рѣшеннымъ. Въ геометріи дѣло обстоитъ благополучно и ясно; но когда вы приступаете къ построенію ариѳметики, то у васъ нѣтъ предварительной базы. Эту общую логическую базу нужно еще установить въ наукѣ. Этимъ занимается въ настоящее время итальянская школа, но насколько удачно—вопросъ будущаго“.

А. В. Васильевъ (Спб.). „Въ докладѣ Піотровскаго нужно различать 2 части: первую часть, которая составляетъ главу изъ ариѳметической теоріи цѣлыхъ чиселъ и которая ведетъ къ установленію законовъ ассоціативности, коммутативности и дистрибутивности, и вторую часть, которая, исходя изъ этихъ законовъ въ логической связи, развиваетъ понятія объ обратныхъ операціяхъ, о дѣйствіяхъ надъ ними, о всей системѣ алгебры и обобщенія чиселъ путемъ обратныхъ операцій. Что касается второй части, то мы не слышали никакихъ возраженій противъ такого объединенія понятій алгебры. Что касается того, какъ приходятъ къ законамъ ассоціативности и дистрибутивности для цѣлыхъ чиселъ, то тутъ есть два пути: путь Грассмана и путь, основанный на однозначномъ соотвѣтствіи и мощности. Какой путь избрать, это дѣло педагога. Въ лекціяхъ по введенію въ анализъ, которая была упомянута, эти двѣ точки зрѣнія предлагаются мною студентамъ I курса, какъ однозначущія, потому что вдаваться въ тонкости, о которыхъ сообщилъ В. Ѳ. Каганъ и которыя составляютъ предметъ обсужденія и математиковъ и философовъ, на первомъ курсѣ невозможно, тѣмъ болѣе это невозможно въ 8-мъ классѣ гимназіи".

„На вторую часть доклада я просилъ бы обратить больше вниманія. Дѣйствительно желательно, чтобы ученикъ послѣдняго класса гимназіи подобно тому, какъ онъ получаетъ понятіе о строго обоснованной системѣ Эвклида на основаніи небольшого числа посылокъ, имѣлъ понятіе о томъ, что и вся алгебра — отъ цѣлыхъ чиселъ до комплексныхъ включительно — представляетъ собой логическое развитіе сравнительно небольшого числа основныхъ посылокъ. Я думаю, что это нужно, потому что убѣдился во время моей университетской дѣятельности, имѣя соприкосновеніе со многими гимназистами, приходящими на первый курсъ математическаго факультета, что этихъ основныхъ законовъ они не знаютъ".

Б. Б. Піотровскій (Спб.). „Мнѣ, конечно, очень трудно исчерпывающимъ образомъ отвѣтить на всѣ тѣ замѣчанія, которыя были здѣсь высказаны по поводу моего доклада и за которыя я прежде всего приношу благодарность Собранію. Я отвѣчу на тѣ изъ вопросовъ, затронутыхъ моими оппонентами, которые я считаю особенно существенными".

„Что касается до отвлеченности символовъ, то я признаю эту отвлеченность, но думаю, что врядъ ли можно безъ нея обойтись, разъ мы хотимъ сколько-нибудь обоснованно говорить о числѣ и о расширеніи этого понятія. Въ отвлеченіяхъ и обобщеніяхъ сила и красота математики. Можно говорить конкретно о соединеніи трехъ яблокъ и пяти яблокъ въ одну совокупность, но нельзя говорить конкретно объ операціи сложенія чиселъ 3 и 5—это вопросъ совершенно отвлеченный по существу. По поводу замѣчанія В. Ф. Кагана, долженъ сказать, что понятіе о рядѣ натуральныхъ чиселъ и опредѣленіе операціи сложенія символовъ этого ряда устанавливаются совершенно независимо отъ понятія о численности совокупности предметовъ. Понятіе о численности совокупности предметовъ является результатомъ установленія однозначнаго соотвѣтствія между элементами совокупности и символами ряда натуральныхъ чиселъ. По поводу вопроса, который былъ сейчасъ ко мнѣ обращенъ: «какъ я могу сложить $b+1$, если я не знаю, что такое единица и что такое сложеніе», отвѣчу слѣдующее: символомъ 1 есть тотъ символъ, съ котораго начинается рядъ натуральныхъ чиселъ. Подъ $b+1$ условимся разумѣтъ число непосредственно слѣдующее за числомъ b въ ряду натуральныхъ чиселъ, а такъ какъ за каждымъ членомъ этого ряда слѣдуетъ одно и только одно число, то символъ $b+1$ является вполнѣ опредѣленнымъ числомъ и слѣдовательно нѣтъ больше основаній меня спрашивать: «что такое $b+1$“.

„По поводу оторванности этого курса отъ курса предыдущихъ классовъ, на которую обращали вниманіе мои оппоненты, я скажу, что считаю совершенно необходимымъ, установивъ понятіе о числѣ, какъ отвлеченномъ символѣ, и установивъ формальное опредѣленіо операціи, связать эти понятія съ понятіемъ о численности предметовъ и съ понятіемъ объ измѣреніи значеній величины, на что и имѣются указанія въ предлагаемой мною программѣ курса теоретической ариѳметики. Нельзя не считаться, самымъ серьезнымъ образомъ, съ вопросомъ о самодѣятельности учащихся, но я полагаю, что эта самодѣятельность можетъ быть использована и въ предлагаемомъ мною курсѣ, напримѣръ, въ видѣ самостоятельнаго примѣненія метода математической индукціи, въ видѣ самостоятельнаго доказательства нѣкоторыхъ тожествъ, исходя изъ законовъ операцій, въ видѣ активной работы учениковъ при разработкѣ въ классѣ различныхъ вопросовъ, связанныхъ общей идеей, наконецъ, въ видѣ тѣхъ сомнѣній, запросовъ, которые возникаютъ у учащихся послѣ того, какъ они будутъ введены въ кругъ широкихъ, обобщающихъ идей. Надо замѣтить, что активное участіе учениковъ въ работѣ не столько зависитъ отъ программы, сколько отъ учителя“.

„А. Н. Шапошниковъ говорилъ, что въ младшихъ классахъ все стараются преподавать легко, а въ старшихъ классахъ за то наваливаютъ и теоретическую ариѳметику, и систему Эвклида и т. д. Конечно, курсъ долженъ быть построенъ планомѣрно. Сѣмена тѣхъ всходовъ, которые предполагается собрать въ результатѣ обученія, въ послѣднемъ его концентрѣ, должны быть заброшены раньше. О легкости обученія говорить не приходится— на каждой ступени обученія преодолѣваются свои трудности Если отвлеченныя понятія преподнести ученикамъ 3—4-го класса, то это никуда не годится, но если въ 7-мъ классѣ ограничиваться той же строгостью и степенью отвлеченія, что и въ 3-мъ классѣ, то это тоже никуда не годится.“

Предсѣдатель. „Изъ преній, я думаю, выяснилось, что средняя школа несомнѣнно нуждается въ болѣе точномъ обоснованіи ариѳметики, чѣмъ это было до сихъ поръ, но съ другой стороны, выяснилось, какія трудности на этомъ пути стоятъ даже съ научной стороны. Поэтому, къ вопросу о развитіи понятія о числѣ въ средней школѣ нужно отнестись съ большой осторожностью, и тѣмъ болѣе приходитъ это въ голову, когда вспоминаешь тѣ пожеланія, которыя были высказаны на Съѣздѣ; напримѣръ, хотятъ ввести философскую пропедевтику, исторію математики, неэвклидову геометрію. Нужно подумать и объ ученикѣ".

„Затѣмъ, я сдѣлаю поправку къ сказанному однимъ лицомъ что будто бы въ корпусахъ введена Грассмановская аксіоматика. Ничего подобнаго въ корпусахъ не введено".

XIII. Игры и занятія, способствующія развитію образнаго мышленія и представленія.

Докладъ А. Н. Смирнова (Спб.).

«Существуетъ общераспространенное мнѣніе, что математика развиваетъ ясность мышленія. Это положеніе несомнѣнно вѣрно, если оно относится къ математикѣ на высшихъ ступеняхъ обученія; но имѣя дѣло со школьниками въ предѣлахъ начальнаго и средняго обученія, мы видимъ обратное, тамъ математика требуетъ предварительнаго развитія образнаго мышленія и представленія. Съ этой цѣлью и вводится рядъ вспомогательныхъ средствъ въ видѣ различныхъ наглядныхъ учебныхъ пособій. Мы часто наблюдаемъ, что въ очень простыхъ для преподавателя вопросахъ учащіеся путаются: напр., при изученіи геометріи, переставляя буквы, обозначающія вершины угловъ треугольниковъ, мы сбиваемъ учащихся. Происходитъ это потому, что ученики не имѣютъ яснаго представленія о томъ, что скрывается за этими буквами, не имѣютъ представленія о формѣ.

Говорятъ, что начертательная геометрія развиваетъ представленіе о предметахъ 3-хъ измѣреній. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что геометрію изучаютъ и понимаютъ въ средней школѣ только тѣ лица, которыя имѣютъ ясное представленіе объ этихъ тѣлахъ уже заблаговременно. Не менѣе важно и въ ариѳметикѣ имѣть ясное образное представленіе. Многія задачи, которыя дѣти рѣшаютъ съ величайшимъ трудомъ, могли бы рѣшаться совершенно просто, если бы у дѣтей имѣлось ясное пространственное представленіе. Напр., мы имѣемъ часто дѣло съ задачами, гдѣ въ извѣстный сосудъ вливается столько-то воды и проведены такія-то трубы. Лица, не имѣющія яснаго представленія о діаметрахъ, не могутъ перенести это на цифры, и въ результатѣ цифры расходятся съ дѣйствительностью. При изученіи въ высшихъ классахъ тригонометріи и началъ астрономіи необходимо ясное пространственное представленіе для того, чтобы понять, какимъ образомъ вычисляется движеніе земли, затменія луны и солнца. Нужно ясно представлять себѣ тѣ плоскости, въ которыхъ это происходитъ. Нѣтъ этого представленія о плоскости, поверхности и нѣтъ яснаго рѣшенія, яснаго отвѣта на вопросы. Не менѣе необходимо ясное представленіе пространственныхъ формъ и въ повседневной жизни. Мы очень часто рѣшаемъ сложные вопросы на словахъ, отвлеченно, а какъ только приходится привести въ исполненіе наши предположенія, особенно касающіяся пространственныхъ отношеній, на сцену является полная несостоятельность.

Чтобы развить образное мышленіе, нужно съ самаго младшаго возраста использовать способность дѣтей изображать графически свои мысли и представленія. Нужно итти на встрѣчу всѣмъ способностямъ дѣтей, которыя даютъ имъ возможность развивать незамѣтно для себя почву для того, чтобы впослѣдствіи вѣрно и благополучно проходить курсъ средней школы. Необходимыми средствами для развитія пространственныхъ представленій у дѣтей, по моему мнѣнію, являются: рисованіе, черченіе и лѣпка; это именно тѣ способы передачи мыслей и впечатлѣній, которые свойственны ребенку самаго младшаго возраста. Этими способами ребенокъ начинаетъ говорить такъ же какъ словами—несовершенно, но понятно для себя, и задача воспитателя, подготовляющаго дѣтей въ школу, должна заключаться въ томъ, чтобы эти прирожденныя способности человѣка расширить возможно больше.

Вмѣстѣ съ рисованіемъ, черченіемъ и скульптурными работами необходимо также ввести ручной трудъ во всѣхъ его формахъ. Я не говорю о томъ ручномъ трудѣ, который проводится многими учебными заведеніями и который не удовлетворяетъ ни ремесленника, ни педагога. Я говорю о такомъ ручномъ трудѣ, гдѣ рука совмѣстно съ мыслью создаетъ предметы, сопоставляетъ различныя формы пространства и даетъ тотъ или иной результатъ въ видѣ готовой вещи или произведенія. Здѣсь я не говорю о спеціальныхъ пріемахъ того или иного ремесла. Желательно, чтобы въ самомъ младшемъ возрастѣ дѣти могли работать не только на отвлеченной плоскости, сопоставляя между собой буквы и цифры, но могли бы воспроизводить отвлеченныя представленія въ видѣ какихъ-нибудь предметовъ; Въ этомъ отношеніи ручной трудъ сдѣлалъ большіе шаги впередъ, и было бы непростительной педагогической ошибкой, если бы мы оставили въ сторонѣ это могущественное средство пониманія и не воспользовались бы имъ для общаго развитія ученика. въ настояшее время рисованіе, черченіе и лѣпка вводятся постепенно во всѣ учебныя заведенія и встрѣчаютъ менѣе противниковъ, чѣмъ встрѣчали до сихъ поръ, но вмѣстѣ съ тѣмъ нужно научить не только рисовать карандашемъ, лѣпить изъ глины, но нужно научить владѣть пальцами рукъ, чтобы дѣти могли выпиливать, склеивать, строить, и когда эти занятія будутъ введены въ видѣ подготовительныхъ упражненій до школы, то можно надѣяться, что наши учащіеся войдутъ въ школу съ широкимъ кругозоромъ, съ развитымъ образнымъ мышленіемъ и, такимъ образомъ, легче будутъ усваивать истины, которыя въ настоящее время являются имъ чуждыми, отвлеченными.

Я не буду указывать тѣхъ пособій и руководствъ, которыя могутъ быть для этого использованы, это—дѣло воспитателей, учителей; пособій очень много, среди нихъ есть хорошія, плохія и посредственныя, но ихъ можно расположить въ извѣстной последовательности. Въ первую очередь я предложилъ бы въ ручномъ трудѣ всевозможныя издѣлія изъ бумаги, причемъ эти издѣлія должны воспроизводить предметы 3-хъ измѣреній, а не только на плоскости. Слѣдовательно, они должны состоять не въ одномъ плетеніи, связываніи, но и въ воспроизведеніи различныхъ предметовъ дѣйствительности. Слѣдующей ступенью могутъ быть различныя игры, напр., въ кирпичики, когда ребенокъ беретъ предметы извѣстной формы и изъ этихъ формъ, сопоставляя ихъ между собой, созидаетъ новыя. Наконецъ, на послѣдней ступени полготовительныхъ игръ и занятій могли бы итти такія игры и занятія, которыя требуютъ извѣстной технической ловкости по складыванію, свинчиванію и склеиванію различныхъ предметовъ.

Было бы очень долго убѣждать васъ въ томъ, что подобныя занятія нужны или не нужны, но я высказываю свое мнѣніе, какъ представителя графическаго искусства, что было бы весьма желательно, чтобы преподаватели другихъ предметовъ, въ томъ числѣ и математики, отнеслись съ должнымъ вниманіемъ или, по крайней мѣрѣ, съ любопытствомъ къ этому предмету и внесли нѣкоторыя поправки и коррективы».

Тезисы.

1. Развитіе образнаго мышленія и представленія является необходимою частью общаго образованія.

2. Образное представленіе необходимо для яснаго и правильнаго пониманія окружающихъ явленій.

3. Образное представленіе открываетъ человѣку особую область мышленія, мало развиваемую другими дисциплинами.

4. Образное мышленіе слѣдуетъ развивать въ дѣтяхъ съ самаго младшаго возраста посредствомъ соотвѣтствующихъ игръ, занятій ручнымъ трудомъ, рисованія, черченія и лѣпки.

Конспектъ.

§ 1. Необходимость наглядности, образнаго мышленія и представленія для яснаго пониманія нѣкоторыхъ отдѣловъ математики, какъ напр.:

а) геометріи (планиметріи и стереометріи),
б) начертательной геометріи,
в) ариѳметики,
г) тригонометріи,
д) астрономіи.

§ 2. Значеніе яснаго представленія и образнаго мышленія преимущественно о формахъ, въ практической жизни.

§ 3. Необходимость содѣйствовать развитію въ дѣтяхъ образнаго мышленія и представленія съ самаго младшаго возраста.

§ 4. Ручной трудъ, какъ одно изъ средствъ развитія образнаго мышленія и представленія:

а) современное положеніе ручного труда въ нашей школѣ,
б) желательная постановка преподаванія ручного труда въ цѣляхъ общаго развитія.

§ 5. Нѣкоторые изъ существующихъ въ настоящее время игръ, занятій и видовъ ручного труда, имѣющихъ цѣлью развить образное мышленіе и представленіе, напр.:

а) рисованіе (Прангъ и др.),
б) лѣпка (изъ глины, пластицына Гарбутта и др.),
в) вырѣзываніе изъ бумаги (Кохъ, Ручн. трудъ и др.),
г) складываніе построекъ, машинъ и т. п. (Матадоръ, Меккано).

XIV. Наглядныя пособія.

Докладъ Д. Э. Теннера (Спб.).

«Принципъ наглядности въ дѣлѣ преподаванія такъ твердо стоитъ въ педагогикѣ, что казалось бы о немъ нечего и говорить, но если мы обратимся къ исторіи этого вопроса и къ тому, какъ онъ трактуется теперь, то, мнѣ кажется, придемъ къ другому заключенію, потому что осуществленіе этого принципа весьма и весьма разнообразно. и еще спорятъ о томъ, въ какой мѣрѣ и насколько принципъ наглядности въ томъ или иномъ предметѣ можно проводить. Всѣ столпы педагогіи: Амосъ Коменскій, Д. Локкъ, Песталоци, Руссо Спенсеръ и т. д., всѣ въ одно слово говорятъ, что наглядность въ обученіи необходима; но сходясь въ этомъ общемъ принципѣ, они однако же расходятся въ способахъ его осуществленія. Такъ, Руссо широко открываетъ двери природы своему «Эмилю» и думаетъ, что сама природа будетъ служить ему нагляднымъ пособіемъ; Амосъ Коменскій вводитъ учениковъ въ классъ, создаетъ тамъ спеціальную обстановку. благопріятную для нагляднаго обученія.

Это съ одной стороны; съ другой же -въ преподаваніи различныхъ предметовъ не въ одинаковой степени пользуются наглядными пособіями: въ однихъ, какъ естествознаніе, географія, такъ сказать, шага нельзя ступить безъ наглядныхъ пособій; въ другихъ—пользуются ими въ значительно меньшей степени, но все же и преподаватель исторіи, и родного языка и иностранныхъ языковъ вводятъ на своихъ урокахъ наглядныя пособія.

Географъ, естественникъ, историкъ должны пользоваться наглядными пособіями тамъ, гдѣ надо познакомить съ новымъ видомъ явленій природы, жизни человѣка, жизни животныхъ, развитіемъ растенія, съ историческими памятниками искусствъ, съ картинами, воспроизводящими историческія событія, нравы, и тому подобными фактами, ибо иногда невозможно никакими словесными объясненіями дать понятіе о томъ, что легко дается простымъ наблюденіемъ. Преподаватель родного языка, разучивъ въ классѣ поэтическое произведеніе, дополняетъ, если это возможно, зрительными впечатлѣніями отъ картины художника. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ роль нагляднаго пособія уже нѣсколько иная. Въ первомъ случаѣ безъ нагляднаго пособія почти невозможно вызвать нужное представленіе, во второмъ—поэтическій образъ уже составился путемъ чтенія, а произведеніе кисти художника лишь дополнитъ его, установитъ и закрѣпитъ связь между зрительнымъ и слуховымъ впечатлѣніями, вмѣстѣ съ тѣмъ способствуя запоминанію образовъ.

И въ томъ и въ другомъ случаѣ происходитъ накопленіе представленій—ростъ апперципирующей массы, объемъ которой вліяетъ какъ на качество ассоціацій, такъ и на эмоціональную сторону воспріятія.

Въ преподаваніи математики также отводится мѣсто наглядности, но надо сказать, что въ этомъ отношеніи не всѣ школы находятся въ одинаковыхъ условіяхъ. Въ начальной школѣ, какъ всѣмъ извѣстно, преподаваніе математики сопровождается употребленіемъ наглядныхъ пособій, при чемъ дѣти съ одной стороны знакомятся съ геометрическими образами, съ пространственными соотношеніями, съ другой—съ числомъ, съ дѣйствіями надъ числами, законами этихъ дѣйствій и т. д. Здѣсь узнаются и новые факты и иллюстрируются уже извѣстныя положенія, устанавливаются ассоціаціи, пріобрѣтаются навыки и т. д.

Необходимость наглядныхъ пособій въ начальномъ обученіи математикѣ признается уже всѣми; что касается до среднихъ и высшихъ ступеней обученія, то тутъ введеніе наглядныхъ пособій при обученіи математическимъ предметамъ становится все болѣе ограниченнымъ и спорнымъ. Непосредственныя наблюденія, простой опытъ и простые выводы изъ конкретныхъ фактовъ—вотъ область, доступная пониманію дѣтей въ возрастѣ, отвѣчающемъ начальному обученію. Способность къ отвлеченнымъ разсужденіямъ еще мало доступна этому возрасту.

По мѣрѣ обученія, вмѣстѣ съ возрастомъ психическія силы растутъ, способность къ отвлеченному мышленію развивается, необходимость въ конкретизаціи обученія уменьшается. Вмѣстѣ съ тѣмъ запасъ представленій и образовъ, вынесенныхъ изъ предшествовавшаго обученія растетъ и создается все большая возможность опираться при обученіи на этотъ запасъ. Вотъ однѣ изъ причинъ, лежащихъ въ законѣ развитія психической организаціи человѣка, которыя могутъ быть указаны, какъ позволяющія ограничивать употребленіе наглядныхъ пособій на высшихъ ступеняхъ обученія, по сравненію съ низшими. Замѣтимъ однако же, что рѣчь можетъ быть лишь объ ограниченіи, но не объ исключеніи наглядныхъ пособій.

Дѣйствительно, развитіе способности къ отвлеченному мышленію не исключаетъ значенія наглядныхъ пособій, а переноситъ лишь потребность въ нихъ, въ новыя болѣе сложныя области. Какъ бы ни былъ ученикъ знакомъ съ кубомъ, тѣмъ не менѣе, врядъ ли можно ожидать отъ него, чтобы онъ ясно себѣ представилъ, что сѣченіе его плоскостью можетъ дать треугольникъ, четырехугольникъ, пятиугольникъ и шестиугольникъ. Если онъ справился съ этимъ, можно идти далѣе и выяснить всѣ ли эти многоугольники могутъ быть правильными и т. д. Сѣченіе плоскостью, наклонной къ высотѣ правильной многогранной пирамиды, дастъ во всѣхъ случаяхъ не симметричный относительно точки многоугольникъ, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ симметричный относительно оси. Между тѣмъ, какъ сѣченіе конуса такой же плоскостью, даетъ фигуру симметричную относительно точки и двухъ осей во всѣхъ случаяхъ, за однимъ лишь всѣмъ извѣстнымъ исключеніемъ.

Всѣ эти вопросы, конечно, могутъ быть выяснены и безъ наглядныхъ пособій, чисто умозрительнымъ путемъ. Но помимо того, что путь этотъ не всегда простъ, умозрительное изслѣдованіе оставляетъ открытымъ вопросъ о реальныхъ представленіяхъ, связанныхъ съ изслѣдуемымъ вопросомъ. Не только тамъ, гдѣ въ обученіи переходятъ къ новымъ областямъ знаній, ранѣе не затронутымъ, приходится обращаться къ нагляднымъ пособіямъ, но и въ томъ случаѣ, когда остаются въ знакомой области, когда въ предшествовавшемъ курсѣ заложены уже зерна того, что должно разрастись въ слѣдующихъ концентрахъ.

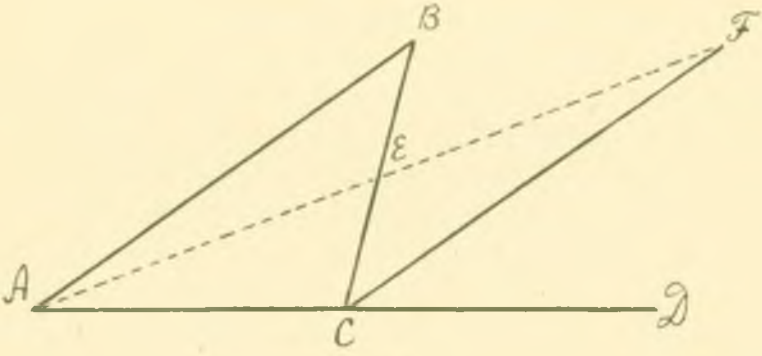
Ни въ какомъ случаѣ нельзя указать того момента, когда запасъ наглядныхъ представленій исчерпывающе достаточенъ.

Если въ первомъ концентрѣ даны наглядныя представленія объ измѣненіи простѣйшихъ функцій, можно ли ожидать, что въ дальнѣйшемъ изученіи функціи достаточно будетъ лишь одного аналитическаго ихъ изслѣдованія безъ чертежа, готоваго или исполненнаго самимъ ученикомъ. Думаю, что нѣтъ, и вотъ почему. Одной изъ цѣлей преподаванія математики является воспитаніе пониманія функціональной зависимости, выраженной аналитически, однимъ изъ средствъ для достиженія такого пониманія является графическое изображеніе той же зависимости. И ошибочно было бы, стремясь къ опредѣленной цѣли, избирать пріемъ осуществляющій цѣль средствомъ ея достиженія. Графическое изображеніе зависимости даетъ намъ картину измѣненій функцій на большомъ протяженіи, создать такую же картину исключительно аналитическимъ изслѣдованіемъ функцій возможно послѣ большого числа упражненій, связывающихъ аналитическое изслѣдованіе съ графическимъ изображеніемъ функцій.

Какъ на другую причину, ограничивающую употребленіе наглядныхъ пособій, можно указать на характеръ математическихъ наукъ, отраженіемъ которыхъ являются преподаваемые въ школѣ предметы. Чтобы выяснить, насколько съ этимъ нужно считаться, отмѣчу хотя бы нѣкоторыя задачи математики, какъ напримѣръ, установленіе и обосновываніе законовъ дѣйствій надъ числами, развитіе понятія о числѣ, расширеніе его за предѣлы цѣлыхъ чиселъ, установленіе пространственныхъ соотношеній, построеніе извѣстной системы, логически вытекающихъ другъ изъ друга предложеній и т. д. Задача школы соотвѣтственно этому заключается въ томъ, чтобы научить ученика логически мыслить и дать ему пространственныя представленія, познакомить съ развитіемъ понятія о числѣ, съ законами дѣйствій и т. д. При обсужденіи этой причины нужно расчленить ее на 2 части: къ первой части нужно отнести то, что касается знакомства съ числомъ, съ дѣйствіями надъ нимъ, функціями и т. п., а къ другой отнести пространственныя соотношенія.

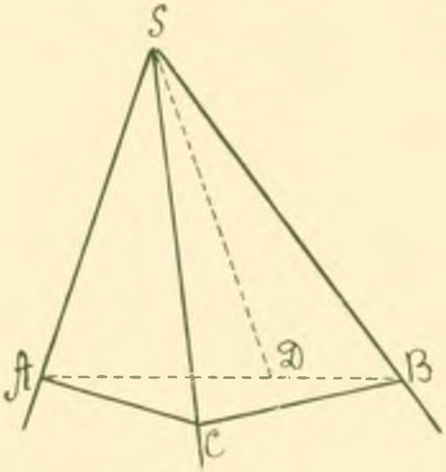
Характеръ науки о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними не требуетъ, вообще говоря, того, чтобы за ея выводами не стояли пространственные образы, а напротивъ того, пространственные образы способствуютъ не только уясненію законовъ дѣйствія надъ числами, но и обобщенію значенія численныхъ соотношеній. Стоитъ лишь установить, что объемъ куба выражается кубомъ числа, измѣряющаго длину его ребра, а объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту, какъ получаемъ непремѣнное слѣдствіе, что кубъ, ребро котораго равно суммѣ двухъ отрѣзковъ, равновеликъ суммѣ объемовъ кубовъ, построенныхъ на каждомъ изъ отрѣзковъ и утроенныхъ объемовъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ и т. д. Никакая таблица не дастъ такого яснаго представленія о скорости возростанія показательной функціи, хотя бы $y=x^2$, какъ соотвѣтствующій ему графикъ. Ясное представленіе о скорости возрастанія членовъ геометрической прогрессіи требуетъ облеченія въ конкретную форму. Законы ариѳметическихъ и алгебраическихъ дѣйствій прекрасно иллюстрируются геометрическими образами. Къ этому надо добавить, что установленіе такихъ соотношеній способствуетъ болѣе прочному запоминанію, устанавливая связь между зрительными образами и численными тождествами.

Отсутствіе наглядныхъ пособій при изученіи свойствъ пространства и протяженій можетъ повести къ искаженію пространственныхъ представленій, если наглядныя пособія не будутъ представлены въ пространствѣ того измѣренія, въ которомъ они изучаются; такъ напримѣръ, имѣя постоянно дѣло съ чертежами, изображающими на плоскости тѣла трехъ измѣреній, можетъ получиться такой эффектъ: ученикъ любую теорему доказываетъ вамъ на чертежѣ манипулируя съ элементами его, какъ съ символами подчиняющимися нѣкоторымъ законамъ, не имѣя однако же никакихъ ассоціацій пространственныхъ, съ нимъ связанныхъ. Въ такъ называемомъ проэкціонномъ черченіи основною теоремою является опредѣленіе длины отрѣзка по его проэкціямъ на 2-хъ плоскостяхъ. Если характеръ движенія проэкцій концовъ отрѣзка при поворотѣ вокругъ оси, перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проэкцій, установленъ безъ наглядныхъ пособій и усвоенъ лишь какъ извѣстнаго рода чертежный пріемъ, то весь от-



Чер. 1.

дѣлъ о поворотѣ фигуръ, тѣлъ, опредѣленій сѣченій и т. д. будетъ представлять изъ себя лишь чертежную, механически воспроизводимую манипуляцію, и воспитанному исключительно на чертежѣ ученику не будетъ рѣзать глазъ такая ошибка, которая находится въ противорѣчіи съ пространственными представленіями. Вопросы симметріи относительно точки на плоскости смѣшаются съ симметріей относительно точки въ пространствѣ. Симметричные трехгранные углы и ихъ несовмѣстимость, дополнительные тѣлесные углы,—все это такого рода представленія, которыя надо связать не только съ чертежомъ на плоскости, но и съ изображеніями ихъ въ пространствѣ трехъ измѣреній, иначе разговоръ о такихъ вещахъ сведется къ словамъ безъ того конкретнаго содержанія, которое должно быть съ ними связано и, напротивъ того, содержаніе словъ будетъ искажено, заключая въ себѣ—какъ основной образъ—чертежъ на плоскости. Еще примѣръ: возьму двѣ теоремы: 1) внѣшній уголъ трехугольника больше внутренняго съ нимъ не смежнаго.. Для доказательства проводятъ медіану AE, строятъ точку F, симметричную A, относительно точки E и все доказательство основываютъ на томъ, что точка A находится внутри угла BCD (чертежъ 1); 2) въ трехгранномъ углѣ сумма двухъ плоскихъ угловъ больше третьяго. Обычно доказательство ведется такъ: имѣемъ трехгранный уголъ $SABC$, пусть $ASB > ASC > BSC$ отложимъ ASC на ASB;



Чер. 2.

проведемъ AB, отложимъ $SC=SD$,соединимъ C съ A и D и такъ далѣе. Или ученикъ долженъ зазубрить именно это построеніе, или если не зазубритъ, то можетъ придумать свое, напримѣръ такое: отложимъ $SD=SC$ и проведемъ плоскость черезъ A, D и C, пусть эта плоскость пересѣчетъ ребро AB въ точкѣ B. Но тутъ учитель въ правѣ остановить ученика вопросомъ: почему вы знаете, что эта плоскость пересѣчетъ ребро AB. Чтобы разобраться въ вопросѣ ученику, понадобится ясное представленіе о томъ, каково возможное взаимное расположеніе плоскости и реберъ. Насколько въ первомъ случаѣ, гдѣ рѣчь идетъ о трехугольникѣ и точкѣ, находящейся внутри внѣшняго угла, и гдѣ все доказательство рушится, если точки F не не окажется внутри угла BCD, это интуитивное представленіе нужно подкрѣпить логическими соображеніями, настолько во 2-ой теоремѣ разсужденіе должно быть подкрѣплено интуитивными представленіями, иначе этотъ образъ будетъ чисто плоскостной и въ немъ ничего пространственнаго не будетъ заключаться. Словомъ, когда мы хотимъ достигнуть пониманія ученикомъ чертежа, нужно слѣдовать такому правилу: сопоставлять пространственные образы съ чертежами и не должно представлять чертежа совершенно обособленно. Только тогда связь между чертежомъ и пространственнымъ образомъ будетъ все болѣе и болѣе закрѣпляться.

До сихъ поръ, говоря о наглядности, мы разсматривали ее главнымъ образомъ съ точки зрѣнія накопленія запаса представленій, устанавливая соотношеніе между образами пространства одного измѣренія съ образами другихъ измѣреній.

Этимъ значеніе наглядныхъ пособій съ точки зрѣнія педагогической науки далеко не исчерпывается. Въ тѣсной связи съ вопросомъ о наглядности обученія стоитъ, конечно, вопросъ о возбужденіи произвольнаго и непроизвольнаго вниманія, о развитіи самодѣятельности учениковъ, о выработкѣ математическихъ идей, которыя согласно Гербарту не апріорны, а вырабатываются опытнымъ путемъ и т. к. Словомъ, тутъ имѣется цѣлый рядъ педагогическихъ требованій, пониманіемъ которыхъ обусловливается правильное употребленіе наглядныхъ пособій. При классномъ преподаваніи это пріобрѣтаетъ особо важное значеніе, потому что мы тамъ встрѣчаемъ учениковъ всевозможныхъ типовъ памяти и своеобразныхъ интересовъ. Это же имѣетъ значеніе нри преподаваніи чисто индивидуальномъ. Употребленіе наглядныхъ пособій не всегда можетъ повлечь хорошіе за собой результаты. Возьмемъ крайность. Если преподаватель будетъ вести всѣ «доказательства» на наглядныхъ пособіяхъ, то это можетъ повести къ нежелательнымъ послѣдствіямъ. Наглядныя пособія не могутъ служить для доказательства, а служатъ лишь иллюстраціей, и это нужно всегда имѣть въ виду. Если мы знакомимъ учениковъ съ пріемомъ доказательства путемъ совмѣщенія фигуръ и если мы ведемъ всѣ доказательства, накладывая въ дѣйствительности одну фигуру на другую, то тутъ мы совершаемъ совсѣмъ другую операцію по сравненію съ той, какая производится при умозрительномъ совмѣщеніи. Если въ одномъ случаѣ могутъ произойти ошибки оттого, что наши органы ощущенія недостаточно развиты, то въ другомъ случаѣ эти ошибки произойти не могутъ. Когда мы совмѣщаемъ 2 равныхъ отрѣзка, то говоримъ, что они совмѣщаются потому, что они равны, потому что это слѣдуетъ изъ опредѣленія равенства отрѣзковъ, между тѣмъ, когда совмѣщаемъ физическимъ образомъ, то говоримъ, что они равны, потому что совмѣстились.

Выдвигая важность знакомства съ педагогикой и психологіей, я думаю, что начинающіе преподаватели математики не обладаютъ имъ, потому что наши высшія учебныя заведенія, гдѣ большинство изъ насъ училось, не даютъ этой спеціальной подготовки, если не считать тѣхъ педагогическихъ кружковъ, которые существуютъ при высшихъ учебныхъ заведеніяхъ,. а между тѣмъ вопросъ о подготовкѣ учителей—одинъ изъ кардинальныхъ вопросовъ. Въ зависимости отъ него будетъ стоять и правильная постановка преподаванія математики и правильное употребленіе наглядныхъ пособій. Вопроса о подготовкѣ учителей я коснусь вскользь. Въ настоящее время какъ будто идея о необходимости подготовки учителя начинаетъ проникать глубоко въ массы, и дѣлаются нѣкоторыя попытки, чтобы вопросъ о подготовкѣ учителя среднихъ учебныхъ заведеній поставить правильно. Такъ, существуютъ курсы военно-учебнаго вѣдомства (9 л.), при округахъ появляются курсы для учителей среднихъ учебныхъ заведеній, возникаютъ нѣкоторыя учебныя заведенія по частной инщіативѣ (Педагогическая Академія, Шелапутинскій институтъ и т. д.) но этихъ послѣднихъ такъ немного, что говорить о серьезномъ вліяніи ихъ на преподаваніе вообще и на преподаваніе математики въ частности, врядъ ли возможно. Что касается курсовъ при округахъ, то постановка ихъ оставляетъ желать очень многаго, такъ какъ тамъ почти все сводится къ практикѣ, не дается почти никакой теоретической подготовки. Я не буду останавливаться на этомъ вопросѣ потому, что онъ послужитъ темой для спеціальныхъ рефератовъ и тамъ будетъ развитъ подробно.

Выше уже упоминалось, что вопросъ о наглядности преподаванія—вопросъ старый, твердо-стоящій, въ теоріи безспорный и только на практикѣ колеблющійся довольно сильно.

Въ чемъ же заключается на практикѣ измѣненіе постановки вопроса о наглядности обученія въ новомъ направленіи?

Отличіе новаго направленія отъ стараго заключается въ желаніи провести принципъ активности въ пользованіе наглядными пособіями въ школѣ. Вопросъ о самодѣятельности учениковъ также не новъ, его касались Руссо, Кантъ, Спенсеръ, Гербартъ. Они говорятъ, что у ученика должно развивать самодѣятельность, инициативу, самобытность мысли. Современная психологія еще тѣснѣе захватываетъ эти вопросы, выдвигая психомоторные моменты, которые еще больше обусловливаютъ необходимость активнаго обученія не только съ точки зрѣнія облегченія пониманія и запоминанія, но и съ точки зрѣнія интереса, возбуждаемаго въ ученикѣ тѣмъ, что онъ самъ что-то дѣлаетъ, самъ творитъ.

Съ точки зрѣнія активности всѣ пособія можно раздѣлить на 2 класса: 1) тѣ пособія, которыя способствуютъ развитію активности ученика и 2) тѣ пособія, которыя обладаютъ пассивными свойствами. Пользованіе активными пособіями слагается изъ двухъ моментовъ—техническаго и геометрическаго. Для того, чтобы сдѣлать что-то, нужно не только обладать техническими пріемами, но и съумѣть выполнить геометрическое построеніе. Если задача состоитъ въ томъ, чтобы склеить какое-нибудь тѣло, то сперва надо вычертить его развертку, выклеить. Насколько тутъ доминирующее значеніе является за вычерчиваніемъ, а процессъ склеиванія простъ, настолько въ нѣкоторыхъ случаяхъ самъ процессъ производства столь сложенъ, что можетъ затмить всѣ математическіе элементы. Поэтому дѣло учителей, которые пользуются активными пріемами нагляднаго обученія, заключается въ томъ, чтобы наиболѣе ярко расчленить 2 момента: теоретическій отъ техническаго. Нужно, чтобы они не смѣшивались, нужно выдѣлить процессъ вычерчиванія въ смыслѣ геометрическомъ отъ техническаго.

Вообще собственно рукодѣліе должно имѣть мѣсто настолько, насколько это нужно для конкретизаціи изучаемаго вопроса, возбужденія интереса, вниманія и т. п.

Поэтому надо отнестись съ большой осторожностью къ тѣмъ пріемамъ проведенія принципа активности, гдѣ на первый планъ выступаетъ ручной трудъ.

Пособія, выставленныя на выставкѣ, какъ просвѣтительными учрежденіями такъ и торгующими фирмами могутъ быть раздѣлены на 2 группы: одни изготовлены въ законченномъ видѣ для иллюстрацій опредѣленныхъ теоремъ, мыслей, идей, другія состоятъ изъ отдѣльныхъ частей, комбинируя которыя можно создавать пособія для каждаго частнаго случая. Одни не носятъ въ себѣ никакой активности, другія вносятъ въ обученіе большую или меньшую долю активности. И тѣ и другія имѣютъ значеніе, и тѣ и другія можно найти на выставкѣ, напримѣръ тутъ есть пособіе Больта, пассивнаго типа, служащее для изученія теоремъ по стереометріи согласно опредѣленному учебнику, и пособіе Блюмеля, которое можетъ быть приспособлено не только къ любому учебнику, но и къ любой теоремѣ и къ рѣшеніе даже задачъ. Если при помощи Больта ученикъ ничего новаго не создасть, то Блюмель отличается тѣмъ, что его не только можно показывать, но учитель можетъ дать приборъ въ руки ученику, и ученикъ можетъ скомбинировать то, что нужно, т. е. самъ построитъ образъ, который нуженъ. Здѣсь несомнѣнно вводится принципъ активности и вводится въ той формѣ, которая является желательной, но тѣмъ не менѣе отказываться отъ перваго рода пособій, которыя изготовлены для опредѣленной цѣли, нельзя. Такого рода пособіямъ мѣсто, главнымъ образомъ, въ педагогическихъ музеяхъ. Они будутъ наталкивать людей, которые будутъ съ ними знакомиться, на новыя мысли, новые пріемы иллюстрацій, они могутъ дать указанія на то, какимъ образомъ изъ такихъ пособій, какъ Блюмель, можно создать нѣчто приспособленное для опредѣленной цѣли. Поэтому въ учебныхъ заведеніяхъ на первомъ планѣ должны стоять тѣ пособія, при помощи которыхъ можно, комбинируя ихъ, получить тѣ или иныя построенія, что же касается до пособій, служащихъ для одной опредѣленной теоремы, то они могутъ быть въ болѣе ограниченномъ количествѣ. Такой подборъ пособій, мнѣ кажется, имѣетъ не только педагогическое, но и экономическое оправданіе.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пособія для опредѣленной теоремы развиваются въ цѣлую обширную группу, какъ напримѣръ, для Пиѳагоровой теоремы. Какъ извѣстно, способовъ доказательства этой теоремы множество и если посмотрѣть, что существуетъ въ этой области въ отношеніи наглядныхъ пособій, то увидимъ тутъ большое число пріемовъ доказательства этой теоремы, гдѣ на ряду съ пособіями, дѣйствительно уясняющими и облегчающими, встрѣчаются такія, которыя надо скорѣе отнести къ числу головоломокъ.

Такія головоломки нельзя причислить къ нагляднымъ пособіямъ, ибо эти послѣднія должны быть просты и понятны настолько, чтобы ученикъ сразу схватилъ бы, въ чемъ тутъ дѣло, какое построеніе нужно сдѣлать, чтобы получить квадратъ, построенный на гипотенузѣ и на катетахъ. Часто встрѣчаются однако-же пособія, которыя являются не пособіями, а головоломками и имъ на нашъ взглядъ не мѣсто въ школѣ.

Знакомство со свойствами отдѣльныхъ пособій не исчерпываетъ однако же вопроса о снабженіи школъ наглядными пособіями въ томъ смыслѣ, чтобы собраніе ихъ составляло нѣчто цѣльное. Если мы посмотримъ на то, что существуетъ въ каталогахъ, нашихъ и заграничныхъ, то увидимъ, что за нѣкоторыми исключеніями въ нихъ перечисленъ рядъ пособій по планиметріи, стереометріи, начертательной геометріи и т. д., но если попробуете найти въ этихъ каталогахъ объединяющую мысль, то это встрѣтитъ затрудненіе.

Мнѣ извѣстны только два автора, дающихъ законченный наборъ пособій по математикѣ—это Кеппъ и Трейтлейнъ, послѣдній является авторомъ методики геометріи и потому его пособія заслуживаютъ особеннаго вниманія. Въ остальныхъ случаяхъ мы такой системы въ каталогахъ не встрѣчаемъ.

Выставочная комиссія, которая работала по устройству нынѣ открытой выставки, старалась разобраться въ этомъ матеріалѣ и старалась какъ-нибудь разгруппировать пособія.

Результаты ея работъ могутъ быть въ общихъ чертахъ сведены къ слѣдующей группировкѣ пособій въ школѣ.

А. Пособія, иллюстрирующія логическіе пріемы мышленія и методологическіе пріемы доказательства.

Въ числѣ этихъ пособій отмѣчу пособіе для иллюстраціи анализа и синтеза древнихъ.

Если возьмемъ генеалогическое дерево и захотимъ установить, является ли Иванъ Ивановичъ потомкомъ Петра Петровича, то можно этотъ вопросъ разрѣшить 2 путями: или итти отъ потомковъ къ предкамъ, или наоборотъ. Если пойдемъ отъ предковъ къ потомкамъ, то число путей, по которымъ нужно изслѣдовать нашъ вопросъ, по мѣрѣ того, какъ поднимается генеалогическое дерево вверхъ, все болѣе и болѣе увеличивается, и если пропустить какой-нибудь изъ этихъ путей, то можетъ случиться, что мы не въ состояніи будемъ установить эту связь. Можетъ быть и другой путь—отъ потомковъ къ предкамъ, отъ сына къ отцу и т. д. Въ этомъ случаѣ путь становится вполнѣ опредѣленнымъ. Здѣсь выставлено пособіе для иллюстраціи анализа и синтеза: взяты 2 теоремы — 1) внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ прямыхъ равны между собою и 2) прямая, проведенная въ треугольникѣ, параллельно одной сторонѣ, отсѣкаетъ подобный треугольникъ. Между ними можно установить связь аналитическимъ и синтетическимъ путемъ:

А. Аналитическій путь.

I примѣръ: чтобы вывести теорему—«прямая, проведенная внутри △-ка, || какой-нибудь его сторонѣ, отсѣкаетъ отъ него другой △-къ подобный первому»,

надо знать, что:

2 многоугольника съ одинаковымъ числомъ сторонъ называются подобными, если углы одного соотвѣтственно = угламъ другого и сходственныя стороны пропорціональны;	общею мѣрою 2-хъ отрѣзковъ называется такой отрѣзокъ, который укладывается цѣлое число разъ въ 2-хъ данныхъ:	если на одной сторонѣ ∠ отложить равныя части и черезъ точки дѣленія провести || прямыя до пересѣченія съ другой стороной угла, то на этой сторонѣ отсѣкутся равныя части;	2 отрѣзка называются соизмѣримыми, если они имѣютъ общую мѣру, и несоизмѣримыми, когда они общей мѣры не имѣютъ:	отношеніемъ 2 значеній А и В одной и той же величины называется число, измѣряющее А, когда В принято за единицу

↓

Если 2 || прямыя пересѣчены третьей, то соотвѣтственные углы равны между собою.

↓

Если 2 || пересѣчены третьей, то внутренніе накрестъ-лежащіе ∠ равны между собою.

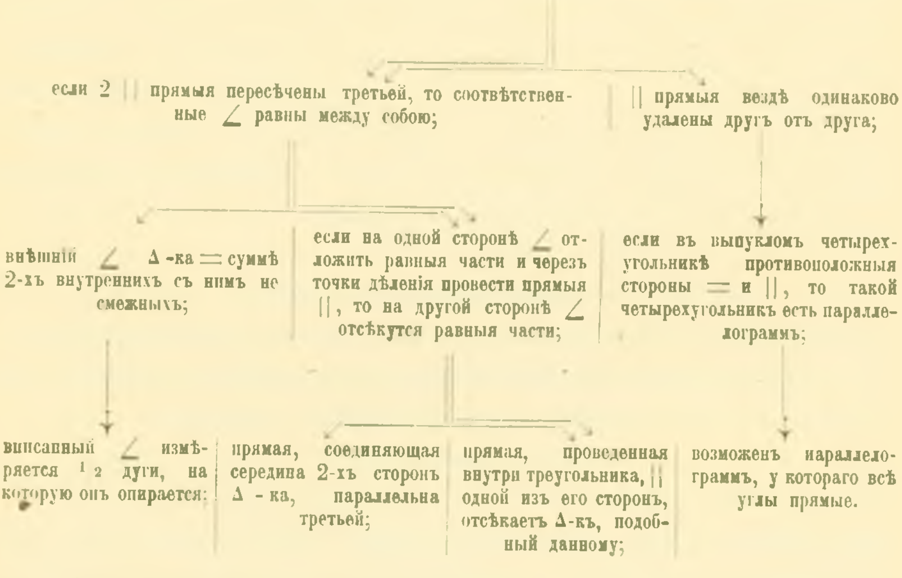
II примѣръ [*]: чтобы вывести теорему—«существуютъ подобные △-ки съ произвольнымъ (раціональнымъ или ирраціональнымъ) коэффиціентомъ пропорціональности сторонъ», надо знать что:

2 прямыя, разъ пересѣкшись, вторично не пересѣкутся;

если существуютъ въ одной плоскости 2 прямыя не пересѣкающіяся, то сѣкущая образуетъ съ ними равные соотвѣтственные углы.

Б. Синтетическій путь.

Зная теорему: «Если двѣ || прямыя пересѣчены третьей, то внутренніе накрестъ-лежащіе ∠∠ равны между собою» и идя по пути, указанному стрѣлками, можно вывести 4 слѣдствія:



если 2 || прямыя пересѣчены третьей, то соотвѣтственные ∠ равны между собою;

|| прямыя вездѣ одинаково удалены другъ отъ друга;

внѣшній ∠ Δ-ка = суммѣ 2-хъ внутреннихъ съ нимъ не смежныхъ;

если на одной сторонѣ ∠ отложить равныя части и черезъ точки дѣленія провести прямыя ||, то на другой сторонѣ ∠ отсѣкутся равныя части;

если въ выпукломъ четырехугольникѣ противоположныя стороны = и ||, то такой четырехугольникъ есть параллелограммъ;

вписанный ∠ измѣряется $^{1}/_{2}$ дуги, на которую онъ опирается;

прямая, соединяющая середина 2-хъ сторонъ Δ-ка, параллельна третьей;

прямая, проведенная внутри треугольника, || одной изъ его сторонъ, отсѣкаетъ Δ-къ, подобный данному;

возможенъ параллелограммъ, у котораго всѣ углы прямые.

Двойныя стрѣлки указываютъ путь, по которому надо итти, чтобы вывести 3-ье слѣдствіе.

Къ этой же группѣ пособій можно отнести всѣ пособія, служащія для иллюстраціи метода косвенныхъ измѣреній при вычисленіи площадей, объемовъ, а также и нѣкоторыхъ отрѣзковъ и т. п.

---

[*] См. Клифордъ, «Здравый смыслъ точныхъ наукъ».

Б. Пособія, иллюстрирующія идеи, касающіяся пространственныхъ представленій и числа.

Къ этой группѣ относятся пособія, служащія для выясненія идеи равенства и равновеликости, устанавливаемой разными путями (разрѣзаніе и перекладываніе, сдвигъ) и т. п. Сюда же можно отнести и иллюстраціи идеи симметріи. На этой группѣ пособій я остановлюсь подробнѣе, какъ на примѣрѣ детальной разработки въ наглядныхъ пособіяхъ одного вопроса.

Вотъ послѣдовательный ходъ ознакомленія съ этой идеей.

Симметрія относительно точки на плоскости: кружки одного цвѣта на пучкѣ прямыхъ указываютъ на симметрію относительно точки пересѣченія прямыхъ.

Симметрія относительно точки на плоскости: вершины параллелограмма и его стороны симметричны относительно его центра. Діагонали—элементы пучка прямыхъ.

Симметрія относительно точки въ пространствѣ: шарики одного цвѣта на связкѣ прямыхъ указываютъ на симметрію относительно общей точки пересѣченія прямыхъ.

Симметрія относительно точки въ пространствѣ:

а) вершины куба и его грани симметричны относительно его центра. Діагонали—элементы связки прямыхъ;

б) трехгранные углы—симметричные, но не совмѣстимые;

в) трехгранные углы—совмѣстимые, но не симметричные.

Симметрія относительно прямой на плоскости: кружки и прямыя одного цвѣта указываютъ на симметричные элементы.

Симметрія относительно прямой на плоскости: симметрія «змѣя» относительно одной оси и ассиметрія относительно другой.

Симметрія относительно прямой на плоскости: симметрія эллипса относительно двухъ діаметровъ и ассиметрія относительно другихъ.

Симметрія относительно оси въ пространствѣ: части конической поверхности симметричны относительно прямой пересѣченія пучка плоскостей.

Симметрія относительно плоскости въ пространствѣ: шарики и прутья одного цвѣта указываютъ на симметричные элементы.

Симметрія относительно плоскости въ пространствѣ: двѣ развертывающіяся поверхности, симметричныя относительно плоскости.

Къ группѣ В относятся также пособія для иллюстраціи понятія о дробномъ числѣ, законовъ ариѳметическихъ дѣйствій и т. д.

В. Пособія, иллюстрирующія отдѣльныя теоремы и дѣйствія.

Этого рода пособія являются наиболѣе распространенными и знакомыми, останавливаться на нихъ долго я не буду, укажу лишь нѣсколько примѣровъ, какъ-то—пособія для иллюстраціи равновеликости пирамидъ съ равновеликими основаніями и равными высотами, коническія сѣченія, квадратъ и кубъ двучлена и трехчлена и т. п.

Г. Пособія для воспитанія новыковъ.

Къ нимъ относятся приборы для воспитанія умѣнія оцѣнивать на глазъ углы (ученикъ повѣряетъ при помощи такого прибора величину угла зрѣнія, оцѣненнаго имъ предварительно на глазъ) длины, объемы и т. д.

Е. Къ послѣдней группѣ могутъ быть отнесены пособія, служащія для измѣренія длинъ, угловъ объемовъ и площадей, при помощи которыхъ могутъ происходить практическія занятія ученика и въ классѣ и въ полѣ, благодаря чему создается съ одной стороны интересъ къ работѣ, а съ другой ученику приходится рѣшать задачи, въ которыхъ онъ будетъ имѣть не ничего не говорящія ему числа, а добытыя имъ самимъ путемъ измѣреній, и, слѣдовательно, связанныя съ опредѣленными пространственными представленіями.

Къ этимъ пособіямъ могутъ быть отнесены мѣры длины, объемовъ жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ, сюда же относятся и приборы для рѣшенія задачъ, связанныхъ съ опредѣленіемъ положенія точки на мѣстности, превышенія одной точки надъ другой, положенія небесныхъ свѣтилъ и т. д. Для этой цѣли могутъ служить полевой угломѣръ Омана вмѣстѣ съ принадлежностями для измѣренія длинъ на мѣстности и опредѣленія угловъ возвышеній, и квадрантъ Манта для астрономическихъ задачъ.

Въ заключеніе хотѣлось бы вспомнить мысль, впервые высказанную Кантомъ—ребенокъ долженъ умѣть различать знаніе отъ мнѣнія и вѣрованія. Эти слова накладываютъ на насъ обязательство, широко примѣняя наглядныя пособія, въ то же время всегда разграничивать интуитивныя воспріятія отъ логически обоснованнаго вывода.

Съ другой стороны не будемъ забывать словъ Гербарта—«всякій долженъ быть виртуозомъ въ своей спеціальности, но всѣ должны имѣть вкусъ ко всѣмъ вещамъ.» Для достиженія же широкаго распространенія математическихъ занятій въ массахъ надо, чтобы преподаватель математики былъ широко образованъ педагогически.

Позвольте мнѣ принести благодарность той молодежи, учащейся въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, которая очень помогла осуществить нашу выставку наглядныхъ пособій».

Тезисы.

1. Необходимость наглядныхъ пособій въ начальномъ обученіи математикѣ признается всѣми; что касается до среднихъ и высшихъ ступеней обученія, то тутъ введеніе наглядныхъ пособій становится все болѣе и болѣе спорнымъ и ограниченнымъ.

2. Ограниченность употребленія наглядныхъ пособій на болѣе высшихъ ступеняхъ обученія объясняется, во 1-хъ, причинами психологическаго характера, во 2-хъ, характеромъ науки, въ 3-хъ, несовершенствомъ пособій, въ 4-хъ, неподготовленностью учителей.

3. Развитіе способности отвлеченнаго мышленія не исключаетъ однако же значенія наглядныхъ пособій, а лишь передвигаетъ потребность въ наглядныхъ пособіяхъ въ новыя болѣе сложныя области.

4. Запасъ представленій, вынесенныхъ изъ низшей ступени обученія, не можетъ быть достаточнымъ для послѣдующихъ, даже въ томъ случаѣ, если курсы построены концентрически.

5. Характеръ науки о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними не требуетъ вообще говоря того, чтобы за ея выводами не стояли пространственные образы.

6. Отсутствіе наглядныхъ пособій при изученіи свойствъ

пространства и протяженій можетъ повести къ искаженію пространственныхъ представленій.

7. Учителя среднихъ школъ, окончившіе высшіе уч. заведенія, обладая научными знаніями, не имѣютъ ни методической подготовки, ни знанія основныхъ положеній педагогики, вслѣдствіе чего у нихъ нѣтъ критерія для оцѣнки значенія наглядныхъ пособій.

8. Современная педагогика занята проведеніемъ въ школу принципа самодѣятельности ученика, наряду съ чѣмъ замѣчается стремленіе замѣнить пассивныя наглядныя пособія по математикѣ—активными.

9. Пользованіе активными наглядными пособіями соединено съ преодолѣваніемъ техническихъ и логическихъ трудностей.

10. Техническія трудности могутъ быть вносимы лишь постольку, поскольку они не затемняютъ цѣли пользованія пособіемъ.

11. Наглядныя пособія, какъ осуществленіе педагогической мысли, отстаютъ отъ нея.

12. Пособія могутъ быть подраздѣлены на 2 группы: 1) изготовленныя для иллюстраціи отдѣльныхъ теоремъ и 2) подвижныя,—пригодныя въ разныхъ комбинаціяхъ для иллюстраціи группы явленій.

13. Мѣсто пособій 1 рода главнымъ образомъ въ музеяхъ. Значеніе ихъ тамъ—служить примѣромъ, наталкивающимъ на новые пріемы обученія.

14. Пособія II рода лучше могутъ обслуживать школы, нежели I рода, сокращая количество пособій въ школахъ и способствуя проведенію принципа активности ученика. Тѣмъ не менѣе ограничиться пособіями II рода нельзя.

15. Нѣкоторыя наглядныя пособія заходятъ за предѣлы школьныхъ наглядныхъ пособій, переходя въ различные виды головоломокъ и въ такомъ видѣ не могутъ способствовать развитію логическаго мышленія.

16. Пособія по математикѣ должны быть планомѣрно разработаны въ цѣлое: кабинетъ математическихъ пособій. Промышленность же даетъ наборъ пособій, не объединенныхъ руководящей мыслью.

17. Слѣдуя работамъ выставочной комиссіи Съѣзда, можно въ слѣдующихъ общихъ чертахъ намѣтить планъ математическаго кабинета при средней школѣ:

А) Пособія, иллюстрирующія логическіе пріемы мышленія и методологическіе пріемы доказательствъ.

Б) Пособія, иллюстрирующія идеи, касающіяся пространственныхъ представленій и числа.

С) Пособія, иллюстрирующія отдѣльныя теоремы и дѣйствія.

Д) Пособія, служащія для воспитанія навыковъ.

Е) Приборы для измѣренія длины, угловъ, объемовъ, площадей и т. п., какъ матеріала для вычисленія.

Пренія по докладамъ А. Н. Смирнова и Д. Э. Теннера.

Н. А. Рейнольскій (Кострома). „Я позволю себѣ высказаться по поводу одного доказательства теоремы: въ трегранномъ углѣ каждый плоскій уголъ меньше суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ. Докладчикъ сказалъ, что если мы проведемъ грань извѣстнымъ способомъ, его способомъ, то эта грань можетъ идти параллельно одному изъ реберъ 3-граннаго угла. Этого мы можемъ избѣжать и найти болѣе наглядное доказательство, которое я и желалъ бы здѣсь показать“. (Чертитъ на доскѣ и объясняетъ *)

„Относительно наглядныхъ пособій я долженъ сказать, что наглядность можетъ быть графическая и геометрическая, но наглядность должна состоять и въ упрощеніи доказательствъ, и въ полнотѣ изслѣдованія того или иного вопроса, что у насъ отсутствуетъ обыкновенно въ геометріи. Напр., мы изслѣдуемъ 4 теоремы о наклонныхъ: 2 прямыхъ и 2 обратныхъ. Для такой же теоремы, какъ теорема Пиѳагора, которая служить основой геометрическихъ и тригонометрическихъ вычисленій, мы имѣемъ одно прямое положеніе, между тѣмъ какъ обратнаго нѣтъ, т. е. нѣтъ положенія: если квадратъ, построенный на одной сторонѣ треугольника, равно великъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на

---

*) Способъ доказательства, указанный г. Рейнольскимъ, позволяетъ избѣжать ошибку учебника Киселева (см. стр. 229, докладъ Теннера); это доказательсво можно найти, напр., въ Элементахъ Геометріи Филипса и Фишера, пер. съ англ. Другія видоизмѣненія встрѣчаются у Borel'a, Bourlet и др. *Прим. ред.*

двухъ другихъ сторонахъ, то такой треугольникъ долженъ быть прямоугольнымъ“.

Д. М. Левитусъ (Спб.). „Мое замѣчаніе будетъ относиться къ той части доклада, гдѣ рѣчь идетъ о среднихъ и старшихъ классахъ. Дѣйствительно, тѣ пріемы, которыми мы часто пользуемся съ учениками младшихъ классовъ, по цѣлому ряду соображеній оказываются непримѣнимыми для среднихъ и старшихъ классовъ. Мнѣ была предоставлена возможность произвести съ учениками среднихъ и старшихъ классовъ нѣсколько геодезическихъ упражненій во время экскурсій. Я очень сожалѣю, что недостатокъ времени у Съѣзда не позволяетъ мнѣ сдѣлать по этому вопросу спеціальный докладъ, но я долженъ отмѣтить, что работы учениковъ по установкѣ приборовъ по уровню и по провѣркѣ инструментовъ требуютъ углубленія въ область пространственныхъ представленій. Работая въ полѣ, ученики получаютъ возможность лишній разъ заставить себя продумать цѣлый рядъ геометрическихъ положеній, и мнѣ кажется, что геодезическія упражненія могли бы имѣть большую пользу въ дѣлѣ обученія и замѣнить собою наглядныя пособія въ старшихъ классахъ. При этомъ долженъ прибавить, что я никоимъ образомъ не предполагаю въ какой бы то ни было формѣ вводить геодезію въ курсъ средней обще-образовательной школы; рѣчь идетъ только о двухъ-трехъ экскурсіяхъ, но экскурсіи эти могутъ принести большую пользу ученикамъ.“

А. Р. Кулишеръ (Спб.). „Въ докладѣ Д. Э. Теннера было показано многообразіе способовъ, служащихъ для возбужденія при помощи наглядныхъ пособій представленій отвлеченнаго характера. Мы слышали далѣе отъ Д. М. Левитуса, что въ старшихъ классахъ съ цѣлью углубленія отвлеченныхъ понятій можно пользоваться геодезическими измѣреніями. Значеніе наглядныхъ пособій при обученіи математикѣ заключается, конечно, не въ разсматриваніи или копированіи, а въ этомъ подготовленіи къ отвлеченію. Поэтому въ тѣхъ школахъ, гдѣ пособія изготовляются самимъ ученикомъ, занятія надо вести такъ, чтобы техническая сторона изготовленій пособій не заслоняла внутренней ихъ стоимости, заключающейся, какъ сказано, въ подготовкѣ ученика къ воспріятію отвлеченныхъ понятій“.

„Мнѣ пришлось 2 года тому назадъ заграницей пересмотрѣть очень многое, относящееся къ наглядности, начиная отъ самыхъ низшихъ ея ступеней и кончая университетами, и видѣть тутъ очень интересные примѣры. Въ Мюнхенскомъ университетѣ, гдѣ читаетъ Ф. Линдеманъ, нашелся проф. Делеманъ, который со своими студентами готовитъ наглядныя пособія въ родѣ привезенныхъ сюда изъ одной изъ Костромскихъ гимназій, но, разумѣется, относящихся къ болѣе сложной области преподаванія. И Делеманъ не опасается, несмотря на неполное признаніе его товарищами этой части его работы, что такой наглядностью будто бы понизится способность студентовъ воображать пространственныя соотношенія“.

„У каждаго изъ учениковъ могутъ быть и, конечно, имѣются представленія и безъ наглядныхъ пособій, но у класса, какъ цѣлаго, вообще говоря, не имѣется одного общаго представленія относительно того или другого геометрическаго образа, и учитель съ учениками въ области представленій говорятъ зачастую на разныхъ языкахъ. Съ этой точки зрѣнія на всѣхъ ступеняхъ наглядныя пособія всегда будутъ полезны. Это—необходимый способъ для того, чтобы установить общій языкъ между преподавателемъ, являющимся одной изъ главныхъ единицъ въ классѣ и остальными единицами, не менѣе существенными, какими являются ученики. Вотъ, мнѣ кажется, та точка зрѣнія, съ которой намъ придется считаться далѣе не на этомъ только Съѣздѣ, но и на 5, 6 или 7-омъ.“

М. Е. Волокобинскій (Рига). „Я отмѣчу въ высшей степени важную часть доклада Д. Э. Теннера—попытку ввести психологическія основанія въ пользованіе разными наглядными пособіями. Эта попытка заняла много времени и быть можетъ, благодаря этому, остальная часть разбора пособій была произведена на скорую руку“.

„Дѣйствительно, если мы хотимъ пользоваться пособіями, намъ необходимо имѣть сознаніе, что это психологически полезно. Бываютъ моменты, что пособія затемняютъ сознаніе учениковъ, притупляютъ его. Сдѣлать такого рода психологическій анализъ и попытался г. Теннеръ. Заграницей это постоянно дѣлается, и еще въ началѣ этой осени мнѣ пришлось слышать отъ австрійскихъ педагоговъ, что они заняты вопросомъ—подвести психологическій фундаментъ къ пользованію тѣми или иными наглядными пособіями. Заграницей существуетъ по этому вопросу громадная литература, и очень жаль, что г. Теннеръ, отрѣшившись отъ этихъ крупныхъ попытокъ, особенно въ Германіи, сталъ на точку зрѣнія рядового русскаго преподавателя и захотѣлъ сдѣлать самостоятельный психологическій анализъ безъ связи съ попытками за рубежомъ. Я прослушалъ съ большимъ удовольствіемъ эту попытку все-таки самостоятельнаго рѣшенія; правда, она ничего не дала: заграницей пособія различаются по системѣ школъ и методу, по которому построены тѣ или иныя группы пособій. Между сторонниками этихъ группъ пособій происходятъ тренія, борьба, споры, по какому принципу пособія построить лучше, хуже и т. д. Здѣсь же докладчикъ, отрѣшившихъ отъ зарубежной точки зрѣнія, ставъ на обывательскую, всѣ эти пособія сливаетъ въ одно. Такъ что, если съ одной стороны эта попытка — самостоятельно рѣшить вопросъ—въ высшей степени пріятна, съ другой стороны намъ нужно будетъ познакомиться хорошо съ тѣмъ, что дѣлается въ зарубежныхъ областяхъ, чтобы мы, изучивши такимъ образомъ подробно вопросъ, могли бы самостоятельно итти далѣе. Поэтому я выражаю пожеланіе, чтобы заграничная литература, которая имѣется по этому предмету, переводилась на рускій языкъ.“

ПЯТОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

31 декабря 10$^1/_2$ ч. дня.

Въ предсѣдатели избраны проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской и пр.-доц. В. В. Бобынинъ. Въ почетные секретари — А. П. Киселевъ.

XV. Элементы теоріи чиселъ въ средней школѣ.

Докладъ І. И. Чистякова (Москва).

«Математика—царица наукъ и ариѳметика—царица математики»—говоритъ Гауссъ. Подъ именемъ ариѳметики геніальный авторъ «Disquisitiones arithmeticae» разумѣетъ ариѳметику теоретическую или, точнѣе, теорію чиселъ, науку, изучающую свойства цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Мы здѣсь занимаемся пересмотромъ учебнаго матеріала, при этомъ является естественнымъ желаніе заглянуть и въ уголокъ учебнаго курса. Спросимъ себя, какія цѣли нами преслѣдуются при преподаваніи ариѳметики? Ариѳметика изучается у насъ въ наиболѣе распространенномъ типѣ учебныхъ заведеній въ младшихъ классахъ. Затѣмъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ она проходится лишь въ выпускномъ классѣ, гдѣ полагается рѣшить нѣсколько вопросовъ изъ теоретической ариѳметики.

При преподаваніи ариѳметики въ младшихъ классахъ преслѣдуется чисто практическая цѣль, а именно: имѣютъ въ виду научить учащихся производить дѣйствія надъ всевозможными цѣлыми и дробными числами, надъ составными именованными числами, а также—рѣшать придуманныя спеціально задачи квази-практическаго характера: на вычисленіе времени, проценты, составленіе смѣсей (безъ прибыли и убытка!) и т. п. Единственная статья теоретическаго характера — о дѣлимости чиселъ — проходится лишь съ цѣлью дальнѣйшаго практическаго примѣненія и не сопровождается упражненіями, которыя производились бы не механически, а заставляли бы ученика размышлять. Я замѣчалъ, что ученики, изучающіе этотъ отдѣлъ, попадаютъ въ затруднительное положеніе при рѣшеніи задачъ вродѣ слѣдующей: «дѣлимое 100, остатокъ 6, найти дѣлителя и частное». Точно также ихъ затрудняютъ задачи конкретнаго содержанія, въ которыхъ приходится найти наименьшее кратное или общаго наибольшаго дѣлителя. Нѣсколько странно, что учебныя пособія по ариѳметикѣ не даютъ подходящихъ конкретныхъ примѣровъ, хотя на необходимость конкретизаціи этихъ вопросовъ много разъ указывалось.

Знакомство со свойствами цѣлыхъ чиселъ не много подвигается впередъ. Свѣдѣніями изъ алгебры учащіеся рѣдко пользуются при ариѳметическихъ выкладкахъ. При вычисленіи выраженій вида $\sqrt{a^2-b^2}$ лишь немногіе прибѣгаютъ къ разложенію на множители подкоренного выраженія. Въ выпускномъ классѣ, какъ было упомянуто, полагается повторить ариѳметику съ прибавленіемъ нѣкоторыхъ статей теоретическаго характера. Этимъ какъ бы предполагается подвести фундаментъ подъ ариѳметическія познанія. На все это отпускается слишкомъ мало времени, едва ли болѣе $^1/_2$ часа въ недѣлю.

Относительно содержанія теоретическихъ статей оффиціальная программа говоритъ слѣдующее: «при повтореніи доказываются основныя теоремы о дѣлимости чиселъ; теоремы, на которыхъ основывается нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго двумя способами; теоремы, дающія необходимыя и достаточныя условія обращенія обыкновенныхъ несократимыхъ дробей въ десятичныя и періодическія». Въ реальныхъ училищахъ въ курсъ ариѳметики VII класса включено еще рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ; въ программахъ же гимназій эта часть относится къ алгебрѣ. Я попробовалъ справиться въ объяснительной запискѣ, что разумѣется подъ именемъ основныхъ теоремъ о дѣлимости чиселъ, и былъ не мало удивленъ, когда узналъ, что подъ теоремами о дѣлимости подъ теоремами о дѣлимости чиселъ слѣдуетъ разумѣть теоремы: 1) если число дѣлитъ каждое слагаемое порознь, то оно дѣлитъ и сумму ихъ; 2) если число дѣлить нацѣло сумму двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ, то оно дѣлитъ и другое слагаемое. Эти двѣ теоремы даютъ необходимое и достаточное условіе дѣлимости на данное число. Подъ теоремами, на которыхъ основывается нахожденіе наименьшаго кратнаго и общаго наибольшаго дѣлителя, должно понимать теоремы, служащія для доказательства возможности разложить число на первоначальныхъ множителей только однимъ способомъ. Независимо отъ того, что перечисленныя теоремы представляютъ собою незначительное пополненіе элементарнаго курса, едва ли даже и самую формулировку ихъ можно признать удачной и ясной. Одна теорема говоритъ о дѣлимости суммы, а другая— одного изъ слагаемыхъ, и обѣ вмѣстѣ онѣ не могутъ относиться къ одному и тому же случаю. Да и вообще всѣ теоремы о дѣлимости лучше выводить изъ разсмотрѣнія дѣленія съ остаткомъ. Но я не буду входить въ подробную критику этого матеріала; скажу только о результатахъ его изученія. Когда я присутствовалъ на экзаменахъ гимназистовъ и реалистовъ выпускного класса по ариѳметикѣ, то вынесъ впечатлѣніе, что она является для нихъ обремененіемъ, но не развитіемъ въ смыслѣ расширенія знакомства со свойствами чиселъ. Когда, напр., я предлагалъ такую задачу: «сумма двухъ чиселъ равна 96, а общій наибольшій дѣлитель—12; найти эти числа», то учащіеся не умѣли даже приступить къ рѣшенію этого вопроса. Въ общемъ, развитіе числовыхъ понятій у нашихъ учащихся весьма слабо, оно не увеличивается и въ случаѣ, когда теоретическая ариѳметика проходится болѣе подробно. Такъ, на конкурсныхъ экзаменахъ въ Императорскомъ Московскомъ Инженерномъ Училищѣ, гдѣ я принимаю участіе въ качествѣ экзаменатора, требуется знаніе теоретической ариѳметики по широкой программѣ. Учащіеся знаютъ множество теоремъ о числахъ, но я замѣтилъ слабость числовыхъ представленій и понятій у нихъ, что напоминаетъ объ отсутствіи у учащихся стереометрическихъ представленій; на вопросъ: будетъ ли двугранный уголъ между боковыми гранями правильной четыреугольной пирамиды острымъ, прямымъ или тупымъ можно получить и тотъ, и другой, и третій отвѣтъ; на вопросъ, будетъ ли $\sqrt[10]{10}$ равенъ, больше или меньше единицы, учащіеся могутъ дать всѣ три отвѣта. Нерѣдко можно констатировать тотъ печальный фактъ, что наши учащіеся знаютъ о свойствахъ цѣлыхъ чиселъ меньше, чѣмъ о логариѳмахъ, о непрерывныхъ дробяхъ. Мало помогаетъ дѣлу и прохожденіе неопредѣленныхъ уравненій, куда бы ихъ ни ставила оффиціальная программа,—въ курсъ алгебры или ариѳметики.

Между тѣмъ, такое пренебреженіе къ знанію свойствъ цѣлыхъ чиселъ идетъ прежде всего въ разрѣзъ съ исторіей науки. Свойствами цѣлыхъ чиселъ: дѣлимостью, простѣйшими числовыми функціями и пр. люди интересовались во всѣ времена. Вокругъ свойствъ цѣлыхъ чиселъ возникали суевѣрія, но возникали и глубокія философскія системы. Изученіе свойствъ цѣлыхъ чиселъ имѣло важное значеніе для развитія всѣхъ частей математической науки; говорятъ, что самое открытіе Пиѳагоровой теоремы, которое въ дальнѣйшемъ имѣло благопріятное вліяніе на развитіе анализа, можетъ быть поставлено въ связь съ открытіемъ подходящей комбинаціи цѣлыхъ чиселъ. Совсѣмъ недавно Георгъ Канторъ изъ разсмотрѣнія натуральнаго ряда чиселъ создалъ ученіе о множествахъ и числахъ трансфинитныхъ, а Кронекеръ сдѣлалъ замѣчательную попытку вывести математическія понятія изъ единаго понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. Несомнѣнно, что теорія чиселъ имѣетъ не менѣе важное въ смыслѣ развитія значеніе, чѣмъ многіе отдѣлы математики, изучаемые въ настоящее время, такъ какъ объектомъ изученія здѣсь является цѣлое положительное число, т. е. понятіе наиболѣе простое, съ которымъ учащіеся знакомятся ранѣе всего. Ознакомленіе со свойствами чиселъ очень часто представляетъ для учащихся большой интересъ: это подтверждается, напр., результатомъ анкеты, предпринятой въ 1905 году между выдающимися математиками журналомъ «L'Enseignement mathématique». Первый вопросъ этой анкеты былъ такой: въ какомъ возрастѣ по вашимъ воспоминаніямъ и при какихъ обстоятельствахъ у васъ пробудился интересъ къ математикѣ? Изъ весьма большого количества отвѣтовъ оказывается, что этотъ интересъ чаще всего возникаетъ въ возрастѣ отъ 11 до 15 лѣтъ и преимущественно при рѣшеніи задачъ относительно свойствъ чиселъ. Я не имѣлъ смѣлости принять участіе въ названной анкетѣ, но я живо помню моментъ, когда у меня пробудился интересъ къ математикѣ. Во 2-мъ классѣ гимназіи мнѣ попалась такая задача: доказать, что всякое абсолютно простое число, будучи увеличено, или уменьшено, на единицу, дѣлится на 6. Мнѣ удалось это доказать, что доставило мнѣ большую радость. Послѣ этого меня крайне заинтересовалъ вопросъ, почему именно пятая степень всякаго числа оканчивается на ту же цифру, какъ и первая? И хотя доказать этого мнѣ тогда не удалось, интересъ къ математикѣ у меня уже не ослабѣвалъ. Въ біографіи недавно скончавшагося профессора, знаменитаго русскаго ученаго проф. Вороного, сообщается, что у него появился интересъ къ математикѣ, когда ему удалось рѣшить задачу числового характера, помѣщенную въ «Журналѣ Элементарной Математики», издававшемся проф. В. П. Ермаковымъ, и это опредѣлило направленіе всей его научной дѣятельности.

На задачахъ, касающихся свойствъ чиселъ, я позволю себѣ остановиться нѣсколько подробнѣе. Вопросы подобнаго рода почти не встрѣчаются въ нашихъ алгебраическихъ и ариѳметическихъ задачникахъ, но они разсѣяны по математическимъ хрестоматіямъ, фигурируютъ въ сборникахъ темъ, якобы предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ, распространяются между учащимися путемъ устной передачи; ихъ можно встрѣтить въ математическихъ журналахъ, напр. въ «L'education mathématique» и «Gournal de mathématiques élémentaires», издаваемыхъ Vuibest'омъ въ Парижѣ; въ «Leitschrift für math. und naturwiss. Unterrchit» Hoffman'а и др. Онѣ составляютъ значительный процентъ задачъ, помѣщаемыхъ для учащихся въ журналѣ «Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики». Я пользуюсь случаемъ напомнить собранію, что съ момента возникновенія этого высоко полезнаго журнала исполнилось ровно 25 лѣтъ. Названныя задачи обыкновенно касаются вида чиселъ, дѣлящихся на то или иное число, простѣйшихъ числовыхъ функцій, раціональныхъ выраженій для элементовъ треугольниковъ и т. д. Для рѣшенія такихъ задачъ учащіеся, незнакомые съ основами теоріи чиселъ, не имѣютъ общихъ методовъ и должны пользоваться разными искусственными примитивными пріемами, вродѣ разложенія на множители, рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій и т. п. Это имѣетъ и выгодную сторону, такъ какъ при пользованіи искусственными пріемами изощряется изобрѣтательность учащихся, и невыгодную, такъ какъ много энергіи тратится на преодолѣваніе затрудненій, которыя при большемъ запасѣ знаній изъ теоретической ариеметики не возникали бы. Получается нѣкоторая аналогія съ тѣмъ, что недавно еще имѣло мѣсто въ области задачъ на построеніе. Извѣстно, что раньше онѣ рѣшались безъ общихъ методовъ, каждая въ отдѣльности; есть и сейчасъ еще сборники задачъ на построеніе, въ которыхъ онѣ не приведены въ систему. Однако, нѣсколько десятковъ лѣтъ тому назадъ Петерсенъ за границей и Иванъ Ивановичъ Александровъ у насъ въ Россіи разработали общіе методы ихъ рѣшенія, и съ тѣхъ поръ оно было поставлено на твердый фундаментъ и сдѣлалось полезною частью учебнаго матеріала. Подобнымъ же подведеніемъ фундамента подъ задачи названнаго типа было бы ознакомленіе учащихся съ элементами теоріи чиселъ. Оно позволило бы углубить и расширить эту область упражненій, которыя пока по необходимости касаются довольно ограниченнаго круга темъ.

Но въ защиту введенія въ среднеучебный курсъ свѣдѣній изъ теоріи чиселъ, можно привести и другія соображенія. Однимъ изъ нихъ является и предстоящее введеніе въ курсъ средней школы понятія о функціяхъ и объ ихъ измѣненіи. При этомъ необходимо прійдется пользоваться понятіемъ о непрерывности. Но было бы слишкомъ одностороннимъ знакомить учениковъ только съ функціями, измѣняющимися непрерывно. Существуетъ множество и прерывныхъ функцій; прерывность измѣненія величинъ наблюдается и въ природѣ. Элементарная теорія чиселъ даетъ намъ въ числовыхъ функціяхъ простѣйшіе и наиболѣе понятные примѣры величинъ, измѣняющихся прерывно, и ознакомленіе съ ними учащихся будетъ содѣйствовать ихъ болѣе полному математическому развитію. Напомню, что покойный профессоръ Московскаго Университета И. В. Бугаевъ придавалъ весьма важное значеніе теоріи прерывныхъ функцій и теоріи чиселъ, какъ простѣйшему ея виду, и ставилъ ученіе о прерывности въ связь съ глубокими философскими проблемами. Въ настоящее время эта идея находитъ себѣ все большее признаніе, и теорія чиселъ изучается параллельно съ анализомъ, несмотря на преобладающіе его успѣхи. Въ 1908 г. д-ръ Вольфскелль изъ Дармштадта завѣщалъ, какъ извѣстно, 100.000 марокъ тому, кто дастъ доказательство знаменитаго предложенія Фермата о невозможности рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія $x^n + y^n = z^n$. Это повело къ оживленію интереса къ теоріи чиселъ не только среди ученыхъ, но и среди большой публики. Отзвуки этого оживленія чрезъ общую прессу доходятъ, конечно, и до нашихъ учащихся, и они такимъ несовершеннымъ способомъ узнаютъ впервые о существованіи науки—теоріи чиселъ и ея великихъ задачъ.

Изложу теперь свое предложеніе въ конкретной формѣ. Сущность его сводится къ слѣдующему: теоретическая ариѳметика поставлена у насъ совершенно неудовлетворительно, и знанія свойствъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ учащіеся изъ школы не выносятъ. Поэтому, я предлагаю ввести въ курсъ математики вмѣсто суррогатовъ теоріи чиселъ изученіе самой теоріи чиселъ. Здѣсь я разумѣю въ частности алгориѳмъ общаго наибольшаго дѣлителя, понятіе о простѣйшихъ числовыхъ функціяхъ, теорію сравненій первой степени, теоремы Эйлера, Фермата и Вильсона, понятіе о степенныхъ вычетахъ. Для прохожденія этихъ отдѣловъ можно использовать то время, которое до сихъ поръ тратилось на изученіе теоретической ариѳметики, неопредѣленныхъ уравненій и нѣкоторыхъ иныхъ маловажныхъ статей курса. Проходить теорію чиселъ слѣдуетъ въ одномъ изъ старшихъ классовъ, съ надлежащими упражненіями. Для изложенія ея совершенно достаточно тѣхъ алгебраическихъ свѣдѣній, которыми наши учащіеся старшихъ классовъ уже располагаютъ. Въ младшихъ же классахъ слѣдуетъ стремиться къ возможно тѣсной связи между ариѳметикой и алгеброй и возможно шире утилизировать алгебраическія свѣдѣнія учащихся для пополненія ихъ ариѳметическихъ знаній. Такъ, большое примѣненіе въ этомъ отношеніи можетъ имѣть статья о разложеніи алгебраическихъ выраженій на множители, которая въ этомъ направленіи сейчасъ почти не утилизируется.

Я долженъ отмѣтить, что нѣкоторыя попытки введенія элементовъ теоріи чиселъ въ курсъ школьной математики дѣлаются на Западѣ уже и сейчасъ, и подобно тому, какъ введеніе началъ анализа въ среднеучебный курсъ впервые имѣло мѣсто во Франціи, тамъ же кладется начало и введенію теоріи чиселъ. Для примѣра укажу на прекрасный курсъ E. Humbert'a: «Traité d'arithmetique». Въ этой книгѣ въ изложеніе ариѳметики введены статьи о сравненіяхъ первой степени, о простѣйшихъ числовыхъ функціяхъ, главнѣйшія теоремы теоріи чиселъ, понятіе о степенныхъ вычетахъ, теорема о разложеніи числа на 4 квадрата и др., имѣется и нѣкоторое число упражненій. Предисловіе къ книгѣ написано извѣстнымъ ученымъ J. Tannery, который горячо привѣтствуетъ идею Humbert'a ввести въ изложеніе ариѳметики статьи изъ теоріи чиселъ. Еще съ большими подробностями J. Tannery вводитъ статьи изъ теоріи чиселъ въ свой собственный извѣстный курсъ ариѳметики: «Leçons d'arithme tique». У него, сверхъ перечисленныхъ выше статей, есть въ этой книгѣ и доказательство закона взаимности простыхъ чиселъ и цѣнныя историческія примѣчанія.

Изъ своего опыта я могу сообщить, что мнѣ приходилось знакомить учащихся съ элементами теоріи чиселъ, причемъ они ее усваивали легко и съ большимъ увлеченіемъ. Съ этою цѣлью я давалъ иногда учащимся книгу проф. А. В. Васильева «Веденіе въ анализъ», причемъ они читали ее съ неослабнымъ интересомъ.

Таковы мои аргументы въ защиту предложенія о введеніи элементовъ теоріи чиселъ въ среднюю школу. Но я могу прибавить еще, что теорія чиселъ есть та именно область математической науки, въ которой съ особеннымъ успѣхомъ подвизались русскіе ученые. Напомню о замѣчательныхъ трудахъ въ этой области Буняковскаго, Чебышева, Бугаева, Вороного, не говоря о нынѣ здравствующихъ ученыхъ. Ихъ труды составляютъ честь и гордость русской математической науки, и наилучшимъ воздаяніемъ ихъ памяти была бы широкая популяризація знаній изъ области теоріи чиселъ, путемъ введенія ея основъ въ нашу среднюю школу».

Пренія по докладу І. И. Чистякова.

В. М. Куперштейнъ (Елисаветградъ). „Существуетъ мнѣніе, что врачъ, умѣющій ставить вѣрно діагнозъ, всегда предлагаетъ вѣрныя средства для излѣченія недуговъ больного. Какъ видно, не во всѣхъ отрасляхъ науки это такъ. Почтенный докладчикъ, І. И. Чистяковъ, удивительно вѣрно опредѣлилъ болѣзнь учащихся среднихъ учебныхъ заведеній, въ смыслѣ незнанія ариѳметики, но, къ сожалѣнію, предложенное имъ средство (введеніе въ старшіе классы средне-учебныхъ заведеній теоріи чиселъ) не излѣчитъ существующей болѣзни. На мой взглядъ, раньше чѣмъ вводить новое, слѣдуетъ выводить старые, вредные пріемы преподаванія ариѳметики. Напримѣръ, требуютъ отъ дѣтей, даже перваго класса, всякаго рода опредѣленія: что такое „единица“, „число“, что такое „сложеніе“, „вычитаніе“ и т. п. Мнѣ кажется, что это не только не полезно для дѣтей, но даже вредно. Я увѣрена, что всѣ, сидящіе здѣсь въ собраніи, помнятъ отлично свое дѣтство, когда въ первыхъ классахъ гимназіи они проходили ариѳметику. Не разъ, я думаю, проклинали они учебники Киселева и Малинина. По моему мнѣнію, подобные пріемы преподаванія ариѳметики въ младшихъ классахъ есть гниль, разъѣдающая дѣтскія души, вырабатывающая въ нихъ чувство отвращенія къ ариѳметикѣ — азбукѣ математики, и потому въ старшихъ классахъ, гдѣ учащимся вполнѣ доступно изученіе теоріи ариѳметики, они и слышать о ней не хотятъ“.

XVI. Ирраціональныя числа въ средней школѣ.

Докладъ Т. А. Афанасьевой-Эренфестъ (Спб.).

§ 1. «Понятіе объ ирраціональномъ числѣ является, несомнѣнно, однимъ изъ наиболѣе трудныхъ, съ которыми человѣку приходится знакомиться въ средней школѣ. Въ то время, какъ съ понятіемъ о числѣ дробномъ, затѣмъ и о числѣ отрицательномъ всякій ученикъ поздно или рано осваивается, нерѣдко приходится встрѣчать людей, даже прошедшихъ высшее учебное заведеніе, которые сознаются, что идея о корнѣ квадратномъ изъ двухъ для нихъ настолько туманна, что они, напримѣръ, не могутъ отвѣтить на вопросъ: можно ли когда-нибудь ожидать открытія способа «вполнѣ точнаго» вычисленія корня квадратнаго изъ двухъ?

Главной причиной этого является, вѣроятно, само ирраціональное число. И я должна сознаться, что, если бы я была поклонницей лабораторнаго метода и безграничнаго приспособленія *программы* къ ученику, то выкинула бы совсѣмъ ирраціональныя числа изъ средней школы. Но я стою на другой точкѣ зрѣнія: я считаю, что есть идеи, методы, умѣнія, безъ которыхъ невозможно соглашаться выпускать ученика изъ средней школы, и я предпочитаю, чтобы къ нѣкоторымъ пунктамъ программы—наоборотъ—приспособляли *ученика*... при помощи достаточно тщательно подобранныхъ методовъ.

Въ послѣдніе годы все чаще подвергается осужденію обычное «наивное» изложеніе ученія объ ирраціональномъ числѣ. Вейерштрассъ, Дедекиндъ, Канторъ и другіе авторы, писавшіе приблизительно въ то же время *), научили видѣть его многочисленные логическіе дефекты.

Ихъ теоріи, основанныя всѣ на опредѣленіи ирраціональныхъ чиселъ при помощи безконечныхъ совокупностей раціональныхъ чиселъ, своей стройностью и общностью произвели и до сихъ поръ производятъ на всякаго, кто знакомится съ ними въ зрѣломъ возрастѣ, такое сильное впечатлѣніе, что у многихъ является мысль—одну изъ этихъ теорій положить въ основаніе первоначальнаго ознакомленія учениковъ съ ирраціональнымъ числомъ. Нѣкоторые полагаютъ, что устраненіе логическихъ дефектовъ по одному изъ этихъ методовъ достаточно для того, чтобы усвоеніе идеи раціональнаго числа вполнѣ давалось начинающимъ.

Я думаю, однако, что переходъ къ такого рода изложенію для первоначальнаго ознакомленія съ ирраціональнымъ числомъ и не необходимъ, и недостаточенъ: не необходимъ въ логическомъ отношеніи и недостаточенъ въ педагогическомъ. Во всякомъ случаѣ, прежде чѣмъ на это рѣшиться, необхо-

---

*) Подробныя литературныя указанія можно найти въ Encyklopädie des mathem. Wissensch. I, A. 3. Alfred Pringsheim, Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Processe.

На русскомъ языкѣ см. Дедекиндъ.—Непрерывность и ирраціональныя числа. Перев. С. Шатуновскаго. Изд. Mathesis—Одесса. Также Энциклопедія элементарной математики Вебера и Вельштейна. Т. I. Перев. Изд. Mathesis.

димо систематически сопоставить всѣ тѣ затрудненія, которыя можетъ представить для начинающаго тотъ или иной методъ изложенія. Этого мнѣ до сихъ поръ не приходилось встрѣчать, и одинъ шагъ въ этомъ направленіи я и хотѣла бы сдѣлать теперь.

§ 2. Наивное изложеніе, обычно практикуемое и теперь въ среднихъ школахъ, заключается, приблизительно, въ слѣдующемъ: «корнемъ n-ой степени изъ положительнаго числа a называется такое число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, даетъ a. Не всегда можно найти такое цѣлое или дробное число, чтобы его n-ая степень равнялась a: такъ, напримѣръ, если a есть число цѣлое, но не n-ая степень цѣлаго же числа, то $\sqrt[n]{a}$ не можетъ быть и числомъ дробнымъ. Слѣдовательно, мы здѣсь имѣемъ дѣло съ числомъ новаго рода— ирраціональнымъ. Выразить его при помощи конечнаго числа четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами нельзя. Но можно найти сколь угодно близкія къ нему дробныя числа и больше, и меньше его».

Далѣе, въ ученіи о дѣйствіяхъ надъ ирраціональными числами говорится: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, потому что, возвышая въ n-ую степень произведеніе корней съ одной стороны, и корень изъ произведенія съ другой, получимъ одинъ и тотъ же результатъ ab».

Этимъ можно ограничиться для характеристики метода.

Остановимся сперва на логической сторонѣ.

Здѣсь на каждомъ шагу недостаетъ логическаго обоснованія:

1. Существованіе числа, обозначаемаго $\sqrt[n]{a}$, принимается какъ нѣчто, напередъ данное, несомнѣнно существующее, между тѣмъ, какъ для случая, когда a не есть n-ая степень раціональнаго числа, это есть результатъ соглашенія, не вытекающаго ни изъ какихъ предыдущихъ условій.

2. Даже послѣ того, какъ согласились бы относительно самаго существованія такого числа, еще ни изъ чего не слѣдовало бы, какъ оно велико, т. е. какія уже извѣстныя (раціональныя) числа больше и какія меньше него *): это также требуетъ особаго произвольнаго соглашенія.

---

*) Точно такъ же: которое изъ двухъ новыхъ чиселъ больше и которое меньше, и при какихъ условіяхъ они равны.

Только послѣ установки неравенствъ, которымъ будетъ удовлетворять вновь опредѣляемое число, можно говорить о томъ, какое раціональное число можетъ съ соотвѣтствующимъ приближеніемъ замѣнять его. Между тѣмъ, въ приведенномъ изложеніи сразу приступаютъ къ приближенному вычисленію радикаловъ, какъ будто неравенства, которымъ они удовлетворяютъ, изъ чего-то сами собой слѣдуютъ.

3. Утвержденіе: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, не имѣетъ смысла до тѣхъ поръ, пока не установлено, что считать произведеніемъ двухъ радикаловъ: вѣдь, опредѣленіе дѣйствій, данное для раціональныхъ чиселъ, не приложимо къ этимъ числамъ новаго рода. То же самое относится, конечно, и къ результатамъ другихъ дѣйствій.

§ 3. Для оцѣнки новыхъ ученій нѣтъ надобности разбирать отдѣльно каждое изъ нихъ, такъ какъ съ педагогической точки зрѣнія разница между ними несущественна.

Для моей цѣли достаточно будетъ остановиться на одномъ изъ нихъ. Я выбираю ученіе Дедекинда, такъ какъ о немъ мнѣ можно будетъ говорить въ болѣе короткихъ словахъ, чѣмъ о другихъ.

У Дедекинда по всѣмъ указаннымъ тремъ пунктамъ сдѣланы точныя соглашенія.

1. Относительно условій, опредѣляющихъ существованіе числа: предположимъ, что данъ рецептъ, по которому раціональныя числа размѣщаются въ два мѣшка. Этотъ рецептъ долженъ удовлетворять двумъ условіямъ: a) чтобы о всякомъ раціональномъ числѣ можно было сказать, къ которому изъ двухъ мѣшковъ оно относится, b) чтобы всякое число перваго мѣшка было меньше всякаго числа второго мѣшка. Такихъ рецептовъ можно дать сколько угодно.

Такое раздѣленіе чиселъ на двѣ группы Дедекиндъ называютъ словомъ «Schnitt»—«сѣченіе» и дѣлаетъ слѣдующее соглашеніе: заданіе какого бы то ни было сѣченія опредѣляетъ существованіе нѣкотораго числа.

Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы молча ссылаться на существованіе числа, квадратъ котораго равняется двумъ, Дедекиндъ даетъ сѣченіе, которому и сопоставляется знакъ $\sqrt{2}$: именно, всѣ раціональныя числа можно раздѣлить на такія, квадраты которыхъ меньше двухъ, и такія, квадраты которыхъ больше двухъ; это дѣленіе, очевидно, обладаетъ свойствами, присущими сѣченію.

2. Относительно величины числа: при указанномъ размѣщеніи чиселъ въ два мѣшка не можетъ случиться, чтобы одновременно въ первомъ было наибольшее, а во второмъ наименьшее число, потому что тогда пришлось бы допустить, что между этими двумя различными раціональными числами совсѣмъ не заключалось бы другихъ раціональныхъ чиселъ, что нелѣпо.

Поэтому возможны только три случая:

1) первый мѣшокъ содержитъ наибольшее число, второй не содержитъ наименьшаго;

2) первый мѣшокъ не содержитъ наибольшаго, второй—содержитъ наименьшее число;

3) первый мѣшокъ не содержитъ наибольшаго, второй не содержитъ наименьшаго числа.

Въ первыхъ двухъ случаяхъ число, опредѣляемое сѣченіемъ, полагается равнымъ упомянутому наибольшему числу или наименьшему числу.

Въ третьемъ случаѣ оно полагается отличнымъ отъ какого бы то ни было раціональнаго числа и притомъ бо́льшимъ, чѣмъ каждое число перваго мѣшка, и меньшимъ, чѣмъ каждое число второго мѣшка: такимъ образомъ, соглашеніе о величинѣ ирраціональнаго числа состоитъ въ томъ, что оно полагается заключеннымъ между обѣими группами чиселъ, на которыя раздѣляетъ всѣ раціональныя числа опредѣляющее это ирраціональное число сѣченіе.

3. Понятіе о дѣйствіяхъ опредѣляется указаніемъ рецепта, по которому, зная данныя числа, слѣдуетъ составлять сѣченіе, опредѣляющее новое число—результатъ дѣйствія.

Кромѣ этихъ соглашеній, Дедекиндъ еще явно высказываетъ постулатъ, необходимый для пользованія этими произвольными созданіями человѣческаго ума при измѣреніи величинъ, который можно здѣсь сформулировать такимъ образомъ: если на безконечной прямой выбрать опредѣленную начальную точку и если выбрать опредѣленную единицу длины, то всякой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ опредѣленное вещественное число и наоборотъ. Этотъ постулатъ нетрудно распространить и на другія величины.

Теорія Дедекинда указываетъ, такимъ образомъ, однородную схему, по которой, специализируя рецепты, характеризующіе сѣченіе, можно опредѣлить вещественныя числа какого угодно рода (радикалы, логариѳмы и т. д.). Устанавливая, что всякое сѣченіе опредѣляетъ число, и предполагая, что всякое вещественное число можетъ быть задано сѣченіемъ, Дедекиндъ имѣетъ возможность дать, кромѣ того, ариѳметическое опредѣленіе понятія непрерывности.

§ 4. Я не думаю, однако, чтобы при первомъ ознакомленіи съ какимъ-нибудь понятіемъ общность изложенія была преимуществомъ. Фактически ученикъ будетъ и въ данномъ случаѣ думать только о томъ специальномъ родѣ чиселъ, съ которымъ ему придется оперировать, т. е. все-таки исключительно о радикалахъ, и разговоръ о томъ, что по Дедекинду опредѣляются и всякія другія числа, не вызоветъ въ его умѣ достаточно опредѣленныхъ идей. Я думаю, что полезнѣе ему сперва ознакомиться со специальной теоріей радикаловъ и на ней пережить всѣ тѣ специфическія трудности идеи ирраціональнаго числа, которыя такъ рѣзко отличаютъ радикалы отъ всѣхъ ранѣе изученныхъ чиселъ.

Поэтому и ученіе Дедекинда я буду въ дальнѣйшемъ оцѣнивать исключительно съ точки зрѣнія того, что оно даетъ ученику при ознакомленіи съ радикалами.

§ 5. Я указала на логическіе дефекты въ старомъ изложеніи и противупоставила этому соотвѣтствующіе пункты въ ученіи Дедекинда. Теперь я попробую показать, что порядокъ стараго изложенія вполнѣ допускаетъ восполненіе логическихъ предѣловъ.

1. Условимся, что заданіемъ показателя корня n и положительной подкоренной величины a опредѣляется существованіе нѣкотораго числа $\sqrt[n]{a}$, независимо отъ того, есть ли a n-ая степень какого-нибудь раціональнаго числа или нѣтъ.

2. Относительно величины этого новаго числа условимся, что всякое раціональное число, n-ая степень котораго меньше a, меньше него, а всякое раціональное число, n-ая степень котораго больше a, больше него.

3. Относительно дѣйствій сдѣлаемъ слѣдующія соглашенія: пусть существованіе суммы опредѣляется заданіемъ слагаемыхъ и знака сложенія; величина же ея, т. е. неравенства, которымъ она должна удовлетворять, — обобщеніемъ на радикалы слѣдующаго свойства суммы, справедливаго для раціональныхъ чиселъ: что съ увеличеніемъ каждаго изъ слагаемыхъ возрастаетъ и сумма.

Аналогично—существованіе произведенія пусть опредѣляется заданіемъ множителей и знака умноженія; величина же—обобщеніемъ на радикалы слѣдующаго свойства произведенія, справедливаго для положительныхъ раціональныхъ чиселъ: съ увеличеніемъ каждаго множителя возрастаетъ произведеніе.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ сопоставлены соотвѣтствующіе пункты сравниваеыхъ здѣсь изложеній.

Старое изложеніе.

1. Числа n, a и знакъ $\sqrt{\ }$ опредѣляютъ число $\sqrt[n]{a}$.
2. $a_i < \sqrt[n]{a} < a'_k$, если $a_i{}^n < a < a'^n_k$.
3. a) Числа $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[m]{b}$ и знакъ $+$ опредѣляютъ число $\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b}$, называемое суммой.
   b) $a_i + b_k < \sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b} < a'_h + b'_e$, если
   $a_i < \sqrt[n]{a} < a'_h$ и $b_k < \sqrt[m]{b} < b'_e$.

Изложеніе Дедекинда.

1. Сѣченіе $(a_1, a_2, \ldots) | (a'_1, a'_2 \ldots)$ опредѣляетъ число $\sqrt[n]{a}$, если $a_i{}^n < a < a'^n_k$.
2. $a_i < \sqrt[n]{a} < a'_k$, если $(a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots) | (a_1', a_2', \ldots a_k', \ldots)$ есть сѣченіе, опредѣляющее число $\sqrt[n]{a}$.
3. Сѣченіе $(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots a_i+b_k, \ldots) | (a'_1+b'_1, a'_2+b'_2, \ldots a'_h+b'_e)$ опредѣляетъ число $\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b}$, называемое суммой, если сѣченіе $(a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots) | (a'_1, a'_2, \ldots a'_h, \ldots)$ опредѣляетъ число $\sqrt[n]{a}$, а $(b_1, b_2, \ldots b_k, \ldots) | (b_1', b_2', \ldots b'_e \ldots)$ опредѣляетъ число $\sqrt[m]{b}$

Такимъ образомъ, тому, кто по какимъ-нибудь соображеніямъ предпочтетъ старый порядокъ изложенія изложенію Дедекинда и ему подобнымъ, не слѣдуетъ опасаться, что онъ пускается въ дебри, изъ которыхъ нѣтъ никакого логическаго выхода.

§ 6. Если считать старый порядокъ изложенія реабилитированнымъ въ логическомъ отношеніи, то можно уже спокойно перейти къ педагогическому разбору обоихъ изложеній.

Прежде всего я отмѣчу ихъ отношеніе къ безконечнымъ совокупностямъ.

Само собою разумѣется, что свойства опредѣляемыхъ чиселъ по всякому пріемлемому ученію должны въ концѣ концовъ получиться тѣ же самыя. Въ частности, и отношеніе ирраціональнаго радикала къ совокупности раціональныхъ чиселъ будетъ по обоимъ изложеніямъ то же самое. Но, если въ логическомъ—аксіоматическомъ отношеніи безразлично, какія свойства положены въ опредѣленіе числа и какія являются уже слѣдствіями изъ этого, то въ педагогическомъ отношеніи ·это составляетъ большую разницу.

Самое понятіе о сѣченіи требуетъ продолжительныхъ разговоровъ для того, чтобы ученики могли съ нимъ освоиться. Но и тогда у нихъ едва ли сложатся тѣ самыя понятія, какія имѣются въ виду въ ученіи Дедекинда. Я нарочно говорила о «мѣшкахъ», чтобы избѣжать линейнаго распредѣленія чиселъ: мои личныя наблюденія надъ лицами, ознакомившимися съ этимъ ученіемъ уже въ высшемъ учебномъ заведеніи, показываютъ, что, какъ только дано линейное расположеніе чиселъ, величина числа, опредѣляемаго сѣченіемъ, принимается уже извѣстною, и отъ вниманія ускользаетъ произвольность ея опредѣленія. Въ сущности, и при изложеніи по Дедекинду ученикъ легко впадаетъ въ ту ошибку, изъ-за которой теперь отвергаютъ старое изложеніе: онъ напередъ безсознательно приписываетъ ирраціональному числу всѣ тѣ свойства, которыя должны послѣдовательно и отчетливо постулироваться; безконечныя же совокупности раціональныхъ чиселъ играютъ въ его глазахъ совсѣмъ особую роль: съ одной стороны, онѣ служатъ, какъ и въ старомъ изложеніи, для приближеннаго вычисленія, съ другой—онѣ создаютъ въ немъ впечатлѣніе, будто природа ирраціональнаго числа характеризуется именно тѣмъ, что при его опредѣленіи нельзя обойтись безъ безконечныхъ совокупностей.

Между тѣмъ, это послѣднее мнѣніе совершенно неправильно: 1) не всякое сѣченіе опредѣляетъ ирраціональное число; 2) можно придумать такую систему ученія о числѣ, по которой нѣкоторыя ирраціональныя числа опредѣляются раньше, чѣмъ нѣкоторыя раціональныя, (напримѣръ, можно сразу послѣ цѣлыхъ чиселъ опредѣлить классъ корней изъ цѣлыхъ чиселъ *).

Въ виду этого пользованіе сѣченіемъ, какъ условіемъ, опредѣляющимъ существованіе радикала, представляется мнѣ на разсматриваемой мною ступени знакомства съ числомъ и затруднительнымъ для ученика, и ведущимъ къ неправильной идеѣ объ ирраціональномъ числѣ.

§ 7. Теперь мы должны хорошенько вникнуть въ то, что, собственно, затрудняетъ ученика, который впервые слышитъ объ ирраціональномъ числѣ, и будутъ-ли эти его затрудненія устранены тѣмъ, что въ словахъ учителя не будетъ содержаться логическихъ погрѣшностей.

Станетъ ли ученику много легче отъ того, что мы явно выскажемъ тѣ соглашенія, которыя до сихъ поръ дѣлались молча—о существованіи и о величинѣ квадратнаго корня изъ двухъ? Вѣдь, для него и такъ очевидно, что если учитель заставляетъ его приближенно вычислять $\sqrt{2}$, то значитъ, онъ допускаетъ и его существованіе, и то, что онъ по величинѣ заключается между извѣстными рядами чиселъ. И тѣмъ не менѣе у него остается какое-то недоумѣніе. Поможетъ ли здѣсь подчеркиваніе произвольности соглашеній?

Мнѣ думается, что ученику прежде всего нужно убѣдиться въ томъ, что можно дѣлать такъ, какъ дѣлаютъ. Разговоръ о томъ, что это необязательно, что можно было бы и иначе, если бы мы захотѣли, скорѣе утвердитъ его въ мысли, что эти новыя числа—въ противоположность ранѣе ему знакомымъ—что-то не настоящее, не серьезное, придуманное только для развлеченія математиковъ. Да и правда ли, что

---

*) Т. к. между двумя послѣдовательными цѣлыми числами заключается нѣсколько такихъ радикаловъ, то пришлось бы установить условія неравенства этихъ новыхъ чиселъ между собою безъ возможности ссылаться на одни только неравенства между новымъ числомъ и ранѣе опредѣленными (цѣлыми). Точно такъ же осложнилось бы вслѣдствіе этого опредѣленіе дѣйствій надъ этими новыми числами, а также опредѣленіе условій равенства. Впрочемъ, сравнительная сложность была бы главнымъ образомъ въ формулировкѣ условій; практическое пользованіе опредѣленіями для сравненія чиселъ между собою было бы едва ли сложнѣе. Во всякомъ случаѣ такая послѣдовательность введенія новыхъ чиселъ вполнѣ осуществима.

принятыя соглашенія, «необязательны»? Слѣдуетъ хорошенько ограничить смыслъ этого слова и спросить себя, способенъ-ли ученикъ въ моментъ перваго ознакомленія съ ирраціональнымъ числомъ придать слову «необязательно» тотъ смыслъ, какой ему придается въ ариѳметическомъ анализѣ понятія о числѣ.

Названныя соглашенія необязательны въ томъ смыслѣ, что логически не зависятъ отъ соглашеній, принятыхъ относительно цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Но это не значитъ, что мы могли бы захотѣть сдѣлать вмѣсто нихъ какія угодно другія соглашенія. Эти соглашенія тѣсно связаны съ назначеніемъ вещественнаго числа, съ его ролью при измѣреніи величинъ. И можно еще спорить о томъ, является ли вопросъ о логической независимости опредѣленія чиселъ новаго рода болѣе важнымъ, чѣмъ вопросъ о цѣлесообразности выбора этого логически произвольнаго опредѣленія. Я смѣло могу сказать, что для всякаго, кто впервые знакомится съ числомъ новаго рода (даже независимо отъ возраста), послѣдній вопросъ является совершенно существеннымъ, перваго же онъ въ большинствѣ случаевъ даже не пойметъ: для самой его постановки требуется предварительное воспитаніе ума.

Опредѣленіе ирраціональнаго числа по Дедекинду, конечно, совершенно далеко отъ этого вопроса. Правда, полная система его аксіомъ заканчивается указаніемъ соотвѣтствія между величинами и числами. Но, вѣдь, перечисленіе всѣхъ свойствъ, опредѣляющихъ какое-нибудь понятіе, недостаточно для синтеза этихъ свойствъ въ единый цѣльный образъ, а безъ этого невозможно и свободное обращеніе съ понятіемъ.

На первомъ планѣ у Дедекинда стоитъ совсѣмъ другая задача и по отношенію къ ней всякій, знакомый съ исторіей ученія о числѣ, съ тѣми вопросами анализа, которые вызвали почти одновременное возникновеніе у разныхъ ученыхъ точнаго обоснованія понятія объ ирраціональномъ числѣ, видитъ цѣлесообразность пріемовъ Дедекинда. Но ученикъ прежде всего будетъ спрашивать о согласованіи свойствъ новыхъ чиселъ съ тѣми практическими потребностями, которыя вызвали созданіе ихъ, хотя сформулировать своего вопроса, быть можетъ, и не съумѣетъ.

§ 8. Что еще всегда будетъ затруднять ученика, это кажущаяся неравноправность ирраціональнаго числа сравнительно съ числомъ раціональнымъ, которая и мѣшаетъ вѣрить въ ирраціональное число. Это впечатлѣніе неравноправности, по моему мнѣнію, вызывается главнымъ образомъ тѣмъ, что къ ирраціональному числу подходятъ со стороны его отрицательныхъ признаковъ. Когда убѣждаются, что дѣленіе нацѣло двухъ цѣлыхъ чиселъ невыполнимо, то переходятъ къ дробямъ и начинаютъ изучать ихъ свойства, а не отличіе ихъ отъ цѣлыхъ чиселъ; даютъ ученику рядъ наглядныхъ примѣровъ, иллюстрирующихъ практическій смыслъ понятія дроби. Когда же убѣждаются, что корень изъ раціональнаго числа не есть число раціональное, то прежде всего съ одной стороны подчеркиваютъ, что это число не можетъ быть выражено при помощи ранѣе знакомыхъ чиселъ, съ другой — всѣ заботы ученика сосредоточиваютъ на томъ, какъ бы все-таки выразить его при помощи раціональныхъ чиселъ — хотя бы приближенно! Естественно, что у ученика складывается впечатлѣніе что только раціональныя числа—настоящія.

§ 9. Мнѣ думается, что дѣло хоть отчасти было бы иное, если бы начинали съ другого конца: если бы сразу же связывали понятіе объ ирраціональномъ числѣ съ измѣреніемъ величинъ и всѣ соглашенія относительно ирраціональнаго числа мотивировали этой связью. Тѣ соглашенія, которыя предложены здѣсь для опредѣленія радикаловъ—спеціализированныя сперва для однихъ квадратныхъ корней—легко могутъ быть связаны съ конкретными вопросами, относительно которыхъ ученикъ охотно согласится, что смыслъ ихъ не нарушается изъ-за того, что непрерывно измѣняются входящія въ нихъ данныя. Сюда относятся: сопоставленіе каждому отрѣзку числа (измѣреніе отрѣзковъ), сложеніе отрѣзковъ, изученіе измѣненія площади прямоугольника въ зависимости отъ сторонъ и сопоставленіе площади прямоугольника числа (умноженіе чиселъ), опредѣленіе площади квадрата по сторонѣ и обратно (извлеченіе квадратныхъ корней).

Я должна сознаться, что отнюдь не считаю легкимъ для учениковъ доказательство существованія несоизмѣримыхъ отрѣзковъ — я и предпослала всей своей рѣчи заявленіе, что признаю понятіе объ ирраціональномъ числѣ по самому существу нелегкимъ—но все же я думаю, что доказательство несоизмѣримости діагонали квадрата со стороной въ концѣ концовъ можетъ быть понято ученикомъ. Когда же онъ пойметъ, что—при опредѣленномъ выборѣ единицы длины—на прямой, кромѣ точекъ, соотвѣтствующихъ цѣлымъ и дробнымъ числамъ, неизбѣжно должны существовать и точки, которымъ не могутъ быть сопоставлены раціональныя числа, то онъ почувствуетъ и цѣлесообразность введенія ирраціональныхъ чиселъ, и равноправность ихъ съ числами раціональными.

§ 10. Я старалась доказать, что прежній порядокъ изложенія совмѣстимъ съ логической отчетливостью, съ выдѣленіемъ независимыхъ аксіомъ, опредѣляющихъ новый родъ чиселъ.

Другой вопросъ, однако, поскольку на этой сторонѣ дѣла слѣдуетъ настаивать при первомъ ознакомленіи учениковъ съ радикалами. Я ожидаю, что сперва придется довольствоваться тѣмъ, чтобы примирить ихъ съ ирраціональнымъ числомъ, ознакомить съ его свойствами, не требуя отъ нихъ, чтобы они давали себѣ отчетъ въ логической независимости принятыхъ соглашеній, научить техникѣ обращенія съ нимъ.

Аксіоматическую сторону болѣе умѣстно будетъ выдвинуть при ретроспективномъ обзорѣ всего пройденнаго матеріала —въ старшемъ классѣ. Тамъ я считала бы чрезвычайно желательнымъ и ознакомленіе съ общимъ ученіемъ о вещественномъ числѣ, и съ идеей непрерывности въ духѣ Дедекинда. Умѣніе отличать чисто логическую необходимость отъ всякой другой, эмансипацію ума отъ привычки основываться на непосредственныхъ впечатлѣніяхъ я считаю важными не только для математика, но и для всякаго человѣка: это дѣлаетъ его болѣе гуманнымъ и справедливымъ, способнымъ становиться на чужую точку зрѣнія и терпѣливо слѣдить за чужими разсужденіями.

Признавая, однако, введеніе аксіоматики числа (равно какъ и аксіоматики геометріи) чрезвычайно желательнымъ въ средней школѣ, я не ожидаю, чтобы это было осуществимо въ сколько-нибудь широкой мѣрѣ: это можетъ имѣть успѣхъ только въ томъ случаѣ, если самъ учитель и достаточно любитъ эти вопросы, и достаточно въ нихъ освѣдомленъ».

Тезисы.

1. Опредѣленіе корня n-ой степени изъ a, какъ числа, которое будучи возвышено въ степень n даетъ a, опирается на цѣлый рядъ неустановленныхъ фактовъ.

2. Это опредѣленіе и все ученіе, на немъ основанное, создаютъ то, что у большинства учащихся идея объ ирраціональныхъ числахъ крайне туманна.

3. Логически удовлетворительное ученіе о числѣ дожно заключать слѣдующіе пункты:

a) Указаніе условій, опредѣляющихъ существованіе даннаго новаго рода чиселъ.

b) Указаніе на то, включаются ли эти новыя числа по величинѣ въ рядъ съ ранѣе опредѣленными числами, и, если да, то какое мѣсто каждое изъ нихъ занимаетъ въ этомъ ряду (введеніе знаковъ $=$, $>$, $<$).

c) Обобщеніе на эти новыя числа понятій о дѣйствіяхъ.

d) Указаніе соотвѣтствія между этими числами и величинами.

4. Этимъ требованіямъ удовлетворяютъ различныя современныя ученія о числѣ, дающія сразу общій методъ введенія всѣхъ вещественныхъ ирраціональныхъ чиселъ (Дедекинда, Кантора и др.).

5. Однако, эти ученія не могутъ служить для полнаго живого ознакомленія съ числомъ, такъ какъ носятъ характеръ пригодный для точнаго анализа уже существующихъ понятій, но непригодный для перваго ознакомленія съ понятіемъ, для синтетическаго созданія его въ умѣ учащагося: на затрудненія, которыя ощущаетъ самъ ученикъ при первой встрѣчѣ съ ирраціональнымъ числомъ, эти ученія вовсе не отвѣчаютъ.

6. Для перваго ознакомленія слѣдуетъ каждый родъ чиселъ (во всякомъ случаѣ—радикальны) изучать самостоятельно, основываясь на спеціальной системѣ аксіомъ и притомъ на такой, которая тѣснѣе связана съ назначеніемъ числа, съ практическимъ требованіемъ—измѣрять величины.

7. Для радикаловъ такая система можетъ быть развита довольно легко.

8. Въ послѣднемъ классѣ, при ретроспективномъ взглядѣ

на различные роды чиселъ, изученныхъ въ предыдущемъ курсѣ, общее ученіе о числѣ въ духѣ Дедекинда или Кантора можетъ оказаться чрезвычайно полезнымъ.

9. Простое откладываніе знакомства съ такого рода ученіемъ (безъ названнаго предварительнаго изученія), на болѣе позднее время безполезно: нѣкоторые существенные элементы въ немъ все равно останутся незамѣченными: до сознанія учащагося доходитъ только внѣшняя форма. И въ результатѣ въ умѣ его получается система, столь же наивная, какъ и прежняя, но содержащая логическіе скачки, которые ему гораздо труднѣе раскрыть.

Пренія по докладу Т. А. Афанасьевой-Эренфестъ.

Д. М. Левитусъ (Спб.). „Когда Т. А. Эренфестъ начала свой докладъ, она заявила себя не особенной поклонницей лабораторнаго метода; съ ея точки зрѣнія лабораторный методъ надо бы совершенно исключить изъ ученія объ ирраціональныхъ числахъ. Я принадлежу къ поклонникамъ лабораторнаго метода, но къ тѣмъ поклонникамъ, которые желали бы примѣнять его разумно, безъ всякаго излишняго увлеченія. Мнѣ кажется, что методъ этотъ совершенно не противорѣчитъ самому строгому доказательству какого-нибудь положенія. Я убѣжденъ, что разумное веденіе лабораторныхъ занятій можетъ привести ученика къ идеѣ ирраціональныхъ чиселъ. Болѣе того, я увѣренъ, что только у того ученика понятіе объ ирраціональномъ числѣ будетъ ясно, который до него дошелъ не однимъ только путемъ слушанія абстрактныхъ разсужденій учителя; путь къ сознанію лежитъ не черезъ одни только уши“.

Б. Б. Піотровскій (Спб.). „Т. А. Эренфестъ въ своемъ докладѣ высказала пожеланіе, чтобы въ послѣднемъ классѣ среднихъ учебныхъ заведеній проходилась теорія ирраціональныхъ чиселъ. Я бы указалъ на слѣдующее: когда докладчица отмѣчала, какіе важнѣйшіе моменты въ этой теоріи особенно затруднительны, то высказала мнѣніе, что самое важное и трудное—это дать опредѣленіе ирраціональнаго числа. Говорятъ, что всѣ числа дѣлятся на два класса: раціональныя и ирраціональныя и уславливаются далѣе называть нѣкоторое число $\sqrt[n]{a}$—ирраціональнымъ. Я думаю, что такое опредѣленіе ирраціональнаго числа будетъ насиліемъ надъ учениками. Можетъ быть аналитическая теорія числа привлекаетъ логической красотой, но она не даетъ образнаго представленія объ ирраціональномъ числѣ. Въ старшемъ классѣ можно дать аналитическое понятіе объ ирраціональномъ числѣ только въ томъ случаѣ, если въ младшихъ классахъ будетъ дано образное представленіе ихъ. Я присоединяюсь къ мнѣнію Т. А. Эренфестъ, что первоначальное понятіе объ ирраціональномъ числѣ нужно давать при помощи отрѣзковъ".

П. А. Долгушинъ (Кіевъ). „Я горячо сочувствую мысли Т. А. Эренфестъ о введеніи ученія объ ирраціональныхъ числахъ въ среднюю школу; на необходимость этого введенія мы обычно наталкиваемся въ алгебрѣ, геометріи, тригонометріи. Мнѣ кажется, что съ понятіемъ объ ирраціональныхъ числахъ нѣтъ надобности ждать до перевода учениковъ въ старшіе классы: необходимо объ этомъ говорить раньше, особенно если эти числа будутъ подчинены формальнымъ законамъ, которымъ подчиняются операціи надъ цѣлыми и дробными числами".

„Понятіе о сѣченіи Дедекинда самое подходящее въ средней школѣ для среднихъ классовъ, а, можетъ быть, даже и для младшихъ. Необходимо вычислять по приближенію, и въ томъ случаѣ, если дѣти умѣютъ это дѣлать, ученіе объ ирраціональныхъ числахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними становится особенно легкимъ и простымъ. Я это покажу на одномъ примѣрѣ. Предположимъ, что мы опредѣляемъ съ помощью сѣченія квадратный корень изъ двухъ ($\sqrt{2}$)".

„Съ одной стороны, беремъ числа, квадраты которыхъ меньше двухъ, съ другой стороны—числа, квадраты которыхъ больше двухъ:

$$1^2 \angle 2 \angle 2^2$$
$$1,\ 4^2 \angle 2 \angle 1{,}5^2$$
$$1{,}41^2 \angle 2 \angle 1{,}42^2$$

. . . .

и т. д.

„Такимъ образомъ, получается сѣченіе, которымъ опредѣляется число; это сѣченіе дѣлитъ числа на два класса: въ 1-омъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа, а во 2-омъ—наименьшаго. Опредѣлимъ еще $\sqrt{3}$, какъ сѣченіе чиселъ двухъ классовъ:

$$1^2 \angle 3 \angle 2^2$$
$$1,\ 7^2 \angle 3 \angle 1{,}8^2$$
$$1{,}73^2 \angle 3 \angle 1{,}74^2$$

. . . .

и т. д.

„Будемъ производить сложеніе соотвѣтствующихъ чиселъ правыхъ и лѣвыхъ рядовъ, и установимъ разность или приростъ:

лѣвые ряды	разность	правые ряды
1 + 1 = 2	2	2 + 2 = 4
1, 4 + 1,7 = 3, 1	0,2	1,5 + 1,8 = 3,3
1,41 + 1,73 = 3, 14	0,02	1,42 + 1,74 = 3,16
. . . .	. .	. . . .

и т. д.

„Ученики легко подмѣтятъ, что разность между результатами сложенія при переходѣ отъ любой строки къ слѣдующей уменьшается (въ 10 разъ) и что здѣсь, такимъ образомъ, опредѣляется то сѣченіе, которое называется суммою чиселъ $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. И для всякаго дѣйствія: вычитанія, умноженія, дѣленія, извлеченія корня, при переходѣ къ слѣдующей строкѣ, по грубому опредѣленію, приростъ уменьшается въ 10 разъ, и результатъ каждаго дѣйствія надъ такими числами будетъ давать сѣченіе. Такимъ образомъ, понятіе о дѣйствіяхъ надъ ирраціональными числами въ высшей степени облегчается: безъ нихъ же обойтись никакъ нельзя, когда приходится сталкиваться съ понятіями о соизмѣримости и о несоизмѣримости".

С. О. Шатуновскій. (Одесса). „Мнѣ приходится въ Университетѣ начинать свой курсъ „Введеніе въ анализъ“ съ теоріи ирраціональныхъ чиселъ; я долженъ сказать, что старое изложеніе ирраціональныхъ чиселъ представляетъ очень и очень большія трудности не только для всѣхъ учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній, но и для тѣхъ лучшихъ изъ нихъ, которые попадаютъ на математическое отдѣленіе физико-математическаго фукультета въ Университетъ. Я думаю, что всякая попытка развить въ средней школѣ идею объ ирраціональныхъ числахъ въ какой-нибудь общей формѣ окончится неудачей. Средство, указанное докладчицей—не вводить общаго понятія объ ирраціональныхъ числахъ, а заниматься только несоизмѣримыми радикалами, т. е. разсмотрѣть небольшой классъ ирраціональныхъ чиселъ и теорію операцій надъ ними, въ нѣкоторой степени въ средней школѣ выполнимо“.

„Я въ своей практикѣ при прохожденіи курса дробей во второмъ классѣ стараюсь внушить ученикамъ ту идею, что дроби—надуманныя числа, не натуральныя. У меня былъ такой случай, что ученики, не знакомые съ дробями, на мой вопросъ, какъ раздѣлить 4 на 5, отвѣтили, что 4 на 5 раздѣлить невозможно, это будетъ дѣленіе вещей, а не чиселъ“.

„Когда дѣло доходитъ до ирраціональныхъ чиселъ, я показываю, что $\sqrt{2}$ не существуетъ. Есть задачи явно абсурдныя, сюда относится и нахожденіе числа $\sqrt{2}$; нѣтъ такого числа“.

„Что касается дѣйствій надъ ирраціональными числами, то никакой бѣды не произойдетъ отъ такой постановки вопроса и ни въ какое противорѣчіе мы не впадемъ. Всѣмъ, интересующимся этимъ вопросомъ, я укажу, гдѣ можно прочитать объ этомъ“.

Н. А. Колубовская. (Спб.). „Можетъ быть среди собравшихся есть товарищи, которые съ нѣкоторымъ недоумѣніемъ уйдутъ изъ этой залы въ свои глухіе уголки, гдѣ имъ придется работать надъ ирраціональными числами. Я не могу уяснить, какъ докладчица относится къ тому вопросу, о которомъ упоминала въ началѣ доклада: она не признала себя поклонницей лабораторнаго метода; съ другой стороны, заканчивая иллюстрацію ирраціональныхъ чиселъ на несоизмѣримыхъ отрѣзкахъ,—она обратилась къ конкретнымъ фактамъ. Я въ недоумѣніи: съ чего надо начать—съ логическихъ обоснованій, которыя она внесла, или съ конкретнаго знакомства съ ирраціональными числами при помощи отрѣзковъ?“

К. Ѳ. Лебединцевъ. (Москва). „Я хотѣлъ здѣсь подѣлиться нѣкоторыми соображеніями, почерпнутыми мною изъ небольшого опыта въ примѣненіи на практикѣ тѣхъ самыхъ идей, которыя были изложены въ докладѣ. Прежде всего я долженъ предупредить, что я безусловно согласенъ съ основными положеніями докладчицы. Начинать надо не съ общей теоріи, а только съ частныхъ случаевъ, которые естественно впервые представляются учащимся въ теченіи курса, съ вопроса о радикалахъ, даже болѣе узко: съ частнаго случая ирраціональныхъ радикаловъ — квадратныхъ. Я перейду къ конкретнымъ примѣрамъ.

Возьму такую задачу: опредѣлить стороны квадрата, площадь котораго будетъ вдвое больше площади даннаго квадрата, сторона котораго принята за единицу. Сначала я предлагаю рѣшить эту задачу вычисленіемъ; не трудно сообразить, что это сводится къ нахожденію такого числа, квадратъ котораго равенъ двумъ. Затѣмъ мы доказываемъ, что такого числа нѣтъ среди извѣстныхъ имъ (ученикамъ) до сихъ поръ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Послѣ этого я предлагаю рѣшить ту же задачу построеніемъ; оказывается, что искомый квадратъ существуетъ, и сторона его равна діагонали даннаго. Теперь получается такое положеніе: сторона искомаго квадрата существуетъ, а числа для выраженія ея длины у насъ нѣтъ; значитъ нужно придумать новое число для ея обозначенія. Этому числу я приписываю названіе: „квадратный корень изъ двухъ“ (при чемъ слова: „квадратный корень“ пока не имѣютъ того значенія, которое учениками приписывалось раньше), и обозначаю его символомъ $\sqrt{2}$.“

„Затѣмъ символу этому нужно дать мѣсто въ ряду чиселъ, извѣстныхъ до сихъ поръ, т. е. раціональныхъ. Это тоже весьма не трудно сдѣлать при помощи чертежа. Этотъ символъ надо считать больше всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго меньше 2, и менѣе всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго больше 2. Подобнымъ же образомъ устанавливается смыслъ и другихъ аналогичныхъ символовъ ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д.), устанавливается понятіе о приближенныхъ значеніяхъ этихъ чиселъ и указываются способы нахожденія этихъ приближенныхъ значеній съ любой степенью точности".

„Теперь на очереди трудный вопросъ: какимъ образомъ въ этомъ мѣстѣ курса излагать теорію дѣйствій надъ ирраціональными корнями, теорію дѣйствій надъ квадратными радикалами, хотя бы въ томъ смыслѣ, чтобы дать опредѣленіе сложенію, умноженію, вычитанію и т. д. и показать, что представляетъ произведеніе $\sqrt{2} . \sqrt{5}$. Это, пожалуй, и возможно при подходящемъ составѣ класса, хотя все же чрезвычайно сложно и затруднительно, но, по счастью, въ этомъ нѣтъ практической надобности. Чего намъ нужно добиться отъ учащихся? Нужно, чтобы они удостовѣрились, что преобразованіе, которому подчиняются раціональные квадратные радикалы, распространяется и на ирраціональные квадратные радикалы".

„Какъ въ педагогической практикѣ подойти къ этому вопросу? Я подходилъ къ нему слѣдующимъ путемъ. Напр., нужно показать, что выраженіе $5\sqrt{2}$ можетъ быть замѣнено числомъ $\sqrt{50}$. Я заставляю учащихся вычислить приближенное значеніе $\sqrt{50}$ до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ и т. д., а съ другой стороны—приближенное значеніе числа $5 . \sqrt{2}$ до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ . . . . . (при этомъ, конечно, надо знать элементарныя правила приближенныхъ вычисленій и брать приближенія $\sqrt{2}$ соотвѣтственно до $\frac{1}{50}, \frac{1}{500}, \frac{1}{5000},$ . . . .). Въ концѣ концовъ учащіеся убѣждаются, что ирраціональные квадратные радикалы могутъ быть преобразованы по тѣмъ же правиламъ, какія установлены для раціональныхъ корней. Если предложить вопросъ, что значитъ приближенное значеніе, дѣти могутъ не дать отвѣта на этотъ вопросъ. Пока можно не устанавливать, что значитъ приближенное значеніе, а только думать о приближенномъ значеніи. Учащіеся интуитивно убѣждаются, что подобныя преобразованія, если мы будемъ производить вычисленія съ помощью приближеннаго значенія, ведутъ къ одинаковымъ результатамъ. Разъ такое убѣжденіе получается интуитивно, то такія преобразованія допускаются. Этимъ можно пока удовлетвориться. А если кто-либо изъ дѣтей предложитъ вопросъ: что значитъ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,—какой дать отвѣтъ? Не устанавливая пока, что значитъ эта сумма, будемъ мыслить ея приближенное значеніе. Совершенно достаточно ограничиться этими свѣдѣніями, дальнѣйшее развитіе свѣдѣній объ ирраціональныхъ числахъ будетъ доступно въ старшихъ классахъ при повтореніи основъ алгебры. Въ какой мѣрѣ оно можетъ быть проведено, покажетъ опытъ“.

С. И. Шохоръ-Троцкій. (Спб). „Уже въ ариѳметикѣ есть возможность заронить идею о существованіи ирраціональныхъ чиселъ. Этому мѣсто въ томъ пунктѣ курса ариѳметики, гдѣ учащіеся знакомятся съ безконечными десятичными дробями“.

„О совокупности цифръ

0, 12 112 1112 11112 . . . . . .

тоже говорятъ, что она обозначаетъ нѣкоторое число (на любомъ мѣстѣ стоитъ одна совершенно опредѣленная цифра); что значитъ сложить такія числа, можно сказать только тогда, когда есть возможность сказать, какая цифра стоитъ на любомъ, напередъ заданномъ мѣстѣ этихъ записей. Такимъ образомъ, можно убѣдить учащихся впослѣдствіи, во-первыхъ, въ томъ, что мы создаемъ новый родъ чиселъ (не цѣлыхъ, не обыкновенныхъ дробей и не безконечныхъ десятичныхъ періодическихъ дробей), и, во-вторыхъ, въ томъ, что надо договориться, какъ опредѣлять сложеніе (а также и другія дѣйствія) надъ этими числами новаго рода.“

„Въ остальномъ я соглашаюсь съ С. О. Шатуновскимъ и съ Т. А. Эренфестъ, не настаивающей на введеніи Дедекиндовой конструкціи ученія объ ирраціональномъ числѣ въ курсъ средней школы. Во всякомъ случаѣ опредѣленіе ирраціональнаго числа, какъ предѣла нѣкоторой перемѣнной величины, отвергнуто еще Вейерштрассомъ какъ „порочный кругъ“ въ опредѣленіи“.

А. Д. Санько (Курскъ) предлагаетъ ввести въ VIII классъ гимназій и въ VII классъ реальныхъ училищъ теорію ирраціональныхъ чиселъ, наиболѣе обоснованную, а также—понятіе о «числѣ» въ связи съ теоріей предѣловъ и понятіемъ о непрерывности.

П. С. Эренфестъ (Спб.). „Что дало поводъ къ введенію новыхъ чиселъ?—Большею частію, если и не всегда, это задачи, въ которыхъ приходится оперировать надъ величинами. Поэтому, весьма естественно и ученика знакомить съ новыми числами въ связи съ наглядными операціями надъ величинами, а не тѣмъ отвлеченно-ариѳметическимъ путемъ, по которому идутъ теоретики“.

„Но здѣсь возникаетъ одно затрудненіе: ариѳметическое построеніе ученія о числахъ достигло съ теченіемъ времени замѣчательной точности и методической симметричности, чего нельзя сказать о построеніи, опирающемся на операціи надъ величинами. Для школьнаго преподаванія это, очевидно, очень печально. Поэтому было бы важно знать, нельзя ли и эту послѣднюю точку зрѣнія на числа развить съ большей точностью и симметричностью. Въ этомъ отношеніи интересно прочесть работы Гамильтона и Клиффорда*), въ которыхъ эти авторы вводятъ два новыхъ рода чиселъ: кватерніоны и бикватерніоны. Гамильтонъ приходитъ къ кватерніонамъ потому, что онъ ищетъ числа, отвѣчающія операціи „вращенія и растяженія" вектора; бикватерніоны соотвѣтствуютъ еще болѣе сложнымъ пространственнымъ операціямъ. Чтобы сдѣлать для читателя понятнѣе введеніе этихъ новыхъ чиселъ, оба автора показываютъ сперва, какъ можно ввести уже знакомыя числа—напр., комплексныя и отрицательныя—въ связи съ пространственными операціями".

„При чтеніи этихъ работъ возникаютъ слѣдующія впечатлѣнія: 1) пока такого рода предложеніе чрезвычайно неточно и несимметрично, 2) должно быть очень нетрудно сдѣлать его точнымъ и симметричнымъ, и тогда оно оказалось бы чрезвычайно цѣннымъ въ дидактическомъ отношеніи".

В. М. Успенскій (Ст. Лабинская, Куб. обл.). „Мнѣ хотѣлось бы выяснить, какую цѣль имѣла докладчица: доказать ли, что введеніе въ курсъ средней школы понятія объ ирраціональныхъ числахъ необходимо, или показать, какъ проходить этотъ курсъ".

„Что введеніе въ курсъ средней школы понятія объ ирраціональныхъ числахъ необходимо, объ этомъ не можетъ быть и рѣчи; подобно тому, какъ во II—III классахъ должны проходиться дроби, такъ въ курсѣ V класса должны быть введены ирраціональныя числа, такъ какъ на первыхъ же порахъ при изученіи квадратныхъ чиселъ, а также во многихъ задачахъ геометріи: о сторонѣ вписаннаго въ кругъ квадрата, правильнаго треугольника,—приходится сталкиваться съ этими числами. Въ настоящее время, къ сожалѣнію, большинству преподавателей приходится ограничиться сообщеніемъ свѣдѣній по общепринятымъ учебникамъ съ соотвѣтствующими дополненіями и поясненіями, какъ указалъ проф. Шатуновскій".

В. В. Бобынинъ (Москва). „Ко всему, что я слышалъ по поводу ирраціональныхъ чиселъ, я считаю полезнымъ сдѣлать историческое дополненіе, привести справку о томъ, какъ въ исторіи умственной жизни человѣчества произошла встрѣча съ ирраціональными числами. Человѣчество впервые встрѣтилось съ ирраціональнымъ числомъ при распространеніи содержанія пиѳагоровой теоремы съ

---

*) См., напримѣръ: Клиффордъ, «Здравый смыслъ точныхъ наукъ». См. тамъ дальнѣйшую литературу.

раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, на которыхъ она была познана первоначально, на нераціональные. То, что могло совершиться у пиѳагорейцевъ, по всей вѣроятности, совершилось гораздо ранѣе у индусовъ. Въ разсматриваемыя отдаленныя времена извлеченіе квадратнаго корня изъ точныхъ квадратовъ производилось очень несложно, именно—черезъ простое сопоставленіе членовъ ряда квадратныхъ чиселъ съ соотвѣтствующими членами натуральнаго ряда. При опредѣленіи квадратнаго корня изъ неквадратнаго числа тотъ же методъ сопоставленія прямо показывалъ, что этотъ корень заключается между двумя послѣдовательными числами натуральнаго ряда. Этимъ и было положено начало познанію нахожденія ирраціональнаго числа между двумя рядами раціональныхъ чиселъ. Отправляясь отъ этого начала, методъ попытокъ или, какъ его называютъ иногда французы, экспериментальный методъ давалъ члены обоихъ рядовъ до какой угодно степени приближенія. Въ надеждѣ достигнуть недостижимаго, то-есть точнаго значенія квадратнаго корня изъ неквадратнаго числа, древніе математики шли указаннымъ путемъ все далѣе и далѣе въ сближеніи рядовъ, заключающихъ между собою ирраціональное число, пока не явился вдохновенный умъ, который, если воспользоваться выраженіемъ Шиллера, сказалъ имъ: „ты плывешь напрасно; безконечность передъ тобою и безконечность за тобою“. Съ этого времени направленіе ихъ работъ рѣзко измѣнилось. Идея ирраціональности была высказана, осталось ее доказать. Но для этого уже не было надобности въ высокомъ вдохновенномъ умѣ. Сдѣлать это при помощи метода reductio ad absurdum, какъ единственно извѣстнаго тогда метода доказательства, могъ уже и обыкновенный дюжинный математикъ. Результатъ работъ этого рода представленъ у Аристотеля утвержденіемъ: „если бы діагональ квадрата была соизмѣрима съ его стороною, то четное число равнялось бы нечетному“.

А. В. Бабаджанъ (Симферополь). „Въ виду тѣсной связи въ средней школѣ вопроса объ ирраціональныхъ числахъ съ вопросомъ о существованіи двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ, покорнѣйше прошу докладчицу указать, какимъ способомъ предлагается ею доказать существованіе двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ; мнѣ кажется, что безъ алгориѳма Эвклида это доказательство не обойдется“.

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.). „Вопросъ о существованіи $\sqrt[m]{A}$, какъ величины, сравнимой съ соизмѣримыми величинами, представляетъ вопросъ о существованіи такой величины вообще. Съ этой точки зрѣнія я считаю вполнѣ достаточнымъ узаконить существованіе $\sqrt[m]{A}$ существованіемъ (т. е. написаніемъ) уравненія:

$x^m = A$, ибо право на существованіе корня уравненія F $(x) = 0$ обусловливается не чѣмъ другимъ, какъ существованіемъ, т. е. написаніемъ уравненія, которому онъ долженъ удовлетворять. Это основывается на томъ соображеніи, что корнемъ уравненія называется (не „есть“) то значеніе икса, при которомъ уравненіе обращается въ тождество. Поясню это слѣдующимъ примѣромъ: обратимся къ моменту, когда понятія о мнимомъ числѣ въ наукѣ еще не было, а требовалось рѣшить уравненіе $x^2 = -1$. Числа, которое удовлетворяло бы этому уравненію, въ понятіяхъ того времени не существовало, т. е. никакія допускаемыя въ то время алгебраическія дѣйствія не приводили къ результату, который удовлетворялъ бы уравненію $x^2 = -1$. Но право на существованіе такой величины уже обусловлено написаніемъ уравненія $x^2 = -1$ и, слѣдовательно, оставалось только назвать ее“.

„Ограничиваясь лишь однимъ этимъ примѣромъ (а ихъ можно привести очень много), не могу не указать, что выясненіе ученикамъ средней школы, начиная съ 3-го класса, этого взгляда сдѣлало бы имъ очевиднымъ, что объемъ математическаго анализа безграниченъ“.

А. Р. Кулишеръ (Спб.). Докладчица указываетъ, что въ извѣстный моментъ преподаванія необходимо построить изученіе ирраціональныхъ чиселъ не на одной только конкретной основѣ, а на фундаментѣ болѣе или менѣе отвлеченныхъ соображеній. Что это возможно, что это пожеланіе не является преувеличеннымъ, можно судить по тому, что дѣтей въ возрастѣ отъ 10 до 14 лѣтъ мы знакомимъ съ такими глубокими отвлеченіями, какъ умноженіе и дѣленіе на единицу или умноженіе какого-либо числа на дробь. Правда, мы исходимъ при этомъ изъ задачъ конкретныхъ, но все же доводимъ учащихся до пониманія самаго характера выполняемаго здѣсь отвлеченія, по трудности превосходящаго, принимая во вниманіе менѣе зрѣлый возрастъ учащихся, то, что предлагаетъ намъ Татьяна Алексѣевна въ своемъ докладѣ. Я долженъ отмѣтить также величайшую осторожность, съ какой Т. А. подходитъ ко всякаго рода теоретическимъ соображеніямъ, предлагаемымъ учащимся средней школы. Такъ, напримѣръ, въ самой схемѣ доклада она предпочитаетъ сначала говорить не о „сѣченіяхъ“, которыя могли бы вызвать нѣкоторый геометрическій образъ, а о распредѣленіи чиселъ по двумъ мѣшкамъ или урнамъ“.

„Въ заключеніе напомню соображеніе Пьера Дюгема, высказанное имъ въ его книгѣ „Строеніе физической теоріи“ относительно мышленія различныхъ ученыхъ. По его классификаціи такіе люди, какъ Вильгельмъ Томпсонъ, нуждавшійся постоянно въ людяхъ, облегчавшихъ ему построеніе тонкихъ теорій, или Гамильтонъ, испытывавшій потребность въ конкретизаціи нѣкоторыхъ чиселъ и открывшій исчисленіе кватерніоновъ, должны быть отнесены къ числу умовъ широкихъ, но не глубокихъ. Ученики, прошедшіе курсъ, предложенный докладчицей, не будутъ знать теоріи ирраціональныхъ чиселъ во всей ея глубинѣ, они скорѣе будутъ видѣть шире перспективу... Но не будетъ ли этого достаточно? Пожелаемъ нашимъ ученикамъ, чтобы они, не гоняясь за философской глубиной познаній, обладали широтой ума Томпсона и Гамильтона".

Т. А. Эренфестъ (Спб.). „Съ очень многими замѣчаніями я согласна и могу только благодарить за нихъ, противъ многихъ я хотѣла бы возразить, но сейчасъ это за позднимъ временемъ невозможно. Считаю своею обязанностью отвѣтить однако на опредѣленные вопросы, которые были поставлены мнѣ. Во-первыхъ, меня спросили, какъ согласить то, что, съ одной стороны, я предлагаю при въ изученіи ирраціональныхъ чиселъ исходить изъ конкретныхъ образовъ, а съ другой высказываю отрицательное отношеніе къ лабораторному методу. Когда я высказала, что не совсѣмъ сочувствую лабораторному методу, то имѣла въ виду слѣдующее. Въ преподаваніи въ настоящее время наблюдается теченіе, которое, стремясь какъ можно больше облегчить ученикамъ усвоеніе знаній, знакомитъ ихъ съ научными положеніями только на наглядныхъ примѣрахъ, и то—не многихъ. Я считаю это недопустимымъ ни на какой ступени обученія".

„Во-вторыхъ, мнѣ задали такой вопросъ: какая цѣль моего доклада: доказать ли необходимость изученія ирраціональныхъ чиселъ въ средней школѣ или показать, какъ надо излагать это ученіе. Я не доказывала необходимости введенія ирраціональныхъ чиселъ, я хотѣла только разобрать: какія затрудненія, какъ логическія, такъ и методическія, представляются при различныхъ способахъ изложенія, и съ своей стороны предложила только краткое указаніе того пути, который мнѣ представляется болѣе удобнымъ".

„На вопросъ, какимъ способомъ я предлагаю доказывать существованіе двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ, я отвѣчу: согласна что ученикамъ можетъ показаться труднымъ способъ, который я предлагаю, и я приму съ радостью другой, болѣе легкій, если мнѣ его укажутъ; но отказываться отъ доказательства существованія несоизмѣримыхъ отрѣзковъ я не нахожу возможнымъ".

XVII. Ученіе о величинѣ.

(О постулатахъ, лежащихъ въ основаніи понятія о величинѣ).

Конспектъ доклада пр.-доц. С. О. Шатуновскаго (Одесса).

«Возникновеніе какого-либо представленія α при сопоставленіи двухъ предметовъ a и b, разсматриваемыхъ въ порядкѣ a, b, мы будемъ обозначать символомъ $a \alpha b$. Представленіе α, а также и символъ $a \alpha b$ мы будемъ называть *отношеніемъ* предметовъ a и b, взятыхъ въ порядкѣ a, b, при чемъ a и b будутъ называться *членами* этого отношенія: a—предыдущимъ, b — послѣдующимъ. Нами допускается и тотъ случай, когда элементъ b есть элементъ тождественный съ элементомъ a.

Пусть G $(a, b, c,..., x,..., y,..., z,...)$ будетъ выдѣленная какимъ-либо признакомъ система предметовъ $a, b, c,..., x,..., y,..., z,...$ Представленіе α мы будемъ называть *обратимымъ* въ системѣ G въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда при наличности отношенія $x \alpha y$ будетъ имѣть мѣсто $y \alpha x$, каковы бы ни были два элемента x и y системы G. Представленіе α не будетъ называться обратимымъ въ системѣ G, если хоть для одной пары элементовъ x и y системы G будетъ имѣть мѣсто одно и только одно изъ отношеній $x \alpha y$, $y \alpha x$. Представленіе α мы будемъ называть *транзитивнымъ* въ системѣ G тогда и только тогда, когда для каждыхъ трехъ элементовъ x, y, z системы G при наличности двухъ отношеній

$$x \alpha y \text{ и } y \alpha z,$$

въ которыхъ послѣдующій членъ одного есть предыдущій другого, имѣетъ мѣсто отношеніе

$$x \alpha z.$$

Станемъ сопоставлять (ассоціировать) предметы системы G каждый съ каждымъ въ любомъ порядкѣ, а также каждый предметъ съ самимъ собою. Пусть при этихъ сопоставленіяхъ въ нашемъ умѣ возникаютъ представленія α, β, γ, δ,..., и положимъ, что первыя три обладаютъ слѣдующими восьмью свойствами:

(1) каждые два предмета x, y системы G находятся другъ къ другу *по крайней мѣрѣ въ одномъ* изъ отношеній α, β, γ;

(2) α исключаетъ β, то-есть всякій разъ, когда два какихъ-либо элемента x, y системы G находятся въ отношеніи α, они не находятся въ отношеніи β и, находясь въ отношеніи β, они не находятся въ отношеніи α;

(3) α исключаетъ γ;

(4) для каждаго элемента x системы G имѣетъ мѣсто отношеніе

$$x \; \alpha \; x;$$

(5) отношеніе α обратимо въ системѣ G;

(6) α есть отношеніе транзитивное въ системѣ G;

(7) β есть отношеніе транзитивное въ системѣ G;

(8) γ есть отношеніе транзитивное въ системѣ G.

Эти восемь допущеній мы будемъ называть *постулатами количественнаго сравненія* или *постулатами скалярнаго расположенія.*

Ясно, что все, выводимое изъ этихъ постулатовъ въ отношеніи представленія β, можетъ быть перенесено mutatis mutandis на представленіе γ, ибо *система* нашихъ постулатовъ не измѣнится, когда мы замѣстимъ въ нихъ терминъ β терминомъ γ, а терминъ γ —терминомъ β.

Докажемъ теперь слѣдующія теоремы:

I. *Отношеніе* β *необратимо*: изъ $x \; \beta \; y$ слѣдуетъ $y \; \gamma \; x$.

Доказательство. Дано предложеніе $x \; \beta \; y$, и мы обязаны (1) принять по крайней мѣрѣ одно изъ трехъ предложеній $y \; \alpha \; x$, $y \; \beta \; x$, $y \; \gamma \; x$. Принимая $y \; \alpha \; x$, мы имѣемъ также (5) $x \; \alpha \; y$, что вмѣстѣ съ $x \; \beta \; y$ противорѣчитъ постулату (2), а потому $y \; \alpha \; x$ отвергается. Принявъ $y \; \beta \; x$ и имѣя $x \; \beta \; y$, мы выведемъ (7) $y \; \beta \; y$, что вмѣстѣ съ $y \; \alpha \; y$ (4) противорѣчитъ постулату (2). Такимъ образомъ $y \; \beta \; x$ также отвергается и, слѣдовательно, необходимо принять $y \; \gamma \; x$.

Изъ $x \; \gamma \; y$ будетъ вытекать $y \; \beta \; x$.

II. β *исключаетъ* γ,
ибо, принявъ $x \beta y$ и $x \gamma y$, имѣемъ по предыдущей теоремѣ также $y \beta x$, а изъ $x \beta y$ и $y \beta x$ слѣдуетъ (7) $x \beta x$, что въ соединеніи съ (4) $x \alpha x$ опять противорѣчитъ постулату (2).

III. *Въ отношеніи $x \beta y$ (или $x \gamma y$) можно любой изъ элементовъ x и y замѣнить элементомъ z, если только этотъ послѣдній находится къ замѣняемому въ отношеніи* α.

Доказательство. Примемъ, напримѣръ, предложенія $x \beta y$, $y \alpha z$. Изъ трехъ предложеній $x \alpha z$, $x \gamma z$, $x \beta z$ по крайней мѣрѣ одно принимается (1). Первое изъ нихъ $x \alpha z$ вмѣстѣ съ предложеніемъ $z \alpha y$, выводимымъ (5) изъ $y \alpha z$, даетъ (6) $x \alpha y$, что противорѣчитъ (2) предложенію $x \beta y$, слѣдовательно, $x \alpha z$ отвергается. Отвергается также предложеніе $x \gamma z$, ибо изъ него (теор. I) слѣдуетъ $z \beta x$, что вмѣстѣ съ принятымъ предложеніемъ $x \beta y$ даетъ (7) $z \beta y$ или (теор. I) $y \gamma z$, а это противорѣчитъ (3) данному предложенію $y \alpha z$. Такимъ образомъ, принявъ $x \beta y$ и $y \alpha z$, мы должны принять и $x \beta z$.

Что касается самихъ постулатовъ 1—8, то они представляютъ систему сужденій, логически независимыхъ, т. е. не противорѣчащихъ другъ другу и не вытекающихъ другъ изъ друга.

Отсутствіе противорѣчій доказывается таблицей № 1, въ которой выполняются всѣ 8 постулатовъ. Логическая независимость каждаго изъ постулатовъ отъ остальныхъ семи доказывается таблицами №№ 2—9. Въ каждой изъ этихъ таблицъ не выполняется только одинъ изъ 8-ми постулатовъ.

Таблица № 1.

$G\ (A,\ B,\ C,\ D,\ E)$

$A \alpha A$	$A \alpha B$	$A \alpha C$	$A \gamma D$	$A \gamma E$
$B \alpha B$	$B \alpha A$	$B \alpha C$	$B \gamma D$	$B \gamma E$
$C \alpha C$	$C \alpha A$	$C \alpha B$	$C \gamma D$	$C \gamma E$
$D \alpha D$	$D \beta A$	$D \beta B$	$D \beta C$	$D \gamma E$
$E \alpha E$	$E \beta A$	$E \beta B$	$E \beta C$	$E \beta D$

Таблица № 2.

$G\,(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F)$

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$	$A\delta F$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$	$B\delta F$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$	$C\delta F$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\beta E$	$D\delta F$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$	$E\delta F$
$F\alpha F$	$F\delta A$	$F\delta B$	$F\delta C$	$F\delta D$	$F\delta E$

Не выполняется 1-й постулатъ.

Присоединивъ къ таблицѣ № 1 соотношеніе $A\beta B$ будемъ имѣть таблицу № 3, въ которой выполняются всѣ постулаты кромѣ второго.

Таблица № 3.

$A\alpha A$	$A\alpha B$ $A\beta B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\beta D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Подобнымъ же образомъ, присоединивъ къ таблицѣ № 1 соотношеніе $A\gamma B$, будемъ имѣть таблицу № 4, въ которой выполняются всѣ постулаты, кромѣ третьяго. Замѣнивъ въ таблицѣ № 2 $F\alpha F$ черезъ $F\beta F$, всѣ δ въ послѣдней горизонтали черезъ β и всѣ остальныя δ черезъ γ, получимъ таблицу № 5 для доказательства независимости 4-го постулата.

Таблица № 5.

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$	$A\gamma F$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$	$B\gamma F$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$	$C\gamma F$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$	$D\gamma F$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$	$E\gamma F$
$F\beta F$	$F\beta A$	$F\beta B$	$F\beta C$	$F\beta D$	$E\beta E$

Замѣняя въ таблицѣ № 1 соотношенія $B\alpha A$, $C\alpha A$, $C\alpha B$ соотвѣтственно черезъ $B\beta A$, $C\beta A$, $C\beta B$, мы получимъ таблицу № 6 для доказательства независимости пятаго постулата.

Таблица № 6.

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\beta A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\beta A$	$C\beta B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Таблица № 7.

$G\ (A,\ B,\ C,\ D)$

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\beta C$	$B\gamma D$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\gamma B$	$C\gamma D$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$

Въ этой таблицѣ не выполняется 6-й постулатъ.

Если въ таблицѣ № 1 замѣнимъ соотношенія $D\beta A$, $D\beta B$, $E\beta A$, $E\beta B$, соотвѣтственно черезъ $D\gamma A$, $D\gamma B$, $E\gamma A$, $E\gamma B$, то получимъ таблицу № 8 для доказательства независимости 7-го постулата и, наконецъ, если въ таблицѣ № 8 замѣнимъ β на γ и γ на β, то будемъ имѣть таблицу № 9 для доказательства независимости восьмого постулата.

Таблица № 8.

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\gamma A$	$D\gamma B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\gamma A$	$E\gamma B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Таблица № 9.

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\beta D$	$A\beta E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\beta D$	$B\beta E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\beta D$	$C\beta E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\gamma C$	$D\beta E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\gamma C$	$E\gamma D$

Условіе. Для группы G три представленія α, β, γ могутъ быть названы представленіями о равномъ, большемъ и меньшемъ только въ томъ случаѣ, когда выполнены постулаты 1—8.

Опредѣленіе. Группу элементовъ, для которой установлены представленія α, β, γ, удовлетворяющія постулатамъ 1—8, называютъ скалярной группой величинъ. Иногда самую группу называютъ скалярной величиной, а ея элементы значеніями этой величины».

Пренія по докладу пр.-доц. С. О. Шатуновскаго.

Въ преніяхъ, кромѣ самого докладчика, принимали участіе: *проф. Н. А. Шапошниковъ, П. С. Эренфестъ, А. Н. Шапошниковъ, проф. П. А. Некрасовъ, В. М. Меліоранскій* и др.

Проф. Н. А. Шапошниковъ (Москва) находитъ, что докладъ С. О. Шатуновскаго, представляющій весьма остроумное и интересное логическое упражненіе, не разрѣшаетъ, однако, вопроса объ опредѣленіи понятія „величина“. Въ докладѣ идетъ рѣчь о сопоставленіи трехъ математическихъ соотношеній съ 8 логическими постулатами. Весь докладъ, по мнѣнію оппонента, заключается, собственно, въ анализѣ соотношеній между постулатами, и въ сопоставленіи постулатовъ между собой, тогда какъ опредѣленіе понятія должно было бы выдѣлить опредѣляемое понятіе изъ ряда другихъ понятій черезъ сопоставленіе съ ними. Только такимъ образомъ можно углубить понятіе; иначе все время придется вращаться въ области тезисовъ, какъ и случилось съ докладчикомъ, который не сопоставлялъ изучаемаго понятія съ другими. Подъ опредѣленіемъ понятія надо понимать, по словамъ проф. Шапошникова, указаніе сущности этого понятія, т.-е. указаніе тѣхъ признаковъ, которые это понятіе характеризуютъ вполнѣ и отличаютъ отъ всѣхъ другихъ понятій. Въ началѣ своего доклада авторъ, какъ будто дѣлаетъ попытку къ сопоставленію изучаемаго понятія съ другими понятіями; именно, онъ вводитъ понятіе о *соотношеніе* между предметами a и b. Что же это за соотношеніе? спрашиваетъ проф. Шапошниковъ.

По словамъ докладчика, это соотношеніе, говоритъ Н. А. Шапошниковъ, можетъ оказаться, напр., въ томъ, что a — учитель, b—ученикъ. Но между двумя лицами (предметами), продолжаетъ проф. Шапошниковъ, существуютъ въ высшей степени разныя соотношенія: родство, подчиненность и т. п. Своей иллюстраціей докладчикъ, по мнѣнію оппонента, необъятно расширилъ и усложнилъ кругъ представленій, изъ которыхъ должно быть выдѣлено понятіе о величинѣ, тогда какъ слѣдовало свести опредѣляемое понятіе къ понятію болѣе простому, чѣмъ оно само.

П. С. Эренфестъ (Спб.) проситъ разъяснить слѣдующіе два вопроса, вызываемые докладомъ. Во-первыхъ, соотношенія γ и входятъ въ аксіомы вполнѣ симметрично. Какое же дополненіе необходимо сдѣлать къ предложеннымъ 8 постулатамъ, чтобы символъ β соотвѣтствовалъ именно тому, что мы называемъ «больше», а символъ γ — именно тому,что мы называемъ „меньше“?

Во-вторыхъ, въ таблицу (1) входятъ 5 элементовъ: A, B, C, D, E, и мы убѣдились изъ опыта, что для этихъ 5 элементовъ безъ противорѣчія выполняются предложенные 8 постулатовъ. Спрашивается, не возникнутъ ли противорѣчія въ томъ случаѣ если возьмемъ достаточно большое конечное число n такихъ элементовъ?

А. Н. Шапошниковъ (Щелково, Сѣв. дор.) присоединяется къ П. С. Эренфесту по вопросу о возможности противорѣчія въ постулатахъ при большемъ числѣ элементовъ; далѣе онъ указываетъ, что по вопросу о примѣнимости системы аксіомъ докладчикъ ввелъ дополнительный постулатъ: если существуетъ система реальныхъ вещей, соотвѣтствующихъ извѣстнымъ логическимъ законамъ, то, стало-быть, эти логическіе законы не содержатъ противорѣчія. Вводя этотъ постулатъ, докладчикъ, по словамъ А. Н. Шапошникова, ведетъ насъ отъ абстрактнаго къ конкретному, тогда какъ въ дѣйствительности мы воспринимаемъ идеи *интуитивно*, идемъ путемъ обратнымъ — отъ конкретнаго къ абстрактному.

Проф. П. А. Некрасовъ (Спб.). „Споры о 8 постулатахъ количественнаго сравненія, выдвинутыхъ докладчикомъ,о числѣ и выраженіи этихъ постулатовъ, т. е. объ основаніяхъ логики величинъ, имѣютъ свое глубокое основаніе. Тутъ умѣстно вспомнить одну изъ антиномій Канта; тезисъ этой антиноміи гласитъ:

въ мірѣ все состоитъ изъ простого; антитезисъ, наоборотъ, утверждаетъ: въ мірѣ нѣтъ ничего простого, а все сложно. Число и складъ постулатовъ ученія о величинахъ зависитъ отъ того, какъ относиться къ этой антиноміи. Я отвергаю тезисъ этой антиноміи и принимаю среднее рѣшеніе между тезисомъ и антитезисомъ, допуская въ мірѣ множественность независимыхъ причинъ, но не безграничную. И авторъ доклада допускаетъ независимости въ ученіи о системахъ величинъ. Это хорошая сторона его теоріи величинъ. Далѣе авторъ допускаетъ предѣлы, за которыми компетенція избранной логической системы теряетъ силу, и тогда, какъ говоритъ авторъ доклада, наступаетъ время примѣнять къ дѣлу чистый экспериментъ. Я не могу помириться съ этимъ утвержденіемъ. На границѣ между логикой восьми предложенныхъ постулатовъ и прыжкомъ въ область чистаго эксперимента нужна промежуточная логика величинъ съ болѣе значительнымъ числомъ постулатовъ и съ болѣе значительнымъ числомъ варьирующихся величинъ x, y, z.... Эта пограничная логика есть логика математической вѣроятности съ ея законами большихъ чиселъ, посредствующихъ вспомогательныхъ величинъ, съ ея теоріей взаимоотношеній, которая нынѣ стала популярной въ Англіи, Германіи и въ разработкѣ которой принимаютъ выдающееся участіе русскіе математики въ лицѣ: Чебышева, Давидова, Буняковскаго и другихъ. Въ теоріи взаимоотношеній между многими различными величинами мы имѣемъ дѣло съ группами величинъ, не только измѣряемыхъ абсолютными физическими мѣрами, но и съ группами величинъ другой природы, созидаемыхъ, какъ капиталы, изъ довѣрія, изъ того, что, какъ сама мысль, не можетъ быть измѣрено упомянутыми абсолютными мѣрами, но можетъ быть исчислено“.

„Каждое взаимоотношеніе различныхъ величинъ, каждое предложеніе о величинахъ въ теоріи взаимоотношеній сопровождается оцѣнкой вѣроятности, какъ апріорно, такъ и апостеріорно, послѣ прыжка въ область эксперимента“.

„Интерполирующій синтезъ эксперимента съ логикой математической вѣроятности даетъ объективную опытную науку, приводитъ къ объективному согласію независимыя системы съ ихъ субъективными постулатами; ибо постулаты эти авторъ предлагаетъ неизвѣстно откуда, какъ бы отъ себя, т. е. субъективно“.

„Я думаю, что математика будетъ служить своей цѣли порядка, когда приметъ такую точку зрѣнія: міръ не совсѣмъ простъ, міръ сложенъ, существуетъ множество причинъ, существуетъ множество независимыхъ системъ, между тѣмъ вѣчны міръ и согласіе“.

В. М. Меліоранскій (Спб.). „Я хотѣлъ сказать относительно

4-го постулата, предложеннаго намъ профессоромъ Шатуновскимъ. Припомните, въ самомъ началѣ, когда онъ говорилъ о символѣ, какъ былъ имъ выясненъ 4-ой постулатъ? X и Y — это нѣкоторыя двѣ вещи; мы ихъ сопоставляемъ, при этомъ сопоставленіи, сказано было, возникаетъ нѣкоторое представленіе; вотъ это возникающее представленіе обозначаемъ символомъ (α). Итакъ α—это символъ, изображающій представленіе, которое возникаетъ при сопоставленіи предмета X съ предметомъ Y; если существуетъ X и $У$, значитъ существуетъ α, значитъ имѣетъ мѣсто соотношеніе $x\alpha y$; это соотношеніе $x\alpha y$ обратимо, т. е. существуетъ соотношеніе $y\alpha x$. Въ сущности, четвертый постулатъ является зависимымъ постулатомъ, иначе самая α не существовала бы; она возникаетъ при сопоставленіи предмета x и x и при сравненіи съ y".

Пр.-доц. С. О. Шатуновскій (Одесса) отвѣчая своимъ оппонентамъ, прежде всего останавливается на возраженіяхъ, сдѣланныхъ проф. Н. А. Шапошниковымъ.

Опредѣленіе понятія при помощи родовыхъ признаковъ и видовыхъ отличій, встрѣчаемое въ „старыхъ" курсахъ логики, С. О. Шатуновскій считаетъ не состоятельнымъ и мало пригоднымъ для математической науки. Процессъ выработки опредѣленій по этому плану заключается въ томъ, говоритъ С. О. Шатуновскій, что рекомендуется, вслѣдъ за представленіемъ, получаемымъ отъ перваго знакомства съ предметомъ, перейти для составленія опредѣленія понятія къ сопоставленію предмета со всѣми другими предметами того же рода. „Но, говоритъ докладчикъ: „если бы я зналъ, какой это родъ, или, когда мнѣ былъ бы указанъ классъ, къ которому принадлежитъ предметъ, я зналъ бы, съ чѣмъ я долженъ сопоставлять. Иначе мнѣ придется сопоставлять мой предметъ со всѣми предметами міра; но тогда никакихъ общихъ признаковъ между ними не будетъ".

„Говорятъ, продолжаетъ С. О. Шатуновскій, что это сопоставленіе со всѣми предметами того же рода даетъ существенные признаки, но на вопросъ,—что такое существенные признаки,—отвѣтъ даютъ такой: это суть признаки даютъ общіе,—неизвѣстно, съ чѣмъ общіе. Въ нашей наукѣ—математикѣ существенными признаками являются тѣ, которые мы желаемъ считать существенными, а несущественными тѣ, которые не желаемъ считать существенными. Это зависитъ отъ задачъ и цѣлей, которыя мы преслѣдуемъ, и что въ одномъ случаѣ является существеннымъ, то въ другомъ—совершенно несущественно".

„Сознаюсь также, что я не знаю, что такое болѣе простое, что такое болѣе сложное; я хотѣлъ бы, чтобы мнѣ дали опредѣленіе „болѣе простого и болѣе сложнаго". Я полагаю, и съ этимъ, вѣроятно, каждый согласится, что самое общее понятіе будетъ понятіе наиболѣе простое: въ немъ наименьшее число признаковъ, наоборотъ, чѣмъ больше понятіе имѣетъ признаковъ, чѣмъ болѣе оно имѣетъ частный характеръ, тѣмъ оно сложнѣе. Мнѣ лично дѣло представляется такъ: наиболѣе простымъ является понятіе наиболѣе общее и наименѣе простымъ—понятіе частное“.

Каково-же должно быть опредѣленіе математическаго понярія? спрашиваетъ далѣе С. О. Шатуновскій, и отвѣчаетъ на этотъ вопросъ слѣдующимъ образомъ:

„Опредѣленіе математическаго понятія должно заключаться въ совокупности всѣхъ независимыхъ другъ отъ друга положеній, въ которыхъ это понятіе встрѣчается. Понятіе — „одно больше, меньше, или равно другому“ -- содержится въ 8 независимыхъ другъ отъ друга положеніяхъ, приведенныхъ въ докладѣ, а потому положенія эти и служатъ опредѣленіемъ поименованнаго понятія. Опредѣленія этого вида свойственны математикѣ въ той же мѣрѣ и имѣютъ въ этой наукѣ такое же колоссальное значеніе, какъ и вообще всѣ неявно выраженныя зависимости“.

„Одно *больше*, *меньше* или *равно* другому—суть такія соотношенія, которыя удовлетворяютъ 8 приведеннымъ въ докладѣ постулатамъ, и этимъ они отличаются отъ всѣхъ другихъ соотношеній, а потому должны считаться опредѣленіемъ. Для поясненія приведу нѣсколько элементарныхъ примѣровъ“.

„Изъ двухъ группъ ядеръ откладываютъ одновременно по одному ядру; количество ядеръ въ той и другой группѣ будетъ считаться равнымъ, если процессъ исчерпыванія закончится одновременно для обѣихъ группъ, въ противномъ случаѣ, одна группа будетъ больше или меньше другой. Чтобы сопоставить величину двухъ отрѣзковъ прибѣгаемъ къ другому способу: будемъ отрѣзки накладывать такъ, чтобы одни ихъ концы совпали; въ извѣстныхъ случаяхъ одна прямая будетъ равна, больше или меньше другой. Въ вопросѣ о дѣлимости чиселъ насъ будетъ интересовать не абсолютная величина ихъ, а остатки, которые получатся при дѣленіи. Что же общаго во всѣхъ этихъ видахъ равенства? Обратимость и транзитивность“.

„Итакъ я полагаю, что эти соотношенія удовлетворяютъ 8-ми указаннымъ мною постулатамъ“.

Отвѣчая П. С. Эренфесту, докладчикъ высказалъ слѣдующее:

„Вопросъ о независимости постулатовъ и объ отсутствіи въ нихъ противорѣчій сводится къ слѣдующему: существуетъ ли *хотя одна* система вещей, къ которой наши постулаты могутъ быть примѣнимы (не нужно множества системъ, достаточно одной системы). Если постулаты примѣнимы къ одной системѣ вещей, то въ нихъ нѣтъ противорѣчія; если бы было противорѣчіе, то эта одна система не существовала бы. Конечно, у васъ можетъ быть нѣтъ такой системы вещей? На это я отвѣчу: „можетъ быть; это вопросъ объ основахъ ариѳметики, котораго я не буду теперь касаться: онъ находится въ настоящее время въ разработкѣ. Что касается другого вопроса, выдвинутаго г. Эренфестомъ, о томъ, какое соотношеніе я буду называть соотношеніемъ большимъ, я отвѣчу: буду ли β называть понятіемъ о большемъ, а γ—понятіемъ о меньшемъ, или наоборотъ, — это намъ совершенно безразлично. Понятія: одинъ предметъ находится передъ другимъ, другой предметъ позади перваго, соотвѣтствуютъ нашему представленію о большемъ и меньшемъ. Если станете разсматривать положеніе предмета на кругѣ, — скажите: который впереди другого? Можно считать, что этотъ, можно считать, что тотъ. Если двѣ лошади идутъ по кругу, вы не знаете, которая впереди и которая позади. Два понятія— одно о большемъ, другое о меньшемъ—играютъ совершенно одинаковую роль, и намъ совершенно безразлично будетъ ли β понятіемъ о большемъ, а γ понятіемъ о меньшемъ, или наоборотъ“.

На замѣчаніе А. Н. Шапошникова докладчикъ отвѣтилъ, что воспринимая идеи мы, дѣйствительно, идемъ по пути отъ конкретнаго къ отвлеченному, но когда это отвлеченное установлено уже фактически, мы идемъ какъ разъ обратнымъ путемъ. Геометрія, напримѣръ, была разработана раньше, чѣмъ ея основы; при современномъ же университетскомъ преподаваніи геометріи начинаютъ съ лекцій объ основахъ.

На замѣчаніе В. М. Меліоранскаго С. О. Шатуновскій отвѣчаетъ ссылкой на таблицу № 5, которая можетъ разрѣшить возникшее сомнѣніе.

Наконецъ, С. О. Шатуновскій говоритъ, что по поводу указанія проф. Некрасова на то, что существуетъ нѣчто среднее между умозрѣніемъ и опытомъ, онъ ничего не можетъ сказать ни за, ни противъ, считая себя не достаточно освѣдомленнымъ въ этомъ вопросѣ.

Проф. Н. А. Шапошниковъ вторично выступаетъ съ возраженіемъ. „Что касается того, говоритъ онъ, что считать болѣе простымъ и что болѣе сложнымъ, я ограничусь слѣдующимъ вопросомъ: что проще—опредѣленіе ли понятія *величина* посредствомъ указанія на три соотношенія $a=b$, $a>b$ и $a<b$, или посредствомъ 8 постулатовъ, для установленія независимости которыхъ требуется сложный логическій разборъ? Не отрицая серьезнаго значенія предыдущаго доклада, его логико-философской мысли, я нахожу, что докладъ этотъ не даетъ опредѣленія понятія *величина*“.

А. Н. Шапошниковъ говоритъ, что системы положеній, поодбныхъ тѣмъ, которыя приведены въ докладѣ, опредѣленіемъ, вообще говоря, не называются. Кажется, было бы точнѣе назвать ихъ гипотезами, какъ дѣлаетъ, напр., Пуанкаре. Затѣмъ онъ отмѣчаетъ, что не получилъ отвѣта на вопросъ о примѣняемости аксіомъ: требуютъ ли онѣ для своего осуществленія какихъ-либо дополнительныхъ условій, или нѣтъ?

В. І. Керлеръ (Одесса) говоритъ нѣсколько словъ о значеніи математики, философіи и логики въ дѣлѣ изученія природы. Онъ находитъ, что благодаря новѣйшимъ открытіямъ природа не кажется уже такой сложной, какой казалась прежде.

XVIII. О дѣятельности математическаго отдѣленія Рижскаго Педагогическаго Общества.

Докладъ Ѳ. А. Эрна (Рига).

«Въ маѣ 1907 года въ г. Ригѣ возникло Педагогическое Общество, поставившее себѣ цѣлью разрабатывать педагогическіе вопросы и содѣйствовать сближенію семьи и школы на почвѣ совмѣстной работы въ области обученія и воспитанія. Осенью того же года при этомъ обществѣ возникло нѣсколько отдѣленій, между прочимъ и математическое.

По инструкціи, опредѣлявшей отношеніе отдѣленія къ Обществу, членами математическаго отдѣленія могли быть всѣ члены Педагогическаго Общества, интересующіеся математикой и ея преподаваніемъ. На дѣлѣ, однако, въ новую секцію вошли только учителя и учительницы математики въ средней и низшей школѣ, другіе же члены общества появлялись на засѣданіяхъ отдѣленія лишь въ качествѣ рѣдкихъ гостей.

Своею задачею отдѣленіе поставило разработку научныхъ и методическихъ вопросовъ по всѣмъ отдѣламъ математики; однако, за четыре года своего существованія секція выполнила до извѣстной степени лишь одну половину этой задачи: вслѣдствіе различныхъ причинъ разработкой научныхъ вопросовъ отдѣленіе вовсе не занималось и вся его работа сосредоточилась почти исключительно на вопросахъ преподаванія различныхъ отдѣловъ математики. При этомъ особенно посчастливилось методикѣ ариѳметики и отчасти геометріи: изъ 17 докладовъ и рефератовъ, прочитанныхъ на собраніяхъ отдѣленія, 8 были посвящены преподаванію ариѳметики, 5 имѣли своимъ предметомъ методику геометріи, 1 касался первыхъ уроковъ алгебры и, наконецъ, только 3 доклада не имѣли методическаго характера.

Въ виду такого направленія работъ математическаго отдѣленія, придется въ дальнѣйшемъ остановиться только на томъ, что отдѣленіе успѣло сдѣлать въ области методики математики.

Въ первый же годъ своего существованія отдѣленіе, заинтересовавшись извѣстной «Программой вопросовъ отдѣла средней школы С.-Петербургскаго Педагогическаго Общества», постановило детально обсудить нѣкоторые изъ затронутыхъ въ этой программѣ вопросовъ о преподаваніи ариѳметики въ низшихъ классахъ средней школы, но разсмотрѣть эти вопросы по болѣе широкой и полной программѣ. Такая программа и была выработана однимъ изъ членовъ отдѣленія, и большинство засѣданій этого и слѣдующаго года были посвящены обсужденію вопросовъ этой программы.

Въ краткомъ докладѣ невозможно, конечно, подробно останавливаться на этой работѣ отдѣленія и поэтому приходится ограничиться перечисленіемъ важнѣйшихъ резолюцій, принятыхъ большинствомъ членовъ отдѣленія.

Цѣль преподаванія ариѳметики въ младшихъ классахъ средне-учебныхъ заведеній была формулирована одной изъ этихъ резолюцій, слѣдующимъ образомъ: обученіе ариѳметики должно: 1) сообщить учащимся запасъ ариѳметическихъ свѣдѣній, нужныхъ для практической жизни, 2) развить въ нихъ навыкъ примѣнять эти свѣдѣнія для рѣшенія практическихъ задачъ и 3) развить въ учащихся привычку наблюдать и сопоставлять частные случаи, находить между ними признаки сходства и различія, дѣлать изъ этихъ частныхъ случаевъ общіе выводы и, такимъ образомъ, развить въ учащихся математическое мышленіе путемъ индукціи.

Относительно метода преподаванія отдѣленіе пришло къ слѣдующимъ заключеніямъ: «на первомъ планѣ слѣдуетъ поставить самодѣятельность учащихся, отводя учителю (учительницѣ) роль направляющую; исходя изъ соотвѣтственно подобранныхъ задачъ и примѣровъ, необходимо стремиться къ тому, чтобы учащіеся сами доходили до пониманія смысла и цѣли ариѳметическихъ дѣйствій, до вывода правилъ дѣйствій и пріемовъ рѣшенія задачъ». Отмѣчая нежелательность излишняго теоретизированія при преподаваніи ариѳметики, отдѣленіе приняло слѣдующія резолюціи относительно доказательствъ и опредѣленій въ курсѣ ариѳметики: «при прохожденіи курса ариѳметики въ младшихъ классахъ всякія общія теоретическія доказательства должны быть замѣнены *объясненіями* конкретнаго характера (при помощи наглядныхъ пособій). Желательно совершенно отказаться отъ учебника ариѳметики (теоріи), замѣнивъ его сборникомъ задачъ съ необходимыми объясненіями... Слѣдуетъ совершенно отказаться отъ всякихъ опредѣленій дѣйствій и основныхъ математическихъ понятій (единица, число, величина и т. д.)».

Свой взглядъ на роль и характеръ задачъ отдѣленіе высказало въ цѣломъ рядѣ положеній, признавъ, что простая ариѳметическая задача является основнымъ упражненіемъ, необходимымъ для выясненія учащимся смысла и цѣли каждаго ариѳметическаго дѣйствія; что для развитія въ учащихся навыка къ механизму вычисленій и выработки изящныхъ и быстрыхъ пріемовъ вычисленій необходимо прибѣгать и къ рѣшенію численныхъ примѣровъ. Задачи по своимъ численнымъ даннымъ и по содержанію должны носить реальный, жизненный характеръ, соотвѣтствующій пониманію учащихся. Изъ задачъ алгебраическаго типа (рѣшаемыхъ предположеніемъ) слѣдуетъ въ курсѣ ариѳметики удержать только тѣ, которыя имѣютъ примѣненіе въ практической жизни. Составныя задачи (комбинированныя изъ задачъ на разныя, такъ называемыя, спеціальныя правила) должны быть удержаны въ курсѣ ариѳметики, но на всякаго рода испытаніяхъ такія задачи должны быть составлены не болѣе, чѣмъ изъ двухъ задачъ на различныя правила. Слѣдуетъ знакомить учащихся какъ съ синтетическимъ, такъ и съ аналитическимъ пріемами рѣшенія задачъ, пользуясь ими такъ, чтобы одинъ пріемъ дополнялъ собою другой.

По вопросу о распредѣленіи матеріала отдѣленіе высказалось противъ существующей въ настоящее время систематизаціи курса ариѳметики и рекомендовало расположить матеріалъ по концентрамъ въ порядкѣ возрастающей трудности и сложности. Въ частности было высказано пожеланіе, чтобы дѣйствія надъ именованными числами не выдѣлялись въ особый отдѣлъ, а приходились въ связи съ рѣшеніемъ задачъ при изученіи дѣйствій надъ цѣлыми числами. Относительно изученія дробей было признано желательнымъ «проходить курсъ дробей параллельно съ курсомъ цѣлыхъ чиселъ, ограничиваясь дробями съ болѣе простыми знаменателями». Только умноженіе и дѣленіе на дробь должны быть выдѣлены изъ общаго курса дробей и изучены особо. Отдѣленіе обсуждало и вопросъ о томъ, предпосылать ли ознакомленіе съ обыкновенными дробями изученію десятичныхъ дробей или наоборотъ, и рекомендовало первоначальное ознакомленіе съ дробями начинать съ дробей обыкновенныхъ. При этомъ «дѣйствія надъ дробными числами слѣдуетъ проходить, съ одной стороны, указывая на аналогію ихъ съ именованными числами (преобразованіе дробныхъ чиселъ, сложеніе и вычитаніе, умноженіе и дѣленіе на цѣлое и отвлечнное число), съ другой стороны, раскрывая истинный смыслъ вводимой символизаціи (умноженіе и дѣленіе на дробь)».

Наконецъ, относительно сокращенія объема курса были высказаны слѣдующія пожеланія:

1) Простѣйшіе признаки дѣлимости, разложеніе чиселъ на сомножители и нахожденіе общаго кратнаго пройти необходимо, но безъ теоретическихъ доказательствъ общаго характера и не какъ нѣчто самостоятельное, а въ связи съ ученіемъ о дробяхъ.

2) Отдѣлъ о нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя изъ преподаванія исключить.

3) Слѣдуетъ исключить изъ курса ариѳметики изученіе мѣръ не принятыхъ жизнью (аптекарскій вѣсъ), но взамѣнъ того знакомить учащихся съ мѣстными общепринятыми мѣрами и съ метрической системой мѣръ.

4) Достаточно знакомить учениковъ лишь съ понятіемъ о періодическихъ дробяхъ, не изучая способовъ обращенія ихъ въ обыкновенныя дроби и относя это изученіе къ статьѣ о

прогрессіяхъ въ алгебрѣ. Взамѣнъ этого слѣдуетъ знакомить учащихся съ опредѣленіемъ степени точности приближеннаго частнаго.

5) Совсѣмъ исключить изъ преподаванія задачи на учетъ векселей и цѣпное правило, какъ вычисленія, относящіяся къ областямъ слишкомъ чуждымъ учащимся; значительно сократить задачи на проценты и правило смѣшенія, ограничиваясь только случаями, имѣющими реальное значеніе.

Всѣ принятыя отдѣленіемъ резолюціи были напечатаны въ отчетахъ Педагогическаго Общества за $190^7/_8$ и $190^8/_9$ годы.

Изъ прочитанныхъ на собраніяхъ математическаго отдѣленія докладовъ многіе касались тѣхъ же вопросовъ, которые разсматривались при обсужденіи программы преподаванія ариѳметики въ средней школѣ. Такъ Н. П. Слетовымъ былъ сдѣланъ докладъ на тему «Роль задачъ въ выясненіи смысла и цѣли ариѳметическихъ дѣйствій», въ которомъ онъ энергично возставалъ противъ общихъ опредѣленій дѣйствій, не выясняющихъ, а. наоборотъ, совершенно затемняющихъ истинный смыслъ и цѣль каждаго отдѣльнаго дѣйствія и пріучающихъ дѣтей смотрѣть на ариѳметическое дѣйствіе не по существу, а съ чисто формальной стороны его опредѣленія. Въ основу изученія дѣйствій должно быть положено рѣшеніе цѣлесообразно подобранныхъ задачъ, причемъ понятіе о дѣйствіи должно выясняться чисто индуктивнымъ путемъ, т. е. путемъ постепеннаго обобщенія частныхъ случаевъ и отдѣльныхъ видовъ каждаго дѣйствія.

Нѣсколько докладовъ было посвящено вопросу о наглядности преподаванія и наглядныхъ пособіяхъ. М. К. Третьяковъ прочелъ докладъ «О наглядности при преподаваніи ариѳметики», обосновавъ необходимость наглядности соображеніями общей дидактики и дѣтской психологіи. На другомъ засѣданіи онъ же демонстрировалъ изобрѣтенныя имъ «мѣрныя линейки» для подготовки учащихся къ изученію дѣйствій надъ составными именованными числами и «таблицы времени» — пособіе для рѣшенія, такъ называемыхъ, задачъ на вычисленіе времени. Н. П. Слетовъ познакомилъ членовъ отдѣленія съ нагляднымъ выясненіемъ производства ариѳметическихъ дѣйствій въ предѣлѣ первой тысячи при помощи набора прутиковъ, связанныхъ въ пучки.

Нѣкоторое отношеніе къ вопросамъ, затронутымъ при обсужденіи программы преподаванія ариѳметики, имѣли и доклады г. Бирзвалка (опредѣленіе основныхъ математическихъ понятій: единица, счетъ, величина, число, измѣреніе, дробь, и т. д.) и г-жи Стацевичъ «Методическое объясненіе нѣкоторыхъ вопросовъ при рѣшеніи задачъ на %, пропорціональное дѣленіе и тройное правило».

Отдѣльно должны быть поставлены доклады С. М. Милошенскаго и Ѳ. А. Эрна, затрагивавшіе вопросы методики начальной ариѳметики. Первый познакомилъ членовъ отдѣленія съ методой д-ра Лая и съ его «Руководствомъ къ первоначальному обученію ариѳметикѣ», второй далъ отчетъ о книжкѣ Д. Галанина «Методика ариѳметики. Годъ 1-й».

Такъ какъ обсужденіе вопросовъ о преподаваніи ариѳметики потребовало отъ отдѣленія много времени и труда, то методика геометріи и алгебры не могли быть разработаны такъ подробно. Какъ уже было указано, преподаванію геометріи было посвящено всего 5 докладовъ, причемъ большинство изъ нихъ, не останавливаясь на частностяхъ, старались освѣтить общіе методы преподаванія этого важнаго отдѣла математики. Такъ докладъ М. Е. Волокобинскаго «Примѣненіе индуктивнаго метода при разсмотрѣніи статьи о подобіи фигуръ» имѣлъ цѣлью указать тѣ пріемы преподаванія, при помощи которыхъ учениковъ можно наводить на открытіе истины, не заставляя ихъ заучивать доказательства, сообщаемыя учителемъ. Докладчикъ показалъ, какъ при помощи цѣлаго ряда наглядныхъ пособій, приготовляемыхъ частью самими учениками, можно заинтересовать учащихся вопросами подобія и выяснить, какъ самое понятіе подобія фигуръ, такъ и чрезвычайно важное понятіе о коэффиціентѣ пропорціональности.

Чрезвычайно обстоятельный докладъ былъ представленъ И. А. Челюсткинымъ на тему «Лабораторный методъ преподаванія геометріи». Познакомивъ собраніе съ исторіей вопроса и выяснивъ психологическія и педагогическія основанія, на которыхъ покоится лабораторный методъ, авторъ указалъ на всѣ выгодныя стороны лабораторныхъ занятій и подвергъ основательной критикѣ обычныя возраженія противниковъ этого метода.

Отчасти того же вопроса коснулся и Ѳ. А. Эрнъ въ докладѣ «О преподаваніи геометріи по концентрамъ». Рекомендуя для устраненія нѣкоторыхъ очень существенныхъ пробѣловъ въ преподаваніи геометріи подраздѣлить весь курсъ на нѣсколько концентровъ, докладчикъ особенно подробно остановился на первомъ концентрѣ, цѣль котораго 1) познакомить учащихся съ геометрическими фигурами, тѣлами и ихъ главнѣйшими свойствами путемъ измѣренія, механическаго наложенія, вычерчиванія и вырѣзанія фигуръ и 2) подготовить учениковъ къ пониманію логическихъ умозрительныхъ доказательствъ. Усвоенію учащимися этихъ умозрительныхъ доказательствъ былъ посвященъ другой докладъ того же автора, въ которомъ онъ рѣшительно высказался за аналитическую форму изложенія доказательствъ геометрическихъ теоремъ, такъ какъ только при этой формѣ доказательствъ учащіеся могутъ принимать активное участіе въ работѣ и проявлять самодѣятельность и творчество. Поэтому, по мнѣнію докладчика, наши учебники геометріи въ ближайшемъ будущемъ должны уступить мѣсто сборникамъ теоремъ-задачъ.

Наконецъ, 5-й докладъ по преподаванію геометріи (М. Е. Волокобинскаго) носилъ болѣе частный характеръ и касался вопроса о замѣнѣ обратныхъ теоремъ противоположными, такъ какъ противоположныя теоремы во многихъ случаяхъ доказываются проще и нагляднѣе, чѣмъ теоремы обратныя.

По методикѣ алгебры за все время существованія отдѣленія былъ прочитанъ только одинъ докладъ, а именно: «о первыхъ урокахъ алгебры» Н. П. Слетова. Основная мысль доклада: первые уроки алгебры должны быть построены на реальной основѣ; такой основой можетъ служить единственно рѣшеніе соотвѣтственно подобранныхъ задачъ. Особенно подробно докладчикъ остановился на выясненіи дѣйствій надъ отрицательными числами путемъ нѣкоторыхъ задачъ на движеніе. Другой тезисъ доклада ставилъ требованіе перенести составленіе и рѣшеніе уравненій почти къ самому началу курса;

это должно возбудить въ учащихся интересъ къ предмету и выяснить имъ цѣль изученія алгебры.

Какъ видно изъ вышеизложеннаго, работа математическаго отдѣленія при Рижскомъ Педагогическомъ Обществѣ за все время его существованія носила исключительно теоретическій характеръ. Для какихъ-нибудь начинаній и предпріятій, преслѣдующихъ практическія цѣли, у отдѣленія нѣтъ ни матеріальныхъ средствъ, ни достаточнаго числа работниковъ. За послѣднее время среди членовъ бюро отдѣленія возникла мысль о желательности учрежденія особой начальной школы, которая дала бы возможность членамъ отдѣленія на практикѣ демонстрировать и провѣрять тѣ или другіе методы и пріемы преподаванія; но, вѣроятно, и осуществленіе этой мысли встрѣтится съ тѣми же препятствіями. Поэтому пока поневолѣ приходится ограничиваться чтеніемъ рефератовъ и докладовъ и такимъ образомъ пропагандировать среди членовъ отдѣленія идеи реформированія преподаванія математики. Разумѣется, и это задача сама по себѣ заслуживаетъ самаго серьезнаго вниманія; чрезвычайно важно, конечно, при каждомъ удобномъ случаѣ, отмѣчать отрицательныя стороны постановки преподаванія математики въ современной школѣ, знакомить преподавателей съ новѣйшей литературой по методикѣ, живымъ словомъ проводить въ среду педагоговъ новые взгляды на роль математики, какъ учебнаго предмета. Надо признать, однако, что и эта задача выполняется отдѣленіемъ не вполнѣ удовлетворительно. Дѣло въ томъ, что математическая секція въ настоящее время объединяетъ лишь небольшую часть рижскихъ педагоговъ и притомъ, главнымъ образомъ, учителей и учительницъ частныхъ школъ; педагоги правительственныхъ учебныхъ заведеній, за немногими исключеніями, почти не посѣщаютъ собраній отдѣленія и, повидимому, мало интересуются его работами. Здѣсь неумѣстно, можетъ быть, доискиваться причинъ этого печальнаго явленія, но отчужденность извѣстной части преподавателей математики отъ нашего математическаго отдѣленія приходится констатировать, какъ несомнѣнный фактъ, вліяющій, разумѣется, отрицательно на продуктивность работы отдѣленія.

Очень можетъ быть, что кружки преподавателей и математическія общества, существующія въ другихъ провинціальныхъ городахъ, поставлены въ условія, аналогичныя условіямъ жизни нашего отдѣленія и такъ же, какъ Рижское математическое отдѣленіе, страдаютъ вслѣдствіе малочисленности активныхъ работниковъ и недостатка матеріальныхъ средствъ. Если это такъ, то всѣ эти разбросанные по всей Россіи маленькіе кружки и общества должны были бы притти другъ другу на помощь. Было бы желательно созданіе особой организаціи, которая, оставляя всѣ существующія въ настоящее время общества преподавателей математики вполнѣ самостоятельными, объединила бы ихъ на почвѣ ихъ общихъ интересовъ и стремленій.

Въ этой центральной организаціи могли бы быть сосредоточены всѣ свѣдѣнія о дѣятельности мѣстныхъ обществъ, она могла бы давать провинціальнымъ кружкамъ матеріалъ для совмѣстной работы, сюда можно было бы обращаться за совѣтами и указаніями относительно литературы того или другого вопроса, а, можетъ быть, и за матеріальною поддержкою для какого-нибудь практическаго начинанія: было бы желательно, чтобы этотъ союзъ математическихъ обществъ издавалъ журналъ, посвященный разработкѣ научныхъ и методическихъ вопросовъ, занимался издательствомъ математическихъ книгъ и учебниковъ и переводомъ лучшихъ сочиненій по математикѣ и ея методикѣ съ иностранныхъ языковъ; наконецъ, та же организація могла бы завѣдывать устройствомъ образцовыхъ математическихъ библіотекъ, музеевъ наглядныхъ пособій, педагогическихъ выставокъ и съѣздовъ преподавателей математики.

Живое общеніе между отдѣльными кружками и обществами, преслѣдующими однѣ и тѣ же цѣли, несомнѣнно способствовало бы расширенію дѣятельности каждаго изъ нихъ и придало бы работѣ этихъ мѣстныхъ обществъ, проводимымъ ими взглядамъ и выносимымъ ими резолюціямъ больше вѣса и авторитетности въ глазахъ общества и учебной администраціи».

XIX. О дѣятельности Варшавскаго Кружка преподавателей математики и физики.

Докладъ Н. А. Пажитнова (Варшава).

«Варшавскій Кружокъ преподавателей математики и физики былъ основанъ въ 1899 году по иниціативѣ профессора Варшавскаго Университета П. А. Зилова (впослѣдствіи попечителя Кіевскаго Округа), которому много обязанъ и своимъ развитіемъ. За 12 лѣтъ своего существованія кружокъ проявилъ слѣдующую дѣятельность. Въ 1903 году съ 31 декабря по иниціативѣ кружка былъ организованъ съѣздъ преподавателей физики и математики Варшавскаго Округа, въ которомъ члены кружка принимали дѣятельное участіе. На этомъ съѣздѣ былъ между прочимъ возбужденъ вопросъ о настоятельной необходимости образцоваго физическаго кабинета для Варшавскаго Учебнаго Округа. Соотвѣтственное ходатайство было возбуждено непосредственно за окончаніемъ съѣзда и привело къ осуществленію этого желанія съѣзда, правда, лишь 2 года тому назадъ. Образцовый физическій кабинетъ находится въ вѣдѣніи Кружка. Когда настоятельная необходимость въ реформѣ средней школы проникла въ общественное сознаніе и стала высказываться все громче и громче, кружокъ откликнулся на это явленіе, образовавъ изъ своихъ членовъ комиссію для выработки примѣрной программы по математикѣ въ средней школѣ. Результатомъ работъ этой комиссіи явился проектъ учебнаго плана по математикѣ для мужскихъ гимназій съ однимъ древнимъ языкомъ, который и былъ напечатанъ въ видѣ отдѣльнаго приложенія къ циркулярамъ по Варшавскому Учебному Округу за 1908 годъ. На послѣднемъ общемъ собраніи кружкомъ было постановлено для большаго оживленія своей дѣятельности разослать всѣмъ преподавателямъ математики и физики Варшавскаго Учебнаго Округа приглашеніе вступить въ члены кружка и присылать не только доклады для заслушанія, но и всякаго рода вопросы, свои пожеланія касательно постановки преподаванія математики и физики, на которые кружокъ будетъ всегда охотно откликаться. Отсутствіе средствъ не даетъ возможности кружку имѣть свой періодическій печатный органъ, но, идя на встрѣчу этой потребности кружка, окружное начальство изъявило любезно согласіе печатать отдѣльные доклады и труды членовъ его въ циркулярахъ по Учебному Округу. Можно надѣяться, что идущая сравнительно медленнымъ темпомъ дѣятельность кружка въ будущемъ оживится. Увѣренность въ этомъ кружокъ черпаетъ изъ 2-хъ обстоятельствъ: 1) что дѣятельностью кружка стали интересоваться и нѣкоторые изъ профессоровъ мѣстнаго университета, какъ Д. Д. Мордухай-Болтовской, принимающій живое участіе въ дѣятельности кружка и 2) что долго и тщетно ожидаемые новые штаты, наконецъ, осуществятся и дадутъ больше свободнаго времени обремененнымъ уроками труженикамъ для дѣятельности въ кружкѣ, потребность въ которой у преподавателей съ несомнѣнностью констатируется всѣмъ прошлымъ нашего кружка.

Въ настоящее время кружокъ имѣетъ 10 почетныхъ членовъ и 35 дѣйствительныхъ. Ежегодно бываетъ около 10 засѣданій».

Пренія по докладу Н. А. Пажитнова.

В. И. Ферстеръ (Кѣльцы). „Я служилъ два года въ Варшавскомъ учебномъ округѣ, въ городѣ Кѣльцы. У насъ открытъ свой математическій кружокъ, но намъ совершенно ничего не извѣстно о дѣятельности Варшавскаго математическаго кружка; насъ, преподавателей округа, не оповѣщаютъ объ этомъ; поэтому мы не можемъ принять участія въ дѣятельности этого кружка. Я попросилъ бы, чтобы Варшавскій математическій кружокъ оповѣщалъ насъ о своей дѣятельности, чтобы и мы могли принять участіе въ его трудахъ“.

С. А. Неаполитанскій (Варшава). „Скажу нѣсколько словъ относительно возраженія, сдѣланнаго по адресу Варшавскаго математическаго кружка. Дѣло въ томъ, что на общемъ собраніи въ мартѣ мѣсяцѣ этого года постановлено разослать воззванія всѣмъ лицамъ, такъ или иначе причастнымъ къ дѣлу преподаванія математики въ Варшавскомъ учебномъ округѣ, для обращенія со всякаго рода вопросами методическаго характера, а также и справочнаго, напримѣръ: какой приборъ удобнѣе, какой учебникъ лучше. Конечно, мы выразили полную готовность идти на встрѣчу подобнымъ запросамъ. Дѣло затянулось, разослать подобныя воззванія не удалось; отложили до Октября мѣсяца. Въ типографію это воззваніе уже отдано, а получится оно, вѣроятно, въ Іюнѣ мѣсяцѣ всѣми лицами, причастными къ дѣлу преподаванія математики; но подъ лежачій камень вода не течетъ,—желающіе принять участіе въ дѣятельности Варшавскаго математическаго кружка будутъ встрѣчены съ радостью".

XX. О дѣятельности Польскаго Математическо-Физическаго Кружка въ Варшавѣ.

Докладъ В. Р. Мрочека (Спб.).

«Правленіе польскаго математическо-физическаго кружка въ Варшавѣ поручило мнѣ сдѣлать слѣдующее сообщеніе о своей дѣятельности.

Математическо-физическій кружокъ основанъ въ 1906 году; его цѣль: улучшить постановку преподаванія физико-математическихъ наукъ и способствовать научной культурѣ лицъ, интересующихся данными вопросами. Съ этой цѣлью ежемѣсячно происходятъ общія собранія (кромѣ лѣтнихъ каникулъ). На этихъ собраніяхъ происходитъ заслушаніе и обсужденіе рефератовъ по различнымъ вопросамъ чистой и прикладной математики, а также и физики; особенное вниманіе удѣляется разсмотрѣнію дидактической стороны затрагиваемыхъ вопросовъ. Кромѣ того, систематически сообщаются краткія свѣдѣнія о научно-педагогическомъ движеніи за границей и о новинкахъ учебно-научной литературы; это предохраняетъ докладчиковъ отъ слишкомъ узкихъ точекъ зрѣнія.

При кружкѣ существуютъ двѣ комиссіи: физическая и астрономическая. Въ послѣднее время образована третья комиссія — програмная, разсматривающая вопросы о желательныхъ измѣненіяхъ въ существующихъ программахъ. Въ этой послѣдней комиссіи собиралось больше всего членовъ и опубликовано больше всего матеріала, относящагося къ вопросамъ преподаванія, въ связи съ дѣятельностью международной комиссіи по реформѣ преподаванія математики.

Въ комиссіяхъ физической и астрономической происходитъ подобная же разработка вопросовъ по своей спеціальности. Кромѣ того, ведутся работы въ особой лабораторіи по физикѣ и въ особой астрономической обсерваторіи имени Енджеевича.

При кружкѣ существуетъ библіотека, содержащая до 500 томовъ трудовъ по математикѣ, физикѣ, астрономіи, главнымъ образомъ—дидактическаго характера. Кромѣ того, получаются въ достаточномъ количествѣ и на различныхъ языкахъ спеціально математическіе и педагогическіе журналы.

Членомъ кружка можетъ быть всякое лицо, интересующееся вопросами преподаванія математики и физики. Ежегодный членскій вносъ—6 руб.

Болѣе подробныя данныя можно найти въ «Отчетахъ», издаваемыхъ ежегодно въ видѣ особаго приложенія къ журналу «Математическія извѣстія»; редакторомъ журнала состоитъ предсѣдатель кружка С. Дикштейнъ».

XXI. О дѣятельности Орловскаго Физико-Математическаго Кружка.

Докладъ П. Н. Острогорскаго (Орелъ).

«Орловскій Физико-Математическій Кружокъ, основанный 6-го февраля 1911 г., имѣетъ цѣлью разработку вопросовъ, относящихся къ физикѣ и математикѣ, преимущественно элементарной, и близкимъ къ нимъ наукамъ, а также вопросовъ, относящихся къ преподаванію этихъ наукъ.

За 1911 г. кружокъ имѣлъ два общихъ собранія и 15 засѣданій; первыя два собранія были организаціоннаго характера, а предметомъ остальныхъ 15 засѣданій было заслушаніе 6 докладовъ по математикѣ и 3 по физикѣ; одно засѣданіе было посвящено Ломоносову.

Въ настоящее время кружокъ состоитъ изъ 38 членовъ, большинство которыхъ преподавательницы и преподаватели среднихъ ученыхъ заведеній».

XXII. О дѣятельности Новочеркасскаго Математическаго Кружка.

Докладъ Г. П. Кузнецова (Новочеркасскъ).

«Новочеркасскій математическій кружокъ существуетъ всего 3 года. Основался нашъ кружокъ вслѣдствіе естественнаго стремленія преподавателей г. Новочеркасска къ объединенію въ разрѣшеніи вопросовъ преподаванія математики, въ обмѣнѣ мыслей по этимъ вопросамъ, а равно вслѣдствіе интереса къ занятію математикой, главнымъ образомъ, элементарною. Нужно сказать, что еще до учрежденія кружка преподаватели математики собирались въ стѣнахъ Маріинской Донской женской гимназіи, благодаря содѣйствію предсѣдателя педагогическаго совѣта Ф. К. Фролова и начальницы гимназіи В. А. Грековой, и только по прошествіи года сознавалась необходимость созданія опредѣленной организаціи, а именно—учрежденія кружка.

За истекшіе 3 года новый математическій кружокъ имѣлъ около 15—18 засѣданій, на которыхъ было сдѣлано около 25—30 докладовъ и сообщеній. Доклады были главнымъ образомъ *научнаго* характера по элементарной математикѣ, и только отчасти по вопросамъ *преподаванія* математики и физики. При этомъ нужно признать, что дѣятельность кружка поддерживалась энергіей только небольшой группы лицъ, въ томъ числѣ нѣкоторыхъ профессоровъ Алексѣевскаго Донского Политехническаго Института. Вообще же отношеніе мѣстнаго учительскаго персонала къ занятіямъ кружка довольно вялое. Я не беру на себя смѣлость говорить о причинахъ, а только скажу, что по заявленіямъ нѣкоторыхъ лицъ причиною этого служитъ недостатокъ времени и переутомленіе. Вслѣдствіе этого, нѣкоторыя начинанія кружка оказались неисполненными, какъ напримѣръ, Педагогическая выставка, несмотря на разрѣшеніе и сочувственное отношеніе мѣстнаго начальства къ этому начинанію. Теперь же можно только высказать увѣренность, что тотъ подъемъ, съ которымъ идетъ работа съѣзда, распространится по всѣмъ уголкамъ Россіи, и что какъ онъ, такъ и надежда на будущее улучшеніе матеріальнаго положенія преподавателей не дадутъ заглохнуть нашему дѣлу и наоборотъ будутъ содѣйствовать его расширенію».

XXIII. О дѣятельности Московскаго Математическаго Кружка.

Докладъ І. И. Чистякова (Москва).

«Московскій математическій кружокъ возникъ въ 1905 г., но ему предшествовали другія организаціи въ Москвѣ, которыя преслѣдовали аналогичныя съ нимъ цѣли. Еще въ бытность въ Москвѣ педагогическаго дѣятеля А. И. Гольденберга возникъ кружокъ преподавателей и лицъ, интересующихся вопросами математики. Гольденбергъ издавалъ первый въ Россіи математическій журналъ. Затѣмъ при Обществѣ распространенія техническихъ знаній былъ основанъ московскими преподавателями математическій кружокъ, который просуществовалъ съ 1900 по 1908 г.; онъ подготовилъ своею дѣятельностью возникновеніе въ 1905 г. Московскаго Математическаго Кружка, который, такимъ образомъ, имѣетъ за собою обширный опытъ нѣсколькихъ лѣтъ; въ немъ принимаютъ участіе многіе дѣятели, которые участвовали въ предшествовавшихъ организаціяхъ и извѣстны своими трудами.

Московскій математическій кружокъ имѣетъ своей задачей разработку вопросовъ математики и вопросовъ преподаванія математики. Въ составѣ кружка находятся многіе преподаватели Университета, Высшихъ женскихъ Курсовъ, спеціальныхъ Московскихъ учебныхъ заведеній и среднихъ учебныхъ заведеній. Число членовъ кружка доходитъ до 150.

Кружокъ много обязанъ своимъ развитіемъ энергичной дѣятельности своего члена, проф. Московскаго Университета. Б. К. Млодзѣевскаго.

Въ кружкѣ происходятъ правильныя ежемѣсячныя засѣданія, на которыхъ дѣлаются доклады математическаго содержанія, ведутся педагогическія бесѣды, разсматриваются учебныя пособія, книги, обсуждаются текущія дѣла. Такъ какъ предыдущія Московскія организаціи оставили кружку обширное наслѣдіе, то возникла идея о томъ, чтобы сдѣлать это наслѣдіе доступнымъ болѣе широкимъ кругамъ. Съ этой цѣлью рѣшено было издавать собственный журналъ, но это начинаніе долго по разнымъ причинамъ тормозилось. Изданіе журнала подъ названіемъ «Математическое образованіе» удалось осуществить въ этомъ году. Этотъ журналъ будетъ служить цѣлямъ преподаванія математики и освѣщать математическіе вопросы; но кромѣ изданія журнала, дѣятельность отдѣльныхъ членовъ кружка несомнѣнно тѣсно связана съ общей дѣятельностью въ области математики: многіе члены кружка имѣютъ печатные труды, многими писались учебники по разнымъ отдѣламъ математики. Кромѣ того, кружокъ организуетъ лѣтніе курсы для учителей, какъ среднихъ учебныхъ заведеній, такъ и народныхъ школъ.

Въ распоряженіи кружка имѣется библіотека, которая перешла къ нему по наслѣдію отъ покойнаго Гольденберга.

Въ послѣднее время мы удѣляемъ особое вниманіе журналу и возлагаемъ на него особыя надежды; онъ можетъ принести значительную пользу въ смыслѣ объединенія работниковъ на поприщѣ математическаго образованія въ Россіи вообще; для этого нужна широкая поддержка лицъ, работающихъ въ области математики. Будемъ надѣяться, что дѣятели въ области математическаго образованія укажутъ нѣкоторые пробѣлы нашего изданія и окажутъ соотвѣтствующее содѣйствіе. Въ будущемъ журналъ можетъ быть удастся и расширить.

У насъ составляются протоколы засѣданій; они изданы въ видѣ брошюры; и по этому изданію можно составить представленіе о характерѣ дѣятельности кружка».

XXIV. О дѣятельности Нижегородскаго Математическо-астрономическаго кружка.

Докладъ В. В. Мурашева (Нижній-Новгородъ).

«Нижегородскій математическо-астрономическій кружокъ основанъ въ 1888 г. Преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній и многія лица, интересовавшіяся соотвѣтствующими наблюденіями солнечнаго затменія 1887 г., рѣшили основать кружокъ любителей астрономіи, и въ 1888 г. Уставъ кружка получилъ утвержденіе. Въ настоящее время этотъ кружокъ существуетъ 23 года и черезъ два года — въ 1913 г., — при благопріятныхъ условіяхъ, будетъ имѣть счастье праздновать 25-тилѣтіе своей дѣятельности. Въ настоящее время имѣется 17 выпусковъ астрономическаго календаря. Издаются и отчеты о засѣданіяхъ, протоколы засѣданій; кромѣ того, происходятъ почти еженедѣльно засѣданія членовъ кружка, на которыхъ читаются доклады по отдѣламъ математики, физики, астрономіи. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ кружокъ праздновалъ память Лобачевскаго. Въ самое послѣднее время Нижегородцами разсмотрѣно особенно много работъ по математическимъ и методическимъ вопросамъ. Многія изъ этихъ работъ касались вопроса о преподаваніи ариѳметики и алгебры.

Кружкомъ устраивались лекціи по различнымъ вопросамъ математики, физики и астрономіи; такъ, напр., читались курсы дифференціальнаго исчисленія, аналитической геометріи, тригонометріи. Эти лекціи съ большимъ интересомъ посѣщались не только членами кружка, но и посторонними лицами.

Въ послѣднее время, вслѣдствіе всеобщаго интереса къ физикѣ, читаются доклады изъ этой области. Нижегородскій математическо-астрономическій кружокъ надѣется, что полное сочувствіе, которымъ онъ пользуется до сихъ поръ, встрѣтитъ общее признаніе со стороны всѣхъ любителей астрономіи, и надѣется, что найдетъ еще большее число сотрудниковъ изъ другихъ городовъ».

XXV. Отдѣлъ математики при Педагогическомъ Музеѣ Военно-Учебныхъ Заведеній. [1]

Педагогическій Музей Военно-Учебныхъ Заведеній основанъ въ 1864 г. съ цѣлью служить постоянной выставкой учебныхъ пособій и коллекцій. Черезъ два года по возникновеніи, въ 1866 г. Музей организовалъ уже первую въ Россіи выставку пособій для обученія и воспитанія, а въ 1870 г. принималъ дѣятельное участіе во Всероссійской мануфактурной выставкѣ. Первыя коллекціи Музея были, по преимуществу, иностраннаго происхожденія. Послѣ же выставки 1870 г., давшей толчекъ къ насажденію у насъ отечественной производительности вообще, Музей самъ сталъ вырабатывать типы школьныхъ пособій и приборовъ простого устройства, и въ кабинетахъ его появились въ немаломъ числѣ пособія, изготовленныя русскими мастерами подъ руководствомъ его членовъ.

Съ 1871 г. въ Музеѣ начали устраиваться публичныя лекціи по методикѣ общеобразовательныхъ предметовъ съ примѣненіемъ наглядныхъ пособій, а также публичныя бесѣды для дѣтей. Съ 1872 г. къ этому прибавились публичныя научно-популярныя лекціи съ демонстраціями наглядныхъ пособій. Въ первые же $3^1/_2$ мѣсяца на 84 лекціяхъ присутствовало до 24000 слушателей. Наконецъ начались съ 1872 г. и постоянныя объясненія пособій, даваемыя спеціалистами-членами Музея.

Въ 1885 г. первый директоръ Музея В. П. Каховскій, придававшій большое значеніе общенію преподавателей между собой для совмѣстнаго обсужденія вопросовъ, ведущихъ къ улучшенію учебнаго дѣла, задумалъ устраивать собранія преподавателей при Музеѣ. Собранія эти существуютъ и по нынѣ подъ названіемъ Отдѣловъ учебно-воспитательнаго Комитета Музея. Дѣятельность ихъ заключается въ слѣдующемъ: 1) разсмотрѣніе учебниковъ, книгъ для чтенія и всѣхъ другихъ учебныхъ пособій для средней школы; 2) обсужденіе программъ

---

[1] За позднимъ временемъ и видимымъ утомленіемъ членовъ съѣзда докладъ этотъ былъ изложенъ секретаремъ отдѣла Д. М. Левитусомъ въ сжатомъ видѣ.

и пріемовъ преподаванія въ средней школѣ; 3) обмѣнъ мнѣній по всѣмъ, вообще, вопросамъ преподаванія въ средней школѣ. Членами отдѣловъ могутъ быть всѣ преподающіе въ учебныхъ заведеніяхъ, какъ военно-учебнаго, такъ и всѣхъ другихъ вѣдомствъ. Для вступленія въ члены отдѣла достаточно заявить о своемъ желаніи и сообщить адресъ въ канцелярію Музея. Денежныхъ взносовъ никакихъ не полагается. Собранія отдѣловъ происходятъ въ учебное время не рѣже одного раза въ мѣсяцъ; о времени собраній и предметѣ занятій члены отдѣловъ предупреждаются повѣстками.

Первое собраніе Отдѣла математики состоялось 2-го апрѣля 1885 г. По докладу П. А. Литвинскаго былъ принятъ планъ работъ и организаціи. Въ этомъ первомъ засѣданіи приняли участіе г.г. Верещагинъ, Вулихъ, Гольденбергъ, Ганъ, Григорьевъ, Леванда, Литвинскій, Паумовъ, Пиленко, Покровскій, Рунге, Селивановъ, Соколовъ, Стокальскій, Страннолюбскій, Преображенскій, Фохтъ.

За первое десятилѣтіе состоялось 70 засѣданій, во время которыхъ прослушано около 200 докладовъ по вопросамъ, касающимся преподаванія различныхъ частей школьной математики.

Доклады занимали не больше 40 минутъ; послѣ докладовъ происходили пренія. Для большихъ докладовъ назначались особыя экстренныя засѣданія.

Установился обычай часть засѣданія, минутъ 15—20, удѣлять мелкимъ замѣткамъ изъ учебной практики.

Протоколы засѣданій, а также и нѣкоторые изъ докладовъ печатались въ «Педагогическомъ Сборникѣ», а затѣмъ стали печататься въ ежегодныхъ отчетахъ Педагогическаго Музея. Нѣкоторое время протоколы и извлеченія изъ докладовъ помѣщались въ журналѣ «Опытной физики и элементарной математики», издававшемся Э. К. Шпачинскимъ.

Отдѣлъ математики всегда живо откликался на вопросы текущей учебной жизни. Такъ, въ 1892—93 уч. году холерная эпидемія повлекла за собою значительное сокращеніе учебнаго періода. Отдѣлъ намѣтилъ тѣ части курса, которые могли бы быть опущены или сокращены безъ ущерба для дальнѣйшаго обученія математикѣ.

Обсужденію этого вопроса было отведено 2 засѣданія.

Вотъ перечень тѣхъ частей курса, которые было признано возможнымъ опустить.

Ариѳметика. Пропорціи. Періодическія дроби. Учетъ векселей. Задачи на время. Вычисленіе поверхностей и объемовъ. Въ статьѣ объ именованныхъ числахъ ограничиться составными именованными съ двумя наименованіями.

Алгебра. Извлеченіе корней изъ многочленовъ. Извлеченіе кубическаго корня. Срочныя уплаты. Непрерывныя дроби. Общій дѣлитель многочленовъ. Способъ сравненія. Способъ Безу. Разложеніе на множителей по способу расчлененія. Теорема Безу о дѣлимости многочлена.

Геометрія. Равенство призмъ и пирамидъ. Подобные многогранники. Объемъ шарового сегмента и шарового слоя.

Тригонометрія. Опустить особенные случаи рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ, ограничившись разборомъ только основныхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ.

Въ настоящее время этотъ перечень получаетъ особый интересъ въ виду настоятельно выдвигаемаго требованія сократить объемъ курса въ цѣляхъ освѣженія учебнаго матеріала.

Отдѣлъ математики откликнулся и на другой вопросъ, въ свое время много волновавшій не только педагоговъ, но и широкіе общественные круги—на вопросъ о конкурсныхъ экзаменахъ въ высшія техническія учебныя заведенія. Въ 1893/4 уч. году экзамены эти отличались особою строгостью, въ результатѣ чего большое число экзаменовавшихся не выдержало испытаній и осталось за бортомъ высшей школы. Въ отдѣлѣ математики состоялось засѣданіе, на которомъ нѣкоторые изъ г.г. экзаменаторовъ, приглашенныхъ въ Отдѣлъ, сдѣлали докладъ о томъ, какіе недостатки въ подготовкѣ молодыхъ людей, прошедшихъ среднюю школу, были обнаружены на экзаменахъ. Докладчиками явились: М. А. Дешевой (геометрія), А. А. Вороновъ (тригонометрія), Д. Ѳ. Селивановъ (алгебра) 1).

Мѣра эта могла оказать моральное вліяніе на экзаменаторовъ—съ одной стороны, и дать нѣкоторыя полезныя указанія преподавателямъ средней школы—съ другой.

---

1) См. «Краткій обзоръ дѣятельности Пед. Музея за 1893—1894 уч. годъ». XXIV-й обзоръ.

Въ работахъ Отдѣла въ этотъ періодъ его дѣятельности принимали живое участіе: А. Н. Страннолюбскій, В. В. Преображенскій, П. А. Шиффъ, П. М. Новиковъ, А. И. Гольденбергъ, З. Б. Вулихъ, Ѳ. А. Покровскій, вносившіе много интереса въ засѣданія, какъ собственными докладами, такъ и участіемъ въ преніяхъ.

Не замыкаясь въ тѣсномъ кружкѣ своихъ сочленовъ, Отдѣлъ пользовался всякимъ представлявшимся случаемъ для общенія съ людьми науки и педагогическаго опыта. Такъ 4-го января 1890 г. состоялось засѣданіе Отдѣла, въ которомъ приняли участіе профессора и преподаватели физико-математическихъ наукъ, прибывшіе въ Петербургъ на съѣзды: естествоиспытателей и врачей, и—дѣятелей по техническому и ремесленному образованію. На этомъ засѣданіи присутствовало до 200 лицъ. Были сдѣланы доклады: профессоромъ В. П. Ермаковымъ—о постулатѣ Евклида, П. В. Преображенскимъ, И. И. Александровымъ, А. П. Киселевымъ, профессоромъ В. В. Преображенскимъ, Г. Щепанскимъ, Г. В. Булюбашемъ, Ф. Ю. Мацономъ, Шенрокомъ и другими.

Японская война и послѣдовавшія за ней политическія событія отодвинули на задній планъ въ общественномъ сознаніи вопросы академическаго и учебнаго характера. 1904—1906 годы были временемъ затишья въ дѣятельности Музея вообще и его Отдѣла математики въ частности. Но съ 1907 года дѣятельность эта снова оживляется. Ближайшимъ къ этому поводомъ явилось проникшее съ Запада къ намъ въ Россію реформаторское движеніе въ области преподаванія математики. Почувствовалась настоятельная необходимость подвергнуть детальному разбору тѣхъ новыхъ идеи, содержаніе которыхъ связано съ именами Клейна, Бореля, Лоджа, Перри и другихъ сторонниковъ радикальной реформы курса школьной математики. Скоро къ этому присоединилось стремленіе принять посильное участіе въ подготовкѣ Россіи къ предстоящему въ 1912 году V-му Международному Математическому Конгрессу.

8-го октября 1909 года Отдѣлъ постановилъ подготовить рядъ докладовъ, посвященныхъ вопросамъ о желательной постановкѣ преподаванія математики въ связи съ задачами Конгресса. Въ рядѣ состоявшихся вслѣдъ за симъ засѣданій были заслушаны слѣдующіе доклады:

1) В. Р. Мрочекъ. Современныя тенденціи, относящіяся къ цѣлямъ математическаго образованія и къ выбору предметовъ преподаванія въ средней обще-образовательной школѣ.

К 2) Б. Б. Піотровскій. Ученіе о числѣ въ курсѣ средней школы.

К 3) Д. М. Левитусъ. О курсѣ алгебры въ обще-образовательныхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

4) Н. А. Томилинъ. О роли графическаго метода при обученіи математикѣ въ средней школѣ.

К 5) С. И. Шохоръ-Троцкій. Къ реформѣ преподаванія геометріи въ средней школѣ.

6) Ф. В. Филипповичъ. Исторія пропедевтическихъ курсовъ геометріи.

К 7) Т. А. Эренфестъ. Интуиція и логика въ преподаваніи геометріи, и другіе.

Въ засѣданіяхъ, посвященныхъ этимъ докладамъ, въ большинствѣ случаевъ предсѣдательствовалъ директоръ Музея З. А. Макшеевъ. Засѣданія были многолюдны и оживленны. Въ числѣ лицъ, заинтересовавшихся этими работами Отдѣла и посѣщавшихъ относящіяся сюда засѣданія можно назвать академика Н. Я. Сонина, члена Гос. Совѣта проф. А. В. Васильева, профессоровъ: К. А. Поссе, Б. М. Кояловича, С. Е. Савича, П. А. Некрасова и другихъ. Конспекты нѣкоторыхъ докладовъ до прочтенія въ общихъ собраніяхъ Отдѣла обсуждались въ небольшихъ комиссіяхъ. Другіе доклады, напримѣръ, доклады Д. М. Левитуса и Т. А. Эренфестъ, по прочтеніи въ засѣданіи Отдѣла, печатались, разсылались членамъ отдѣла и только послѣ этого подвергались подробному обсужденію въ новомъ засѣданіи.

По мѣрѣ того, какъ эта работа подвигалась впередъ, все больше крѣпла зародившаяся у нѣкоторыхъ членовъ отдѣла мысль о Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики, гдѣ можно было бы обмѣняться мнѣніями по этимъ вопросамъ съ многочисленными коллегами, одиноко работающими въ провинціальныхъ уголкахъ.

Идея о Съѣздѣ теперь осуществилась, и уже дѣло Съѣзда будетъ озаботиться о томъ, чтобы дѣятельность многихъ отдѣльныхъ кружковъ въ будущемъ не терялась въ нѣдрахъ архивовъ; чтобы была согласованность въ ихъ общей работѣ, чтобы былъ центръ этой работы.

Говоря о дѣятельности Отдѣла математики Педагогическаго Музея, нельзя не упомянуть еще объ одномъ начинаніи, находящемся, впрочемъ, пока только въ стадіи исполненія. Музеемъ была предпринята въ 1910—11 уч. году среди учащихся въ Петербургскихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ—мужскихъ и женскихъ—анкета, имѣющая цѣлью обслѣдованіе вопроса о преподаваніи математики въ нашей средней школѣ. На эту анкету, распространенную въ числѣ 10 тысячъ экземпляровъ, получено до двухъ тысячъ отвѣтовъ, которые ждутъ разработки ¹).

Вотъ эта анкета.

Анкета

по вопросу о преподаваніи математики въ средней школѣ.

Математическій отдѣлъ Педагогическаго Музея Военно-учебныхъ Заведеній обращается съ анкетой къ слушателямъ высшихъ учебныхъ заведеній всѣхъ факультетовъ и отдѣленій. Цѣль анкеты—собрать данныя, касающіяся нѣкоторыхъ наиболѣе спорныхъ пунктовъ преподаванія математики въ средней школѣ. Большинствомъ педагоговъ сознается неудовлетворительность постановки этого преподаванія, и вопросъ о его реформѣ является однимъ изъ насущныхъ вопросовъ современной педагогики. Но мнѣнія о томъ, какой характеръ эта реформа должна принять, въ общемъ сильно расходятся. Различные преподаватели, опираясь на свои личныя наблюденія надъ учениками, дѣлаютъ весьма различныя заключенія о томъ, что учащимся наиболѣе доступно и интересно, какимъ образомъ различные элементы преподаванія вліяютъ на различныя стороны ихъ ума, наконецъ, какое впечатлѣніе складывается у учащихся отъ всего проходимаго въ средней школѣ курса математики.

Для полнаго выясненія картины недостаточно, поэтому, ограничиваться отзывами преподавателей, а необходимо дать высказаться и самимъ учащимся—лучше всего лицамъ, только что прошедшимъ среднюю школу, знакомымъ съ среднешкольнымъ курсомъ математики въ его цѣломъ и не успѣвшимъ еще вполнѣ забыть этотъ курсъ и свое отношеніе къ нему при его прохожденіи. Такими лицами и являются слушатели высшихъ учебныхъ заведеній, въ особенности—слушатели первыхъ семестровъ *).

---

¹) Разработка анкеты будетъ стоить отъ 900 до 1000 руб. Такой суммой Музей пока не располагаетъ. Прим. редакціи.

*) Изъ числа опрашиваемыхъ *не исключаются* лица, перешедшія уже какой-нибудь опредѣленный срокъ со времени окончанія средней школы, т. к. у разныхъ лицъ воспоминанія о школѣ сохраняются неодинаково долго. Учетъ этого обстоятельства во всякомъ случаѣ можетъ быть сдѣланъ на основаніи вопр. 2 опроснаго листа.

При этомъ въ высшей степени важно равномѣрное участіе въ отвѣтахъ слушателей всѣхъ возможныхъ факультетовъ: *отвѣты нематематиковъ отнюдь не менѣе цѣнны,* чѣмъ отвѣты математиковъ, т. к. они дадутъ матеріалъ для выясненія того, что даетъ обученіе математикѣ въ средней школѣ для общаго образованія.

Успѣхъ анкеты зависитъ всецѣло отъ поддержки массы отвѣчающихъ. Чѣмъ больше опросныхъ листовъ будетъ заполнено, тѣмъ надежнѣе и цѣннѣе будутъ результаты. Съ другой стороны, въ высшей степени важно и качество отвѣтовъ: только правдивые и продуманные отвѣты помогутъ выяснить дѣйствительное положеніе вещей.

Составители анкеты надѣются, что учащаяся молодежь съумѣетъ отнестись къ начатому дѣлу сочувственно и серьезно, и просятъ каждаго отвѣчающаго не только внимательно и добросовѣстно заполнить свой опросный листъ, не оставляя ни одного вопроса безъ отвѣта, но и содѣйствовать распространенію листовъ среди возможно широкаго круга товарищей.

При заполненіи опросныхъ листовъ необходимо соблюдать слѣдующія условія:

а) Отвѣты должны даваться вполнѣ самостоятельно безъ предварительныхъ совѣщаній съ другими лицами и безъ справокъ въ учебникахъ.

б) Отвѣты должны быть по возможности точны и безпристрастны.

в) Если какой-нибудь вопросъ затрудняетъ отвѣчающаго, то слѣдуетъ тутъ же указать причину затрудненія: неясна ли самая формулировка вопроса, забыто ли то, о чемъ спрашивается, затрудняетъ ли отвѣчающаго формулировка отвѣта и т. п., но ни въ какомъ случаѣ не оставлять вопроса безъ отвѣта.

г) Слѣдуетъ при записываніи отвѣтовъ заботиться о возможной четкости почерка.

А. Вопросы общаго характера.

1. Въ какомъ высшемъ учебномъ заведеніи и на какомъ факультетѣ или отдѣленіи находились Вы?

1*. Какую спеціальность избрали-бы Вы, послѣ окончанія средней школы еслибъ были вполнѣ свободны въ Вашемъ выборѣ?

2. Въ которомъ году окончили среднеучебное заведеніе или сдали экзаменъ экстерномъ? въ 19 году.

3. Какое среднее образованіе получили Вы? *домашнее, школьное* *).

4. Если школьное, то гдѣ именно обучались? *въ классической гимназіи, реальномъ училищѣ и т. д.*

5. Интересовали ли Васъ въ дошкольномъ возрастѣ вопросы изъ области ариѳметики, геометріи или механики? (напр., счетъ до большихъ чиселъ, ариѳметическіе фокусы, черченіе плановъ, разборъ устройства механизмовъ и т. п. *да, именно*

---

*) Могущіе встрѣтиться отвѣты напечатаны *курсивомъ*. Подчеркивайте въ такихъ случаяхъ соотвѣтствующій отвѣтъ, если же ни одинъ изъ нихъ не подходитъ, то добавляйте отъ себя.

нѣтъ, не помню.

6. Какіе предметы учебнаго курса средней школы интересовали Васъ всего больше?
всего меньше?

7. Какіе предметы учебнаго курса средней школы давались Вамъ всего легче?

всего труднѣе?

8. Если въ школьномъ возрастѣ Васъ интересовала математика, то чему Вы это приписываете? *вліянію школы (способу преподаванія, личности учителя, товарища*
причинамъ отъ школы независящимъ (природной склонности, вліянію постороннихъ лицъ.

9. Какіе отдѣлы учебнаго курса математики нравились Вамъ всего больше? (*ариѳметика, алгебра, геометрія, тригонометрія, аналитическая геометрія, начертательная геометрія, начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленіи*). (Зачеркните названія тѣхъ предметовъ, которыхъ Вы въ средней школѣ не проходили). (Подчеркните одной чертой названія тѣхъ предметовъ, которые Вамъ нравились и двумя—тѣхъ, которыхъ Вы не любили).

10. Какіе отдѣлы учебнаго курса математики давались Вамъ всего легче?
Какіе всего труднѣе?

11. Занимались ли Вы по собственному желанію во время прохожденія курса средней школы математическими вопросами, выходящими за предѣлы школьной программы? *да, нѣтъ.* Если да, то чѣмъ именно?

12. Сложилось ли у Васъ къ моменту окончанія средняго образованія убѣжденіе въ пользѣ математики? *да, нѣтъ.*
Если да, то въ какомъ отношеніи? *Для дисциплины ума, для изученія другихъ наукъ, для техники*
Полагались ли Вы въ этомъ убѣжденіи на авторитетъ учителя или Вы были знакомы съ примѣрами, подтверждающими его?

13. Были ли ученики на всѣхъ урокахъ математики только пассивными слушателями изложенія учителя? *да,* или принимали активное участіе въ разработкѣ урока съ помощью вопросовъ и отвѣтовъ? *да—на нѣкоторыхъ, на всѣхъ урокахъ геометріи, на нѣкоторыхъ. на всѣхъ урокахъ алгебры.*

Б. Геометрія.

14. Какую преобладающую отмѣтку имѣли Вы по геометріи?

15. Начинался ли курсъ геометріи съ опредѣленій, аксіомъ и доказательствъ? *да* или же съ нагляднаго знакомства съ геометрическими образами

и истинами? *да—при помощи черченія, разглядыванія моделей, собственноручнаго ихъ изготовленія, отысканія изучаемыхъ геометрическихъ образовъ на окружающихъ предметахъ.*

16. Какіе пріемы примѣнялись для того, чтобы въ дальнѣйшемъ курсѣ ученики отчетливо представляли себѣ всѣ тѣ фигуры, о которыхъ говорится въ теоремахъ? *никакихъ;—ученики предварительно знакомились съ теоремой на конкретномъ матеріалѣ; изложеніе теоретическое сопровождалось попутнымъ указаніемъ на соотвѣтствующіе предметы изъ окружающей обстановки, на модели, каждая теорема сопровождалась черченіемъ соотвѣтствующихъ фигуръ и притомъ не въ одномъ спеціальномъ положеніи, а въ самыхъ разнообразныхъ,*

17. Достаточно ли ясно представляли себѣ лично Вы всѣ фигуры, съ корыми встрѣчались въ планиметріи? *да, нѣтъ.*
въ стереометріи? *да, нѣтъ.*

18. Интересовало ли Васъ примѣненіе геометрическихъ свѣдѣній къ рѣшенію задачъ? *нѣтъ, да на вычисленіе, на построеніе* задачъ *изъ физики, космографіи.*

19. Какіе пріемы примѣнялись для того, чтобы ученики давали себѣ отчетъ въ логической связи теоремъ между собой (цѣпь теоремъ и аксіомъ) и въ логической послѣдовательности доказательства той или другой теоремы въ отдѣльности? *никакихъ; учитель заставлялъ учениковъ возвращаться отъ любого звена цѣпи теоремъ къ первому звену, ученикамъ предлагалось придумывать собственныя доказательства, критиковать доказательства товарищей, разбирать софизмы, составлять теоремы обратныя и противуположныя даннымъ и т. д*

20. Казалось ли Вамъ требованіе строгаго формальнаго доказательства теоремъ излишнимъ? *всегда, никогда, въ нѣкоторыхъ случаяхъ,* напримѣръ

21. Легко ли давалось Вамъ усвоеніе доказательствъ? *да, нѣтъ.*
Если нѣтъ, то составляла ли главное затрудненіе логическая сторона доказательствъ? *да,* или же запоминаніе вспомогательныхъ построеній и т. п.?

22. Интересовала ли Васъ логическая сторона геометріи? *да, нѣтъ.*

23. Интересовалъ ли Васъ когда-нибудь вопросъ о возможности привести и другія человѣческія знанія на такую же степень логической стройности, какую представлялъ пройденный Вами курсъ геометріи? *да, нѣтъ, интересуетъ и теперь*

24. Не казалось ли Вамъ, что въ нѣкоторыхъ пунктахъ курса геометріи не выдержана та логическая стройность, которую ему приписываютъ? *нѣтъ; да,* а именно

25. Если Вы въ настоящее время изучаете предметы, опирающіеся на геометрію, то являются ли Ваши школьныя свѣдѣнія достаточными для этого? *да, нѣтъ.*

26. Если нѣтъ, то чего этому курсу недостаетъ, по Вашему мнѣнію (съ качественной или количественной стороны)?

27. Различныя лица различными путями достигаютъ усвоенія геометрическихъ истинъ:

1. Одни нуждаются только въ строгомъ логическомъ доказательствѣ, ознакомившись съ которымъ уже не нуждаются въ какихъ-либо конкретныхъ образахъ въ видѣ примѣрныхъ чертежей и моделей.
2. Другіе яснѣе воспринимаютъ всякую новую истину, если предварительно уяснятъ себѣ ея содержаніе на конкретныхъ примѣрахъ, и только послѣ этого могутъ сознательно слѣдить за формальнымъ доказательствомъ.
3. Третьи предпочитаютъ сперва изучить доказательство, а потомъ подкрѣпить его примѣненіемъ изученнаго на конкретныхъ примѣрахъ.
4. Четвертые считаютъ наиболѣе убѣдительной для себя пробу на нѣсколькихъ конкретныхъ примѣрахъ, а формально логическому доказательству не придаютъ особой цѣнности.

Къ которой категоріи относите Вы себя?

28. *) «Въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны».

Слѣдуетъ ли изъ этого непосредственно, безъ пользованія другими аксіомами или теоремами геометріи, что

a) треугольникъ, у котораго всѣ три угла различны, не можетъ быть равнобедреннымъ? *да, нѣтъ, не знаю.*

b) треугольникъ съ двумя равными углами равнобедренный? *да, нѣтъ, не знаю.*

29. Справедливо ли утвержденіе (a) предыдущаго вопроса? *да, нѣтъ, не знаю.*

Справедливо ли утвержденіе (b)? *да, нѣтъ, не знаю.*

30. Есть ли вопросъ 29 простая перефразировка вопроса 28-го? *да, нѣтъ, не знаю.*

31. Что представляетъ геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ на поверхности шара и равноотстоящихъ отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ поверхности?

Легко ли представляете Вы себѣ подобныя вещи? *да, нѣтъ,*

---

*) Для цѣли анкеты необходимо субъективныя показанія дополнить объективными данными. Въ этомъ отношеніи отвѣты на вопросы напечатанные мелкимъ шрифтомъ совершенно необходимы.

В. Алгебра

32. Какую преобладающую отмѣтку имѣли Вы по алгебрѣ?

33. Въ курсъ алгебры входятъ:	легко ли давалось	нравилось ли
Алгебраическія преобразованія		
Логариѳмическія вычисленія и извлеченіе квадр. корней изъ чиселъ		
Составленіе уравненій		
Рѣшеніе уравненій		
Изслѣдованіе уравненій		
Теорія соединеній и биномъ Ньютона		
Неопредѣленныя уравненія		
Непрерывныя дроби		
Начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.		

34. Нуждались-ли Вы для уясненія *содержанія* алгебраическихъ правилъ въ численныхъ примѣрахъ? *да, нѣтъ.*

35. Когда уяснили себѣ *справедливость* этихъ правилъ, достаточно ли было Вамъ для этого нѣсколько частныхъ примѣровъ? *да,* или одного только теоретическаго доказательства? *да,* или же было для васъ необходимо и то, и другое вмѣстѣ? *да.*

36. Если Вы въ настоящее время изучаете предметы, опирающіеся на алгебру, то являются ли Ваши школьныя свѣдѣнія достаточными для ихъ пониманія? *да, нѣтъ.*

37. Если нѣтъ, то чего для этого недостаетъ, по Вашему мнѣнію (съ качественной и количественной стороны?

38. *) Въ настоящее время мы умѣемъ находить приближенное значеніе $\sqrt{2}$ съ какой угодно степенью точности.

Считаете ли вы возможнымъ, что будетъ когда-нибудь найденъ способъ точнаго вычисленія $\sqrt{2}$?

да, нѣтъ, не знаю.

39. «Отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ величинъ считается равнымъ отношенію двухъ другихъ несоизмѣримыхъ величинъ, если равны ихъ приближенныя значенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью».

Отношеніе длины полуокружности C къ радіусу r и отношеніе полупериметра P правильнаго вписаннаго 256-ти угольника къ апоѳемѣ a выражаются при различной точности вычисленія слѣдующими числами:

Точность		1	0,1	0,01
прибл. значеніе	$\frac{C}{r}$	3	3,1	3,14
прибл. значеніе	$\frac{P}{a}$	3	3,1	3,14

Можно ли отсюда заключить, что $\frac{C}{r} = \frac{P}{a}$? *да, нѣтъ, не знаю.*

40. Величина a измѣрена съ точностью до 1%; величина b—съ точностью до 2%.

Какою точностью обладаетъ ихъ произведеніе?

Иллюстрація: a—сторона прямоугольника; b—другая сторона прямоугольника: ab—площадь прямоугольника.

41. При $x=1$ выраженія x^4 и x^2 равны между собою. Для какихъ значеній x выраженіе x^4 больше, чѣмъ x^2, и для какихъ меньше?

42. Даны слѣдующія выраженія:

$$(1)\ x^2;\ (2)\ 10 - x^2;\ (3)\ \frac{1}{10-x^2}\ (4)\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

Если придавать буквѣ x послѣдовательно рядъ возрастающихъ отъ 1 до 2 значеній, то каждое изъ написанныхъ выраженій будетъ мѣнять свое значеніе.

Которыя изъ нихъ будутъ при этомъ возрастать, которыя убывать?

43. Если отвѣтъ на какой-нибудь вопросъ не умѣстился въ соотвѣтствующемъ мѣстѣ, то запишите его здѣсь, помѣтивъ № вопроса

Въ заключеніе нельзя не упомянуть, что съ 1904 г. при Музеѣ, по иниціативѣ тогдашняго директора А. Н. Макарова, учреждены курсы для подготовленія кандидатовъ къ учительской дѣятельности въ кадетскихъ корпусахъ. Отдѣлъ приноситъ курсантамъ пользу въ томъ отношеніи, что посѣщая его засѣданія, присутствуя при докладахъ и преніяхъ, они слышатъ много такого, что находится въ тѣсномъ соприкосновеніи съ предстоящей имъ учительской дѣятельностью, вслѣдствіе чего повышается и улучшается ихъ подготовка къ этой дѣятельности [1]).

Представители математическихъ кружковъ имѣли засѣданія 29 и 30 Декабря 1911 г. На послѣднемъ засѣданіи было постановлено большинствомъ голосовъ внести въ организаціонный Комитетъ Съѣзда слѣдующее предложеніе:

«1. Въ виду того, что въ настоящее время въ различныхъ мѣстахъ Россіи существуетъ довольно много математическихъ кружковъ, было бы желательно созданіе особой организаціи, которая, составляя ихъ вполнѣ самостоятельными, объединила бы эти кружки на почвѣ ихъ общихъ интересовъ и стремленій.

2. Въ случаѣ принятія 1-го пункта просить Московскій Математическій Кружокъ взять на себя трудъ по разработкѣ проекта такой организаціи и послѣ одобренія таковаго другими кружками озаботиться проведеніемъ его въ жизнь».

Слѣдуютъ подписи представителей Кружковъ:

Ѳ. Эрнъ (Рига), А. Гатлихъ и С. Виноградовъ (Москва), К. Агрономовъ (Ревель), К. Тороповъ (Оренбургъ), Б. Піотровскій (Спб.), Н. Пажитновъ (Варшава), В. Маклашинъ, П. Острогорскій, А. Яськовъ (Орелъ).

---

[1]) Позднѣйшимъ крупнымъ событіемъ въ жизни Музея является его участіе въ Международной выставкѣ «Устройство и оборудованіе школы», состоявшейся въ Петербургѣ лѣтомъ 1912 г. Музей, въ числѣ экспонатовъ котораго были и коллекціи по математикѣ, получилъ на этой выставкѣ большую золотую медаль.

Прим. редакціи.

1 января 1912 г. въ 2 ч. дня проф. А. П. Нечаевъ, по просьбѣ членовъ Съѣзда, прочелъ лекцію по психологіи и демонстрировалъ приборы психологической лабораторіи Педагогическаго Музея Военно-Учебныхъ Заведеній.

Лекція собрала около 800 человѣкъ и продолжалась до 5 ч., принявъ подъ конецъ характеръ бесѣды.

О значеніи экспериментальной психологіи для педагогики.

Конспектъ лекціи проф. А. П. Нечаева (Спб.).

Размышляя о будущности психологіи, Кантъ высказывалъ мысль, что психологія никогда не достигнетъ степени развитія естественной науки, такъ какъ ири изученіи душевной жизни непримѣнимы ни математика, ни экспериментъ. Но уже черезъ 20 лѣтъ послѣ смерти Канта для Гербарта и его послѣдователей стало ясно, что въ душевной жизни много есть такихъ сторонъ, которыя подходятъ подъ понятіе величины (различная напряженность душевныхъ состояній, скорость психическихъ процессовъ и т. п.), и сталъ намѣчаться идеалъ математически точной психологіи. Долгое время осуществленіе этого идеала казалось слишкомъ отдаленнымъ, вслѣдствіе неумѣнія воспользоваться экспериментомъ, какъ средствомъ психологическаго изслѣдованія. Въ половинѣ XIX вѣка производятся первые психологическіе эксперименты, а въ концѣ семидесятыхъ годовъ отдѣльныхъ методовъ экспериментально-психологическаго изслѣдованія накопляется уже такъ много, что проф. Вундтъ основываетъ въ Лейпцигѣ первую психологическую лабораторію. Дальнѣйшее развитіе экспериментальной психологіи пролагаетъ пути къ экспериментальному изслѣдованію цѣлаго ряда душевныхъ процессовъ, имѣющихъ особенно важное значеніе въ воспитаніи. (Въ связи съ характеристикой развитія методовъ экспериментальной психологіи, на экранѣ былъ данъ рядъ портретовъ выдающихся дѣятелей новѣйшей психологіи, а на эстрадѣ демонстрировались типичные психологическіе аппараты изъ Психологической Лабораторіи при Педагогическомъ Музеѣ в. у. з. [1]).

Начало примѣненія экспериментальной психологіи къ педагогикѣ относится къ концу семидесятыхъ и началу восьмидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія, когда нѣкоторыми учеными производились отдѣльные опыты надъ учащимися. Благодаря дѣятельности Ст. Холла въ Америкѣ, Ціэна, Меймана. Лайя и Брана въ Германіи, Бинэ во Франціи, Скойтена въ Бельгіи, Пиццоли въ Италіи и другихъ, примѣненіе экспериментально-психологическихъ методовъ къ выясненію педагогическихъ проблемъ получаетъ все болѣе широкую форму. (На экранѣ былъ продемонстрированъ рядъ діаграммъ и таблицъ. характеризующихъ типичные пріемы и результаты этихъ изслѣдованій [2]). Между научными психологическими лабораторіями и школой устанавливается опредѣленная связь, выражающаяся въ томъ, что 1) психологическія лабораторіи все чаще обращаются къ изслѣдованію психологическихъ проблемъ педагогическаго характера и 2) школьные дѣятели стремятся въ знакомствѣ съ психологическими лабораторіями почерпнуть средство къ лучшему оріентированію въ своихъ педагогическихъ задачахъ. При многихъ школахъ и обществахъ возникаютъ спеціальные школьные психологическіе кабинеты [3]. Нѣкоторыя учебныя заведенія, при самомъ возникновеніи своемъ, ставятъ себѣ цѣлью быть экспериментальными школами [4].

---

[1] *М. Коноровъ.* Лабораторія экспериментальной педагогической психологіи в. уч. зав. СПБ. 1912. Ц. 50 к.

[2] Большинство этихъ діаграммъ и таблицъ напечатано въ сочиненіяхъ *А. П. Нечаева* «Очеркъ психологіи для воспитателей и учителей» (4-е изд. 1911 г.) и «Современная экспериментальная психологія въ ея отношеніи къ вопросамъ школьнаго обученія» (изд. 2-е, т. I. 1909 г., т. II. 1912 г.).

[3] *Н. Е. Румянцевъ*, Школьный психологическій кабинетъ («Ежегодникъ экспер. педагогики», т. I, 1908); *М. П. Коноровъ*, Учебная Коллекція психологическихъ приборовъ и таблицъ, Спб., 1912; *А. П. Нечаевъ*, Какъ преподавать психологію, Спб. 1911. Обзоръ всѣхъ лабораторій, обществъ и журналовъ экспер.-педагогическаго направленія см.: Forschung und Unterricht in der Jugendkunde, I. Teil. (herausg. von *O. Lipmann* und *W. Stern*, Berlin 1912, Verl. von Teubner).

[4] «Труды перваго всер. съѣзда по эксп. педагогикѣ», Спб. 1910 (стр. 338 и 153).

ШЕСТОЕ ЗАСѢДАНІЕ.

2 января 10$^1/_2$ час. дня.

Въ предсѣдатели избраны: проф. В. Б. Струве и проф. Д. М. Синцовъ. Въ почетные секретари П. С. Флеровъ.

XXVI. Номографія и ея значеніе для средней школы.

Докладъ М. Л. Франка (Спб.).

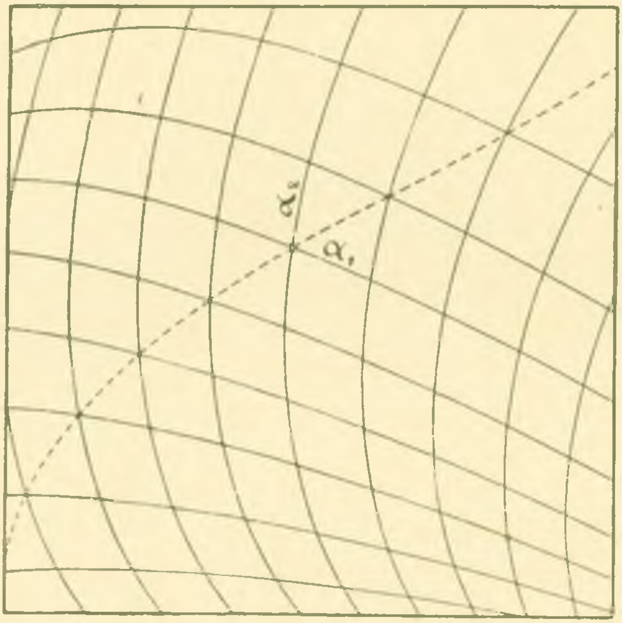
«Выступая съ докладомъ по номографіи, я чувствую, что могу быть встрѣченъ съ нѣкоторымъ недоумѣніемъ. Дѣйствительно, номографія представляетъ собой въ настоящее время предметъ сравнительно мало извѣстный. Даже заграницей далеко не во всѣхъ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ читается постоянный курсъ номографіи. Несмотря на это я рѣшился въ тезисахъ къ моему докладу утверждать, что номографія можетъ имѣть значеніе и для средней общеобразовательной школы. Малое знакомство съ номографіей и нѣкоторое пренебрежительное къ ней отношеніе объясняются, какъ мнѣ кажется, чисто историческими причинами. Номографія, или какъ ее раньше проще называли, графическая алгебра, представляетъ собою ученіе о методахъ графическаго изображенія функціональной зависимости. Часть такихъ методовъ далеко не новаго происхожденія. Еще Декартъ предназначалъ свою систему координатъ не для аналитической геометріи, т. е. не для аналитическаго изслѣдованія геометрическихъ образовъ, а обратно, для геометрическаго изображенія аналитическихъ функцій. Геометрическіе методы изображенія функцій развились по мѣрѣ развитія самой математики, но все время играли только подсобную роль и сами по себѣ не были объединены общей теоріей. Наиболѣе замѣтно было всегда значеніе графическихъ методовъ для вопросовъ прикладного, техническаго характера. Начертательная геометрія, графическая стастика и кинематика механизмовъ сами уже требовали значительнаго развитія графическихъ методовъ. Въ дальнѣйшемъ рядѣ частныхъ случаевъ для составленія графическихъ таблицъ предложены были новые методы.

Цѣлый рядъ инженеровъ-практиковъ, какъ напримѣръ, Лаллеманъ, Массо и многіе другіе, развили рядъ новыхъ методовъ, объедили нѣкоторые ранѣе извѣстные. Наконецъ, профессоръ M. d'Ocagne сравнительно недавно не только привелъ въ стройную систему весь накопившійся матеріалъ, но главное—подвелъ подъ него теоретическій фундаментъ, благодаря которому номографія въ настоящее время развилась въ самостоятельную научную дисциплину, которой не брезгуютъ заниматься даже такіе отвлеченные умы, какъ напр. Hilbert. Но все же и теперь еще упорно держится взглядъ на номографію, какъ на предметъ, подсобный для техники и не имѣющій самостоятельной научной цѣнности. Мы знаемъ, однако же, что такова же была исторія многихъ другихъ наукъ, появившихся для удовлетворенія практической и даже иногда узкой потребности и впослѣдствіи развившихся въ отвлеченную самодовлеющую науку. Новидимому настаетъ время и для номографіи потребовать болѣе почетнаго мѣста въ ряду другихъ математическихъ дисциплинъ.

Графическое изображеніе функціональной зависимости между нѣсколькими перемѣнными величинами съ практической точки зрѣнія является однимъ изъ наиболѣе простыхъ методовъ для быстраго нахожденія приближеннаго значенія функціи. Числовыя таблицы функцій имѣютъ, конечно, то преимущество, что онѣ могутъ быть составлены съ любой степенью точности; однако же онѣ удобны только для функцій отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, когда измѣненію одной перемѣнной соотвѣтствуютъ строки таблицы, измѣненію другой—ея столбцы. На пересѣченіи строки со столбцомъ помѣщается значеніе функціи, соотвѣтствующее этимъ двумъ значеніямъ независимыхъ перемѣнныхъ. Для числовой таблицы функцій отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ приходится уже переходить въ третье измѣреніе, т. е. составлять множество отдѣльныхъ таблицъ, число которыхъ равно числу частныхъ значенiй одной изъ трехъ перемѣнныхъ, и такимъ образомъ превращать таблицу уже въ цѣлую книгу. Для большаго числа независимыхъ перемѣнныхъ составленiе числовыхъ таблицъ станоивтся совершенно невыполнимымъ. Но даже для функцiй отъ 2-хъ перемѣнныхъ числовыя таблицы не лишены нѣкоторыхъ недостатковъ. Прежде всего въ нихъ совершенно отсутствуетъ элементъ наглядности. Найти по числовой таблицѣ maximum или minimum функцiи дѣло нелегкое, особенно когда значенiя даны съ большимъ числомъ знаковъ. Далѣе, въ числовыхъ таблицахъ даже линейное интерполированiе требуетъ цѣлаго ряда ариѳметическихъ дѣйствiй, въ то время какъ на таблицахъ графическихъ интерполированiе производится чрезвычайно просто даже на глазъ. Основной недостатокъ графическихъ таблицъ заключается въ ихъ ограниченной степени точности; опытъ показалъ однако же, что почти всегда возможно составить таблицу съ относительной погрѣшностью въ предѣлахъ 0,01—0,001, т. е. съ точностью, которая для большинства техническихъ задачъ является вполнѣ достаточной.

Задача номографiи состоитъ прежде всего въ установленiи возможности составленiя таблицы для данной функцiи, въ выборѣ затѣмъ наиболѣе выгоднаго метода составленiя, который по возможности укрощалъ бы технику вычерчиванiя и давалъ бы достаточную степень точности и наглядности. Я не буду здѣсь излагать подробно теорiю номографiи, что завело бы меня слишкомъ далеко, и, помѣтивъ только основныя положенiя, постараюсь остановить вниманiе на вопросѣ объ номографическихъ методахъ изслѣдованiя простѣйшихъ функцiй и о томъ значенiи, которое номографiя можетъ имѣть для преподаванiя въ средней школѣ. Поэтому я долженъ заранѣе предупредить, что въ дальнѣйшемъ своемъ изложенiи я сознательно умолчу о нѣкоторыхъ, можетъ быть, даже наиболѣе важныхъ прiемахъ номографiи съ точки зрѣнiя ея примѣненiя къ вопросамъ техники.

Графическое изображенiе функцiональной зависимости осуществляется въ номографiи помощью двухъ существенно различныхъ методовъ, а именно: помощью метода, такъ называемыхъ, помѣченныхъ линiй и метода помѣченныхъ точекъ. Обратимся сначала къ первому. Плоскость чертежа мы представляемъ себѣ, какъ поле значеній перемѣнной, причемъ каждому частному значенію ея соотвѣтствуетъ одна изъ безконечнаго числа линій, расположенныхъ на плоскости, образующихъ одну изъ возможныхъ системъ (черт. 1). Зададимъ одной изъ нашихъ перемѣнныхъ α рядъ частныхъ значеній и вычертимъ соотвѣтствующія этимъ значеніямъ линіи. Беремъ вторую плоскость—прозрачную, и вычерчиваемъ на ней другую систему линій, соотвѣтствующихъ полю какой-либо другой перемѣнной α, и накладываемъ вторую пластинку на первую; мы получаемъ тогда безконечное количество точекъ пересѣченія линій одной системы съ линіями другой. Каждая точка соотвѣтствуетъ одновременно одному изъ частныхъ значеній первой перемѣнной и одному изъ частныхъ значеній второй перемѣнной. Если мы отмѣтимъ всѣ тѣ точки, которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ обѣихъ перемѣнныхъ, обращающихъ данную намъ функцію въ нуль, т. е. точки, для которыхъ $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ и соединимъ эти точки одной линіей, то получимъ графическое изображеніе для непрерывной функціи отъ одной независимой перемѣнной. Мы получаемъ извѣстный изъ аналитиче-

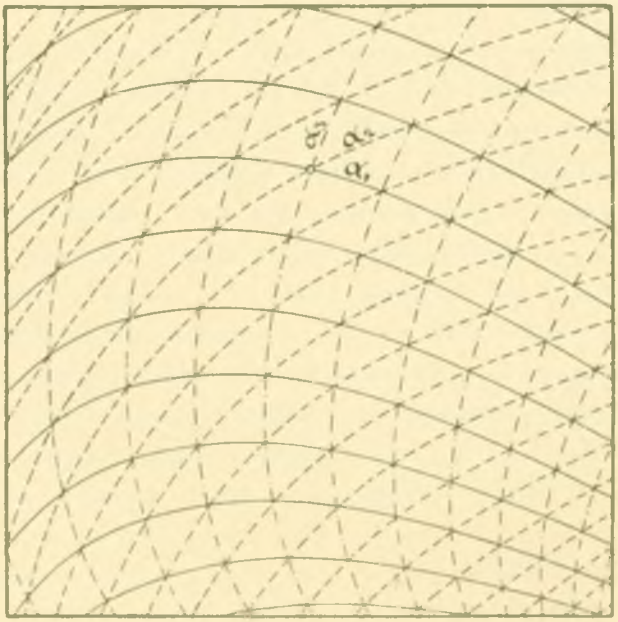


Черт. 1.

ской геометріи методъ изображенія функціи. Въ случаѣ, когда обѣ системы α_1 и α_2 состоятъ изъ прямыхъ, параллельныхъ между собою, мы имѣемъ Декартову систему координатъ; когда обѣ системы суть концентрическія окружности, — мы имѣемъ биполярную систему координатъ; когда одна система состоитъ изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, другая же изъ концентрическихъ окружностей, центръ которыхъ совпадаетъ съ полюсомъ первой—мы имѣемъ полярную систему; очевидно, что если не ограничивать себя въ выборѣ системы, то можно придумать сколько угодно различныхъ системъ и примѣнять любую изъ нихъ, смотря по тому, какая окажется выгоднѣе.

Для изображенія зависимости между тремя перемѣнными величинами мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ (черт. 2). Пусть дано $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, откуда

$$\alpha_3 = G(\alpha_1, \alpha_2).$$



Черт. 2.

Беремъ системы линій α_1 и α_2 и накладываемъ ихъ одну на другую. Задаемъ α_3 какое-нибудь частное значеніе и ищемъ всѣ тѣ точки, въ которыхъ α_1 и α_2 имѣютъ какъ разъ такія значенія, которыя удовлетворяютъ выбранному значенію α_3. Соединивъ эти точки кривой, мы получаемъ одну изъ кривыхъ системы α_3. Давая послѣдовательно α_3 рядъ произвольныхъ значеній и вычерчивая линіи, соотвѣтствующія этимъ значеніямъ мы получаемъ цѣлую систему линій. Такимъ образомъ мы получимъ три системы линій α_1, α_2, α_3; каждая линія помѣчена соотвѣтствующимъ ей значеніемъ перемѣнной. Мы можемъ произвольно выбрать въ качествѣ независимыхъ перемѣнныхъ любыя двѣ изъ трехъ, входящихъ въ функцію. Задавъ двумъ перемѣннымъ по частному значенію, мы найдемъ на плоскости въ точкѣ пересѣченія двухъ линій, соотвѣтствующихъ имъ,— третью линію, принадлежащую къ третьей системѣ и помѣченную ея частнымъ значеніемъ. Если бы оказалось, что точка пересѣченія линій двухъ системъ попадетъ между двумя линіями третьей системы, то пришлось бы производить интерполяцію, т. е. соотвѣтствующее значеніе третьей перемѣнной лежитъ между значеніями тѣхъ кривыхъ, между которыми оказалась наша точка пересѣченія двухъ первыхъ кривыхъ.

Для изображенія функціональной зависимости между четырьмя перемѣнными нельзя уже пользоваться неподвижнымъ наложеніемъ четырехъ полей, потому что мы должны имѣть возможность задавать произвольно значенія трехъ перемѣнныхъ, а между тѣмъ уже двѣ линіи опредѣлятъ положеніе точки на плоскости. Тогда поступаемъ слѣдующимъ образомъ: чертимъ на одной пластинкѣ системы линій α_1 и α_2, а на другой—прозрачной,—системы линій α_3 и α_4; даемъ второй пластинкѣ одну свободу движенія на плоскости первой, напр., скрѣпляемъ булавкой верхнюю пластинку съ нижней, такъ что она сможетъ только вращаться. Если мы зададимъ произвольныя значенія для α_1 и α_2, мы будемъ имѣть одну точку нижней пластинки. Вращаемъ тогда верхнюю до тѣхъ поръ, пока произвольно выбранное нами значеніе линіи α_3 не попадетъ въ первую точку. Но тогда черезъ ту же точку пройдетъ одна изъ линій α_4, которая и будетъ искомымъ значеніемъ четвертой перемѣнной изъ функціи $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$. Очевидно, что при такомъ способѣ изображенія функціи мы можемъ произвольно задавать значенія любыхъ трехъ перемѣнныхъ изъ четырехъ, входящихъ въ функцію.

Такъ какъ пластинка можетъ обладать всего тремя свободами движенія, если она остается на плоскости, то по такому способу можно было бы дать изображеніе функціональной зависимости между шестью перемѣнными. Мы не останавливаемся здѣсь на вопросѣ о предѣлѣ примѣнимости номограммъ, т. е. на вопросѣ о томъ, сколько перемѣнныхъ maximum можетъ входить въ функцію, чтобы ее можно было изобразить въ видѣ номограммы.

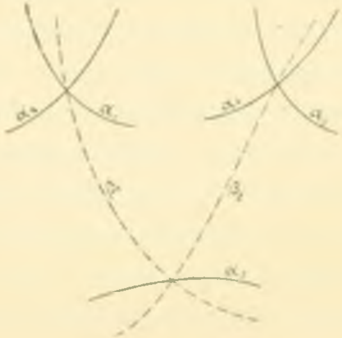
Предѣлы примѣненія номографіи могутъ быть значительно расширены, а самый методъ значительно упрощенъ, если только можно произвести расчлененіе функціи. Такъ, напр., для функціи вида $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$ можно обойтись безъ всякаго движенія пластинокъ, если только мы сможемъ аналогически преобразовать ее такъ, чтобы она получила видъ:

$$\varphi_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_{3,4}(\alpha_3, \alpha_4) \qquad (1)$$

Тогда мы вычерчиваемъ номограмму функцій отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ $\beta = \varphi_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2)$, такъ что получаемъ систему линій β. Значенія этой системы намъ не нужно знать, онѣ не должны быть вычисляемы, а потому и шкала этой системы называется нѣмой шкалой. Но изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что одновременно β будетъ являться функціей отъ двухъ другихъ перемѣнныхъ, такъ какъ $\beta = \varphi_{3,4}(\alpha_3, \alpha_4)$.

Продолживъ, слѣдовательно, линіи нѣмой шкалы β, мы можемъ перейти во вторую номограмму, въ которой линіи β будутъ также соотвѣтствовать третьей перемѣнной (черт. 3) *) Задавъ значенія α_1 и α_2, мы получаемъ точку, черезъ которую прохо-

Черт. 3.



Черт. 4.

---

*) Для упрощенія чертежа мы какъ въ этой, такъ и послѣдующей номограммѣ дали по одному только значенію каждой перемѣнной.

дитъ одна линія системы β. По этой линіи переходимъ во вторую номограмму и ищемъ пересѣченіе этой линіи съ произвольно выбраннымъ значеніемъ третьей перемѣнной α_3; черезъ эту точку проходитъ помѣченная линія четвертой системы α_4. Такимъ образомъ, на одномъ чертежѣ можетъ быть дано изображеніе функціональной зависимости между четырьмя перемѣнными.

Для возможности изображенія функціональной зависимости между пятью перемѣнными приходится предварительно произвести еще болѣе сложное расчлененіе функціи, а именно: данную нами функцію $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)=0$ (1)

представить въ видѣ

$$\alpha_5 = \varphi(\beta_1, \beta_2) \tag{2}$$

гдѣ

$$\beta_1 = \varphi_{12}\ (\alpha_1, \alpha_2) \tag{3}$$

и

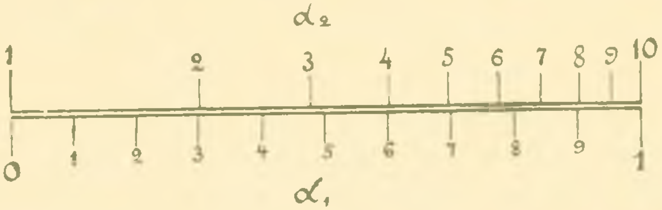
$$\beta_2 = \varphi_{3,4}\ (\alpha_3, \alpha_4). \tag{4}$$

Мы вычерчиваемъ, слѣдовательно, двѣ независимыхъ номограммы для функціи (3) и (4) и изъ полученныхъ нѣмыхъ шкалъ β_1 и β_2 составляемъ третью номограмму, такъ что черезъ точку пересѣченія одной линіи β_1 съ линіей β_2 проходитъ, линія α_5; такимъ образомъ, задавъ значенія 4-хъ перемѣнныхъ, мы можемъ получить соотвѣтствующее значеніе пятой, причемъ опять-таки можемъ произвольно выбирать въ качествѣ независимыхъ перемѣнныхъ любыя четыре перемѣнныя (черт. 4).

Совершенно аналогично можно дать изображеніе функціи отъ пяти независимыхъ перемѣнныхъ и вообще отъ любого числа ихъ, если только можно произвести необходимое преобразованіе и расчлененіе. Если такого преобразованія произвести нельзя, то предѣлы примѣнимости номограммы, даже съ введеніемъ скольженія, ограничены. Они могутъ быть еще значительно расширены только при переходѣ въ пространство трехъ измѣреній, что значительно усложняетъ построеніе, хотя очевидно и здѣсь предѣлы примѣненія не безграничны.

На практикѣ функціи отъ болѣе чѣмъ шести перемѣнныхъ, да при томъ не могущія быть хотя бы отчасти расчлененными, встрѣчаются чрезвычайно рѣдко, и границы примѣнимости номографіи необыкновенно широки.

Мы переходимъ теперь ко второму изъ основныхъ методовъ номографіи, къ системѣ помѣченныхъ точекъ. Въ этой системѣ совокупности всѣхъ значеній одной перемѣнной соотвѣтствуетъ одна линія на плоскости, а каждому частному значенію перемѣнной—одна точка. Функціональная зависимость между двумя перемѣнными можетъ быть изображена чрезвычайно просто помощью двухъ рядомъ лежащихъ линій (проще всего—прямыхъ), на которыхъ помѣчены соотвѣтствующія значенія перемѣнныхъ. Такой номограммой является, напр., всякая масштабная линейка, на которой нанесены параллельно дѣленія въ дюймахъ и сантиметрахъ, и которая можетъ служить для взаимнаго перевода этихъ мѣръ. На черт. 5 дано изображеніе функціи $\alpha_1 = lg\, \alpha_2$.



Черт. 5.

Для функціи отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ мы должны имѣть уже три линіи на плоскости съ помѣченными на нихъ точками, причемъ по даннымъ двумъ точкамъ системы α_1 и α_2 мы должны получать опредѣленное значеніе α_3. Такое отображеніе точекъ можетъ быть произведено любымъ способомъ. Однимъ изъ простѣйшихъ является, такъ называемый, методъ «выравненныхъ точекъ», когда три значенія трехъ перемѣнныхъ, удовлетворяющія уравненію

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \qquad (3)$$

расположены на одной прямой (черт. 6). Задавъ частныя значенія перемѣнной α_1 и α_2 и соединивъ соотвѣтственныя точки прямой, мы получимъ на пересѣченіи этой прямой съ линіей α_3 частное значеніе этой третьей перемѣнной. Номограмма въ системѣ выравненныхъ точекъ интересна тѣмъ, что можетъ быть весьма просто получена изъ номограммы системы помѣченныхъ линій по принципу двойственности. Если въ системѣ помѣченныхъ линій мы имѣли три системы прямыхъ, причемъ въ одной точкѣ пересѣкались три прямыя, значенія которыхъ удовлетворяли уравненію (5), то здѣсь мы имѣемъ три системы точекъ, причемъ три помѣченныя точки, удовлетворяющія тому же уравненію, лежатъ на одной прямой. Отображеніе можетъ быть, конечно, произведено и другимъ методомъ, напр., можно построить номограмму такъ, чтобы соотвѣтственныя точки лежали на окружности опредѣленнаго радіуса, или чтобы онѣ располагались въ вершинахъ равнобедреннаго треугольника (номограмма равноудаленныхъ точекъ) и т. д.

Черт. 6.

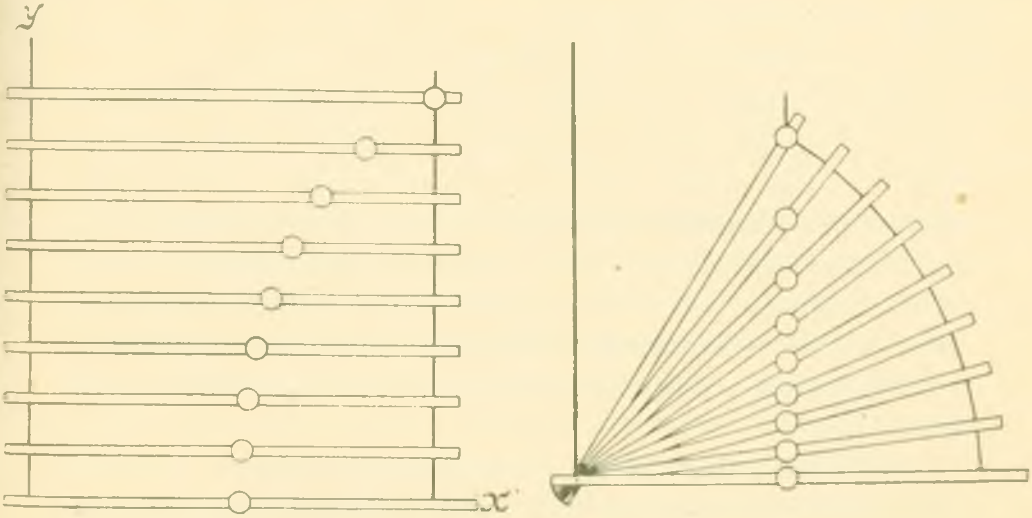
Черт. 7.

Для изображенія функціональной зависимости между 4 и болѣе перемѣнными можно прибѣгнуть къ методу совершенно аналогичному тому, который примѣняется къ системѣ помѣченныхъ линій. Такъ, напр., на черт. 7 мы имѣемъ функціональную зависимость между 4-мя перемѣнными по методу выравненныхъ точекъ. Кромѣ шкалъ α_1, α_2, α_3, α_4, мы имѣемъ еще нѣмую шкалу β. Задавъ значенія A_1 и A_2 на шкалахъ α_1 и α_2, мы проводимъ прямую и получаемъ точку B на шкалѣ β. Соединяя эту точку съ A_3 на шкалѣ α_8, мы получимъ искомое значеніе A_4 на α_4.

Номограмма въ системѣ помѣченныхъ точекъ далеко не обладаетъ такой наглядностью, какъ въ системѣ помѣченныхъ линій, но во многихъ случаяхъ является болѣе выгодной, благодаря простотѣ ея построенія.

Построеніе номограммъ, въ особенности для сложныхъ функцій, по обоимъ изъ вышеизложенныхъ методовъ могло бы однако же часто оказаться чрезвычайно сложнымъ съ точки зрѣнія техники черченія, а потому и невыгоднымъ. Возможности широкаго примѣненія номографія обязана двумъ замѣчательнымъ принципамъ, одинаково примѣнимымъ, какъ въ системѣ помѣченныхъ линій, такъ и въ системѣ помѣченныхъ точекъ. Эти два принципа суть: 1) такъ называемая «анаморфоза» и 2) преобразованіе шкалы. Я позволю себѣ изложить сущность этихъ принциповъ не только кратко, но и нѣсколько схематизированно.

Методъ номографической анаморфозы до извѣстной степени можно считать соотвѣтствующимъ методу преобразованія системы координатъ въ аналитической геометріи. Соотвѣтственно тому, какъ въ аналитической геометріи съ переходомъ къ новой системѣ координатъ измѣняется видъ уравненія соотвѣтствующаго данному образу, такъ обратно въ номографіи, помощью анаморфозы, можетъ быть измѣнена форма геометрическаго образа, соотвѣтствующаго данной функціи. Такое преобразованіе не трудно продемонстрировать на слѣдующей простой модели (черт. 8). Рядъ параллельныхъ между собою палочекъ, находящихся на равномъ другъ отъ друга разстояніи, снабжены бѣлыми кружками, изображающими точки. Точки эти расположены



Черт. 8.

такъ, что вмѣстѣ взятыя образуютъ кривую линію, уравненіе которой въ Декартовыхъ прямоугольныхъ координатахъ было бы $x = p\, sec\, y$, если бы нижнюю палочку мы приняли за ось *x-овъ*, а лѣвый шнурокъ—за ось *y-овъ*. Намъ извѣстно, однако же, что уравненіе $\rho = p\, sec\, \theta$ въ полярныхъ координатахъ есть уравненіе прямой, перпендикулярной къ полярной оси. Отсюда слѣдуетъ, что если мы измѣнимъ систему координатъ, превративъ x въ ρ и въ y въ θ, то наша кривая должна будетъ выпря миться. Я стягиваю теперь лѣвый шнурокъ такъ, чтобы палочки расположились вѣерообразно. Нижняя палочка превращается въ полярную ось, а правый шнурокъ служитъ мѣрою угла θ. И дѣйствительно, мы видимъ, что кружки располагаются теперь вдоль прямой линіи. Такимъ образомъ является возможность, выбирая координаты, измѣнять форму кривой, соотвѣтствующей данной функціи и, слѣдовательно, упрощать номограмму.

Принципъ преобразованія шкалы или иначе — введенія функціональной шкалы я поясню также помощью схематической модели. Сущность этого принципа заключается въ слѣдующемъ: намъ дана функція

$$F(x,y)=0,$$

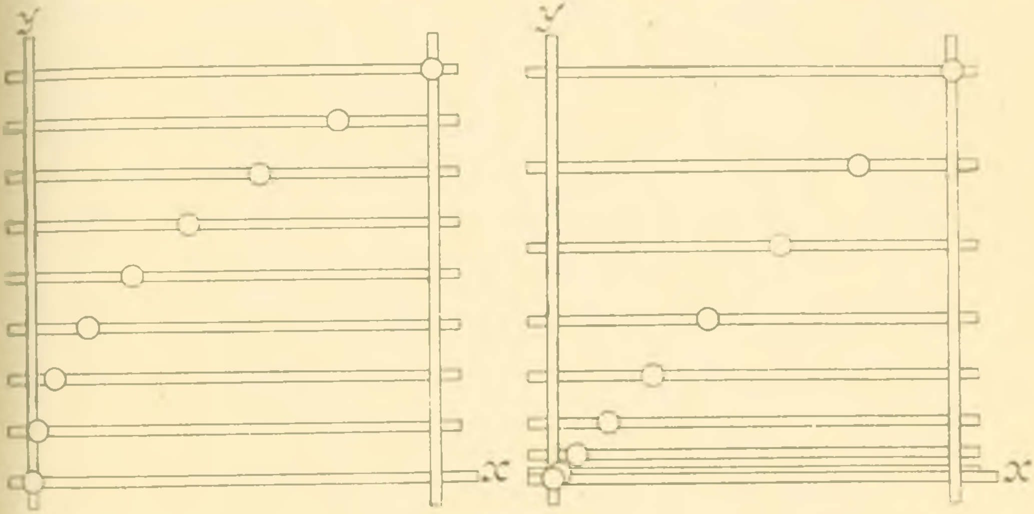
которой въ Декартовыхъ координатахъ соотвѣтствуетъ нѣкоторая кривая линія. Предположимъ, что мы можемъ преобразовать эту функцію такъ, что

$$F(x,y)=\Phi(u,v),\ \text{гдѣ}\ u=\varphi(x)\ \text{и}\ v=\psi(y)$$

и притомъ функція Φ проще, чѣмъ F. Тогда мы принимаемъ u и v какъ Декаратовы координаты и строимъ болѣе простую линію, но при этомъ должны пользоваться для u и v уже не простой или равномѣрной шкалой, какъ это имѣетъ мѣсто обычно въ аналитической геометріи, а шкалой функціональной, т. е. съ увеличеніемъ u и v въ n разъ отрѣзки, соотвѣтствующіе имъ, будутъ возрастать не пропорціонально этому увеличенію, и величины ихъ должны быть вычислены изъ функцій $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(y)$.

На моей модели (черт. 9) изображена парабола $y^2=2px$ въ Декартовыхъ координатахъ, причемъ нижняя палочка есть ось *x-овъ* и лѣвая вертикальная рамка ось *y-овъ*. Мы видимъ, что всѣ горизонтальныя палочки находятся на равномъ разстояніи одна отъ другой, соотвѣтственно равномѣрной шкалѣ, которую мы здѣсь примѣняемъ. Сдѣлаемъ теперь подстановку $y^2=z$ и вмѣстѣ съ тѣмъ замѣнимъ ось *y-овъ* черезъ ось z; тогда уравненіе $z=2px$ будетъ уравненіемъ прямой, проходящей черезъ начало; но мы должны для этого сдвинуть всѣ горизонтальныя палочки такъ, чтобы разстоянія между ними были не равны между собою, а возрастали бы пропорціонально квадрату перемѣнной y; иными словами, мы вводимъ для оси

z вмѣсто равномѣрной шкалы, параболическую. Такимъ образомъ, принципъ преобразованія шкалы приводитъ, подобно принципу анаморфозы, къ измѣненіямъ геометрическихъ образовъ, соотвѣтствующихъ данной функціи и, слѣдовательно, упрощаетъ примѣненіе номограммъ.



Черт. 9.

Заканчивая на этомъ бѣглое изложеніе принциповъ номографіи, я перехожу теперь ко второй части моего доклада—о значеніи номографіи для средней школы. Мнѣ кажется, что въ настоящее время нѣтъ уже необходимости доказывать пользу графическихъ методовъ съ педагогической точки зрѣнія. О полезности того или иного нагляднаго пособія можно, конечно, спорить, но если согласиться, что наглядность вообще необходима, то, очевидно, не можетъ уже быть сомнѣній относительно громадной пользы, которую можетъ принести введеніе графическаго метода въ преподаваніе элементарной математики. Рѣчь можетъ идти только о способѣ примѣненія графическихъ методовъ, а также и о предѣлахъ этого примѣненія. На первомъ вопросѣ я не буду останавливаться, не считая себя достаточно компетентнымъ рѣшать вопросъ о томъ, какое количество графическихъ работъ можетъ быть выполнено самими учениками и какіе графики должны быть только показаны преподавателемъ, съ котораго класса начинать эти работы, въ какомъ порядкѣ ихъ производить и т. д. Все это я принужденъ оставить въ сторонѣ и обращаюсь къ вопросу о томъ, для чего могутъ служить графики и что ими можно иллюстрировать. Въ новѣйшихъ курсахъ алгебры графическій методъ обычно вводится при изложеніи уравненій и служитъ преимущественно для изслѣдованія уравненій. Иногда графики примѣняютъ также къ рѣшенію системъ уравненій, а также къ рѣшенію уравненій высшихъ степеней. Мнѣ кажется, что если графики, какъ это очевидно имѣетъ мѣсто, являются средствомъ нагляднаго изображенія функцій, то очевидно примѣненіе ихъ должно имѣть главной цѣлью развитіе у учащихся функціональнаго мышленія путемъ изслѣдованія функціональной зависимости между перемѣнными величинами. Съ этой точки зрѣнія можетъ быть нѣтъ необходимости слишкомъ много останавливаться на графическихъ методахъ рѣшенія уравненій, а слѣдовало бы обратить больше вниманіе на графическое изображеніе и изслѣдованіе всякаго рода простыхъ функцій, какъ алгебраическихъ — цѣлыхъ, дробныхъ и ирраціональныхъ, такъ и трансцедентныхъ—показательной, лигариѳмической и тригонометрическихъ.

Обычно примѣняемые графики, однако же, даютъ только изображеніе функціи отъ одной независимой перемѣнной въ Декартовыхъ координатахъ. Между тѣмъ, во всѣ алгебраическія дѣйствія, начиная съ простого сложенія и кончая извлеченіемъ корня, входятъ непремѣнно, по крайней мѣрѣ, три величины, и слѣдовательно, всѣ эти дѣйствія съ обычно примѣняемыми графиками не могутъ быть иллюстрированы полностью. Мнѣ кажется, что было бы чрезвычайно полезно примѣнить въ такихъ случаяхъ простѣйшія номограммы.

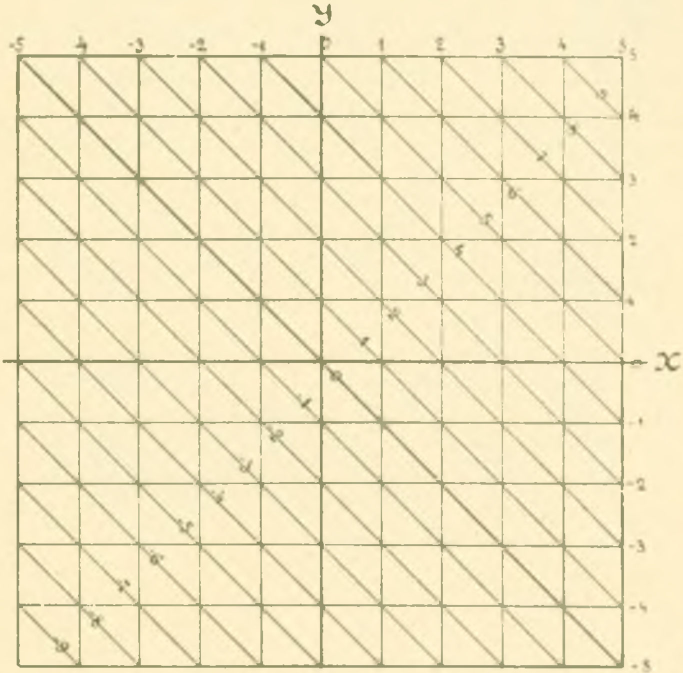
Я приведу здѣсь нѣсколько такихъ простыхъ примѣровъ.

На черт. 10 изображена номограмма сложенія или вычитанія въ системѣ помѣченныхъ линій

$$z=x+y.$$

Вертикальныя прямыя суть линіи x, горизонтальныя—линіи y.

Задавая для z рядъ послѣдовательныхъ частныхъ значеній, мы получаемъ въ прямоугольныхъ координатахъ рядъ прямыхъ z съ угловымъ коэффиціентомъ, равнымъ—1. На этой номограммѣ чрезвычайно ясно можетъ быть показано измѣненіе суммы при измѣненіи слагаемыхъ и измѣненіе разности при измѣненіи уменьшаемаго и вычитаемаго. Для этого нужно только давъ одной изъ величинъ x, y, z частное значеніе, слѣдить за измѣненіемъ двухъ другихъ при передвиженіи вдоль одной изъ помѣченныхъ линій. Мы видимъ, напр., что для того, чтобы z, т. е. сумма, оставалась неизмѣнной,—необходимо, чтобы x возрасталъ на столько, на сколько убываетъ y; если мы возьмемъ x постояннымъ и примемъ его за разность $x=z-y$, то увидимъ, что z и y одинаково возрастаютъ и убываютъ.



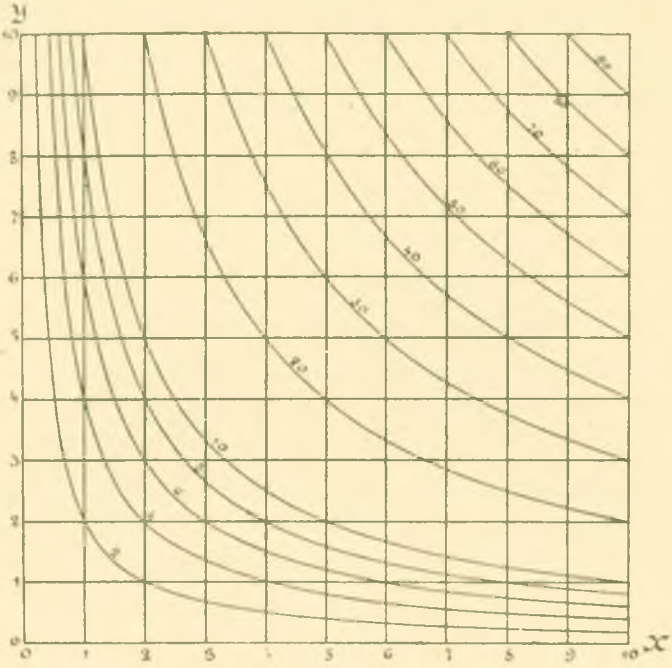
Черт. 10.

На черт. 11 мы имѣемъ извѣстную номограмму Пуше или графическую таблицу умноженія, соотвѣтствующую функціи:

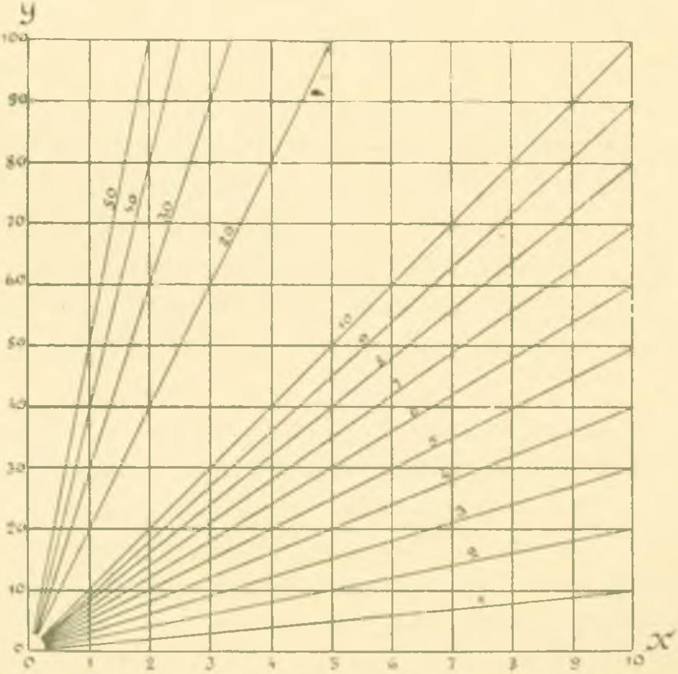
$$z=xy.$$

Очевидно, что, задавая z рядъ частныхъ значеній, мы получимъ въ Декартовыхъ координатахъ систему равнобокихъ гиперболъ, на которыхъ можетъ быть также изслѣдовано измѣненіе произведенія и частнаго. Нѣсколько менѣе наглядно та же номограмма можетъ быть представлена въ иномъ видѣ, болѣе удобномъ съ точки зрѣнія чертежа (черт. 12). Изъ функціи

$$z=\frac{y}{x}$$



Черт. 11.



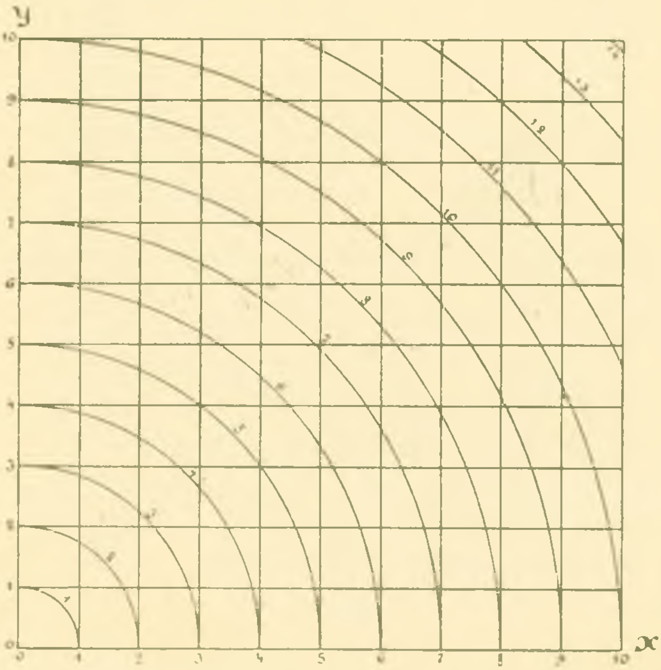
Черт. 12.

слѣдуетъ, что, задавая z рядъ частныхъ значеній, мы получимъ прямыя, проходящія черезъ начало съ угловымъ коэффиціентомъ, равнымъ z. Для болѣе удобнаго изображенія этой номограммы мы беремъ для y масштабъ въ десять разъ болѣе мелкій, чѣмъ для x, сохраняя, однако, равномѣрность обѣихъ шкалъ. Мы получаемъ номограмму дѣленія, хотя она, конечно, можетъ служить и для изображенія умноженія.

Весьма простой видъ имѣетъ номограмма, служащая для изображенія функціи

$$z^2 = x^2 + y^2$$

и могущая иллюстрировать теорему Пиѳагора (черт. 13). Очевидно, что, взявъ x и y какъ Декартовы координаты точки и



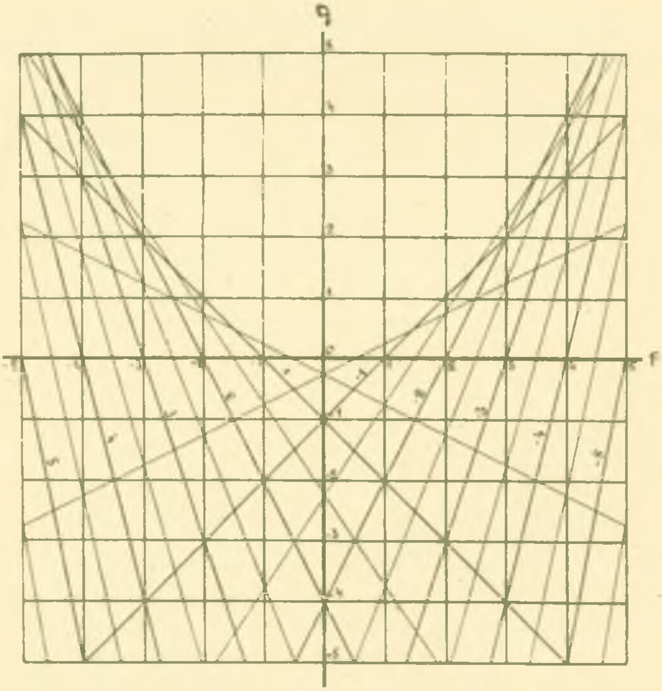
Черт. 13.

задавая для z частныя значенія, мы получимъ рядъ концентрическихъ окружностей, и получаемъ готовую таблицу для нахожденія по двумъ сторонамъ пряумогольнаго треугольника третьей. Такъ, напр., мы видимъ, что цѣлыя числа получаются для треугольниковъ со сторонами 3, 4 и 5 и 6, 8 и 10, почти точно цѣлыя получаются для 7, 7 и 10; для 4, 8 и 9; для 8, 9 и 12 и т. д. На этой номограммѣ нетрудно прослѣдить, напр., при какомъ условіи сумма катетовъ будетъ наибольшей при данной гипотенузѣ, какъ должны измѣняться гипотенуза и одинъ изъ катетовъ, чтобы другой катетъ оставался неизмѣннымъ и т. д.

Нѣсколько болѣе сложной, но чрезвычайно интересной на мой взглядъ, является номограмма квадратнаго уравненія

$$z^2+pz+q=o,$$

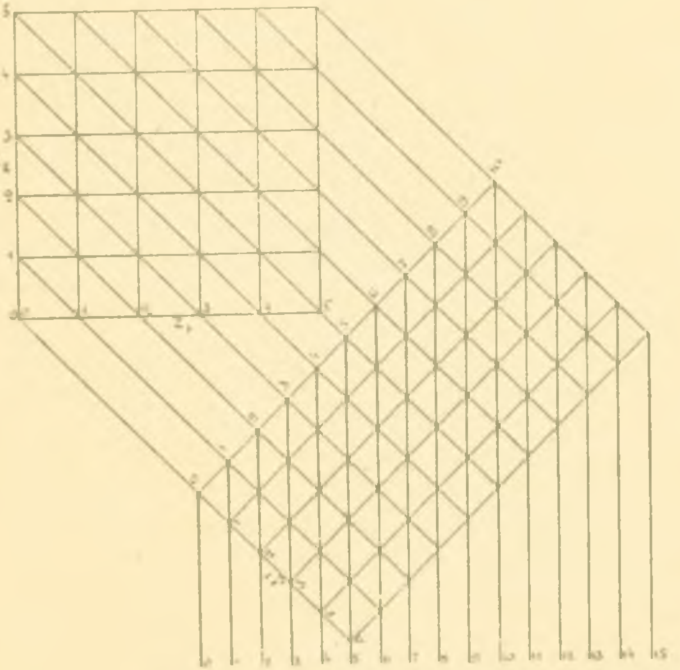
гдѣ всѣ три величины z, p, q—суть перемѣнныя (черт. 14). Если взять для p и q Декартовы координаты и задавать 2



Черт. 14.

ряда частныхъ значеній, то мы получимъ систему помѣченныхъ прямыхъ линій. Номограмма эта даетъ намъ готовую таблицу корней квадратнаго уравненія при произвольныхъ коэффиціентахъ p и q, что̀ довольно любопытно. Но особенно интересна возможность наглядно обозрѣть зависимость между корнями уравненія и его коэффиціентами. Мы видимъ, напр., что на плоскости получается область, ограниченная параболой, черезъ которую не проходитъ ни одна изъ прямыхъ системы z. Это—область мнимыхъ рѣшеній. Вблизи границы области мнимыхъ рѣшеній мы видимъ, сравнительно, болѣе густую сѣть прямыхъ z, которая становится все рѣже съ удаленіемъ отъ этой границы. Такимъ образомъ, можно даже показать зависимость между скоростью возрастанія корней и измѣненіемъ коэффиціентовъ въ различныхъ областяхъ.

Я выбралъ только нѣсколько простыхъ частныхъ примѣровъ, пригодныхъ для иллюстраціи элементарной алгебры. Болѣе сложныя номограммы для функцій отъ многихъ перемѣнныхъ врядъ ли могутъ имѣть большое примѣненіе. Для примѣра покажу только два чертежа номограммъ функціональной зависимости между четырьмя перемѣнными.



Черт. 15.

На черт. 15 имѣемъ номограмму сложенія для трехъ слагаемыхъ, а именно:

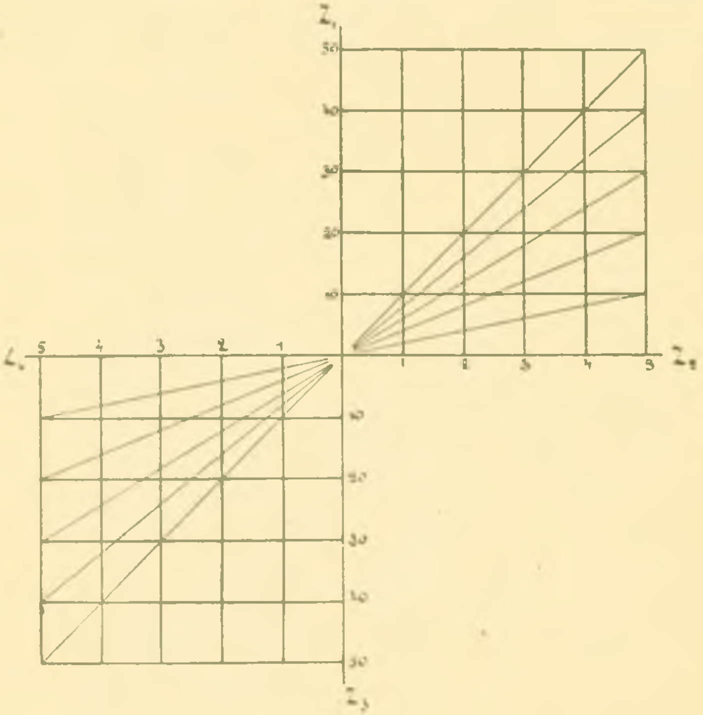
$$z_2 = z_1 + z_2 + z_3.$$

Способъ ея составленія очень простъ. Составляемъ сначала номограмму $t = z_1 + z_2$ и, считаетъ t нѣмой шкалой, помощью которой переходимъ въ новую номограмму $z_4 = t + z_3$; можно было бы идти дальше и, взявъ z_4 въ качествѣ новой нѣмой шкалы, находить сумму четырехъ слагаемыхъ и т. д.

Въ качествѣ второго примѣра приведу номограмму геометрической пропорціи

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_3}{z_4},$$

которая есть не что иное, какъ соединеніе двухъ номограммъ дѣленія, такъ что частное отъ дѣленія $\frac{z_1}{z_2}$ есть нѣмая шкала, переходящая во вторую номограмму также въ видѣ частнаго $\frac{z_3}{z_4}$; эта номограмма также не лишена интереса и можетъ пригодиться при изслѣдованіи свойствъ пропорціи (черт· 16).



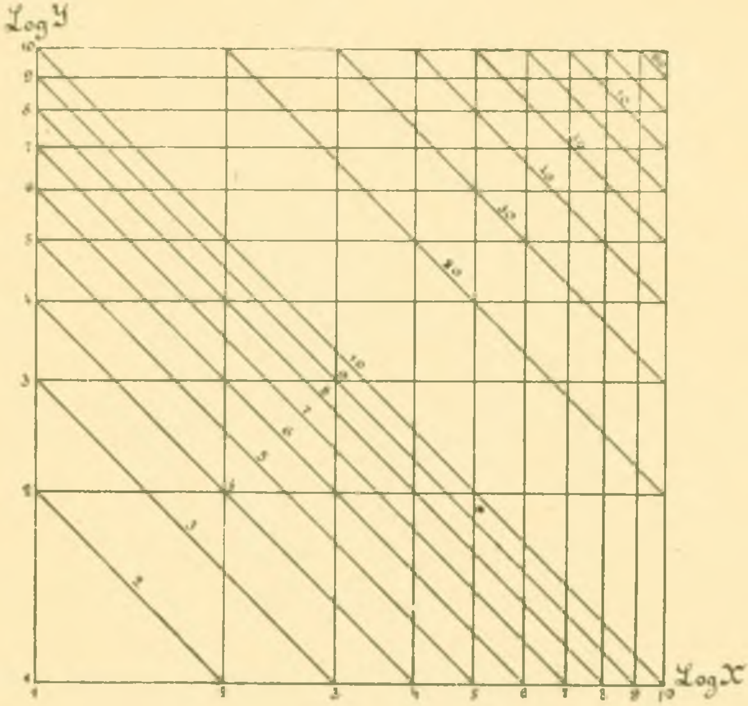
Черт. 16.

Номографическіе принципы анаморфозы и преобразованія могутъ быть примѣнены въ качествѣ иллюстрацій смысла функціональныхъ преобразованій и вычисленій помощью метода подстановки. Такъ, напр., вычисленія при помощи логариѳмовъ могутъ быть красиво иллюстрируемы помощью преобразованія номограммы Пуше (черт. 17). Дѣйствительно, изъ уравненія

$$z=xy$$

слѣдуетъ: $lg\ z=lg\ x+lg\ y,$

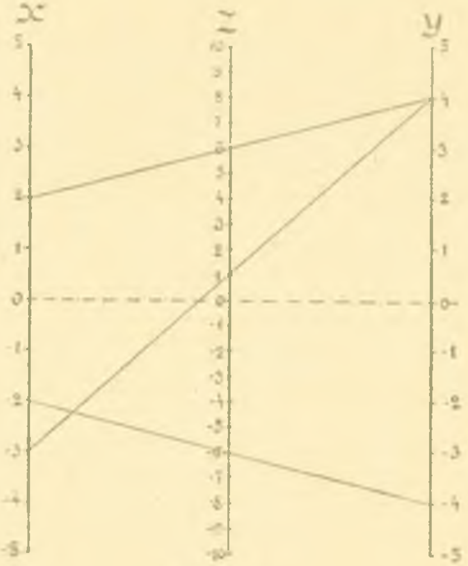
и если мы введемъ при построеніи номограммы вмѣсто равномѣрной шкалы логариѳмическую, то мы получимъ изъ номограммы умноженія номограмму сложенія, а равнобокія гиперболы таблицы Пуше (см. черт. 11), какъ бы выпрямятся и станутъ прямыми. Весьма характерно совпаденіе упрощенія аналитической формы функціи и ея графическаго изображенія, которое при этомъ получается.



Черт. 17.

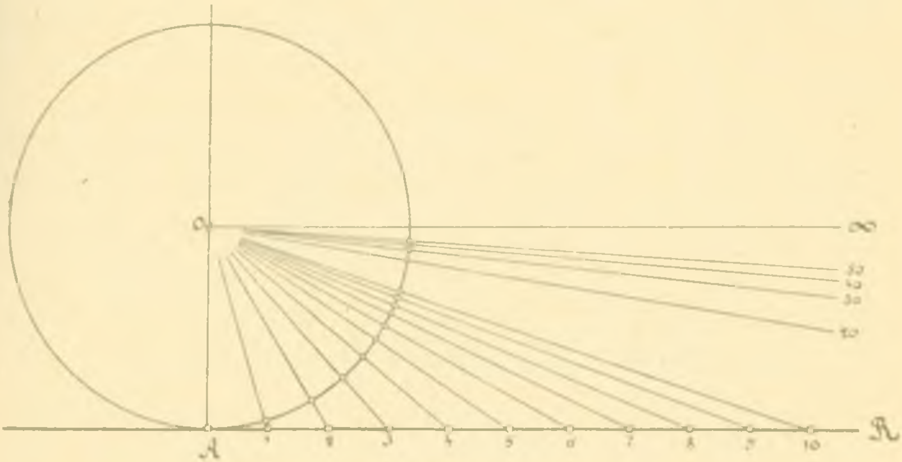
Выше я показывалъ модель, служащую для иллюстраціи преобразованія номограммы при введеніи параболической шкалы. Очевидно, что когда въ алгебрѣ рѣшаютъ биквадратное уравненіе и дѣлаютъ подстановку $x^2 = y$, то это соотвѣтствуетъ именно такому упрощенію номограммы помощью введенія параболической шкалы.

Система помѣченныхъ точекъ, какъ уже было выше указано, даетъ номограммы менѣе наглядныя, а потому, очевидно, представляютъ меньше интереса съ педагогической точки зрѣнія. Лишь для выясненія понятія числа, особенно при изученіи ирраціональныхъ чиселъ, полезно, воспользоваться изображеніемъ комплекса чиселъ въ видѣ точекъ, расположенныхъ вдоль прямой. Такъ, напримѣръ, номограмма сложенія и вычитанія въ системѣ выравненныхъ точекъ можетъ помочь выясненію дѣйствій надъ отрицательными числами. На черт. 18 мы имѣемъ три параллельныя прямыя, причемъ точки средней прямой соотвѣтствуютъ суммѣ значеній точекъ крайнихъ, лежащихъ на одной прямой. Обратно значенія точекъ одной изъ крайнихъ соотвѣтствуетъ разности значеній средней и другой крайней. Если теперь расположить точки такъ, чтобы значенія вверхъ шли со знакомъ плюсъ, а внизъ—со знакомъ минусъ, то мы сможемъ продемонстрировать всѣ возможные случаи сложенія и вычитанія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ. На нашей номограммѣ показано сложеніе 1) $2+4=6$; 2) $(-2)+(-4)=-6$; 3) $-3+4=1$, обратно имѣемъ изъ (1) $6-4=2$ изъ (2) $-6-(-4)=-2$ и изъ (3) $1-4=-3$.



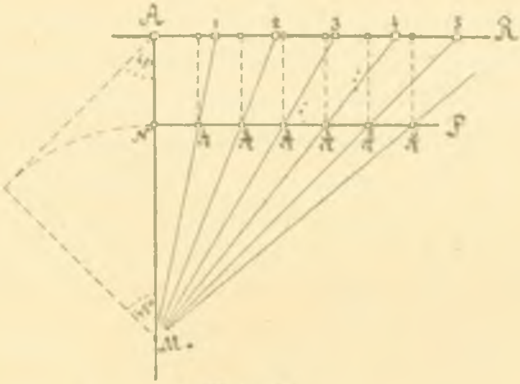
Черт. 18.

На черт. 19 показано простое отображеніе точекъ прямой на окружность помощью центральной проэкціи. Понятіе безконечности, какъ безконечнаго числа точекъ расположенныхъ наконечномъ участкѣ дуги окружности хорошо иллюстрируется помощью этого чертежа, который есть не что иное, какъ номограмма функціи $z=arc\ tgx$. Интересно на той же прямой нанести еще рядъ точекъ, соотвѣтствующихъ ирраціональнымъ значеніямъ. Это можно сдѣлать слѣдующимъ простымъ способомъ (черт. 20). Отложивъ разстояніе $a = AM$ перпендикулярно къ данной прямой, строимъ на отрѣзкѣ AM разстояніе $AN = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и приводимъ прямую NP параллельно AR, тогда, если мы построимъ на прямой AR рядъ раціональныхъ точекъ 1, 2, 3 и т. д. и соединимъ эти точки съ точкой M



Черт. 19.

мы получимъ на прямой NP рядъ ирраціональныхъ точекъ. Опуская обратно изъ этихъ точекъ перпендикуляры на прямую AR, мы можемъ получить на ней также ирраціональныя точки. Если теперь всѣ эти раціональныя точки, какъ и ирраціональныя, число которыхъ, очевидно, безконечно-велико,



Черт. 20.

проэктировать на дугу окружности, какъ это было показано на предыдущемъ чертежѣ, то мы сможемъ показать, какъ на конечномъ отрѣзкѣ дуги умѣстится безконечное число раціональныхъ и ирраціональныхъ точекъ, причемъ всегда двѣ раціональныя будутъ отдѣлены по крайней мѣрѣ одной ирраціональной, какъ бы близко онѣ между собой ни были.

Наконецъ, упомяну о всѣмъ извѣстной логариѳмической линейкѣ, пользованіе которой пріобрѣтаетъ все большее и большее распространеніе и которая представляетъ собою не что иное, какъ подвижную номограмму въ системѣ помѣченныхъ точекъ.

Заканчивая на этомъ свой докладъ, я считаю необходимымъ сдѣлать двѣ оговорки изъ боязни быть недостаточно вѣрно понятнымъ. Прежде всего очевидно, что тѣ примѣры номограммъ, которые были мной показаны и которые на мой взглядъ можно было бы съ пользою демонстрировать при прохожденіи среднешкольнаго курса математики, далеко не представляютъ именно того матеріала, которымъ единственно преподаватель могъ бы воспользоваться. Я выхватилъ рядъ примѣровъ болѣе яркихъ, чтобы здѣсь продемонстрировать самую идею примѣненія номографіи, но отнюдь не претендую на достаточную разработку методики интереснаго и сложнаго вопроса о примѣненіи графикъ.

Далѣе, что мнѣ кажется особенно важнымъ, я хочу подчеркнуть, что ни въ коемъ случаѣ не считаю нужнымъ или полезнымъ вводить въ среднюю школу преподаваніе элементовъ номографіи. Я хочу только обратить вниманіе преподавателей на ту пользу, которую они могли бы извлечь изъ знакомства съ номографіей. Мнѣ кажется, что использовать графическіе методы достаточно планомѣрно можно только при условіи глубокаго проникновеніи въ общую теорію этихъ методовъ, каковой и является номографія.

Къ сожалѣнію, на русскомъ языкѣ литература по номографіи крайне бѣдна, и мнѣ знакомы только брошюры: Н. Герсевановъ—«Основанія номографическаго исчисленія» [1]), 2 выпуска, изъ которыхъ только первый касается вопросовъ низшаго

---

[1] Спб. 1906—1908 г. Изд. Института Инженеровъ Путей Сообщенія.

анализа, но притомъ преимущественно приложенія номографіи къ инженерному дѣлу, и А. А. Волковъ—«Математичическія основанія номографіи»—прекрасная, но, къ сожалѣнію, очень краткая брошюра [1]). Поэтому желающіе подробнѣе ознакомиться съ основами номографіи должны прибѣгнуть къ первоисточнику, а именно къ трудамъ M. d'Ocagne'я, изъ которыхъ основнымъ является его большой курсъ—Traité de Nomographie [2]); значительно болѣе популярнымъ, но все же весьма полнымъ является его трудъ Calcul Graphique et Nomographie [3]).

Будемъ надѣяться, что теперь, когда интересъ къ номографіи начинаетъ видимо возрастать, когда не только становится все болѣе и болѣе ясной ея практическая примѣнимость и польза, но и теоретики начинаютъ относиться къ ней съ нѣкоторымъ вниманіемъ, ею заинтересуются также и педагоги, причемъ появится соотвѣтственная литература. Можетъ быть, я нѣсколько увлекаюсь, но мнѣ представляется несомнѣннымъ, что отъ этого дѣло преподаванія математики должно только выиграть».

Тезисы.

А. Предметъ номографіи.

1. Номографія есть ученіе о методахъ графическаго изображенія на плоскости функціональной зависимости между произвольнымъ числомъ перемѣнныхъ величинъ и составленія, такимъ образомъ, графическихъ таблицъ функцій.

2. По методу изображенія функцій номографія распадается на два отдѣла, а именно:

а) *Изображеніе помощью системы помѣченныхъ линій.* Каждой перемѣнной величинѣ соотвѣтствуетъ система кривыхъ линій, расположенныхъ на плоскости и образующихъ поле; частному значенію перемѣнной соотвѣтствуетъ одна опредѣленная линія. Одновременной подстановкѣ въ функцію опредѣленныхъ значеній двухъ перемѣнныхъ отвѣчаетъ точка пересѣченія

---

[1]) Москва 1911 г. Оттискъ изъ Извѣстій Московскаго Инженернаго Училища за 1911 годъ.

[2]) Paris 1899. Gautier-Villars.

[3]) Paris 1908. Encyclopédie scientifique.

двухъ линій, принадлежащихъ къ разнымъ системамъ и соотвѣтствующихъ даннымъ значеніямъ данныхъ перемѣнныхъ.

в) *Изображеніе помощью системы помѣченныхъ точекъ* (шкалъ). Каждой перемѣнной величинѣ соотвѣтствуетъ на плоскости опредѣленная линія. Каждому частному значенію перемѣнной соотвѣтствуетъ опредѣленная точка на линіи. Одновременной подстановкѣ въ функцію значеній двухъ перемѣнныхъ отвѣчаетъ взаимное отображеніе соотвѣтственныхъ точекъ, принадлежащихъ разнымъ линіямъ.

3. Для возможности построенія номограммъ и для упрощенія ихъ необходимо предварительное преобразованіе функцій, что достигается помощью метода номографической анаморфозы и метода трансформаціи шкалъ.

а) Принципъ анаморфозы заключается въ переходѣ отъ одной системы координатъ къ новой, благодаря чему измѣняется видъ функціи и удается произвести расчлененіе ея, необходимое для номографическаго изображенія. Вмѣстѣ съ тѣмъ происходитъ замѣна однихъ системъ линій и точекъ новыми.

в) Принципъ трансформаціи шкалъ заключается въ преобразованіи функціи помощью замѣны перемѣнныхъ, такъ что шкала измѣренія, соотвѣтствовавшая первоначально одной какой-нибудь функціи превращается въ новую шкалу, соотвѣтствующую новой функціи. Благодаря трансформаціи шкалы измѣняется форма линій и расположеніе точекъ въ номограммѣ, что̀ ведетъ часто къ значительному упрощенію ея.

4. Практическое примѣненіе номографіи къ техническимъ задачамъ чрезвычайно разнообразно и плодотворно, такъ какъ, давая вполнѣ достаточную для большинства практическихъ цѣлей точность, номографическія таблицы оказываются значительно проще, какъ при составленіи ихъ, такъ и при пользованіи ими, по сравненію съ таблицами числовыми.

В. Значеніе номографіи для средней школы.

1. Съ точки зрѣнія значенія номографіи для средней школы на первомъ планѣ стоитъ общеобразовательный элементъ номографическихъ методовъ и на второмъ—практическое примѣненіе ихъ.

2. Система помѣченныхъ линій представляетъ съ педагогической точки зрѣнія особенно большой интересъ, какъ методъ нагляднаго изображенія функціональнаго мышленія.

3. Графическое изображеніе функцій отъ одной независимой перемѣнной, и въ особенности графическое изображеніе уравненій первой и второй степени введено въ большинство новѣйшихъ учебниковъ алгебры.

4. Чрезвычайно желательнымъ является развитіе методовъ графической иллюстраціи и притомъ въ особенности графическое изображеніе функціональной зависимости между тремя перемѣнными величинами. Истолкованіе смысла алгебраическихъ дѣйствій, въ которыя входитъ всегда не менѣе трехъ перемѣнныхъ величинъ, сравнительно просто и вмѣстѣ съ тѣмъ ярко можетъ быть выполнено помощью номограммъ системы помѣченныхъ линій.

5. Изображеніе функціональной зависимости между четырьмя и болѣе перемѣнными можетъ въ средней школѣ имѣть сравнительно небольшое примѣненіе лишь въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ.

6. Система помѣченныхъ точекъ, не обладая большой наглядностью для иллюстраціи хода измѣненія функцій, имѣетъ съ педагогической точки зрѣнія интересъ въ качествѣ иллюстраціи различнаго рода совокупностей, элементами которыхъ являются сами помѣченныя точки. Методъ этотъ можетъ оказаться чрезвычайно полезнымъ для иллюстраціи вопросовъ ариѳметическихъ на высшей ступени, въ особенности при анализѣ и обобщеніи понятія числа.

7. Методъ номографической анаморфозы въ связи съ методомъ трансформаціи шкалы представляетъ прекрасный способъ наглядной иллюстраціи смысла функціональныхъ преобразованій въ алгебрѣ, каковыми являются способы замѣны перемѣнныхъ въ уравненіяхъ, исчисленія помощью логариѳмовъ, тригонометрическіе методы рѣшенія уравненій и т. д.

8. Область практическаго примѣненія номографіи въ средней школѣ сравнительно невелика, такъ какъ вопросы изъ курса физики средней школы обычно не столь сложны, чтобы требовали составленія номограммъ, тѣмъ болѣе, что въ средней школѣ рѣдко приходится многократно вычислять значенія

одной и той же функціи. Упражненія въ составленіи и пользованіи номограммами на примѣрахъ простыхъ формулъ изъ физики и геометріи являются тѣмъ не менѣе желательными, и при томъ не только для развитія функціональнаго мышленія, но отчасти идя на встрѣчу требованіямъ практической жизни.

9. Принимая во вниманіе несомнѣнную пользу графическихъ методовъ при преподаваніи математики въ средней школѣ и необходимость пользованія этими методами не случайно, а по строго выработанной системѣ, желательно, чтобы преподаватели математики ознакомились сами съ основами номографіи, которая представляетъ собою теорію и систематизацію графическихъ методовъ.

XXVII. Примѣненіе графическаго метода въ средне-школьномъ курсѣ математики.

Докладъ Н. А. Томилина (Спб).

„Моя задача—обрисовать передъ Вами значеніе графическаго метода въ средне-школьномъ курсѣ математики — въ высшей степени облегчается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ предшествующихъ докладахъ и рѣчахъ уже формулированы нѣкоторые недостатки практикующихся нынѣ методовъ преподаванія, и уже намѣчены нѣкоторыя возможныя измѣненія и улучшенія въ программахъ.

Цѣлый рядъ докладчиковъ и ораторовъ, выступавшихъ съ этой каѳедры, высказывались въ томъ смыслѣ, что обученіе должно опираться на интересъ и активность учащихся, что необходимо догматическій методъ обученія замѣнить методомъ эвристическимъ, индивидуальнымъ и лабораторнымъ, что необходимо ввести пропедевтическій курсъ геометріи, уничтожить отдѣльные «департаменты» алгебры, геометріи и тригонометріи, и вмѣсто освященнаго традиціей мозаичнаго курса математики, лишеннаго руководящей идеи, создать новый курсъ, болѣе гармоничный, видную роль въ которомъ должна играть идея функціональной зависимости. Я поставилъ себѣ задачей показать на рядѣ иллюстрацій, какое примѣненіе въ этомъ новомъ курсѣ можетъ найти графическій методъ, и выяснить, какъ и въ какой постепенности графики могутъ быть введены въ курсъ математики.

Главная педагогическая цѣнность графическаго метода заключается въ томъ, что графики являются превосходнымъ средствомъ для изображенія взаимной зависимости двухъ перемѣнныхъ величинъ. Если принять во вниманіе, что изученіе такихъ зависимостей составляетъ главную задачу такъ называемаго точнаго знанія, что большинство физическихъ величинъ относится къ разряду перемѣнныхъ и что математическія формулы, посредствомъ которыхъ можно выразить тѣ же зависимости, вслѣдствіе символики математическаго языка несравненно менѣе наглядны и доступны для учащихся, то съ трудомъ можно подыскать объясненіе, почему графики до сихъ поръ были изгнаны изъ курса математики и къ нимъ лишь изрѣдка прибѣгали на урокахъ физики.

При первоначальномъ ознакомленіи учащихся съ идеей графическаго изображенія необходимо постоянно имѣть въ виду два педагогическихъ принципа—принципъ раздѣленія трудностей и принципъ интереса. Начать можно съ простѣйшихъ рудиментарныхъ графиковъ или діаграммъ, какіе мы привыкли встрѣчать на выставкахъ или въ календаряхъ. Къ вычерчиванію такихъ діаграммъ (иногда въ разныхъ краскахъ) можно прибѣгать и на другихъ урокахъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда надо закрѣпить въ памяти учащихся важныя численныя соотношенія. Образчиками такихъ діаграммъ могутъ служить, напримѣръ, рекорды высотъ, достигнутыхъ авіаторами или рекорды пройденныхъ ими разстояній. Въ данномъ случаѣ нѣтъ даже символики, такъ какъ разстоянія изображаются въ видѣ пропорціонально уменьшенныхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ. Нѣтъ также символизма при изображеніи поверхностей разныхъ странъ въ видѣ площадей прямоугольниковъ съ одинаковыми основаніями, но сравненіе этихъ поверхностей становится болѣе удобнымъ, ибо онѣ пропорціональны высотамъ построенныхъ прямоугольниковъ. Затѣмъ можно перейти къ изображенію разныхъ другихъ величинъ (число учащихся въ разныхъ классахъ, число уроковъ въ недѣлю по разнымъ предметамъ и т. д.) въ видѣ прямолинейныхъ отрѣзковъ или прямоугольниковъ или секторовъ круга. Въ случаѣ, когда надо выразить племенной составъ населенія въ процентахъ, можно воспользоваться квадратомъ, раздѣленнымъ на сто квадратиковъ. Вычерчиваніе всѣхъ указанныхъ діаграммъ связано съ умѣлымъ выборомъ масштаба, съ умѣніемъ обращаться съ циркулемъ, линейкой и транспортиромъ, и даетъ поводъ объяснить учащимся пріемы сокращеннаго умноженія и дѣленія. Замѣчу еще, что для быстраго полученія діаграммъ можно воспользоваться простымъ приспособленіемъ, состоящимъ изъ ряда равноотстоящихъ другъ отъ друга безконечныхъ лентъ, пропущенныхъ сквозь верхніе и нижніе прорѣзы картона или доски: половина каждой ленты бѣлаго, а другая половина какого-нибудь иного цвѣта, такимъ образомъ, передвигая ленты можно быстро составить ту или иную діаграмму.

Прямолинейные отрѣзки представляютъ собой тѣ элементы, которыми приходится пользоваться при построеніи кривыхъ, а прямоугольники—тѣ элементы, на которые приходится разбивать площадь кривой, чтобы можно было ее вычислить.

Такимъ образомъ, отъ діаграммъ вполнѣ естественнымъ является переходъ къ условному графическому изображенію величинъ, измѣняющихся съ теченіемъ времени, и разныхъ эмпирическихъ и математическихъ функцій.

На первыхъ порахъ удобнѣе всего за независимую перемѣнную выбрать время, такъ какъ, во-первыхъ, всѣ величины измѣняются съ теченіемъ времени, а во-вторыхъ, мы сосредочиваемъ такимъ путемъ вниманіе учащихся, собственно говоря, на одной величинѣ, измѣняющейся съ теченіемъ времени. Разныя значенія перемѣнной величины, которыя она принимаетъ черезъ равные промежутки времени, должны откладываться въ видѣ отрѣзковъ, находящихся на одинаковыхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. Масштабъ долженъ быть выбранъ такъ, чтобы получившаяся кривая занимала видное мѣсто, а не очутилась гдѣ-нибудь въ уголкѣ.

Зависимость разныхъ величинъ отъ времени отличается чисто внѣшнимъ, формальнымъ характеромъ, но изобразивъ на одномъ и томъ же графикѣ нѣсколько такихъ кривыхъ можно открыть иногда причинную связь между этими величинами, такъ, напр., можно замѣтить, что зимой пониженіе температуры сопровождается почти всегда повышеніемъ барометрическаго давленія. На эмпирическихъ графикахъ и статистическихъ кривыхъ можно также объяснить учащимся пріемы графическаго интерполированія и экстраполированія.

Затѣмъ можно перейти къ формулировкѣ и графическому изображенію закона прямой пропорціональности, напримѣръ, къ графическимъ таблицамъ для перевода однѣхъ мѣръ въ другія, килограммовъ въ фунты, градусовъ Цельзія въ градусы Реомюра, марокъ—въ рубли, скоростей, выраженныхъ въ метрахъ—въ секунду, въ скорости, выраженныя въ километрахъ—въ часъ (см. рис. 1) и т. д.

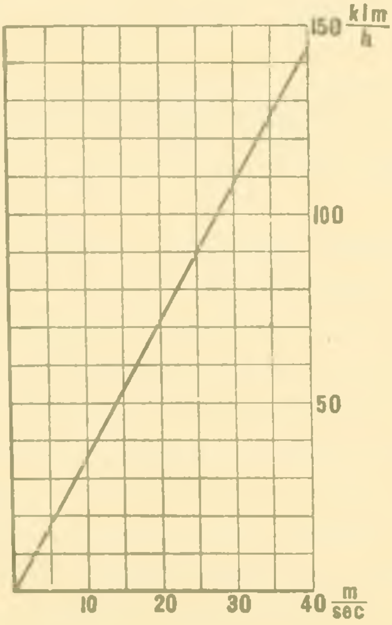


Рис. 1.

Учащіеся сначала составляютъ таблицу чиселъ, затѣмъ наносятъ рядъ точекъ, убѣждаются, что всѣ эти точки лежатъ на одной прямой и наконецъ составляютъ соотвѣтственную алгебраическую формулу. Необходимо разъяснить имъ, что формула: $y = kx$ охватываетъ собой безчисленное множество связанныхъ между собой закономъ прямой пропорціональности перемѣнныхъ величинъ и даетъ возможность (также какъ и графическая таблица) вычислить частное значеніе одной величины (фунтовъ), когда извѣстно частное значеніе другой (килограммовъ).

Можно также показать, что любыя двѣ пары сопряженныхъ значеній икса и игрека связаны геометрической пропорціей. Въ этомъ можно убѣдиться непосредственной подстановкой въ формулу численныхъ значеній или изъ чертежа, гдѣ эти значенія представлены въ видѣ соотвѣтственныхъ сторонъ двухъ подобныхъ треугольниковъ.

Для выясненія смысла коэффиціента пропорціональности можно воспользоваться равномѣрнымъ движеніемъ, предложивъ учащимся изобразить законъ движенія двухъ автомобилей, изъ которыхъ первый пробѣгаетъ въ 1 минуту одинъ километръ, а второй—два километра. Соотвѣтственныя формулы будутъ: $l = t$ и $l = 2t$.

Въ данныхъ примѣрахъ коэффиціентъ пропорціональности представляетъ собой скорость движенія; графически онъ изображается тангенсомъ угла, образованнаго прямой съ горизонтальной осью.

Можно предложить учащимся составить графическую таблицу тангенсовъ для угловъ въ 5, 10, 15 и т. д. градусовъ, а именно провести изъ точки O на координатной бумагѣ прямую OB, длиной въ 10 см., возставить въ точкѣ B перпендикуляръ, отложить въ точкѣ O транспортиромъ вышеозначенные углы и продолжить стороны этихъ угловъ до пересѣченія съ перпендикуляромъ. Данными, полученными отдѣльными учениками, можно воспользоваться, чтобы объяснить классу, какъ выводится среднее значеніе. Таблица тангенсовъ даетъ возможность затѣмъ рѣшать нѣкоторыя задачи тригонометрическаго характера.

Много интереснаго матеріала для упражненія даютъ желѣзно-дорожные графики съ курьерскими, пассажирскими и товарными поѣздами, остановками на станціяхъ, разъѣздами и т. д. Такой графикъ даетъ, напримѣръ, возможность весьма быстро рѣшить вопросъ, съ какой скоростью слѣдуетъ пустить экстренный встрѣчный поѣздъ (при однорельсовомъ пути съ разъѣздами), чтобы онъ безпрепятственно достигъ своего назначенія, не столкнувшись ни съ какимъ другимъ поѣздомъ.

Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію уравненій, гдѣ буквы x и y служатъ символами отвлеченныхъ чиселъ, необходимо рѣшить нѣсколько примѣровъ, гдѣ эти буквы выражаютъ конкретныя величины. Образчикомъ можетъ, напр., служить такая задача *) (см. черт. 2).

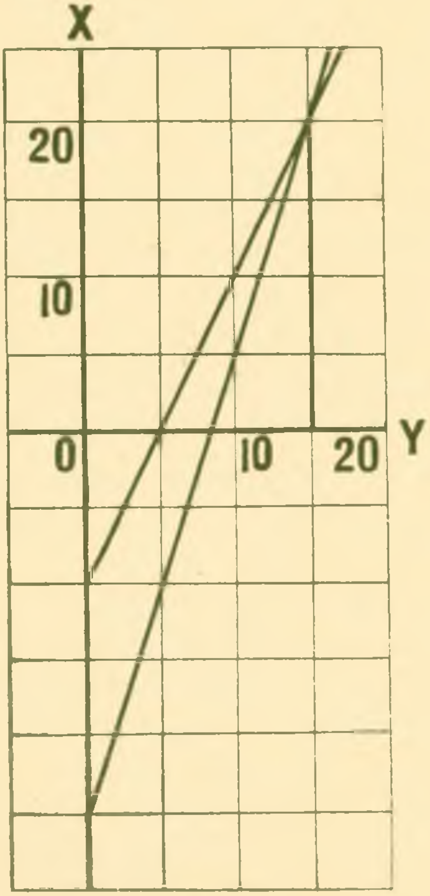


Рис. 2.

Каждый рабочій даетъ фабрикѣ доходъ въ 2 руб., а постоянныя издержки производства составляютъ 10 р. На другой фабрикѣ каждый рабочій приноситъ доходъ въ 3 р., а постоянныя издержки составляютъ 25 р. Изобразить графически доходъ каждой фабрики, въ зависимости отъ числа рабочихъ. При какомъ числѣ рабочихъ обѣ фабрики будутъ да-

---

*) Заимствована изъ книги: Joung, The teaching of Mathematics.

вать одинаковый доходъ? Какъ великъ этотъ доходъ? Вывести формулы.

Послѣ ряда такихъ упражненій графическое рѣшеніе системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными не представитъ никакихъ затрудненій для учащихся. Они будутъ давать себѣ ясный отчетъ въ томъ, что координаты *каждой* точки на первой прямой удовлетворяютъ первому уравненію, а координаты *каждой* точки на второй прямой—второму уравненію, и что точка пересѣченія обѣихъ прямыхъ удовлетворяетъ обоимъ уравненіямъ и, слѣдовательно, даетъ рѣшеніе вопроса. Значеніе параметровъ a и b въ уравненіи прямой $y = ax + b$ можно выяснить, заставивъ отдѣльныхъ учениковъ вычертить прямыя съ разными параметрами.

Необходимо, чтобы учащіеся умѣли въ простѣйшихъ случаяхъ представлять въ видѣ формулъ таблицы чиселъ и выводить формулы на основаніи графическаго изображенія.

Превосходными примѣрами для такого рода упражненій могутъ служить прямыя линіи и круги, занимающіе различное положеніе относительно осей координатъ.

Съ закономъ прямой пропорціональности и съ закономъ прямой линіи мы встрѣчаемся въ тѣхъ случаяхъ, когда измѣненія очень малы (законъ Гука, тепловое расширеніе тѣлъ), болѣе вѣрное представленіе о характерѣ измѣненія физическихъ величинъ даетъ параболическій законъ. Простымъ примѣромъ такого закона можетъ служить зависимость площади круга отъ величины радіуса. Учащіеся путемъ непосредственнаго счета квадратиковъ опредѣляютъ площади круговъ, соотвѣтствующія различнымъ радіусамъ, составляютъ таблицу. выводятъ формулу $S = 3{,}14R^2$ и изображаютъ найденную зависимость графически.

Въ данномъ случаѣ приходится площади изображать въ видѣ длинъ, но принципіально важно внѣдрить въ умы учащихся, что такимъ символическимъ образомъ можетъ быть представлена всякая величина, поддающаяся количественному учету. Построить параболу

$$y = ax^2$$

можно либо по точкамъ, либо исходя изъ соотношенія

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{1}{a}} \quad {}^{1)}$$

Важную роль въ курсѣ элементарной математики играетъ формула для площади параболы, такъ какъ, зная ее, легко вывести формулы для объема пирамиды, конуса и шара. На первыхъ порахъ формулу для площади параболы

$$S = \frac{1}{3} xy$$

можно вывести эмпирическимъ путемъ, посредствомъ взвѣшиванія или сосчитавъ число заключающихся въ ней квадратиковъ».

Для вычисленія объема пирамиды, мы проводимъ черезъ нее, начиная отъ вершины, рядъ равноотстоящихъ другъ отъ друга и параллельныхъ плоскости основанія сѣченій, причемъ убѣждаемся на основаніи элементарныхъ геометрическихъ соображеній, что площадь этихъ сѣченій растетъ по параболическому закону 2).

Очевидно, что площадь параболы, изображающей какъ мѣняется площадь сѣченія по мѣрѣ удаленія его отъ вершины, служитъ мѣрой объема пирамиды, т. е. число квадратныхъ сантиметровъ, заключающихся въ площади, равно числу кубическихъ сантиметровъ въ объемѣ пирамиды. На разъясненіе этого факта, въ виду его универсальнаго значенія и постояннаго приложенія къ вопросамъ техники, механики и физики не жаль потратить нѣсколько лишняго времени. Всякій разъ, когда намъ дано (въ прямоугольныхъ координатахъ) графическое изображеніе зависимости одной величины отъ другой и когда произведеніе этихъ двухъ величинъ имѣетъ конкретный смыслъ (произведеніе площади на длину равняется объему, произведеніе силы на перемѣщеніе равняется работѣ и т. д.), площадь кривой служитъ мѣрой производной физической величины.

---

1) См. Н. Томилинъ. Роль графическаго метода при обученіи математикѣ.

2) Для полученія этого результата можно пользоваться и нѣкоторыми недоказанными теоремами, съ тѣмъ, чтобы строгое доказательство было дано позже при прохожденіи классическаго курса геометріи.

Само собой разумѣется, что указанному выводу формулы для объема пирамиды необходимо предпослать графическій выводъ формулъ для объема параллелепипеда и призмы. Очень полезно также разсмотрѣть случай тѣла, построеннаго изъ нѣскольких, поставленныхъ другъ на друга параллелепипедовъ разнаго сѣченія.

Аналогичнымъ путемъ можно также вывести формулы для объема конуса и шара. Въ своей брошюрѣ (Роль граф. метода и т. д.) я показалъ, какъ исходя изъ графическаго изображенія перемѣннаго сѣченія шара и опираясь на тотъ фактъ, что двѣ половины шара равны между собой, можно, примѣнивъ формулу для суммы безконечно убывающей геометрической прогрессіи получить совершенно точное выраженіе для площади параболы.

Я не стану отрицать, что практикующіеся нынѣ пріемы для вычисленія объемовъ развиваютъ до извѣстной степени пространственное представленіе, но мнѣ кажется, что съ точки зрѣнія «экономіи мышленія» можно отдать предпочтеніе указанному мною универсальному пріему, тѣмъ болѣе, что «интуицію пространства» можно развить и другими способами, введя, напр., въ курсъ начала проэктивной геометріи.

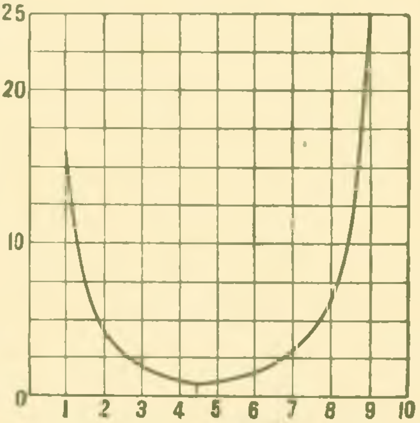


Рис. 3.

Законъ обратной пропорціональности изображается графически въ видѣ равнобочной гиперболы, отнесенной къ асимптотамъ (рис. 3). Такова зависимость между высотой и основаніемъ прямоугольника данной площади или между объемомъ и упругостью замкнутой массы газа при постоянной температурѣ (законъ Б. Маріотта).

Изъ чертежа видно, что скорость измѣненія ординаты постепенно уменьшается; значитъ одинаковымъ приращеніямъ давленія соотвѣтствуютъ все меньшія абсолютныя измѣненія объема, т. е. при повышеніи давленія газъ сжимается все хуже и хуже [1]).

Не трудно показать, что площадь гиперболы, считаемая отъ ординаты, соотвѣтствующей абсциссѣ $x = 1$, обладаетъ всѣми свойствами логарифма [2]). Чтобы графическимъ пріемомъ опредѣлить основаніе этой системы логариѳмовъ, мы можемъ воспользоваться тѣмъ, что логариѳмъ основанія всегда равенъ единицѣ.

Разсмотримъ случай, наиболѣе важный въ математикѣ и физикѣ, когда уравненіе гиперболы задано въ видѣ:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Въ данномъ случаѣ нѣтъ необходимости чертить новой кривой—мы можемъ воспользоваться прежнимъ рисункомъ, но мы должны считать, что ордината y нанесена въ масштабѣ въ 12 разъ болѣе крупномъ, чѣмъ абсцисса x. При такихъ условіяхъ, площадь равная единицѣ, будетъ, очевидно, заключать въ себѣ 12 квадратиковъ.

Искомое основаніе будетъ опредѣлено, если удастся найти такую абсциссу, чтобы соотвѣтствующая площадь гиперболы заключала въ себѣ 12 квадратиковъ. Непосредственно изъ чертежа видно, что искомая абсцисса больше двухъ и меньше трехъ. Точное ея значеніе, какъ извѣстно, равно

$$e = 2{,}71828\ldots$$

Такъ какъ произведеніе объема на давленіе даетъ работу, то площадь гиперболы служитъ мѣрой работы, произведенной газомъ при его безконечно медленномъ (изотермическомъ) расширеніи. Если зависимость между объемомъ газа и давленіемъ

---

[1]) Небольшія отступленія отъ закона обратной пропорціональности можно обнаружить, откладывая вдоль оси абсциссъ значенія x, а вдоль оси ординатъ значенія произведенія xy.

[2]) См. Н. Томилинъ. Курсъ физики. Т. I, стр. 101—103.

задана уравненіемъ

$$pV = C,$$

то, согласно сказанному выше, величина работы, произведенной газомъ при его расширеніи отъ объема V_1 до объема V_2 будетъ:

$$A = Clog\,V_2 - Clog\,V_1 = Clog\,\frac{V_2}{V_1}$$

Изъ другихъ кривыхъ большой интересъ съ физической точки зрѣнія представляетъ кривая

$$y = \frac{a}{x_2}$$

По такому закону убываютъ силы свѣта и звука съ измѣненіемъ разстоянія, такъ выражается законъ всемірнаго тяготѣнія, наконецъ тому же закону подчинены электрическія и магнитныя притяженія и отталкиванія.

Чтобы построить по точкамъ кривую

$$1)\ y = \frac{12}{x^2}$$

вычертимъ сначала гиперболу

$$2)\ y = \frac{12}{x}$$

Изъ сравненія этихъ формулъ мы находимъ, что ординаты точекъ обѣихъ кривыхъ, соотвѣтствующія одному и тому же значенію абсциссы x, относятся между собой, какъ

$$y : y_1 = x : 1$$

гдѣ y_1 означаетъ ординату первой кривой.

Отсюда вытекаетъ слѣдующій способъ построенія точекъ искомой кривой (рис. 4). Проводимъ на разстояніи единицы отъ точки O прямую AB, параллельную оси Y, затѣмъ проводимъ изъ точки O рядъ лучей черезъ 1-е, 2-е, 3-е и т. д. дѣленія прямой AB до пересѣченія съ гиперболой въ точкахъ C_1, C_2, C_3 и т. д. Соотвѣтственныя точки искомой кривой будутъ находиться на одной вертикали съ точками C_1, C_2, C_3... и на разстояніяхъ отъ оси X, равныхъ 1, 2, 3-мъ т. д. дѣленіямъ. Между гиперболой и новой кривой существуетъ еще одна связь, на которую полезно обратить вниманіе. Для выясненія этой связи обратимся къ слѣдующему рисунку 5, на которомъ опять изображены тѣ же кривыя. Непосредственнымъ измѣреніемъ мы можемъ убѣдиться, что число квадратиковъ, заключающееся въ заштрихованной площади, между $x = 0$ и $x = 3$ равно разности ординатъ верхней кривой, соотвѣтствующихъ абсциссамъ $x = 0$ и $x = 3$. Такимъ образомъ численное значеніе разности ординатъ верхней кривой служитъ мѣрой площади нижней кривой, и это справедливо для любого участка обѣихъ кривыхъ.

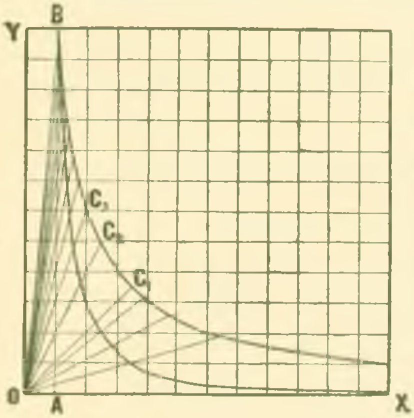


Рис. 4.

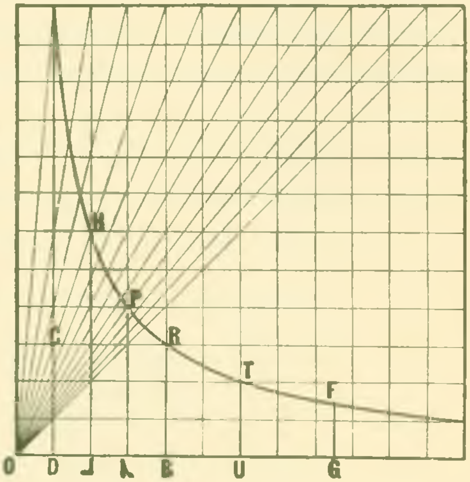


Рис. 5.

Слѣдующій чертежъ (6) представляетъ собой графическое рѣшеніе такого вопроса: гдѣ надо помѣстить экранъ между двумя лампочками въ 25 и 16 свѣчей, чтобы онъ былъ одинаково освѣщенъ съ обѣихъ сторонъ? Разстояніе между лампочками предположено равнымъ 10 метрамъ.

Искомая точка лежитъ на пересѣченіи двухъ гиперболъ

$$1)\ y = \frac{16}{x^2} \text{ и } 2)\ y = \frac{25}{x^2}.$$

Особаго вниманія заслуживаютъ тѣ случаи, когда функція проходитъ черезъ maximum или minimum. Положимъ, требуется вычислить стоимость путешествія на пароходѣ, дистанціей въ 160 верстъ, при разныхъ скоростяхъ отъ 10 до 50 верстъ въ часъ и положимъ, что постоянныя издержки (на команду и т. д.) составляютъ 16 рублей въ часъ, а расходъ на уголь, при скорости 40 верстъ въ часъ, составляетъ на каждую версту 1 рубль. Требуется опредѣлить наиболѣе экономичную скорость.

Прежде всего необходимо себѣ уяснить, по какому закону возрастаетъ расходъ угля на версту (A_1) съ увеличеніемъ скорости. Расходъ этотъ пропорціоналенъ работѣ двигателя, а послѣдняя измѣряется произведеніемъ силы (F) на перемѣщеніе, которое въ разсматриваемомъ случаѣ равно одной верстѣ.

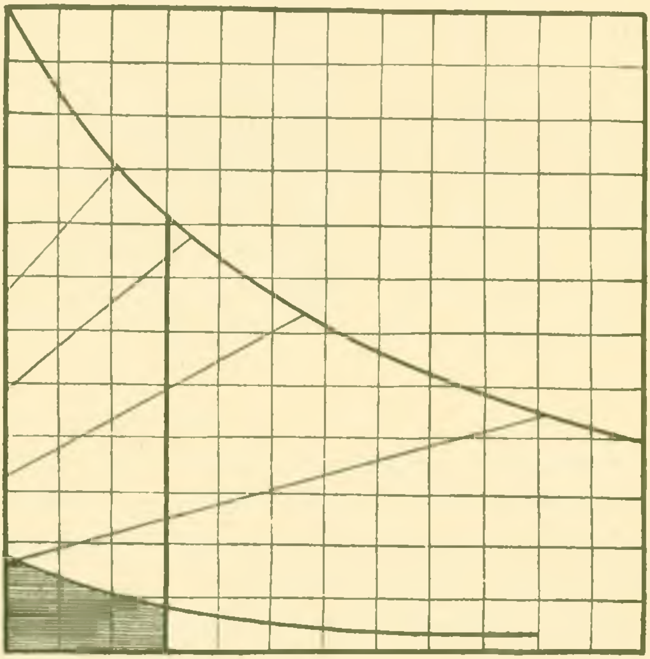


Рис. 6.

Такъ какъ сопротивленіе движенію (сила F) пропорціонально квадрату скорости, то искомая зависимость выразится формулой:

$$A_1 = c v^2$$

гдѣ c—коэффиціентъ пропорціональности. Его численное значеніе найдемъ, подставивъ въ формулу данныя частныя значенія для скорости и расхода угля. Тогда получимъ:

$$1 = c . 1600$$

$$\text{откуда } c = \frac{1}{1600} .$$

При скорости v расходъ на путешествіе будетъ равенъ:

$$A = 160 . \frac{1}{1600} v^2 + \frac{16 . 160}{v} \text{ или}$$

$$A = 0{,}1\, v^2 + \frac{2560}{v} .$$

Очевидно, что при очень большой скорости расходъ на уголь будетъ чрезмѣрно великъ, а при очень малой скорости путешествіе будетъ длиться очень долго и расходъ на команду достигнетъ высокой цифры. Изобразивъ графически A, какъ функцію v (см. рис. 7), мы найдемъ, что наиболѣе экономичная скорость равна приблизительно 23,4 верстъ въ часъ.

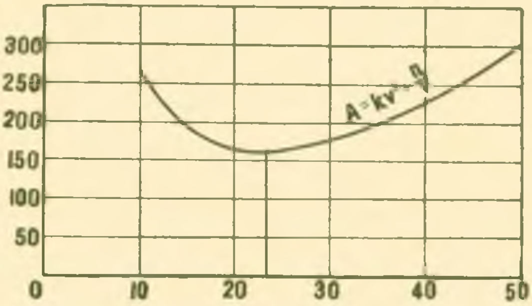


Рис. 7.

Разсмотримъ еще одинъ примѣръ. Положимъ, что надо сдѣлать водоемъ въ видѣ прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ, причемъ поверхность водоема должна составлять 10 кв. метровъ.

Какъ велика должна быть сторона квадратнаго основанія, чтобы емкость водоема была возможно большей? Вопросъ сводится къ вычисленію максимума функціи

$$V = \frac{5}{2} x - \frac{1}{4} x^3 .$$

Изъ чертежа (8) видно, что максимальная емкость соотвѣтствуетъ значенію $x \doteq 1{,}82$ м.

Полезно обратить вниманіе учащихся на тотъ фактъ, что вблизи максимума или минимума измѣненія функціи, соотвѣтствующія однимъ и тѣмъ же небольшимъ измѣненіямъ независимой перемѣнной значительно меньше, чѣмъ въ другихъ точкахъ кривой.

Со скоростью роста функціи приходится также считаться при построеніи кривыхъ: въ тѣхъ областяхъ, гдѣ функція растетъ быстро, приходится чаще наносить точки. Построеніе значительно облегчается въ тѣхъ случаяхъ, когда кривая симметрична по отношенію къ какой-нибудь оси или точкѣ или имѣетъ ассимптоты.

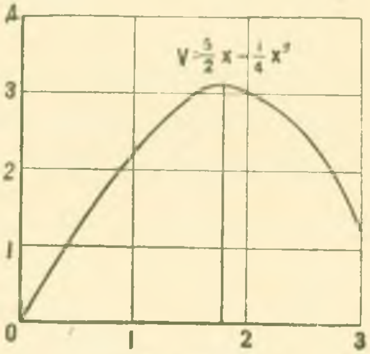


Рис. 8.

Превосходнымъ средствомъ для быстраго нахожденія частныхъ значеній функцій служитъ логариѳмическая линейка. Если, напримѣръ, сдвинуть подвижную линейку относительно неподвижной такъ, чтобы совпали дѣленія, помѣченныя цифрами 4 и 5, то вездѣ наверху будутъ градусы Реомюра, а противъ нихъ внизу градусы Цельзія.

Для вычисленія площадей круговъ, соотвѣтствующихъ разнымъ радіусамъ, надо черту 1 подвижной шкалы привести въ совпаденіе съ чертой π на неподвижной шкалѣ. Тогда приходящіяся другъ противъ друга дѣленія на первой шкалѣ и на другой (масштабъ для которой взятъ вдвое болѣе крупный) будутъ изображать собой сопряженныя значенія площадей круговъ и ихъ радіусовъ.

Визиръ въ видѣ тонкой нити облегчаетъ отсчетъ.

Логариѳмическая линейка, насколько мнѣ извѣстно, почти нигдѣ не примѣняется въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Между тѣмъ, про нее съ полнымъ правомъ можно сказать, что она, сберегая значительно наше время при самыхъ разнообразныхъ вычисленіяхъ, удлиняетъ нашу жизнь.

Я не буду останавливаться на обычныхъ графическихъ пріемахъ рѣшенія квадратныхъ уравненій, такъ какъ вопросъ этотъ достаточно разработанъ въ нашей учебной литературѣ и укажу лишь на одинъ менѣе извѣстный пріемъ, изложенный въ книгѣ Рунге «Graphisches Rechnen». Пріемъ этотъ отличается универсальнымъ характеромъ, т. к. даетъ возможность построить корни уравненія любой степени.

K

На чертежѣ 9 показано графическое рѣшеніе уравненія $x^2 + px + q = o$. Планъ рѣшенія такой: $KL = q$, $ML \perp KL$ и $= p$, $MN \perp ML$ и $= 1$. Затѣмъ надъ діаметромъ KN строимъ окружность. Легко показать, что точка пересѣченія этой окружности съ прямой ML (точка F) дѣлитъ послѣднюю на два отрѣзка (MF и FL), изображающіе собой (въ условленномъ масштабѣ) корни даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ NMF и KLF слѣдуетъ:

$$\frac{MF}{MN} = \frac{KL}{FL} \text{ или}$$

$MF \cdot FL = MN \cdot KL$ или $x_1 \, x_2 = q$.

Что сумма $MF + FL = p$, видно непосредственно изъ чертежа.

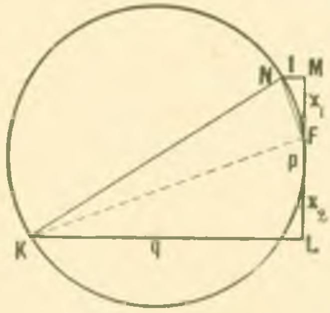


Рис. 9.

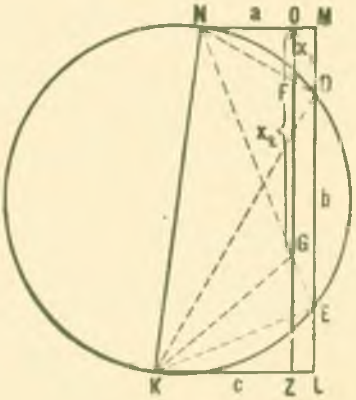


Рис. 10.

Чтобы построить корни уравненія

$$ax^2 + bx + c = o$$

въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты a и c одинаковыхъ знаковъ (рис. 10), откладываемъ $KL = c$, $LM = b$, $MN = a$, $NO = 1$, строимъ на діаметрѣ KN окружность, замѣчаемъ точки пересѣченія этой окружности съ прямой ML (точки D и E), и соединяемъ ихъ съ точкой N. Пусть прямыя DN и

EN пересѣкаются съ прямой OZ въ точкахъ F и G. Тогда легко показать, что OF и OG будутъ корнями уравненія.

Сначала необходимо доказать, $MD = EL$ (или $ME = DL$).

Изъ подобія треугольниковъ DMN и KLD слѣдуетъ:

$$\frac{MD}{a} = \frac{c}{DL} \text{ или } DL = \frac{ac}{MD}$$

а изъ подобія треугольниковъ MNE и KEL

$$\frac{ME}{a} = \frac{c}{LE} \text{ или } ME = \frac{ac}{LE}.$$

Значитъ:

$$\frac{DL}{ME} = \frac{LE}{MD}.$$

Послѣднюю пропорцію можно представить такъ:

$$\frac{MD + DE}{EL + DE} = \frac{MD}{EL}$$

откуда видно, что $MD = EL$ или что $ME = DL$.

Далѣе выводимъ: 1) изъ подобія Δ-овъ NOF и NMD:

$$\frac{OF}{1} = \frac{MD}{a} \text{ или } OF = \frac{MD}{a} \ (1)$$

2) изъ подобія Δ-овъ NGO и NEM

$$\frac{OG}{1} = \frac{ME}{a} \text{ или } OG = \frac{ME}{a} \ (2).$$

Значитъ: $OF + OG = \frac{MD + ME}{a} = \frac{MD + DL}{a} = \frac{b}{a}$.

Остается показать, что

$$OF.\ OG = \frac{c}{a}.$$

Изъ равенствъ 1) и 2) слѣдуетъ

$$OF \cdot OG = \frac{MD \cdot ME}{a^2}.$$

$$\text{Но } \frac{MD}{a} = \frac{c}{DL} = \frac{c}{ME}$$

$$MD.\ ME = ac$$

и значитъ

$$OF \cdot OG = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a}.$$

На чертежѣ 11 представленъ тотъ случай, когда коэффиціенты *a* и *c* различныхъ знаковъ.

Корни уравненія изображаются отрѣзками *OF* и *OG*.

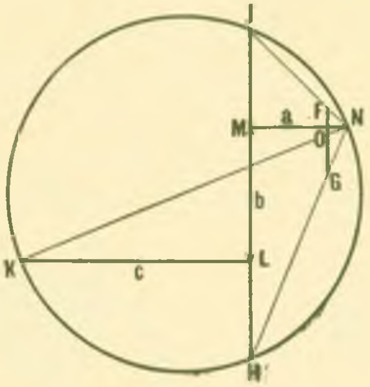


Рис. 11.

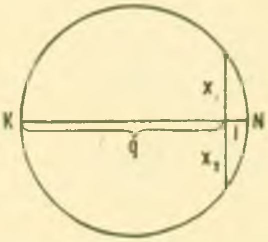


Рис. 12.

Наконецъ, чертежъ 12 представляетъ собой графическое рѣшеніе уравненія

$$x^2 - q = o.$$

Весьма многочисленны возможныя примѣненія графическаго метода въ ариѳметикѣ и алгебрѣ. Та универсальная единица, съ которой постоянно приходится имѣть дѣло при рѣшеніи ариѳметическихъ задачъ и которая выражаетъ то емкость бассейна, то капиталъ, то стоимость или вѣсъ—въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ быть наглядно изображена въ видѣ площади прямоугольника или квадрата. Квадратъ, раздѣленный на 100 маленькихъ квадратиковъ, можетъ оказаться полезнымъ при рѣшеніи задачъ на проценты.

Изъ приложеній графическаго метода къ алгебрѣ укажу на графическія иллюстраціи формулъ:

$$1)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2)\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

на графическое изображеніе корней, членовъ ариѳметической и геометрической прогрессій, наконецъ, на графическій выводъ формулы для суммы ариѳметической прогрессіи [1]).

---

[1]) См. С. Роу. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги, стр. 58—59.

Геометрическая интерпретація формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

пріобрѣтаетъ особый интересъ, когда величина b мала въ сравненіи съ величиной a (напр., составляетъ всего $1^0/_0$). Тогда маленькій квадратъ b^2 можетъ служить моделью безконечно малой величины второго порядка.

Послѣ такой иллюстраціи учащіеся не будутъ протестовать противъ того, что при приближенномъ извлеченіи квадратнаго корня по способу:

$$\sqrt{101} = 10 + x$$

$$101 = 100 + 20x + x^2$$

совершенно игнорируется членъ x^2.

Указанной иллюстраціей можно также воспользоваться, чтобы выяснить, какъ вліяетъ погрѣшность въ $1^0/_0$ при измѣреніи стороны квадрата a на относительную ошибку при вычисленіи площади квадрата по формулѣ

$$S = a^2.$$

Слѣдующіе чертежи (13—21), заимствованные изъ апрѣльскаго номера журнала «School science und Mathematics» за 1910 г., могутъ дать матеріалъ для рѣшенія задачъ на вычисленіе площадей. Затемненныя фигуры могутъ служить графическими иллюстраціями алгебраическихъ формулъ.

Рис. 13.

Рис. 14.

Рис. 15.

Возможности графическаго метода мною далеко не исчерпаны и я чувствую, что намѣченная въ моемъ докладѣ схема недостаточно рельефна и можетъ быть черезчуръ индивидуальна. Но особенность графическаго метода въ томъ именно и заключается, что онъ не закрѣпощаетъ насъ, не заставляетъ насъ двигаться въ опредѣленныхъ узкихъ рамкахъ, а предоставляетъ намъ извѣстную свободу дѣйствій и даетъ намъ возможность проявить нашу индивидуальность.

Примѣненіе графическаго метода не можетъ, конечно, служить залогомъ безспорнаго успѣха; учитель долженъ владѣть въ совершенствѣ всѣми методами, чтобы на практикѣ, при томъ или другомъ составѣ класса, добиться хорошихъ результатовъ.


Рис. 16.


Рис. 17.


Рис. 18.

Несомнѣнно также и то, что существуетъ глубокая функціональная зависимость между качествомъ преподаванія и общимъ культурнымъ уровнемъ страны и что жизнь можетъ поставить извѣстный коэффиціентъ передъ всѣми, проектируемыми нами улучшеніями. Но голосъ объединеннаго русскаго учительства, который найдетъ свое выраженіе въ резолюціяхъ Перваго Всероссійскаго Съѣзда Учителей Математики, также является важнымъ жизненнымъ факторомъ, могущимъ повліять на улучшеніе преподаванія математики на нашей ро-


Рис. 19.


Рис. 20.


Рис. 21.

динѣ. Благодаря каменному равнодушію однихъ, профессіональному астигматизму другихъ и цѣлому ряду другихъ причинъ наша оффиціальная средняя школа до сихъ поръ напоминаетъ мало-чувствительный термометръ, показанія котораго сильно отстаютъ отъ температуры окружающей среды. Жизнь кругомъ измѣнилась, наука усложнилась, борьба за существованіе поглощаетъ все больше силъ и предъявляетъ все болѣе высокія требованія къ научной подготовкѣ, а въ нашей средней школѣ до сихъ поръ преподаваніе математики ведется по образцамъ, патентованнымъ четверть вѣка тому назадъ. Будемъ надѣяться, что нашъ съѣздъ будетъ отмѣченъ въ исторіи преподаванія математики въ русской средней школѣ, какъ поворотный пунктъ, какъ начало прогресса».

Тезисы.

I. Педагогическая цѣнность графическаго метода.

1) Графики нагляднѣе и лаконичнѣе таблицъ чиселъ, полученныхъ эмпирическимъ путемъ, даютъ глазу общую картину и несравненно живѣе и выразительнѣе математическихъ формулъ.

2) Графическій методъ даетъ возможность установить связь между нѣкоторыми вопросами алгебры, геометріи, тригонометріи и физики.

3) Опытный учитель можетъ воспользоваться графическимъ методомъ, чтобы постепенно ознакомить учащихся съ идеей функціональной зависимости двухъ величинъ.

4) Графическое изображеніе значительно облегчаетъ изученіе хода физическихъ и химическихъ процессовъ и даетъ возможность опредѣлить скорость процесса въ каждый данный моментъ.

5) Графиками можно воспользоваться для приближеннаго рѣшенія задачъ, рѣшаемыхъ обычно пріемами дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.

6) Вычерчиваніе діаграммъ и кривыхъ представляетъ для учащихся интересъ и даетъ выходъ ихъ естественному стремленію къ активности и самодѣятельности.

II. Возможныя примѣненія графическаго метода.

а) Графики и ариѳметика.

Числовыя фигуры.

Графическое изображеніе дробей и процентовъ.

Діаграммы (прямолинейные отрѣзки, прямоугольники, круги, секторы).

> **Примѣчаніе.** Вычерчиваніе діаграммъ требуетъ умѣнія обращаться съ циркулемъ, линейкой и транспортиромъ и навыка въ сокращенныхъ вычисленіяхъ.

б) Графики и алгебра.

Геометрическая интерпретація алгебраическихъ формулъ.

Графическое изображеніе степеней и корней.

Графическое изображеніе закона прямой пропорціональности.

Примѣры: графическія таблицы для перевода однѣхъ мѣръ въ другія (фунтовъ въ килограммы, марокъ въ рубли, градусовъ Реомюра въ градусы Цельзія), равномѣрное движеніе, желѣзнодорожное расписаніе.

Законъ прямой линіи.

Примѣры: Плата за телеграмму—въ зависимости отъ числа словъ, доходъ фабрики—въ зависимости отъ числа рабочихъ, градусы Реомюра и градусы Фаренгейта.

Графическіе пріемы рѣшенія системы уравненія 1-й степени.

Переходъ отъ формулъ къ графикамъ и обратный переходъ.

Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій.

Параболическій законъ.

Рѣшеніе квадратныхъ уравненій съ одной и двумя неизвѣстными.

Гиперболическій законъ.

Законъ обратной пропорціональности квадрату разстоянія.

Графическое изображеніе членовъ ариѳметической и геометрической прогрессіи.

в) Графическій методъ и геометрія.

Отношеніе площадей подобныхъ фигуръ.

Примѣненіе геометрическихъ теоремъ къ построенію кривыхъ.

Выводъ формулъ для объема призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара.

г) Графическій методъ и рѣшеніе задачъ на мѣстности.

1) Опредѣленіе высоты доступнаго предмета.

2) Опредѣленіе высоты недоступнаго предмета.

3) Опредѣленіе разстоянія между двумя неприступными точками.

Пренія по докладамъ Н. А. Томилина и М. Л. Франка.

М. М. Щербацевичъ (Спб.). „Мнѣ приходилось заниматься въ школахъ различнаго типа: въ женской гимназіи, въ школѣ для взрослыхъ рабочихъ и въ мужскомъ 4-хъ-классномъ училищѣ. Несмотря на разный культурный уровень учащихся въ этихъ школахъ, несмотря на различіе запросовъ, съ которыми они въ школу приходятъ, ихъ отношеніе къ занятіямъ графическимъ методомъ было совершенно одинаково: какъ въ одной, такъ и въ другой средѣ графическій методъ вызвалъ глубокій интересъ. Вела я занятія по такой приблизительно программѣ: сначала простѣйшія діаграммы, потомъ болѣе сложныя, причемъ матеріалъ черпался изъ близко знакомой ученику обстановки и тѣхъ вопросовъ, которые разбирались на урокахъ естествовѣдѣнія, геометріи и физики. За графиками слѣдовало рѣшеніе уравненій“.

„Недавно одинъ изъ докладчиковъ напомнилъ, что часто ученики, обладающіе большою живостью ума, остроуміемъ, остаются глухими къ математикѣ, можетъ быть потому, что невидятъ близкой связи между математикой и жизнью. Школа несправедливо строго относится къ подобнымъ субъектамъ; въ своей практикѣ мнѣ приходилось встрѣчаться съ такимъ явленіемъ и страдать отъ этого. Графическій же методъ устраняетъ это зло: онъ обращаетъ умъ и сердце такихъ учениковъ къ математикѣ. Когда дѣло доходитъ до графиковъ, въ классѣ нѣтъ равнодушныхъ. Со второго же урока ученики осаждаютъ преподавателя предложеніями различныхъ темъ для графиковъ, отыскивая свѣдѣнія по интересующимъ ихъ вопросамъ въ справочныхъ книгахъ, а также черпая подходящій матеріалъ изъ учебниковъ географіи, естествовѣдѣнія, исторіи, физики. Здѣсь открывается прекрасная возможность дать математическимъ занятіямъ учениковъ то реальное направленіе, необходимость котораго въ настоящее время живо сознается. Много сухихъ, скучныхъ упражненій можно выкинуть и замѣнить болѣе интересными, близкими къ жизни учениковъ. Такова, напримѣръ, задача: изобразить на діаграммѣ, при помощи секторовъ круга, распредѣленіе учащихся даннаго училища по классамъ. Для этого придется заставить ученика собрать числовыя данныя, произвести пропорціональное дѣленіе, подумать, какъ поступить въ случаѣ, если получатся при вычисленіи какія-нибудь неудобныя доли, и поработать съ транспортиромъ. Размѣръ сдѣланной имъ при этомъ ошибки будетъ его живо интересовать, такъ какъ задача имѣетъ близкое ему реальное содержаніе. Точно такъ же ученики готовы произвести множество вычисленій, чтобы начертить графикъ зависимости площади круга или объема шара отъ длины радіуса, такъ какъ этотъ графикъ даетъ имъ большее удовлетвореніе, чѣмъ извѣстная уже имъ формула“.

„Чтобы лучше использовать діаграммы и графики для ариѳметическихъ задачъ, удобно дѣлить классъ на группы. Тогда работа, исполненная одной изъ нихъ, можетъ служить матеріаломъ для задачъ, предлагаемыхъ другой, незнакомой съ первоначальными данными, и обратно. Надо замѣтить, что любовь дѣтей къ подобнаго рода упражненіямъ такова, что многіе исполняютъ работы всѣхъ безъ исключенія группъ“.

„Рѣшеніе уравненій графическимъ способомъ дается ученикамъ вообще легко, и особенно цѣнится ими, когда дѣло доходитъ до изслѣдованія уравненій“.

„Графическій методъ уже пробилъ себѣ дорогу въ среднюю школу, но онъ почти не примѣняется въ городскихъ училищахъ. Между тѣмъ, курсъ алгебры въ 4-хъ-классныхъ городскихъ училищахъ (говорю о думскихъ мужскихъ училищахъ въ Спб.) даетъ достаточно широкое поле для примѣненія графиковъ, такъ какъ въ этотъ курсъ представляется возможнымъ включить и рѣшеніе квадратныхъ уравненій и элементарныя свѣдѣнія по практикѣ логариѳмовъ“.

„Курсъ же ариѳметики не менѣе, чѣмъ въ средней школѣ, нуждается во внесеніи въ него свѣжаго, жизненнаго матеріала. Задачи на примѣненіе графическаго метода не только могутъ восполнить этотъ пробѣлъ, но при надлежащемъ ихъ выборѣ выгодно отзовутся и на общемъ развитіи учащихся въ смыслѣ расширенія ихъ горизонта, что является особенно цѣннымъ въ народной школѣ“.

„Я хочу призвать товарищей по работѣ ко введенiю въ преподаванiе ариѳметики въ городскихъ училищахъ графическаго метода. Я принесла часть работъ и помѣщу ихъ на выставкѣ, конечно, не для того, чтобы показать, какъ онѣ хороши, такъ какъ тамъ есть и промахи, а лишь для пропаганды графическаго метода, для введенiя его въ курсъ 4-хъ классныхъ городскихъ училищъ“.

А. Н. Шапошниковъ (Щелково, Сѣв. дор.). „Въ средѣ съѣхавшихся преподавателей математики едва ли найдутся противники графикъ“.

„Графики легко даются пониманiю дѣтей, два-три мѣсяца находящихся въ классѣ средней школы. Значенiе же графиковъ всего лучше можетъ выясниться на урокахъ прикладныхъ наукъ, а не на урокахъ математики, и первое съ ними знакомство должно быть отнесено къ курсу природовѣдѣнiя“.

„Для преподавателя математики важны вопросы: когда и какъ можно развить математическiя соображенiя, опирающiяся на графическую методу. На этотъ вопросъ нѣтъ обстоятельнаго отвѣта въ докладѣ“.

„Конечно, вначалѣ графики должны представлять лишь средство дать классу отдыхъ послѣ сильнаго напряженiя мысли. Пусть вначалѣ они будутъ почти математической забавой; изъ этой забавы разовьется исподволь рядъ важныхъ соображенiй; но какъ это сдѣлать?“

„На этотъ вопросъ, какъ и на другiе, слегка затронутые настоящимъ Съѣздомъ, дадутъ отвѣты будущiе Съѣзды“.

Р. Г. Курцъ (Кременчугъ). „Я хочу сдѣлать дополненiе къ докладу о номографiи: было указано, что существуютъ на русскомъ языкѣ только два сочиненiя по номографiи. Въ Морскомъ Сборникѣ за 1904—1906 гг. было помѣщено нѣсколько довольно обширныхъ трудовъ по номографiи, въ томъ числѣ былъ помѣщенъ трудъ проф. Захарьина“.

Б. А. Марковичъ (Спб.). „Вполнѣ соглашаюсь съ мнѣнiемъ, что настоящiй Съѣздъ не можетъ рѣшить всѣхъ вопросовъ, тѣмъ не менѣе я полагаю, что на многiе вопросы онъ можетъ дать болѣе или менѣе ясный и опредѣленный отвѣтъ, такъ, напр., о графикѣ“.

„Говорятъ, что начинаютъ съ забавы, но не указываютъ, когда и какъ ставить дѣло серьезно. Я бы сказалъ, что въ теченiе 10 лѣтъ этотъ отвѣтъ вполнѣ систематически данъ французской литературой; онъ, вѣроятно, извѣстенъ большинству членовъ Съѣзда. Что же касается того, что докладчикъ не далъ спецiальной программы, то мнѣ кажется, что это и не входило въ его задачу, въ его цѣль. Я могу сказать, на основанiи знакомства съ литературой и, съ другой стороны—на основаніи фактическихъ данныхъ личнаго опыта, что графическій методъ—не только забава“.

„Представленіе о графическихъ методахъ у многихъ очевидно неопредѣленное. Нѣкоторые смѣшиваютъ «графики», вообще, съ простѣйшими діаграммами, которыя составляютъ лишь первую ступень; другіе не отдаютъ себѣ отчета во взаимномъ отношеніи «графиковъ» и доказательства (аналитическаго). Мы слышали, напримѣръ, мнѣніе, что «графики»—занятіе «не математическое»...

„Стоитъ лишь немного заняться графиками, чтобы увидѣть, сколько здѣсь чисто математическаго- алгебраическаго, аналитическаго. Положимъ, ученикъ строитъ по точкамъ уравненіе 2-ой степени съ двумя перемѣнными. Кромѣ умѣнья обращаться съ координатами, онъ долженъ: во-первыхъ, рѣшить уравненіе 2-ой степени; во-вторыхъ, отмѣчая получаемыя частныя значенія корней, производить вычисленія и, въ третьихъ, такъ какъ приходится извлекать квадратный корень, онъ долженъ находить приближенныя значенія, что пріучаетъ его къ опредѣленію степени точности; наконецъ, кромѣ этихъ чисто алгебраическихъ дѣйствій, онъ прорабатываетъ—и при томъ на многихъ самостоятельныхъ примѣрахъ—идею «функціональной зависимости», а, кажется, противъ пользы послѣдовательнаго проведенія этой идеи въ курсъ средней школы никто на Съѣздѣ еще не возражалъ. Повторяю: для того, чтобы оцѣнить всю пользу, всю *помощь*, которую графическій методъ приноситъ болѣе твердому усвоенію общаго курса, нужно самому поработать, и я ограничусь однимъ лишь примѣромъ“.

„Вы знаете, насколько сложно и трудно для учениковъ аналитическое изслѣдованіе «знака трехчлена 2-ой степени»; ученику приходится брать здѣсь не только соображеніемъ, но еще больше памятью. Но всѣ трудности исчезаютъ, если только вы *предварительно* примѣните графическій методъ. Суть вопроса ярко выясняется тремя параболами, когда одна пересѣкаетъ ось X-овъ, другая касательна къ оси, третья не встрѣчается съ этой осью. Когда же ученикъ рельефно увидитъ сущность вопроса, когда у него будетъ ясное представленіе о его постановкѣ и *графическія* его рѣшенія,—тогда, смѣю увѣрить, прежнія аналитическія затрудненія окажутся пустяками, и тогда, во всякомъ случаѣ, вы вправѣ требовать отъ него самаго строгаго аналитическаго доказательства. Ту же могучую, необходимую помощь даютъ графики при изслѣдованіи функцій вообще“.

„Возражать противъ графическаго метода—значитъ ставить искусственныя затрудненія для ученика, точно серьезность и величіе математики состоятъ въ томъ, чтобы нарочно дѣлать ея истины трудно доступными и трудно-понятными!“

„Перехожу къ другому общему возраженію, къ указанію на недостаточность опыта примѣненія графическаго метода въ курсѣ средней школы. Казалось бы, отсюда слѣдуетъ прямой выводъ, что необходимо возможно скорѣе произвести такой опытъ. Но отъ приверженцевъ старины мы, наоборотъ, слышимъ лишь слѣдующее: «нѣтъ опыта, слѣдовательно *не надо* его дѣлать». И это, вообще, одно и то же возраженіе на всѣ «новшества!“

„Но, къ счастью, утвержденіе, будто нѣтъ опыта въ графикахъ, совершенно не вѣрно и свидѣтельствуетъ лишь о незнакомствѣ съ учебно-математическою литературою. «Графики» давно и широко распространены въ Англіи, Америкѣ, Германіи, а во Франціи уже десять лѣтъ входятъ въ *обязательный* курсъ *государственной* школы. Опытъ есть и въ Россіи: какъ на Съѣздѣ преподавателей средней школы 1907 года, такъ и на Съѣздѣ учителей городскихъ училищъ 1909 года, были объ этомъ доклады, а на выставкахъ этихъ Съѣздовъ—цѣлыя коллекціи произведенныхъ учениками работъ. Больше того: опытъ на столько уже установленъ, что появилась и русская литература по этому вопросу. Новый спросъ вызвалъ уже предложеніе: составители старыхъ учебниковъ уже выпустили на рынокъ соотвѣтственныя дополненія и руководства. Думаю поэтому, что пора бы похоронить ссылки на недостатокъ «опыта», а скорѣе его узаконить“.

И. И. Александровъ (Москва). „Въ докладѣ Н. А. Томилина было сказано, что задачи: «найти прямоугольный параллелепипедъ максимальнаго объема при данной поверхности» и «изъ даннаго листа вырѣзываніемъ по концамъ равныхъ квадратовъ сдѣлать водоемъ максимальнаго объема» не рѣшаются элементарными пріемами. На самомъ дѣлѣ элементарное рѣшеніе этихъ задачъ желающіе найдутъ въ сочиненіи «Maxima и Minima» Бѣляева (въ Москвѣ)“.

Д. Э. Теннеръ (Спб.). „Изъ первой части доклада М. Л. Франка мы видимъ, что пріемы номографіи вносятъ многія трудности, а потому возникаетъ вопросъ, какимъ путемъ эти трудности могутъ быть обойдены съ методической точки зрѣнія. Для рѣшенія этого вопроса нужны опыты въ большемъ числѣ, и потому выражаю пожеланіе, чтобы работа эта распредѣлена была между возможно большимъ числомъ школъ, въ результатѣ чего получится богатый матеріалъ по этому вопросу для слѣдующихъ Съѣздовъ“.

П. С. Эренфестъ. (Спб.). „Я хотѣлъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе, хотя я имѣю очень малый опытъ. Я самъ учился въ Вѣнѣ и въ Гёттингенѣ и тамъ мнѣ пришлось жить со студентами математиками и физиками. Въ Геттингенѣ вы рѣдко встрѣтите кружокъ студентовъ-математиковъ, гдѣ бы не было разговора о математическихъ задачахъ; вы тамъ встрѣтитесь и съ графическими занятіями, и съ моделями, вообще—съ геометрическими пособіями. Если въ Геттингенѣ говорятъ о функціяхъ, то всегда двигаются руки, потому что функція—результатъ выполненной работы; но эта иллюстрація къ рѣчи отсутствуетъ въ Петербургѣ. И вообще въ кружкахъ студентовъ—математиковъ, обучающихся въ русскихъ университетахъ, мнѣ не приходилось наблюдать интереса къ математическимъ упражненіямъ на наглядныхъ пособіяхъ. Я лично вполнѣ убѣжденъ, что русскіе студенты университета не привыкли ариѳметическіе и аналитически-геометрическіе вопросы приводить въ связь съ наглядными представленіями. Пока этого не будетъ достигнуто, будетъ затруднено живое введеніе графическаго преподаванія. Слѣдовательно, мнѣ кажется, чрезвычайно было бы желательно, чтобы преподаваніе въ университетахъ велось на основѣ геометрическихъ образовъ; это желательно и въ средней школѣ. Здѣсь говорилось, что въ нѣкоторыхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ имѣются коллекціи математическихъ моделей и что будто бы коллекціи эти примѣняются при преподаваніи. На самомъ дѣлѣ онѣ лежатъ безъ примѣненія. Я напр., знаю, что въ нѣкоторыхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, гдѣ преподается начертательная геометрія, никогда ни одинъ студентъ не видитъ этихъ моделей. Кромѣ того, въ программахъ отсутствуютъ такія статьи, тѣсно связанныя съ наглядными представленіями, какъ Римановская теорія функцій и др.; введеніе ихъ было бы чрезвычайно желательно".

„Къ этому могу прибавить, что въ Австріи установлено правило, чтобы преподаватели математики и физики въ средней школѣ избирались не изъ числа окончившихъ математическіе факультеты университетовъ, а изъ окончившихъ политехническія заведенія, такъ какъ въ этихъ именно заведеніяхъ, а не въ университетахъ, студенты выполняютъ полный циклъ графическихъ и физическихъ работъ. Съ своей точки зрѣнія было бы чрезвычайно желательно, чтобы геометрическія построенія считались нужными и преподаваніе не начиналось съ аналитическихъ вопросовъ".

Н. А. Колубовская (Спб.) проситъ сторонниковъ введенія графическаго метода въ обученіе обратить вниманіе на то, какъ отразится усиленное распространеніе этого способа на зрѣніи учащихся; этотъ методъ требуетъ напряженнаго вниманія къ ряду точекъ и утомляющаго зрѣніе обращенія съ миллиметровой бумагой.

Н. А. Томилинъ (Спб.). „Прежде всего повторю то, что было уже высказано въ защиту характера нашихъ докладовъ, а именно, что мы не имѣли претензіи предлагать готовые пріемы. Я высказалъ въ своемъ докладѣ, что не признаю патентованныхъ способовъ тѣхъ или другихъ методовъ. Я настолько отношусь съ уваженіемъ къ личности учителя, что всегда считалъ самымъ важнымъ—указать общую схему собесѣдованій по разнымъ педагогическимъ вопросамъ, а патентованные принципы въ средней школѣ до такой степени надоѣли, что заниматься выработкой ихъ не желательно“.

„Относительно того, что я не показалъ, въ какой постепенности нужно вводить въ средней школѣ графическій методъ я скажу, что рѣшать этотъ вопросъ я пока не считаю себя достаточно компетентнымъ. Я думаю, что схема показана совершенно ясно: сначала діаграммы, представленіе дробей графиками, потомъ кривыя, законъ прямой пропорціональности, параболлическій законъ и, наконецъ, гиперболлическій. Это—общая схема“.

„Къ вопросу объ утомленіи глазъ нужно относиться съ полнымъ вниманіемъ, чтобы не испортить зрѣнія молодому подрастающему поколѣнію. Но почему графическій методъ отожествляютъ съ миллиметровой бумагой? Для графиковъ можетъ быть употреблена какая угодно бумага, хотя совершенно вѣрно, что все больше и больше склоняются къ миллиметровой бумагѣ; но это не измѣняетъ вопроса по существу. Эту бумагу можно замѣнить любой другой, съ болѣе крупными дѣленіями. Это—возраженія не по существу“.

„Было сказано, что графики необходимо примѣнять не на урокахъ математики. Я считаю позоромъ для преподавателей математики не только нашихъ, но и заграничныхъ, что впервые графикъ появился на урокахъ физики“.

„Что касается послѣдняго вопроса,—о возможности вычисленія корней уравненій 3-й степени элементарными пріемами, то сознаюсь откровенно въ своемъ невѣжествѣ: я до сихъ поръ не знаю ничего, что говорило бы въ пользу этого; я только имѣлъ въ виду, что въ школьной алгебрѣ обыкновенно уравненія 3-й степени не рѣшаютъ, во всякомъ случаѣ—на ряду съ аналитическимъ способомъ можетъ быть примѣненъ и графическій“.

„Я думаю, что въ высокой степени было бы важно, чтобы Первый Съѣздъ не колебался относительно графическаго метода и не откладывалъ рѣшенія этого вопроса до Второго Съѣзда“.

М. Л. Франкъ (Спб.). „Къ тому, что было сказано Н. А. Томилинымъ, я добавлю нѣсколько словъ“.

„Я долженъ выразить благодарность г. Курцу, который указалъ, что въ Морскомъ Сборникѣ за 1904—6 г. есть статья по номографіи“.

„Я остановлюсь на томъ, что говорилъ г. Эренфестъ. Дѣйствительно, неумѣнье въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ обращаться съ графикомъ является, на мой взглядъ, чрезвычайно больнымъ мѣстомъ, и это неумѣнье надо отнести не столько за счетъ высшихъ учебныхъ заведеній, сколько за счетъ средней школы. Студенты, поступающіе въ спеціальное учебное заведеніе, сдавшіе конкурсные экзамены по всѣмъ отдѣламъ математики, великолѣпно владѣющіе курсомъ средней школы, становятся въ тупикъ передъ задачами начертательной геометріи по той простой причинѣ, что не умѣютъ представить того, что дѣлаютъ, не умѣютъ соединить образы пространственные и образы на чертежахъ съ той аналитической функціей, которую они хотятъ изобразить. Страннымъ кажется, какимъ образомъ люди, свободно владѣющіе среднимъ курсомъ математики, затрудняются въ работахъ по начертательной геометріи и проваливаются на экзаменѣ. Съ этой точки зрѣнія вычерчиваніе графиковъ для тѣхъ, кто занимается спеціальными предметами, является абсолютно необходимымъ. Мнѣ кажется, нѣтъ области какъ въ физикѣ, такъ и во всѣхъ естественныхъ наукахъ, гдѣ не примѣнялся бы въ настоящее время графическій методъ, гдѣ не иллюстрировались бы сложныя функціи съ помощью простыхъ способовъ, а именно—чертежами".

„Привычка къ чертежамъ необходима, потому что безъ нихъ простое кажется сложнымъ. Достигнуть этой привычки чрезвычайно легко. Личный опытъ позволяетъ мнѣ сообщить вамъ, что я сумѣлъ показать записываніе температуры графическимъ методомъ ребенку, который не умѣлъ писать цифръ и который записывалъ температуру, составлялъ графики, за цѣлый годъ, не умѣя еще писать. Ему было совершенно понятно, какъ обозначать, когда былъ морозъ, когда было тепло".

„Если съ самой начальной ступени школы объединить занятія математикой съ природовѣдѣніемъ и начальной географіей, то на послѣдующихъ ступеняхъ будетъ чрезвычайно легко проходить Римановы функціи (о чемъ говоритъ П. С. Эренфестъ)".

„Я недостаточно компетентенъ въ вопросѣ, какъ и въ какомъ порядкѣ вводить графическій методъ, но что вводить его необходимо съ раннихъ ступеней, сообразуясь съ другими педагогическими условіями, это—внѣ всякаго сомнѣнія".

„По поводу высказаннаго мнѣнія о возможности испортить зрѣніе я не буду много возражать; скажу лишь, что всѣ техники и инженеры постоянно занимаются чертежами, и потеря зрѣнія составляетъ рѣдкія исключенія. Въ большинствѣ же случаевъ этого заболѣванія въ техническихъ училищахъ не замѣчается; не замѣчается даже и той порчи зрѣнія, которая наблюдается въ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеніяхъ при неправильныхъ пріемахъ письма. При правильной постановкѣ, если будутъ чертить стоя, а не сидя, порчи зрѣнія не будетъ. Мнѣ кажется, что съ этой стороны нѣтъ такой опасности, чтобы нельзя было вводить графическій методъ".

XXVIII. Начальный (пропедевтическій) курсъ геометріи въ средней школѣ. Его цѣли и осуществленіе.

Докладъ А. Р. Кулишера (Спб.).

«При обсужденіи докладовъ съѣзда уже прочитанныхъ, намъ приходилось неоднократно наталкиваться на такой вопросъ: чего, въ концѣ концовъ, мы достигнемъ, если станемъ обучать дѣтей не по существующимъ теперь программамъ, а по другимъ, почему-либо, болѣе желательнымъ? Вѣдь мы все время вносимъ одно измѣненіе за другимъ—мы то и дѣло отягощаемъ программу математики новыми и новыми отдѣлами, а между тѣмъ учебный планъ и общее число часовъ остаются или тѣми же, что и раньше, или, если и могутъ измѣниться, то лишь въ самой незначительной степени. И вотъ потому то, рѣшаясь теперь поставить на обсужденіе докладъ о начальномъ курсѣ геометріи въ средней школѣ, я прежде всего долженъ указать, откуда взять необходимое время, такъ какъ я имѣю въ виду пропедевтическій курсъ геометріи, укладывающійся не въ одинъ годовой часъ, а въ большее число часовъ.

Но съ другой стороны, дѣло можно обернуть иначе и спросить, да нуженъ-ли вообще этотъ самый начальный курсъ геометріи и нельзя ли безъ него какъ-нибудь обойтись? Вѣдь такъ легко можетъ случиться, что всѣ эти пропедевтическіе курсы геометріи лишь дань увлеченію, почему-то захватившему нѣкоторыхъ преподавателей. Вызываются-ли всѣ отклоненія отъ обычнаго до сихъ поръ курса геометріи настоятельной необходимостью? У очень многихъ преподавателей отношеніе къ подобному курсу настолько скептическое, что они прямо опасаются введенія начальнаго курса.

Въ томъ же случаѣ, если-бы дѣйствительно оказались полезными нѣкоторыя предварительныя работы учащихся по геометріи, надо указать, какова ихъ цѣль, каковъ долженъ быть ихъ характеръ, а также какими путями можно совершить переходъ отъ начальнаго курса къ послѣдующему систематическому. Какъ ни простъ послѣдній вопросъ, онъ всегда смущаетъ многихъ, въ томъ числѣ и тѣхъ лицъ, которыя сами являются сторонниками болѣе ранняго изученія геометріи.

Обоснованіе необходимости начальнаго курса геометріи въ средней школѣ — тема, несмотря на всю ея сложность, небезинтересная, и я позволилъ-бы себѣ занять разсмотрѣніемъ относящихся сюда соображеній вниманіе членовъ съѣзда, если-бы весной 1911 года не вышла въ свѣтъ книжка, въ которой сказано почти все, что я могъ бы сказать по данному поводу, и сказано при томъ человѣкомъ вполнѣ авторитетнымъ. Я имѣю въ виду сочиненіе Трейтлейна, сорокъ лѣтъ работающаго въ области дидактики математики; я говорю о сочиненіи, носящемъ названіе «Der geometrische Anschauungsunterricht», первая часть котораго недавно появилась въ переводѣ на русскій языкъ [1]). Здѣсь мы найдемъ исторію попытокъ введенія начальнаго курса геометріи, обнимающую собою весь 19-ый вѣкъ. Эта исторія прекрасно поясняетъ цѣлое теченіе педагогической мысли, подводя итогъ большой работѣ нѣсколькихъ поколѣній и при томъ не только въ области геометріи, но и въ другихъ областяхъ. Въ книгѣ, на первый взглядъ, говорится только о геометріи, но по ней можетъ учиться каждый, кому представится необходимость пользоваться наглядными пособіями и осуществлять наглядность путемъ самодѣятельности учащихся: книгу Трейтлейна прочтетъ съ пользой преподаватель словесности или преподаватель новыхъ языковъ. Но, само собой разумѣется, только окружающій ребенка міръ будетъ для преподавателя той послѣдней книгой, въ которой ищущая конкретныхъ примѣровъ мысль учителя найдетъ весь нужный ей матеріалъ!

Правда, на выборѣ и распредѣленіи послѣдняго, на построеніи курса могутъ отразиться не одни педагогическіе взгляды преподавателя, но и цѣлый рядъ внѣшнихъ условій; однимъ изъ важнѣйшихъ условій является число часовъ, которое, согласно учебному плану, будетъ отведено на предметъ.

Изъ книги Трейтлейна читатель узнаетъ, что въ то время, какъ въ нѣкоторыхъ странахъ (напримѣръ, въ Австріи),

---

[1]) Berlin, 1911. (Teubner). Русск. перев. П. Трейтлейнъ. Методика геометріи, подъ ред. Ф. В. Филипповича, ч. I. Спб. 1912, ч. II. Спб. 1913.

начальный курсъ геометріи давно уже положенъ въ основу преподаванія математики и проводится въ теченіе чуть не сорока лѣтъ, въ Германіи за него долго ломали копья, причемъ только 10 лѣтъ тому назадъ этотъ вопросъ получилъ признаніе почти всеобщее. Что касается до насъ, то мы стоимъ только въ преддверіи введенія такого курса геометріи въ среднюю школу, такъ какъ у насъ пока все сводится къ отдѣльнымъ попыткамъ, если не считать чрезвычайно интересныхъ измѣненій, которыя внесены въ программы кадетскихъ корпусовъ 11 іюня 1911 г. Тамъ начальный курсъ введенъ, какъ нѣчто, составляющее неотъемлемую часть всего остального преподаванія геометріи. Проведеніе пропедевтическаго курса по программамъ кадетскихъ корпусовъ, быть можетъ, съ небольшими измѣненіями, должно оказать въ старшихъ классахъ существенную помощь преподавателю. Въ тѣхъ же случаяхъ, гдѣ мы должны приступить сразу къ систематическому курсу, надо не забывать, что запасъ пространственныхъ представленій у дѣтей можетъ оказаться недостаточнымъ и что поэтому, быть можетъ, не безполезно время отъ времени отводить по 2—3 уроки на изученіе того или другого отдѣла геометріи на конкретномъ матеріалѣ.

Выше сказано, что Трейтлейномъ приведены достаточно вѣскія соображенія въ пользу введенія начальнаго курса геометріи и потому нѣтъ необходимости повторять то, что изложено уже достаточно хорошо; и я обращусь теперь къ краткому обзору обычной у насъ схемы систематическаго курса.

Тутъ какъ будто точки отправленія выбраны правильно. Мы идемъ здѣсь отъ простѣйшихъ представленій къ болѣе сложнымъ, мы идемъ въ сторону ознакомленія съ простѣйшими формами, мы остаемся въ началѣ подолгу въ области основныхъ образовъ на плоскости. Если мы нѣсколько времени удѣляемъ тѣламъ, то дѣлаемъ это лишь для того, чтобы тотчасъ перейти къ поверхностямъ, отъ поверхностей къ линіямъ и т. д. и, затѣмъ, надолго остаемся съ учениками въ области плоскости и прямыхъ линій.

Да и тутъ мы соблюдаемъ послѣдовательность: сначала знакомимъ дѣтей съ прямыми линіями, затѣмъ съ углами, потомъ съ треугольниками, четыреугольниками. Къ пространству трехъ измѣреній въ классныхъ занятіяхъ мы позволяемъ себѣ перейти лишь спустя два года послѣ начала систематическаго курса. Мы съ той же добросовѣстностью переходимъ отъ простого къ болѣе сложному и, несмотря на всю нашу осторожность въ этомъ отношеніи (а, можетъ быть, изъ-за самаго стремленія быть «послѣдовательнымъ» въ распредѣленіи матеріала), мы наблюдаемъ, что учащіеся 6-го или 7-го класса въ лучшемъ случаѣ хорошо владѣютъ всѣми изученными главами въ отдѣльности, но съ трудомъ представляютъ себѣ весь курсъ въ видѣ связнаго стройнаго цѣлаго. А между тѣмъ одной изъ задачъ курса старшихъ классовъ является объединеніе всѣхъ проработанныхъ предложеній въ нѣчто цѣлое, въ то, что иногда называютъ (хотя въ виду неизбѣжныхъ по существу дѣла недочетовъ, нѣсколько смѣло) системой.

Чѣмъ же объяснить эту недостаточность итоговъ (которая была бы еще значительно больше, если бы части учениковъ не оказывалась помощь на дому), эту сравнительную незамѣтность итоговъ работы, по времени весьма и весьма продолжительной? Не повинно-ли въ этомъ (по крайней мѣрѣ, отчасти) то обстоятельство, что мы сразу приступаемъ къ очень трудному матеріалу, что мы исходимъ обычно изъ образовъ въ смыслѣ черченія дѣйствительно наиболѣе простыхъ (ибо, кто сталъ бы спорить, что начертить прямую куда проще, чѣмъ плоскость или прямоугольный параллелепипедъ), но для пониманія ребенка наиболѣе трудныхъ? И это—задача не одной лишь дидактики геометріи. Проблема, которой мы касаемся, лежитъ на рубежѣ между дидактикой геометріи и психологіей: намъ надо, хотя бы ради цѣлей практическихъ отвѣтить, примѣрно, на такой вопросъ: что, въ концѣ концовъ, проще для пониманія ребенка: прямая линія или площадь круга, площадь круга или шаръ. Если бы ребенокъ жилъ въ мірѣ линій и плоскихъ образовъ, какъ то существо, о которомъ упоминаетъ Гельмгольцъ или авторъ книги «Царство плоскости», то поставленный нами вопросъ пришлось бы разрѣшить въ томъ смыслѣ, что для начинающаго изучать геометрію линіи, въ особенности прямыя, и плоскія фигуры «проще» и доступнѣе, чѣмъ тѣла. Но, принимая во вниманіе, что ребенокъ живетъ главнымъ образомъ въ мірѣ разнаго рода многогранниковъ съ прямыми, по большей части, углами, чаще всего въ мірѣ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, кубовъ и немногихъ круглыхъ тѣлъ (причемъ ему извѣстны, самое большее, названія куба и шара), мы склонны думать, какъ это подтверждается многочисленными наблюденіями преподавателей-практиковъ, что тѣла для дѣтей «проще», чѣмъ прямыя и плоскости. Впрочемъ, и безъ того обычно мы предъявляемъ въ другихъ предметахъ значительныя часто мало оправдываемыя требованія къ воображенію ребенка въ области пространственныхъ представленій. Достаточно напомнить, что въ прежнее время въ курсѣ географіи въ младшихъ кассахъ не задумывались требовать отъ дѣтей умѣнія опредѣлять положенія точки на сферѣ при помощи двухъ сферическихъ координатъ (опредѣленіе точки на земномъ сфероидѣ при помощи пересѣченія параллельныхъ круговъ и меридіановъ) и во многихъ другихъ случаяхъ (напримѣръ, при изученіи «кубическихъ» мѣръ) мы также не боялись обращаться къ представленіямъ пространственнымъ, и только въ геометріи мы считаемъ болѣе цѣлесообразнымъ начинать занятія не съ укрѣпленія и разработки имѣющихся уже у учащихся свѣдѣній относительно пространства 3-хъ измѣреній, а съ изученія нѣкоторыхъ отвлеченныхъ предложеній относительно фигуръ на плоскости.

Другимъ слабымъ мѣстомъ обычнаго проведенія систематическаго курса слѣдуетъ считать необращеніе вниманія на цѣлую область геометріи. Ученики, которые окончили гимназію и даже превосходно завершили восьмилѣтнюю работу удачнымъ экзаменомъ по математикѣ, все же затруднились бы указать, что геометрія,—а ей удѣлено было не мало силъ,— не только наука о протяженныхъ величинахъ, но также и наука о взаимномъ расположеніи и соотношеніи элементовъ геометрическихъ образовъ, независимо отъ ихъ величины. Мы только что указали, что въ обычномъ систематическомъ курсѣ геометріи часто игнорировалась цѣлая область, не взирая на ея доступность для учащихся и цѣнность въ дидактическомъ отношеніи, но такихъ пробѣловъ можно бы назвать много.

Впрочемъ, въ Германіи, «великія и простыя идеи Понселе и Штейнера 1), а также систематическое развитіе взаимной зависимости фигуръ другъ отъ друга, по свидѣтельству М. Симона 2), давно уже проложили себѣ доступъ въ школу, и задолго до того, какъ теорія Дарвина подчинила себѣ описательное естествознаніе, новая геометрія нашла въ идеѣ развитія,—выражаясь словами Ганкеля и Рейэ,—царскій путь въ геометріи»... Немало также сдѣлали, въ смыслѣ перестроенія систематическаго курса геометріи въ средней школѣ, итальянскіе ученые 3). Замѣчается въ томъ же направленіи движеніе у математиковъ англійскихъ и американскихъ 4).

Вотъ почему, помимо введенія пропедевтическаго курса, надо бы, быть можетъ, еще тщательно пересмотрѣть программы курса систематическаго, но уже во всякомъ случаѣ, если оставить систематическій курсъ въ прежнемъ видѣ,—указаніе на желательность сохраненія теперешняго курса старшихъ классовъ неизмѣннымъ никакъ нельзя считать сколько-нибудь сильнымъ доводомъ противъ болѣе ранняго изученія геометріи.

Въ пользу необходимости введенія начальнаго курса геометріи, приведены, какъ мы уже отмѣтили выше, въ книгѣ Трейтлейна достаточно убѣдительныя соображенія. Мы же ограничимся въ этомъ отношеніи немногими замѣчаніями, и перейдемъ непосредственно къ установленію признаковъ, при наличности которыхъ то или другое построеніе пропедевтическаго курса можно было бы признать цѣлесообразнымъ. Ибо тутъ скорѣе, чѣмъ гдѣ-либо въ другомъ мѣстѣ курса геометріи, даже очень сходные по матеріалу, по распредѣленію работы курсы могутъ на дѣлѣ оказаться весьма и весьма далекими

---

1) Одно изъ основныхъ сочиненій Штейнера имѣется на русскомъ языкѣ: Я. Штейнеръ. Геометрическія построенія выполняемыя посредствомъ прямой линіи и круга. Переводъ подъ редакц. проф. Д. М. Синцова, Харьковъ, 1910.

2) М. Симонъ. Дидактика и методика математики въ средней школѣ (стр. 159). Спб., 1912.

3) Проф. М. Векки. «Характеристика главнѣйшихъ руководствъ по элементарной геометріи, вышедшихъ въ свѣтъ въ Италіи за послѣднее пятидесятилѣтіе». (Прил. I къ книгѣ Юнга. Какъ преподавать математику. Спб. 1912). См. также обзоръ книгъ по геометріи, пишущаго эти строки, въ трудахъ Съѣзда.

4) Юнгъ. См. выше, стр. 297 и слѣдующія.

другъ другу по духу. Болѣе того, геометрическое разсмотрѣніе одного и того же геометрическаго тѣла можетъ быть проведено на этой ступени весьма многими и многими способами. Возьмемъ, напримѣръ, черезвычайно интересный курсъ Кемпбеля, названный авторомъ «наглядной геометріей» и послужившій прообразомъ нѣсколькихъ учебниковъ. Большую часть этого курса въ Америкѣ дѣти должны изучить довольно быстро годамъ къ 14, то есть къ моменту окончанія народной школы. Такъ какъ только дѣти болѣе или менѣе зажиточныхъ классовъ имѣютъ возможность посѣщать среднюю школу, а между тѣмъ та или другая профессія, которую придется избирать подростку, требуетъ часто небольшихъ по объему, но основательныхъ знаній по геометріи или, по крайней мѣрѣ, достаточнаго математическаго развитія, мы находимъ въ отвѣчающемъ названной цѣли учебникѣ Кемпбеля слѣдующія черты: онъ знакомитъ ребенка въ сравнительно короткое время съ довольно многими тѣлами, сопоставляетъ тѣла съ предметами окружающей ихъ обстановки, разсматриваетъ поверхности этихъ тѣлъ, выдѣляетъ такіе характерные элементы поверхностей, какъ квадраты, прямоугольники и т. п., все время имѣетъ въ виду приложенія геометрія въ практической жизни; давая множество иллюстрацій, объясняя прямо, какъ изготовить діаграмму или «развертку» того или другого тѣла, авторъ въ нѣсколько большей мѣрѣ, чѣмъ это можно считать желательнымъ, предуказываетъ учащемуся, какъ выполнить ту или другую работу. Что же касается до ряда вопросовъ, отвѣчая на которые учащійся можетъ лучше вдуматься въ наблюдаемыя имъ въ пространствѣ соотношенія, то они часто носятъ слишкомъ мелочной характеръ.

Задачу курса Кемпбеля составитель предисловія проф. Филиппсъ видитъ въ «пріученіи дѣтей къ наблюденію простыхъ геометрическихъ формъ и соотношеній между предметами, которые ежедневно попадаются имъ на глаза, въ обученіи ихъ употребленію простыхъ инструментовъ для геометрическихъ построеній и ознакомленіи ихъ съ разнообразными способами опредѣленія длины площади и объемовъ предметовъ...» Сообразно съ такимъ пониманіемъ задачи курса геометріи, Кемпбель, разсматривая кубъ, которымъ онъ начинаетъ изложеніе книги и которому онъ удѣляетъ 14 страницъ, считаетъ нужнымъ назвать рядъ предметовъ, похожихъ на кубъ по своей формѣ, сразу же заговорить о граняхъ куба и его ребрахъ, о ихъ перпендикулярности, о томъ, какъ построить прямой уголъ, о горизонтальныхъ и вертикальныхъ плоскостяхъ, о параллельности и перпендикулярности граней куба, объ отвѣсѣ, о площади квадрата и объемѣ куба, а также объ изготовленiи «сѣтки» или дiаграммы (развертки поверхности) куба. Планиметрическiя соотношенiя тѣсно связаны съ вопросами, относящимися къ геометрiи трехъ измѣренiй; прiобрѣтенныя ученикомъ свѣдѣнiя практическаго характера тутъ же прилагаются и способствуютъ разрѣшенiю вопросовъ, требующихъ отъ ученика умѣнiя выполнять нѣкоторыя отвлеченiя и умозаключенiя; такихъ вопросовъ въ связи съ кубомъ авторъ ставитъ числомъ 65. Словомъ, направляя вниманiе учащагося на такой объектъ, какъ кубъ, авторъ старается путемъ разсмотрѣнiя даннаго объекта непосредственно извлечь весьма значительное количество разнородныхъ свѣдѣнiй, пополнить эти свѣдѣнiя добавочными, сообщаемыми уже прямо учителемъ, и затѣмъ связать все въ нѣчто цѣльное; такъ поступаетъ Кемпбель и во всѣхъ остальныхъ семнадцати главахъ первой части, дающихъ довольно основательное знакомство съ разнаго рода многогранниками и связанными съ послѣдними планиметрическими образами, а также съ измѣренiемъ соотвѣственныхъ площадей и объемовъ. Во второй части эта работа еще нѣсколько далѣе углубляется и пополняется, вносится вопросъ о подобiи фигуръ и тѣлъ, объ измѣренiяхъ на мѣстности, о съемкѣ плана, о простѣйшихъ геометрическихъ построенiяхъ. Въ цѣляхъ же углубленiя занятiй геометрiей внесены такiя не совсѣмъ удачно написанныя главы, какъ главы о точкахъ, о точкахъ пересѣченiя прямыхъ линiй, гдѣ многое существенное совершенно затушевано чисто ариѳметическими подсчетами; съ этимъ матерiаломъ справится съ пользой для учениковъ только тотъ преподаватель, который достаточно владѣетъ проективной геометрiей, но и ему придется внести въ названныя главы не мало измѣненiй.

Въ результатѣ при проработкѣ курса Кемпбеля, подъ руководствомъ умѣлаго преподавателя, учащiйся можетъ прiобрѣсти во всемъ, что касается геометрическихъ образовъ, а также связанныхъ съ ними всевозможныхъ измѣреній, обильныя и жизненныя свѣдѣнія, ничуть не меньшія тѣхъ, какія пріобрѣтались обычно посредствомъ курса, основаннаго на доказательствахъ теоремъ; но другая сторона дѣла—соединеніе умозаключеній, относящихся всей совокупности изученныхъ геометрическихъ образовъ, въ стройную систему, доказуемость и обобщаемость положеній, выведенныхъ у Кемпбеля главнымъ образомъ на основаніи наблюденій надъ конкретнымъ матеріаломъ, затронуты, быть можетъ, слишкомъ мало даже съ точки зрѣнія начальнаго курса геометріи, (если конечно, имѣть въ виду курсъ аналогичный тому, какой предлагаетъ Трейтлейнъ). Но при всемъ томъ, какъ начальный курсъ, книга Кемпбеля или подобная ей книга можетъ быть весьма пригодной не только тамъ, гдѣ для курса доказательнаго характера не хватаетъ времени (начальныхъ школахъ, школахъ ремесленныхъ, техническихъ и т. п.), но и при построеніи пропедевтическаго курса въ средней школѣ.

Нѣсколько иначе осуществлены сходныя цѣли въ другомъ учебникѣ: «Въ начаткахъ опытной геометріи» Поля Бэра [1]). Книжка эта, предназначенная авторомъ исключительно для учителей (въ отличіе отъ Кемпбеля, который имѣетъ въ виду также учащихся), разбита на 44 урока и въ первыхъ своихъ 15 урокахъ представляетъ собой по распредѣленію матеріала то, что можно было бы назвать «планиметріей, разсказанной дѣтямъ»: это—измѣреніе длинъ прямыхъ, площадей квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, причемъ каждый разъ указывается, что такая то фигура называется квадратомъ, а вотъ такая—прямоугольникомъ, а вотъ эта—параллелограммомъ; смѣло (и въ своемъ родѣ удачно) проведены первыхъ семь уроковъ, посвященныхъ прямой линіи. Достаточно упомянуть о томъ, что въ третьемъ урокѣ дѣти измѣряютъ длину прямой, у которой только одинъ конецъ доступенъ; въ четвертомъ—высоту дерева при помощи угла, равнаго половинѣ d; въ шестомъ—выполняютъ то же

---

[1]) Поль Бэръ. Начатки опытной геометріи въ приложеніи къ измѣренію линій, поверхностей и тѣлъ, переводъ подъ ред. А. Гатлиха. М. 1909.

измѣреніе, что и въ предыдущемъ урокѣ, пользуясь уже подобіемъ (!); въ седьмомъ и восьмомъ—дѣти измѣряютъ длину прямой, оба конца которой недоступны. Если мы увеличимъ вдвое число уроковъ, отводимыхъ авторомъ на изученіе перечисленныхъ вопросовъ, то учащіеся будутъ въ состояніи проработать названный матеріалъ, который можетъ послужить добрымъ началомъ пропедевтическаго курса [1]). Заговоривъ объ увеличеніи числа первыхъ уроковъ, вдвое противъ времени, указаннаго въ книгѣ, мы должны отмѣтить что, по нашему мнѣнію, не только первые уроки, но весь курсъ, предлагаемый Полемъ Бэромъ, какъ слѣдуетъ можно пройти не въ 44, но не менѣе чѣмъ въ 80 часовъ [2]). Въ противномъ случаѣ, ученикъ не выработаетъ необходимыхъ навыковъ, и знанія, полученныя при такой поспѣшности, если даже не испарятся, то будутъ обладать малой цѣнностью. Съ 18 урока по 31-ый идетъ ознакомленіе съ формой и измѣреніемъ (главнымъ образомъ) объемовъ простѣйшихъ многогранниковъ и круглыхъ тѣлъ (попутно разсматривается опредѣленіе длины окружности и площади круга). Остальные же уроки посвящены нѣкоторымъ примѣненіямъ чертежныхъ инструментовъ въ основныхъ задачахъ на построеніе и измѣреніямъ на мѣстности.

Мы могли бы назвать еще нѣсколько другихъ курсовъ, въ той или другой мѣрѣ приближающихся къ двумъ только что разсмотрѣннымъ (за послѣдніе года появилось нѣсколько такихъ оригинальныхъ и переводныхъ курсовъ), но послѣ сказаннаго для выясненія нашей мысли едва ли это необходимо. Назову изъ такихъ курсовъ развѣ только извѣстный курсъ Астряба и книжку «наглядная геометрія для 2-классныхъ школъ» Кутузова; авторъ ея пробуетъ систематически изучать тотъ матеріалъ, который у Поля Бэра разсматривается на интересныхъ практическихъ задачахъ. На западѣ суще-

---

[1]) Согласно одному изъ выставленныхъ въ докладѣ положеній, наши слова надо понять въ томъ смыслѣ, что предлагаемый Полемъ Бэромъ матеріалъ можетъ служить началомъ одного изъ равновозможныхъ курсовъ.

[2]) То есть, по нашимъ условіямъ, при учебномъ годѣ въ 26—30 недѣль, при 2-хъ часахъ въ недѣлю—съ такой задачей можно справиться примѣрно въ $1^1/_2$ года, а при 1 часѣ въ недѣлю въ 3 года.

ствуетъ нѣсколько начальныхъ курсовъ, заключающихъ въ себѣ по преимуществу тотъ же матеріалъ (только въ значительно меньшемъ объемѣ), который позже долженъ войти въ курсъ систематическій. На-дняхъ въ 1-ой секціи Съѣзда при обзорѣ книгъ по геометріи мнѣ пришлось между прочимъ охарактеризовать курсъ выдающагося итальянскаго ученаго Веронезе. Имѣющійся у Веронезе начальный курсъ какъ разъ принадлежитъ къ той категоріи книгъ, о которой мы только что говорили. Такъ, напримѣръ, здѣсь, равно какъ и въ систематическомъ курсѣ того же ученаго, выключается понятіе о движеніи и замѣняется представленіемъ объ однозначномъ соотвѣтствіи. Правда, при сравненіи равныхъ фигуръ авторъ постоянно предлагаетъ изготовлять копіи одной изъ такихъ фигуръ на прозрачной бумагѣ и сравнивать эту копію съ другой фигурой; надо отмѣтить также постоянныя обращенія къ окружающей насъ обстановкѣ для уясненія тѣхъ или другихъ отвлеченныхъ представленій и изготовленіе нѣсколькихъ моделей изъ бумаги. Но эти немногія попытки конкретизаціи, и напротивъ того, наличность весьма тонкихъ соображеній (скажемъ, указаніе разницы между угломъ, какъ частью плоскости, заключенной между парой пересѣкающихся прямыхъ, и угломъ, какъ частью пучка прямыхъ и т. п.), соображеній до споснаго уразумѣнія смысла которыхъ можно, конечно, при нѣкоторой настойчивости и затратѣ энергіи и времени, довести ребенка, заставляютъ насъ признать такой курсъ не столько курсомъ пропедевтическимъ, сколько мастерскимъ сжатымъ изложеніемъ систематическаго курса, которымъ можно при ограниченности времени (какъ это бываетъ въ народной школѣ) завершить предварительно изученный начальный курсъ. Не будемъ же далѣе перечислять немалочисленныхъ пропедевтическихъ курсовъ, книгъ по «наглядной геометріи», по «геометріи конкретной», написанныхъ на русскомъ и иностранныхъ языкахъ, оригинальныхъ и переводныхъ, ибо всѣ они представляютъ собой либо сжатые систематическіе курсы, на подобіе курса Веронезе, далеко не всегда сравнимые съ послѣднимъ по внутреннимъ достоинствамъ, либо курсы типа разсмотрѣнной нами книги Кемпбеля; послѣдніе со стороны матеріала представляютъ извѣстное разнообразіе: Клеро, Фальке отправляются отъ простѣйшихъ геодезическихъ измѣреній [1]), Мартинъ и Шмидтъ все время обращаются въ кругу предметовъ обихода домашней, городской и сельской жизни, дающаго всю совокупность геометрическихъ образовъ.

Но послѣ сказаннаго мы въ правѣ ограничиться одной лишь ссылкой на первую часть названной раньше книги Трейтлейна и уже не останавливаться на характеристикѣ другихъ подобныхъ книгъ даже хотя-бы на такихъ весьма важныхъ для преподавателя работахъ какъ Geometrie der Volksschule Пикселя (въ новой переработкѣ Вилька) или даже сочиненіе Höffler'a Didaktik des Mathematischen Unterrichts, суммирующее многолѣтній опытъ одного изъ наиболѣе талантливыхъ австрійскихъ педагоговъ.

Остающуюся же для доклада часть времени мы посвятимъ краткому обзору курса самого Трейтлейна и другому близкому ему по духу курсу; на нихъ легче будетъ выяснить самые принципы, какими долженъ, какъ казалось-бы, руководствоваться преподаватель, берущійся въ наше время за обученіе первымъ понятіямъ геометріи.

Ни одинъ шагъ курса Трейтлейна не остается необоснованнымъ, въ чемъ легко можетъ убѣдиться читатель, взявшій на себя трудъ внимательно ознакомиться съ выполненнымъ этимъ педагогомъ изслѣдованіемъ возраженій, которыя дѣлались противъ пропедевтическаго курса. Защищать свои взгляды приходится автору не только противъ сознательныхъ противниковъ его плана занятій по геометріи, приходится отстаивать близкую ему мысль и отъ тѣхъ, кто на первый взглядъ является поборникомъ начальнаго курса геометріи, но считаетъ возможнымъ проработать большую и очень большую программу въ какихъ-нибудь 24 часа, то есть одинъ учебный годъ. (Максъ Симонъ). При такой поспѣшности, однако, многое въ области развитія пространственнаго воображенія и мышленія учащихся, ради чего собственно курсъ вводится, остается не затронутымъ, не оставляетъ прочныхъ слѣдовъ въ сознаніи ученика.

---

[1] Въ настоящее время въ Даніи въ одномъ изъ образовательныхъ учрежденій курсъ геометріи съ успѣхомъ изучается по плану Клеро и Фальке, съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями.

Въ заявленіяхъ преподавателей, увѣренныхъ въ томъ, что для пропедевтическаго курса достаточно полугода при 2-хъ часахъ, или даже при одномъ часѣ, нѣтъ недостатка (въ послѣдней формѣ курсъ этотъ и теперь, какъ мнѣ пришлось видѣть при посѣщеніи германскихъ школъ, онъ чаще всего и проводится), причемъ сами они утверждаютъ, что вполнѣ сочувствуютъ идеѣ начальнаго курса и проводятъ ее на дѣлѣ. Авторъ разсматриваемаго сочиненія долженъ отмѣтить также расхожденіе между высказанными въ «Меранскомъ планѣ» основными соображеніями о преподаваніи математики и тѣми деталями плана, которыя посвящены указаніямъ, какъ именно осуществлять начальный курсъ. Возраженія Трейтлейна (числомъ пять) очень и очень существенны и показываютъ, какъ нелегко справиться съ нашей, повидимому, столь несложной и на первый взглядъ едва-ли стоющей такого вниманія задачей, какое удѣляютъ ей нѣкоторые преподаватели. Вспомнимъ о возраженіяхъ противниковъ курса, которые находятъ, что «незачѣмъ учить смотрѣть дѣтей, у которыхъ и безъ того есть глаза», что «интересъ, представляемый подобнымъ курсомъ, можетъ заглушить интересъ къ болѣе важной послѣдующей части занятій по геометріи, имѣющей цѣлью способствовать укорененію привычекъ логическаго мышленія», что «модели тѣлъ содержатъ много такого, что отвлекаетъ вниманіе учениковъ отъ главнаго, отъ постиженія формы», что пропедевтическій курсъ пріучаетъ учениковъ въ теченіе многихъ лѣтъ «къ сужденію наобумъ», къ «приблизительнымъ объясненіямъ» и т. п. Такого рода возраженія раздаются (правда, все рѣже и рѣже) въ Германіи, гдѣ общая методологическая подготовка стоитъ выше, чѣмъ у насъ, и гдѣ накопленный запасъ опыта достаточно великъ и достаточно зарегистрованъ для того, чтобы дать желающему возможность объективно сопоставить результаты занятій по тому или другому плану. Но еще сложнѣе дѣло обстоитъ съ фактическимъ признаніемъ обязательности пропедевтическаго курса геометріи для средней школы въ Россіи и необходимости соотвѣтственныхъ измѣненій въ преподаваніи математики въ школахъ начальныхъ и городскихъ.

Нужна продолжительная работа присутствующихъ здѣсь въ томъ числѣ многихъ и многихъ дѣятелей школы для того, что-бы ясныя, повидимому, для каждаго положенія получили, наконецъ, всеобщее признаніе и были надлежаще поняты.

Но какъ же смотритъ самъ Трейтлейнъ на свою задачу?

Онъ предъявляетъ слѣдующія требованія: [1])

a) Обученіе геометріи въ нашихъ среднихъ школахъ должно быть подраздѣлено на двѣ ступени: низшую и высшую.

b) Методъ обученія на низшей ступени—это «наглядное обученіе геометріи»: оно исходитъ изъ разсмотрѣнія тѣла, выводитъ отсюда различные геометрическіе образы, преобразовываетъ ихъ и создаетъ новые, возбуждаетъ самодѣятельность ученика при помощи выполняемой ими оцѣнки на глазъ, путемъ измѣреній (между прочимъ, на открытомъ воздухѣ), рисованія, лѣпки и ручного труда; оно развиваетъ способность къ тонкому созерцанію и пространственное воображеніе и ведетъ отъ нагляднаго познанія къ доказательству и обоснованію познаннаго.

c) Обученіе на высшей ступени имѣетъ своей основой пріобрѣтенныя раньше представленія и воздвигаетъ, постоянно прибѣгая къ разсмотрѣнію тѣлъ, научное зданіе элементарной геометріи, какъ образецъ дедуктивной науки».

Согласно Трейтлейну, пропедевтическій курсъ геометріи, служа средствомъ для достиженія лучшихъ результатовъ на послѣдующихъ ступеняхъ обученія въ образовательномъ планѣ средней школы, имѣетъ однако значеніе самодовлѣющее. Для достиженія наилучшихъ результатовъ часть предметовъ, служащихъ для ознакомленія съ пространственными соотношеніями должна быть такова, чтобы ученики могли брать ихъ въ руки и осязать (поэтому здѣсь не рекомендуется начинать съ разсмотрѣнія формы комнаты, въ которой находится ученикъ). Равнымъ образомъ непригоднымъ въ виду слишкомъ большой однородности его формы, оказывается, по мнѣнію автора, шаръ.

---

[1]) Напечатанныя въ его книгѣ жирнымъ шрифтомъ.

Трейтлейнъ начинаетъ съ куба, но совершенно не такъ, какъ это дѣлалось въ многочисленныхъ до него появлявшихся руководствахъ. О томъ, какъ понимаетъ онъ наглядность, сказано достаточно выше въ пунктѣ в), изъ котораго мы видимъ, что глазу или, лучше сказать, разсматриванію удѣлено здѣсь опредѣленное мѣсто, но не первенствующее, ибо ребенокъ долженъ тщательно обсудить имъ увидѣнное, воспроизвести потомъ тѣмъ или другимъ путемъ (движеніе рукъ, черченіе, сгибаніе бумаги, изготовленіе модели) обсуждаемый геометрическій образъ, иногда разыскать его въ какомъ-нибудь твореніи архитектуры или инженернаго и декоративнаго искусства, и, наконецъ, время отъ времени создавать новые геометрическіе образы, связанные съ разсмотрѣнными. Представляется также желательнымъ, чтобы постепенно ученики вырабатывали въ себѣ умѣніе отдавать отчетъ въ причинахъ даннаго явленія или данной закономѣрности въ геометрическихъ образахъ. Германъ Тиме, авторъ прекраснаго руководства по геометріи 1), лицо, которое меньше всего можно заподозрить въ непониманіи задачъ систематическаго курса, высказывается слѣдующимъ образомъ 2): «Уже въ пропедевтическомъ курсѣ геометріи главной задачей преподавателя является пробужденіе съ теченіемъ времени въ ученикѣ потребности въ объясненіи геометрическихъ фактовъ въ открытіи связующей ихъ логической зависимости». Приводя мнѣніе Тиме, Трейтлейнъ подчеркиваетъ слова «съ теченіемъ времени» и «потребность», дабы не ввести кого-либо въ заблужденіе, такъ какъ именно эти умозаключенія, незамѣтно сами собой всплывающія при работѣ надъ конкретными задачами, въ концѣ концовъ являются тѣмъ матеріаломъ, болѣе формальное изслѣдованіе котораго становится умственной потребностью учащагося. Итакъ, курсъ Трейтлейна начинается съ разсмотрѣнія игральныхъ костей. Въ живой бесѣдѣ, въ которой послѣдовательно принимаютъ участіе ученики всего класса, выясняются характерныя свойства тѣла съ ними сходнаго, но болѣе крупнаго и болѣе рѣзко опредѣленной формы (кубическій дециметръ).

---

1) Hermann Thieme. Elemente d. geometrie. Berlin, 1912.

2) H. Thieme. Die Umgestalung d. Elementargeometrie. Beilage zum Iahresbericht des Berger-gymnasinms... zu Posen, 1900, s. 25.

Вотъ образецъ такой бесѣды: «Поставьте это тѣло (куб. децим.) на столъ; придайте ему какое-нибудь другое положеніе! Придайте ему еще третье положеніе! Сколькими способами можно его поставить? Нельзя-ли изготовить его изъ папки? Кто знаетъ или видалъ кубы или похожіе на кубъ предметы въ другомъ мѣстѣ?» (Это было общее знакомство). Далѣе слѣдуетъ разсмотрѣніе поверхности: «Положите руку на поверхность куба, который будемъ держать какъ попало. Вы положите руку на другую грань поверхности. (Что означаетъ слово «поверхность?»). Для отличія у меня имѣется здѣсь шаръ»... Сопоставляя шаръ и кубъ, классъ выясняетъ различіе между поверхностями обоихъ тѣлъ. Разсматривая грани, прикладывая руки къ различнымъ гранямъ кубическаго дециметра, сопоставляя ихъ по расположенію съ стѣнами комнаты учащіеся приходятъ къ представленію о параллельности этихъ граней. Далѣе идетъ образованіе того, что авторъ называетъ «Luftwürfel», то есть образованіе куба въ воздухѣ; эта часть изученія куба состоитъ въ томъ, что учащіеся соотвѣтственными движеніями рукъ, выполняемымъ въ направленіяхъ, параллельныхъ гранямъ стоящаго передъ классомъ куба, какъ бы высѣкаютъ изъ воздуха тѣло, имѣющее форму куба. Одинъ изъ учениковъ далѣе долженъ образовать такой «Luftwürfel» большихъ размѣровъ, другой—кубъ размѣровъ малыхъ. Учитель самъ быстро высѣкаетъ въ воздухѣ подобный кубъ передъ глазами класса, а затѣмъ предлагаетъ одному изъ учениковъ положить руку на «верхнюю грань», другому—на «боковую» и т. д. Потомъ кому-нибудь изъ учениковъ предлагается положить обѣ руки сразу на двѣ параллельныя грани, слѣдующему на двѣ другія параллельныя грани... Если прибавимъ, что аналогичнымъ образомъ разсматриваются ребра куба (но не числомъ ихъ и не счетомъ угловъ куба занимается здѣсь авторъ), что ребра и ихъ изображенія сопоставляются съ параллельными имъ гранями и (обратно разыскиваются ребра, параллельныя той или другой грани) что для этой цѣли ученики берутъ то большія, то малыя модели картонныя, деревянныя, металлическія, а въ заключеніе довольно продолжительной высоко-интересной работы (рѣчь о ней будетъ ниже), захватывающей разнообразныя стороны пространственныхъ соотношеній, изготовляютъ модели куба, то мы составимъ себѣ представленіе о «разсматриваніи куба» въ томъ видѣ, какъ его понимаетъ Трейтлейнъ. Мы только что упомянули, что первоначальное описанное уже нами разсмотрѣніе куба отъ изготовленія его модели отдѣлено довольно продолжительной работой изученія элементовъ куба.

Перечислимъ же теперь кратко относящійся сюда матеріалъ, а также назовемъ тѣ статьи, которыя помѣщены у нашего автора вслѣдъ за кубомъ, такъ какъ теперь послѣ сказаннаго мы безъ особаго труда можетъ представить себѣ самый характеръ ихъ разработки. Отъ реберъ куба мы переходимъ къ прямой вообще, прямымъ горизонтальнымъ, отвѣснымъ и наклоннымъ, параллельнымъ и взаимно-перпендикулярнымъ. Далѣе плоскость: плоскости горизонтальныя, отвѣсныя, наклонныя и взаимно-перпендикулярныя. Отрѣзки прямыхъ и ихъ измѣренія. Четыре дѣйствія надъ отрѣзками. Квадратъ; прямыя, соединяющія середины его сторонъ, и діагонали квадрата, вписанные и описанные квадраты; зеркальная симметрія. Развертка куба. Грани куба и его двугранные углы. Діагональныя плоскости. Описаніе куба. Нахожденіе орнаментовъ, въ основѣ которыхъ лежитъ квадратъ, разсѣченіе куба и составленіе новыхъ пространственныхъ образовъ.

Прямая призма съ квадратнымъ основаніемъ; изученіе ея и прямоугольника въ направленіяхъ, упомянутыхъ нами при перечисленіи пунктовъ, относящихся къ кубу и квадрату. Прямая призма съ прямоугольнымъ основаніемъ. Сопоставленіе признаковъ характерныхъ (сходство и различіе) для куба, прямой призмы съ квадратнымъ и прямоугольнымъ основаніемъ.

Прямой цилиндръ. Примѣненіе циркуля. Два круга на плоскости, ихъ взаимное расположеніе.

Шаръ; его разсѣченіе плоскостями; кривизна шара.

Правильный тетраедръ. Равносторонній треугольникъ; изготовленіе послѣдняго изъ бумаги посредствомъ сгибанія; вычерчиваніе его. Уголъ. Разсмотрѣніе угловъ, образуемыхъ другъ съ другомъ различными положеніями стрѣлки на циферблатѣ. Образованіе новыхъ фигуръ. Правильный шестиугольникъ. Двугранные углы тетраедра.

Прямая пирамида, имѣющая основаніемъ равносто ронній треугольникъ. Равнобедренный треугольникъ. Прямоугольный △. Возникновеніе новыхъ образовъ.

Параллелограммъ. Ромбъ и его діагонали. Развертка пирамиды.

Прямой конусъ. Уголъ произвольной величины. Транспортиръ. Показать, что сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Трехгранная пирамида, основаніемъ которой служитъ произвольный треугольникъ.

Сумма угловъ треугольника.

Усѣченная пирамида. Трапеція.

Четыреугольникъ.

Окружность. Таблица обхватовъ круглыхъ и цилиндрическихъ предметовъ, встрѣчающихся въ обиходѣ (стаканъ, тарелка, монета, велосипедное колесо и т. д.). Приближенная величина π.

II. Площади плоскихъ фигуръ. Прямоугольникъ; его превращенія въ отличные отъ него прямоугольники и другія фигуры.

Параллеграммъ; треугольникъ, трапеція, четыреугольникъ; ихъ площади и превращенія ихъ въ другія фигуры путемъ разложенія и разсѣченія на тѣ или другія части въ зависимости отъ требованій заданія. Относящіяся сюда страницы (числомъ 10), вмѣстѣ съ параграфомъ о дополнительныхъ параллелограммахъ трактуютъ вопросъ о равновеликости съ такимъ изяществомъ и обстоятельностью (не говоря уже о доступности), что многое слѣдовало-бы позаимствовать отсюда тѣмъ преподавателямъ, кому приходится проводить систематическій курсъ въ классахъ, въ свое время не прошедшихъ пропедевтическаго курса.

Равновеликость прямоугольника и квадрата. Тутъ уже нѣтъ недостатка въ предлагаемыхъ по тому или другому поводу разнообразныхъ «почему?!.» Такъ, напримѣръ, ученикамъ авторъ (съ увѣренностью въ успѣхѣ) предлагаетъ выяснить такое положеніе: Почему въ прямоугольномъ треугольникѣ (основаніемъ является гипотенуза) квадратъ, построенный на высотѣ, равновеликъ прямоугольнику, сторонами котораго служатъ отрѣзки наибольшей стороны треугольника (образующіеся по обѣ стороны высоты).

Теорема Пиѳагора. Пять ея доказательствъ. Приложенія теоремы Пиѳагора.

Площадь круга. Объемы и вѣса. Перспективное изображеніе куба. Допускаемая при изображеніи погрѣшность противъ перспективы. Объемы призмы, цилиндра, пирамиды и конуса [1]). Къ книгѣ прибавленъ списокъ руководствъ и статей по начальному курсу геометріи на нѣмецкомъ языкѣ, а также особаго рода тетрадка, въ которой воспроизведены чертежи, выполняемые учениками по мѣрѣ прохожденія курса; такихъ чертежей 248 и они могутъ много способствовать правильному пониманію отдѣльныхъ часто тонкихъ соображеній автора.

Мы познакомились съ содержаніемъ нѣсколькихъ курсовъ и попутно отвѣтили почти на всѣ существенные тезисы доклада, кромѣ очень важныхъ 2-го и 3-го тезиса, къ которымъ перейдемъ по обозрѣніи нѣкоторыхъ моментовъ предлагаемаго мной курса, имѣющаго отчасти внутреннее сходство съ курсомъ Трейтлейна, но временами отличающагося отъ него какъ по матеріалу, такъ и по нѣкоторымъ методическимъ пріемамъ, не упомянутымъ ни въ сочиненіи Трейтлейна, ни въ другихъ книгахъ или статьяхъ, посвященныхъ тому же предмету. Само собой разумѣется, что совершенной новизной тутъ обладаетъ лишь сравнительно очень немногое, но это немногое все же можетъ оказаться небезполезнымъ.

Начать изученіе пропедевтическаго курса можно, какъ мнѣ кажется, либо такъ, какъ совѣтуетъ Трейтлейнъ, либо съ сопоставленія куба, шара и цилиндра, либо съ разсмотрѣнія, скажемъ, кубиковъ, находящихся въ рукахъ учениковъ, формы нѣсколькихъ цвѣтковъ и листа папоротника, и плоскихъ крышекъ ученическихъ скамей; хорошимъ началомъ можетъ послужить, если учитель уже нѣсколько знакомъ съ классомъ, небольшая экскурсія къ мѣсту, гдѣ производятся какія-либо земляныя работы, прорываются канавы и т. п. (если, конечно,

---

[1]) Послѣднихъ 12-ти страницъ, посвященныхъ преподаванію геометріи на высшей ступени, мы здѣсь не разсматриваемъ, но очень рекомендуемъ преподавателямъ старшихъ классовъ ознакомиться съ ними.

такого рода работы выполняются по близости, и если вообще такую экскурсію можно совершить безъ ущерба для занятій, предполагаемыхъ въ слѣдующіе за урокомъ часы). Матеріалъ, тщательно продуманный преподавателемъ, можетъ быть весьма разнообразенъ; суть же этихъ первоначальныхъ занятій, проходящихъ, разумѣется, въ видѣ бесѣды, въ томъ, чтобы дать почувствовать учащимся возможность изученія предметовъ со стороны ихъ формы, со стороны ихъ величины, взаимнаго расположенія ихъ отдѣльныхъ частей, дать осязательно почувствовать интересъ къ такому изученію. Но первый урокъ долженъ оставить слѣдъ еще въ видѣ нѣкоторыхъ свѣдѣній. Этими свѣдѣніями будутъ: умѣніе распознавать и называть плоскія и кривыя поверхности, прямыя и ломаныя линіи, умѣніе изготовить изъ бумаги линейку, при помощи которой можно было бы проводить прямыя линіи. Здѣсь, какъ и во всемъ остальномъ, почти сплошь умѣстенъ одинъ только эвристическій методъ, владѣть которымъ и безъ того достаточно хорошо долженъ каждый преподающій въ младшихъ классахъ. Такимъ образомъ мы не видимъ необходимости съ перваго же урока непремѣнно фиксировать вниманіе дѣтей на формахъ опредѣленныхъ геометрическихъ тѣлъ.

Со второго урока у учениковъ должна быть въ рукахъ раздѣленная на сантиметры линейка, которая будетъ служить ученикамъ, между прочимъ, для построенія прямыхъ угловъ въ теченіе всего перваго года. Только на второмъ году встрѣтится необходимость ввести чертежные треугольники, а циркуль понадобится лишь на третій годъ обученія. На урокахъ ариѳметики и географіи учащіеся должны бы выполнять различныя измѣренія аршинами (по крайней мѣрѣ до тѣхъ поръ, пока не будетъ введена метрическая система) въ начальномъ же курсѣ геометріи полезно ограничиться употребленіемъ линейки сантиметровой: эти уроки геометріи и будутъ тѣми уроками, гдѣ совершенно естественно и незамѣтно дѣти ознакомятся съ мѣрами длины въ метрической системѣ. Прямую линію дѣти проводить на бумагѣ умѣютъ, и мы, отправившись во дворъ (или въ залъ) съ нарѣзанными предварительно кусками толстой бичевки (длиной въ 5—6 сажень), научаемся проводить прямыя линіи между опредѣленными точками (если во дворѣ, то вбиваемъ для указанія этихъ точекъ колышки).

Предварительно въ классѣ надо выработать въ общей бесѣдѣ самый пріемъ проведенія прямой между двумя точками. Способъ пользованія шнуркомъ ни въ какомъ случаѣ не долженъ быть указанъ самимъ учителемъ. Только тогда, когда классъ самостоятельно придетъ къ признанію полезности такого пріема, учитель въ правѣ имъ воспользоваться. Сначала прямыя проводятся между двумя точками на доскѣ; потомъ учитель предлагаетъ провести прямую между двумя точками не находящими на одной и той же стѣнѣ класса. Очень хорошо пользоваться при этомъ въ классѣ цвѣтными тесьмами шерстяными или изъ толстой бумаги: онѣ и виднѣе, да и лучше запоминается самый пріемъ [1]).

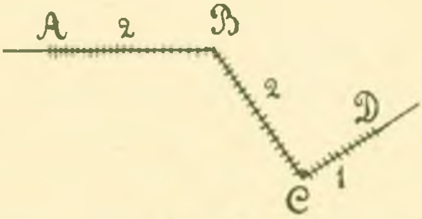
Отступленіе въ сторону прямой линіи сводится главнымъ образомъ къ нѣкотораго рода работамъ въ области все же 3-хъ измѣреній: дѣтямъ приходится перемѣщаться при проведеніи прямыхъ линій на землѣ, приходится мыслить не въ плоскости и въ томъ случаѣ, когда они фактически проводятъ прямую при помощи тесьмы между двумя точками, одна изъ которыхъ взята на стѣнѣ, другая на полу. Изученіе прямой линіи заканчивается изображеніемъ прямыхъ различной величины и ихъ отрѣзковъ на плоскости.

Всѣ, кому приходилось заниматься съ дѣтьми, знаютъ, что проведеніе прямой линіи въ столько-то сантиметровъ возбуждаетъ у дѣтей цѣлый рядъ вопросовъ (какъ провести самую прямую? и т. п.) и на первый разъ не такъ легко для нихъ, какъ могло бы показаться. Прямыя линіи мы сначала проводимъ черным карандашемъ окрашиваемъ ихъ цѣликомъ или только опредѣленные отложенные на нихъ отрѣзки. По-

---

[1]) Не надо прибавлять, что ученики должны знать, что̀ именно они будутъ дѣлать внѣ класса, иначе легко можно произвести нежелательное замѣшательство. Работа внѣ класса должна быть непремѣнно организованной (см. приложеніе II къ книгѣ Юнга: «Какъ преподавать математику». Спб. 1912, вып. II), а не итти въ разбродъ; время отъ времени по предложенію учителя ученики прекращаютъ работу, пріучаются въ нѣсколькихъ словахъ опредѣлять выполняемую ими работу. Скажемъ въ такой формѣ: «Мы проводимъ при помощи натянутаго шнурка прямую линію между тѣмъ то и тѣмъ то»; конечно, эти немногія слова не должны быть подсказаны учителемъ.

томъ переходимъ къ болѣе сложнымъ сочетаніямъ прямыхъ, какъ на чертежѣ [1]. Самый способъ окраски различныхъ отрѣзковъ въ разные цвѣта (въ видѣ ли поперечныхъ короткихъ черточекъ или въ видѣ подрисовыванныхъ снизу тоненькихъ цвѣтныхъ чертъ) имѣетъ въ виду не только увеличеніе интереса къ работѣ проведенія прямыхъ линій, которыя задаются различными по размѣрамъ и по направленію, не только для внесенія элемента эстетическаго, который долженъ привходить во всѣ части курса, не только для того, чтобы получалась каждый разъ работа, удовлетворяющая глазъ ребенка, но и для закрѣпленія необходимыхъ представленій подъ контролемъ мышечнаго чувства; ибо одно дѣло будетъ провести на бумагѣ прямую линію и на ней двумя черточками обозначить концы отрѣзка въ 7 сантиметровъ, а другое дѣло—нанести рядъ поперечныхъ черточекъ на всемъ протяженіи тѣхъ же семи сантиметровъ!



Черт. 1.

Когда дѣти совершенно отчетливо справляются съ относящими сюда задачами, которыя можно (если надо нѣсколько задержать вниманіе дѣтей на этой работѣ) значительно разнообразить, внося фигуры, образованныя пересѣченіемъ прямыхъ и т. п., но не обращая вниманія на углы между прямыми, мы возвращаемся теперь къ тѣламъ. Обычно я беру для изученія прежде всего кубъ и провожу ознакомленіе съ нимъ

---

[1] Почти всѣ чертежи, относящіеся къ докладу, на Съѣздѣ были демонстрированы въ видѣ работъ изъ цвѣтной папиросной бумаги (въ крупномъ масштабѣ), наклеенной на большіе листы черной папиросной бумаги. Какъ выглядятъ соотвѣтственныя работы въ тетрадяхъ учащихся, можно видѣть на исполненныхъ въ краскахъ таблицахъ, приложенныхъ къ первой части учебника геометріи пишущаго эти строки: А. Р. Кулишеръ. Учебникъ геометріи, курсъ пропедевтическій.

примѣрно въ духѣ Трейлейна; не дохожу только до терминовъ «параллельность», «перпендикулярность», другими словами, останавливаюсь на изученіи куба значительно раньше, чѣмъ это дѣляетъ Трейтейнъ, и затѣмъ уже перехожу къ изученію квадрата. Тутъ впервые появляются углы. Группѣ учениковъ (8—10 человѣкамъ) предлагается заполнить одинъ изъ угловъ въ классѣ (интересно, что иногда въ первый моментъ они располагаются вдоль по стѣнамъ и только потомъ выясяется, что уголъ остался не заполненнымъ). Далѣе, всѣ учащіеся достаютъ изъ числа учебниковъ, принесенныхъ въ классѣ какую-либо книгу средняго формата, раскрываютъ ее, примѣрно, по рединѣ и берутъ ее въ руки такъ, чтобы края переплета той и другой половины книги вмѣстѣ съ листами соотвѣтственной книги лежали свободно между большимъ и указательнымъ пальцами каждой руки. Потомъ прижимаемъ остальными четырьмя пальцами переплетъ вмѣстѣ съ листами къ большимъ пальцамъ, находящимся внутри книги, и потомъ уже, при перемѣнѣ положенія рукъ, не измѣняемъ положенія пальцевъ, которыми книгу придерживаемъ.

(Учитель показываетъ, какъ это сдѣлать). Затѣмъ преподаватель предлагаетъ раскрыть книгу на такой уголъ, какъ тотъ, въ которомъ только что стояли ученики. Интересно, что ученики, не зная ни угловъ вообще (какъ разъ передъ тѣмъ, при заполненіи угла, нѣкоторые изъ нихъ съ этимъ заданьемъ справиться не могутъ), ни тѣмъ болѣе двугранныхъ угловъ, съ заданіемъ, за рѣдкими исключеніями, справляются безошибочно. Далѣе, предлагается снова закрыть книгу и раскрыть на уголъ между потолкомъ и стѣной, стѣной и поломъ, причемъ каждый разъ надо располагать обѣ половины переплета такъ, какъ расположены стѣны и потолокъ въ томъ углѣ, который беремъ за образецъ. Позже предподаватель такъ и предлагаетъ скопировать тотъ или другой уголъ. Такимъ образомъ здѣсь опять, хотя ни слова не говорится о параллельныхъ плоскостяхъ, дѣти приводятся интуитивно и путемъ работы зрѣнія (оцѣнка на глазъ, воображеніе пространственное) и мышечнаго чувства къ представленію о равенствѣ двугранныхъ угловъ съ параллельными сторонами.

Опять повторяю, что ни тотъ, ни другой терминъ ни здѣсь, ни позже въ первомъ классѣ не упоминаются. Можетъ еще возникнуть вопросъ, удобно ли копировать въ пространствѣ, при помощи разгибанія книги, всевозможные углы, разъ мы не перемѣняемъ въ то же время положенія пальцевъ, которыми держимъ книгу; не будемъ ли мы при этомъ придавать рукамъ неестественное положеніе? Оказывается, что надо только приноровиться, и вращенія, необходимыя при переходѣ отъ одного угла къ другому, выполняется совершенно плавно, безъ какого-либо излишняго напряженія или необходимости неудобнаго положенія рукъ.

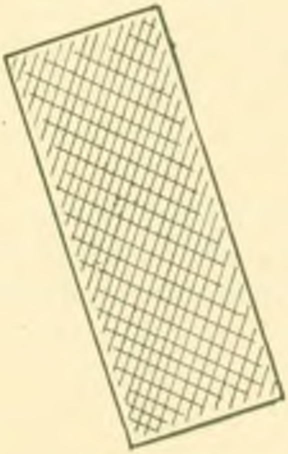
Не надо прибавлять, что эти вращенія, ради которыхъ, собственно, мы предлагаемъ не снимать съ книги пальцевъ, пока производятъ относящіяся сюда упражненія (2 — 3 минуты), вносятъ очень много въ дѣло образованія прочныхъ пространственныхъ представленій посредствомъ мышечнаго чувства.

Когда это упражненіе выполняется достаточно отчетливо, ученикамъ предлагается скопировать при помощи разгибанія книги такой уголъ, какой образуетъ между собой два смежные края классной доски. Интересно, что и тутъ связь между линейными углами и, равными по размѣрамъ двугранными, схватываются сразу безъ запинки.

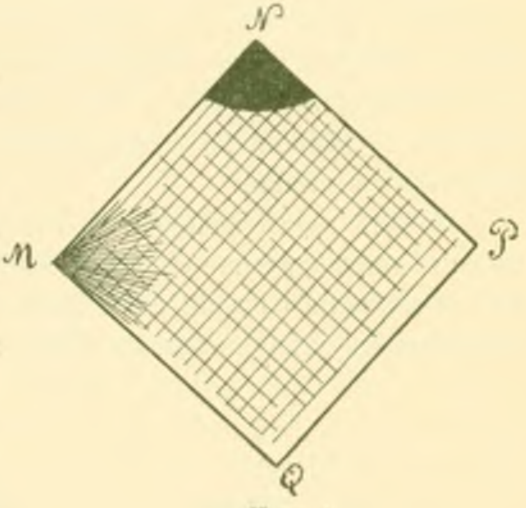
Потомъ идетъ копированіе (въ воздухѣ) при помощи разгибанія книги другихъ угловъ доски, изображеніе ихъ на глазъ, безъ какихъ-либо орудій, въ тетради и «заполненіе» цвѣтнымъ карандашемъ угла на бумагѣ (черт. 2).

Черт. 2.

Тутъ же выясняется попутно значеніе терминовъ уголъ, стороны угла и вершина угла. Такая работа можетъ быть произведена подъ руководствомъ учителя при минимальныхъ указаніяхъ съ его стороны. Во всемъ остальномъ дѣти предоставлены своему соображенію, подкрѣпленному дѣятельностью главнымъ образомъ названныхъ выше двухъ чувствъ. Конечно, учитель является направляющейся силой, но въ то же время нельзя отрицать, что при такомъ веденіи дѣла матеріалъ для дальнѣйшихъ построеній все же самими учениками вырабатывается путемъ цѣлаго ряда сознательныхъ, полусознательныхъ умозаключеній (послѣднія же играютъ немалую роль въ обиходной жизни даже взрослыхъ людей), а попросту воспринимаются. Теперь мы даемъ названіе такому углу, какой представляетъ собой уголъ доски, говоримъ, что это прямой уголъ и спрашиваемъ, какъ разогнуть книгу на большій уголъ, чѣмъ прямой. Какъ удостовѣриться въ этомъ? Тутъ дѣти обыкновенно высказываютъ очень интересныя соображенія. Какъ разогнуть книгу на уголъ, меньшій, чѣмъ уголъ доски, меньшій прямого? Какіе углы мы видимъ въ квадратѣ? Когда мы установимъ, что углы въ квадратѣ прямые, а стороны равны, то наступаетъ время для изготовленія квадрата путемъ сгибанія, для выработки пріема образованія прямого угла путемъ двухъ соотвѣтственныхъ сгибаній бумаги и, наконецъ, къ вычерчиванію квадрата.



Черт. 3.



Черт. 4.

О нѣсколькихъ дополнительныхъ, но очень важныхъ предварительныхъ работахъ чертежнаго характера, дающихъ дѣтямъ возможность съ увѣренностью чертить квадраты по заданной сторонѣ и прямоугольники во всевозможныхъ положеніяхъ, а не только прямоугольники со сторонами, параллельными краямъ тетради, со всякаго рода окраской ихъ угловъ, контуровъ или площадей, можно судить по прилагаемымъ чертежамъ. Образцы чертежей такого рода показаны подъ №№ 3 и 4.

Числовой матеріалъ переплетается тутъ съ геометрическимъ, ученики даютъ попутно словесныя опредѣленія той или другой части работы, причемъ эти словесныя опредѣленія должны быть въ теченіе года усвоены дѣтьми путемъ соотвѣтственныхъ повтореній настолько твердо, чтобы они могли на репетиціи [1]), какую полезно въ надлежащей формѣ устроить въ концѣ года въ видѣ одно - двухъ - часового урока, назвать своимъ именемъ всѣ части изученнаго матеріала. Но объ этой сторонѣ дѣла болѣе здѣсь не буду говорить и перейду прямо къ слѣдующему моменту работы, заслуживающему, какъ мнѣ кажется, нашего вниманія, именно—къ розысканію развертки куба.

Въ нѣкоторыхъ изъ поименованныхъ нами выше курсовъ развертки тѣлъ даны въ формѣ діаграммъ на чертежѣ, а иногда даже въ готовомъ для склеиванія видѣ: надо только ихъ вырѣзать.

Конечно, знакомство съ моделью, особенно изготовленной самимъ ребенкомъ, очень желательно. Но работа въ дидактическомъ отношеніи много выигрываетъ, освѣщая попутно нѣкоторыя стороны геометріи, какъ предмета, если поступить нѣсколько иначе.

Вмѣсто того, чтобы дать діаграмму развертки въ формѣ болѣе или менѣе готовой, можно раздать самые кубики (деревянные небольшіе кубики стоятъ очень недорого и нужны для многихъ другихъ частей курса) каждому изъ учащихся и обсудить вмѣстѣ съ ними (путемъ ли прямого обертыванія бумагой, конечно, выполненнаго не учителемъ, или другимъ

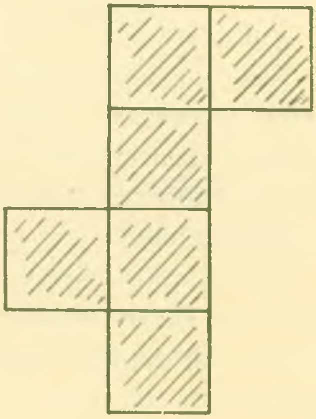
---

[1]) Если репетиція или экзаменъ ни въ какой мѣрѣ не вліяютъ на переводъ въ слѣдующій классъ и носятъ характеръ сводки всего разсмотрѣннаго за годъ, если при томъ они устраиваются безъ предупрежденія учащихся, то эта форма занятій ничуть дѣтей не нервируетъ, а, напротивъ того, вызываетъ у нихъ естественный энтузіазмъ, какимъ всегда у каждаго сопровождается выполненіе любой интересной и совершенно посильной, неутомительной работы.

болѣе тонкимъ пріемомъ), какой видъ долженъ имѣть кусокъ бумаги, которымъ можно было бы обернуть кубъ со всѣхъ сторонъ, при томъ такъ, чтобы лишнихъ кусковъ бумаги не оставалось. Когда классъ опредѣлилъ, что такая обертка, или развертка (небольшое обсужденіе самого термина, къ которому надо подвести дѣтей), состоитъ изъ 6 квадратовъ, вы предлагаете каждому изготовить фигуру, состоящую изъ 6 квадратовъ, указавъ только размѣры сторонъ этихъ квадратовъ.

При этомъ неминуемо натолкнемся на такого рода обстоятельство, что у нѣкоторыхъ учениковъ получатся фигуры, состоящія подобно тѣмъ, какія нашли ихъ товарищи, изъ 6 квадратовъ, но расположеніе квадратовъ здѣсь таково, что образовать кубъ однимъ сгибаніемъ фигуры нельзя. И вотъ эта «ошибка», за минуту передъ тѣмъ вызывавшая у ребенка замѣшательство, становится предметомъ живого обсужденія, изъ котораго классъ выноситъ впечатлѣніе, что при образованіи тѣхъ или другихъ геометрическихъ образовъ рѣшающее значеніе могутъ имѣть не только форма и размѣры отдѣльныхъ элементовъ образа, или всего образа, но и порядокъ, въ которомъ слѣдуютъ эти элементы. Такимъ образомъ, здѣсь дѣтей можно привести къ уразумѣнію того, что геометрія является не только ученіемъ о геометрическихъ величинахъ, но и о расположеніи величинъ въ пространствѣ, то есть къ уразумѣнію той идеи, на которой часто, къ сожалѣнію, совершенно не останавливались въ школѣ (см. чер-

Черт. 5.



Черт. 6.

тежи 5 и 6). Разсмотрѣніе развертки куба въ этомъ смыслѣ даетъ первое указаніе ребенку, которое, конечно, надо развить въ дальнѣйшихъ частяхъ курса геометріи, какъ пропедевтическаго, такъ и систематическаго. По выполненіи ряда чертежныхъ работъ на эту тему по различнымъ числовымъ заданіямъ въ формѣ ли изображенія такихъ фигуръ [1]), изъ которыхъ можно или нельзя было бы образовать кубъ однимъ сгибаніемъ, или въ какой-нибудь другой формѣ и по выясненіи того, что у дѣтей образовались достаточно твердые навыки, мы переходимъ къ изготовленію такой модели изъ папки; какъ видите, этотъ путь нѣсколько длиннѣе, но мнѣ думается, что, идя такимъ путемъ, мы добьемся болѣе цѣнныхъ результатовъ.

Курсъ ариѳметики въ это время даетъ намъ необходимый матеріалъ въ области укрѣпленія навыковъ въ измѣреніи линій прямыхъ и кривыхъ. На прилагаемыхъ снимкахъ [2]) мы

Черт. 7.

какъ разъ видимъ такія измѣренія: здѣсь дѣти измѣряютъ длину зданія; тутъ — обхватъ дерева самодѣльными аршинами въ видѣ бумажныхъ лентъ съ раскрашенными въ два цвѣта вершками; тутъ — одинъ изъ учениковъ, взобравшись на лѣстницу (въ классѣ всегда имѣются ученики настолько ловкіе, что такой подъемъ можно разрѣшить имъ безъ опасенія), а другой

---

[1]) Состоящихъ, конечно, изъ 6 квадратовъ.

[2]) Показываютъ на экранѣ діапозитивы, изображенные у насъ подъ №№ 7—8—9.

внизу—измѣряютъ разстояніе отъ верхней точки до земли по отвѣсу и т. п.

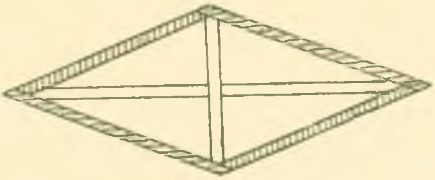
Посмотримъ теперь, какъ перейти къ острому углу. Часто онъ появляется довольно внезапно. Вотъ то-то называется

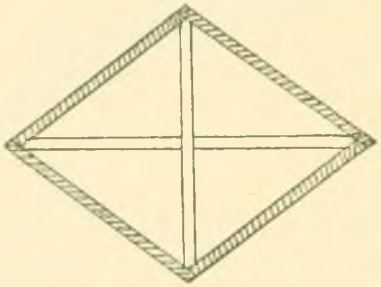
Черт. 8.

острымъ угломъ. Однимъ изъ болѣе естественныхъ переходовъ (можно придумать, конечно, разные пути) къ острому углу будетъ слѣдующій.

Черт. 9.

Вы задаете вопросъ: могутъ ли быть такіе четыреугольники, у которыхъ всѣ стороны были бы равны, но углы не прямые. Дѣти, знакомые съ квадратомъ, склонны отвѣтить (и, дѣйствительно, отвѣчаютъ), что такихъ четыреугольниковъ быть не можетъ. Отдѣльные ученики, думающіе, что такіе четыреугольники существовать могутъ, обычно какъ-то быстро замолкаютъ, и только очень рѣдко находится настойчивый ребенокъ, все же не поддающійся общему голосу. Тогда преподаватель предлагаетъ изготовить четыреугольникъ съ равными сторонами и скрѣпить въ вершинахъ небольшими шпильками, тутъ же изготовленными учениками (въ видѣ маленькой дамской головной шпильки съ прижатыми другъ къ другу концами) изъ розданныхъ учителемъ предварительно нарѣзанныхъ параллельныхъ кусочковъ тонкой отожженной желѣзной проволоки, какая служитъ для изготовленія бумажныхъ цвѣтовъ [1]).


Черт. 10.


Черт. 11.

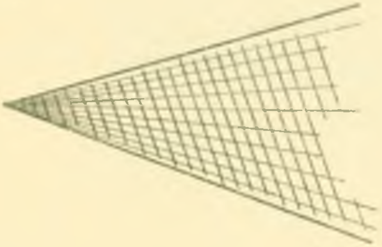
Когда у насъ изготовленъ такой четыреугольникъ, достаточно слегка потянуть за двѣ противоположныя вершины для полученія новыхъ искомыхъ фигуръ. Весь классъ послѣдовательно производитъ рядъ измѣненій этихъ четыреугольниковъ-ромбовъ, изучаетъ свойства угловъ (равенство противоположныхъ угловъ), опредѣляетъ сначала на глазъ, потомъ при помощи фигуръ, согнутыхъ изъ бумаги, уголъ, подъ которымъ пересѣкаются діагонали ромба. Далѣе идутъ работы, чертежнаго характера, построеніе ромбовъ по заданнымъ діагоналямъ (см. чертежи 10 и 11), построеніе ромба по заданной сторонѣ

---

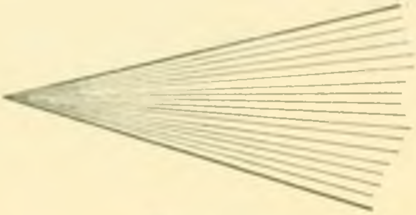
[1]) Каждый такой кусочекъ проволоки имѣетъ въ длину 3—$3^{1}/_{2}$ сантиметра; скрѣпленіе должно быть произведено такъ, что обѣ полоски могли вращаться около шпильки, закругленный конецъ которой служитъ какъ бы головкой, а продѣтые концы расправляются.

(безъ циркуля, при помощи одной только линейки, раздѣленной на сантиметры), далѣе идутъ пересѣченіе двухъ ромбовъ и четырехъ ромбовъ, дающихъ очень красивыя фигуры въ видѣ звѣзды. Раскрашиваніе этихъ фигуръ (пачки карандашей въ 30 копѣекъ хватаетъ дѣтямъ на $1^{1}/_{2}$ — 2 года) доставляетъ учащимся большое удовольствіе.

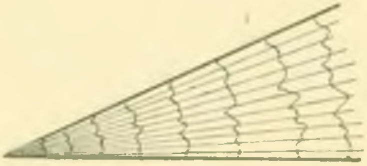
Въ классѣ вопросъ предлагается, напримѣръ, въ такой формѣ: сколько можно провести прямыхъ черезъ ту или другую точку? Иногда отвѣчаютъ, что больше, скажемъ, трехъ или четырехъ нельзя. Постепенно приходимъ къ связкѣ прямыхъ, къ образу, съ которымъ имѣемъ дѣло въ разныхъ частяхъ курса (многогранные углы, пирамиды, симметрія и т. п.). Такъ что есть возможность съ пользою вводить нѣкоторые термины и образы проективной геометріи, сравнительно, рано.



Черт. 12.



Черт. 13.



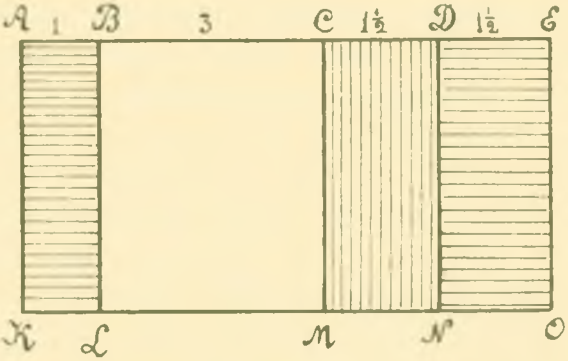
Черт. 14.

Отмѣтимъ еще, что при вычерчиваніи угловъ въ отдѣльности полезно прибѣгать къ разнымъ способамъ штриховки, которые тутъ же закладываютъ представленіе объ углѣ, какъ объ нѣкоторой части плоскости, заключенной между двумя пересѣкающимися прямыми, или какъ о части пучка лучей. (см. чертежи 12, 13 14).

Этотъ послѣдній образъ, естественно, привходитъ въ разныя части нашего курса, наряду съ другимъ образомъ проективной геометріи, который мы тотчасъ воспроизведемъ тутъ, на кафедрѣ, при помощи тесьмъ 1).

На урокахъ ариѳметики при помощи квадратныхъ аршинъ, изготовленныхъ учениками изъ бумаги 2), идетъ изученіе площадей квадратовъ и прямоугольниковъ.

Названный нами матеріалъ составляетъ программу перваго года начальнаго курса геометріи 3). Чтобы не утомлять вашего вниманія, я теперь только бѣгло укажу программу 2-го класса. Она посвящена, главнымъ образомъ, изученію перпендикулярности и параллельности (перпендикулярность прямой къ плоскости и обратно, параллельность плоскостей, параллельность прямыхъ, параллелограммы и т. п. призмы, ихъ боковыя поверхности и объемъ прямыхъ призмъ съ квадратнымъ и прямоугольнымъ основаніями). Не буду теперь разсказывать, какъ все это дѣлается, тѣмъ болѣе, что предполагаю во второй половинѣ этого года выпустить пропедевтическій курсъ, гдѣ все, относящееся къ тѣмъ или другимъ моментамъ работы, будетъ достаточно пояснено.



Черт. 15.

Остановлюсь развѣ на томъ, что параллельность плоскостей предшествуетъ здѣсь разсмотрѣнію параллельности прямыхъ, что

---

1) На кафедрѣ 8 человѣкъ, держа концы растянутыхъ тесьмъ, воспроизводятъ пересѣченіе 4 прямыхъ въ одной точкѣ.

2) См. Юнгъ. Какъ преподавать математику. Спб. 1912, вып. II, прил. 2-ое.

3) Разсчитанные, какъ было сказано, на три года; каждый годъ мы считаемъ въ 25—26 учебныхъ часовъ.

очень умѣстны здѣсь [1]) чертежныя работы, изображенныя у насъ въ краскахъ на двухъ діаграммахъ, представляющихъ рядъ прямоугольниковъ одинаковой высоты, прилегающихъ другъ къ другу длинами, а другими своими сторонами къ одной и той же прямой (см. черт. 15). Современемъ, когда мы обратимся къ параллельнымъ линіямъ, производимое нами теперь выполненіе этихъ чертежей, перейдя въ область твердыхъ навыковъ, сослужитъ свою службу. Очень полезны также производимыя на глазъ измѣренія, причемъ послѣднія измѣренія поверхности посредствомъ прекраснаго дешеваго пособія, угломѣра, стоющаго всего нѣсколько копеекъ, предложеннаго И. Н. Кавуномъ.

Третій классъ. Шаръ и связка; окружность и пучекъ. Симметрія. Подобіе. Пиѳагорова теорема. Измѣреніе площадей параллелограмма и трапеціи. Треугольники и ихъ площади. Треугольная пирамида. Конусъ. Цилиндръ. Шаръ. Объемы и поверхности этихъ тѣлъ.

Если мы сопоставимъ этотъ курсъ съ курсомъ Трейтлейна, то увидимъ, что въ нѣсколькихъ частяхъ своихъ оба они сильно расходятся: у Трейтлейна, напримѣръ, значительно раньше говорится о перпендикулярности, симметріи, параллельности. Нѣтъ у него въ нѣкоторыхъ мѣстахъ того подробнаго розысканія образа, какой намъ представляется желательнымъ. Но при этихъ расхожденіяхъ, я лично съ чувствомъ большого удовлетворенія проработалъ бы съ учениками такой курсъ, какъ Трейтлейна, если бы въ этомъ представилась необходимость. Вся-то суть въ томъ, что курсъ Трейтлейна или другой аналогичный важны для насъ не столько съ той точки зрѣнія, что представляютъ собой готовый матеріалъ, который можно буквально скопировать, сколько потому, что они показываютъ намъ, какъ подойти къ этому еще не достаточно разработанному вопросу проведенія пропедевтическаго курса, вопросу настолько невыясненному, что иногда, какъ мы

---

[1]) Какъ примѣръ того, насколько разнообразны области, изъ которыхъ можетъ черпать преподаватель матеріалъ для нашего курса, укажу, что къ этимъ построеніямъ я пришелъ подъ вліяніемъ чтенія неевклидовой геометріи, гдѣ они встрѣчаются; идею же окрашенныхъ пятенъ позаимствовалъ изъ работы, производимой еще лѣтъ 20 тому назадъ талантливымъ петербургскимъ педагогомъ Юліей Ивановной Фаусекъ. Въ этомъ году вышла ея интересная книжка—пособіе «Бумажное Царство».

видѣли выше, мѣсто курса пропедевтическаго можетъ занять у преподавателя сокращенный сжатый курсъ систематическій.

Поэтому мы высказываемъ убѣжденіе, что равноцѣнныхъ пропедевтическихъ курсовъ можетъ быть очень много, что надъ ними слѣдуетъ поработать на практикѣ всѣмъ, кого этотъ вопросъ въ ближайшее время интересуетъ; надо внести въ это дѣло всю личную изобрѣтательность, чтобы общіе труды могли пойти впослѣдствіи на пользу другимъ товарищамъ по работѣ. При наличности же ряда руководствъ, нами названныхъ, еще болѣе важно выработать теперь хоть нѣкоторые критеріи того курса, который мы въ правѣ были бы назвать пропедевтическимъ курсомъ геометріи. Такими критеріями могли бы служить, мнѣ кажется бы, слѣдующія положенія.

1) Пропедевтическій курсъ геометріи долженъ удовлетворять всѣмъ строгимъ требованіямъ общей дидактики, принимающей во вниманіе особенности того или другого возраста, и въ силу этого основанной на разумной (не утрированной) самодѣятельности учащихся.

2) Матеріалъ, изучаемый здѣсь, не долженъ быть очень великъ. Все разсмотрѣнное должно стать прочнымъ достояніемъ учащихъ и перейти при посредствѣ планомѣрной классной (отчасти домашней у ребенка работы) въ область твердыхъ навыковъ.

3) Слово должно сопутствовать всему тому, что выполняетъ мысль и рука учащаго.

4) Матеріалъ долженъ быть связанъ съ тѣми пространственными представленіями, которыя ребенокъ вынесъ или можетъ вынести изъ повседневнаго опыта, а также съ нѣкоторыми сторонами строительнаго и инженернаго искусства и твореній природы.

5) Изучаемые образы должны быть связаны извѣстной зависимостью; возникновеніе новыхъ образовъ изъ старыхъ весьма важно. Образы трехъ измѣреній должно цѣлесообразно сочетать съ изображеніемъ фигуръ на плоскости.

6) На матеріалѣ должны отпечатлѣваться, въ извѣстной мѣрѣ, пріемы мышленія новыхъ геометровъ (текучесть геометрическихъ образовъ).

7) Въ немъ должны всплыватъ разсужденія и обобщенія характера (особенно въ заключеніи) доказательнаго.

8) Тщательно продуманъ долженъ быть переходъ отъ начальнаго курса къ слѣдующей части занятій по геометріи.

Черт. 16.

Пусть же ученики, вооруженные знаніями, пріобрѣтенными въ пропедевтическомъ курсѣ, приступятъ къ работѣ систематическаго курса съ рядомъ вопросовъ и запросовъ, пусть неослабѣвающая напряженность занятій въ систематическомъ курсѣ придетъ на смѣну теперешней пассивности мышленія, и тогда сопоставленіе работы учениковъ, прошедшихъ пропедев-

Черт. 17.

тическій курсъ, по сравненію съ занятіями тѣхъ учениковъ, которые сразу или почти сразу приступали къ изученію доказательствъ, будетъ лучшей защитой нашихъ пожеланій въ этой области и убѣдительнымъ доказательствомъ въ необходимости подобныхъ занятій въ глазахъ каждаго объективнаго друга школы.

Этимъ я позволю себѣ закончить свой докладъ, а теперь намъ покажутъ на экранѣ два діапозитива, передающихъ работу учащихся въ классѣ: это—прямой уголъ, а тутъ вы видите—уголъ острый [1].»

Тезисы.

I. Введеніе въ учебный планъ пропедевтическаго курса геометріи не только преслѣдуетъ задачу болѣе цѣлесообразнаго выполненія послѣдующаго систематическаго курса, но является однимъ изъ необходимыхъ условій правильнаго развитія мышленія ребенка, неразрывно связаннымъ съ общими воспитательными и образовательными цѣлями школы.

II. При практическомъ проведеніи пропедевтическаго курса для преподавателя необходимы, съ одной стороны, проработаные уже другими преподавателями образцы подобныхъ курсовъ (въ формѣ ли книгъ, журнальныхъ статей, пробныхъ уроковъ и т. п.), но еще болѣе необходимо отчетливое пониманіе критеріевъ правильности построенія подобнаго курса.

III. Отчетливое уясненіе подобныхъ критеріевъ позволяетъ преподавателю вносить цѣлесообразныя видоизмѣненія въ выполненную уже другими преподавателями работу.

IV. Матеріалъ, вводимый въ подобный курсъ, долженъ имѣть большое отношеніе къ тому міру пространственныхъ и обыденныхъ представленій, въ которомъ живетъ ребенокъ.

V. Курсъ долженъ оказать до извѣстной степени помощь другимъ предметамъ перваго цикла учебнаго плана средней школы (ариѳметикѣ, географіи, естествознанію).

---

[1] Снимки №№. 16 и 17.

VI. Пропедевтическій курсъ долженъ, съ одной стороны, способствовать обученію нѣкоторыхъ важнѣйшихъ свойствъ пространства, способствовать, такъ сказать, выработкѣ «пространственной грамотности», съ другой стороны, внести свою долю въ дѣло развитія мышленія и умѣнія правильно формулировать умозаключеніе.

VII. Часть вопросовъ систематическаго курса геометріи будетъ основательно разсмотрѣна въ курсѣ пропедевтическомъ.

VIII. Элементъ эстетическій (развитіе художественнаго вкуса) долженъ привходить во всѣ части пропедевтическаго курса.

IX. Всѣ точки зрѣнія, которыми руководствуются строители систематическаго курса геометріи, не могутъ не оказать своего вліянія также на курсъ пропедевтическій.

X. Проведеніе пропедевтическаго курса въ средней школѣ въ теченіе болѣе или менѣе значительнаго промежутка времени (10—20 лѣтъ) не останется безъ вліянія также на дальнѣйшее построеніе курса систематическаго.

XI. Работа по выработкѣ пропедевтическаго курса можетъ оказаться полезной для начальной школы.

XXIX Къ вопросу о постановкѣ преподаванія математики, главнымъ образомъ аналитической геометріи и анализа безконечно-малыхъ, въ реальныхъ училищахъ Кавказскаго Учебнаго Округа.

Докладъ Б. К. Крамаренко (Тифлисъ).

«Въ виду того особеннаго интереса, который вызвала къ себѣ программа по математикѣ 1908 года для седьмого класса реальныхъ училищъ, я взялъ на себя смѣлость остановить на короткое время Ваше благосклонное вниманіе на томъ, какъ поставлено дѣло преподаванія математики въ седьмыхъ классахъ реальныхъ училищъ на одной изъ обширнѣйшихъ окраинъ нашей родины—на Кавказѣ.

Цѣлесообразная постановка преподаванія математики, оживленіе этого преподаванія путемъ введенія практическихъ занятій и возбужденія у учащихся активнаго интереса къ работѣ составляли и составляютъ предметъ постоянныхъ заботъ Кавказскаго Учебно-Окружного Начальства. Конечно, такой крупный фактъ, можно сказать цѣлый переворотъ, который былъ произведенъ въ 1908 г. введеніемъ въ курсъ средней школы началъ высшей математики, до сихъ поръ огражденной китайской стѣной отъ такъ называемой низшей, не могъ не вызвать со стороны Управленія Округа соотвѣтствующихъ мѣропріятій для болѣе правильнаго проведенія въ обиходъ школы новаго курса.

Въ первую очередь былъ выдвинутъ вопросъ о необходимости выработки методическихъ программъ по всѣмъ отдѣламъ этого курса. Таковыя программы ежегодно и составлялись предметными комиссіями реальныхъ училищъ Округа. Но дѣло было новое, учебниковъ, пособій и методическихъ руководствъ не было, а поэтому трудъ предметныхъ комиссій въ теченіе первыхъ лѣтъ, въ значительной мѣрѣ способствуя болѣе планомѣрному выполненію программъ, вмѣстѣ съ тѣмъ не давалъ возможности окончательно разрѣшить многочисленные вопросы, возникавшіе какъ при установленіи послѣдовательности прохожденія отдѣльныхъ частей программы и распредѣленіи матеріала по четвертямъ учебнаго года, такъ и при обсужденіи способовъ изложенія нѣкоторыхъ статей курса. По мѣрѣ же накопленія опыта въ теченіе послѣднихъ трехъ лѣтъ явилась и возможность, основываясь на наблюденіяхъ, почерпнутыхъ изъ практики, приступить къ выясненію всѣхъ вопросовъ, назрѣвшихъ за это время. Въ виду этого, въ концѣ 1911—12 учебнаго года Окружное начальство предложило предметнымъ комиссіямъ реальныхъ училищъ окончательно составить методически разработанныя программы по всѣмъ отдѣламъ курса математики седьмого класса и представить къ нимъ объяснительныя записки, которыя и должны будутъ разсматриваться въ комиссіи изъ преподавателей математики среднихъ учебныхъ заведеній г. Тифлиса въ началѣ 1912 г. Съ начала же текущаго учебнаго года для опытной повѣрки цѣнности тѣхъ или другихъ методовъ преподаванія организованы примѣрные уроки, сопровождаемые подробнымъ разборомъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, для полнаго освѣщенія вопроса о постановкѣ преподаванія математики въ седьмыхъ классахъ реальныхъ училищъ, Управленіемъ Округа была произведена анкета всѣхъ подвѣдомственныхъ ему училищъ по ниже-изложеннымъ пунктамъ.

1. Не имѣетъ ли мѣста подготовительная работа для ознакомленія учащихся съ идеей функціональной зависимости въ предыдущихъ (по отношенію къ седьмому) классахъ, и въ чемъ она въ этомъ случаѣ выражается?

2. По какимъ руководствамъ и задачникамъ преподаватели проходятъ курсъ съ учащимися, и какія измѣненія желательны въ этихъ учебныхъ пособіяхъ?

3. Какъ приступаютъ преподаватели къ ознакомленію учащихся съ началами анализа безконечно-малыхъ?

4. При прохожденіи курса математики не предлагается ли учащимся вычерчивать графики для уясненія идеи функціональной зависимости?

5. Насколько, по наблюденіямъ преподавателей, учащіеся сознательно примѣняютъ свои познанія по аналитической геометріи и анализу безконечно-малыхъ къ рѣшенію задачъ.

6. Какіе отдѣлы курса наиболѣе затрудняютъ учащихся и какими пріемами преподаватели стараются облегчить учащимся усвоеніе этихъ отдѣловъ.

7. Какія мѣры могли бы вообще облегчить учащимся усвоеніе курса математики 7-го класса и привести его въ органическую связь съ курсами математики предшествующихъ классовъ.

Результаты этой анкеты, объяснительныя записки и методическія программы предметныхъ комиссій реальныхъ училищъ Кавказскаго Учебнаго Округа, равно какъ и отчеты о письменныхъ испытаніяхъ по математикѣ въ седьмыхъ классахъ этихъ училищъ и доставили мнѣ обширнѣйшій матеріалъ, изъ котораго я черпалъ свѣдѣнія, нужныя для настоящаго сообщенія.

Поставивши своей задачей изложить фактическую сторону дѣла и подвести итоги трудовъ предметныхъ комиссій, я въ дальнѣйшемъ воздержусь отъ всякихъ личныхъ заключеній, тѣмъ болѣе, что я надѣялся, и не напрасно на этомъ Первомъ

Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики услышать много цѣннаго относительно нѣкоторыхъ крайне сложныхъ вопросовъ о постановкѣ преподаванія математики въ седьмыхъ классахъ реальныхъ училищъ. Съ особымъ вниманіемъ я прислушивался къ мнѣніямъ и резолюціямъ, вынесеннымъ здѣсь, какъ къ результатамъ коллективной работы всѣхъ тружениковъ русской школы въ области преподаванія математики.

Въ свою очередь, я льщу себя надеждой, что тѣ статистическія свѣдѣнія и тѣ пожеланія предметныхъ комиссій реальныхъ училищъ цѣлаго Учебнаго Округа, которыя я буду имѣть честь доложить Вамъ, помогутъ, хоть въ самой даже незначительной степени, разрѣшенію общаго вопроса о наиболѣе цѣлесообразныхъ методахъ прохожденія курса математики въ седьмомъ классѣ реальныхъ училищъ или, быть можетъ, о необходимой реформѣ преподаванія математики какъ въ нихъ, такъ и вообще во всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Обращаясь теперь къ выполненію своей непосредственной задачи, я прежде всего позволю себѣ остановить Ваше вниманіе на вопросѣ о предварительномъ ознакомленіи учащихся съ идеей функціональной зависимости въ первыхъ шести классахъ реальныхъ училищъ Кавказскаго Учебнаго Округа.

Принципіально необходимость такого ознакомленія считается очевидной предметными комиссіями училищъ, и въ той или иной формѣ такое ознакомленіе въ значительномъ большинствѣ училищъ ведется, какъ видно изъ слѣдующихъ цифръ:

изъ 13 реальныхъ училищъ Округа въ одномъ вовсе не имѣетъ мѣста такое ознакомленіе;

въ двухъ—это ознакомленіе учащихся производится неявно, безъ упоминанія терминовъ функція и т. д., а ограничивается, повидимому, лишь указаніями въ извѣстныхъ отдѣлахъ курса на то, что измѣненія одной величины отражаются опредѣленнымъ образомъ на значеніяхъ другой. Предметная комиссія одного изъ этихъ училищъ ссылается на то, что основной принципъ педагогики не рекомендуетъ нагружать учащихся какъ понятіями, такъ и терминами такими, которые сейчасъ къ дѣлу не прилагаются, такъ что пока не изучаются свойства функцій (при помощи производныхъ), нѣтъ основаній ни выяснять понятіе о «функціи», ни употреблять самый терминъ;

въ 7 училищахъ явно вводится понятіе о функціи, объ аргументѣ, о процессѣ измѣненія; не во всѣхъ, однако, упомянутыхъ учебныхъ заведеніяхъ это ознакомленіе ведется съ одинаковой полнотой; предметныя комиссіи двухъ изъ нихъ указываютъ на то, что такому ознакомленію отводится мало мѣста, и оно носитъ нѣсколько отрывочный характеръ; въ протоколѣ одного изъ училищъ по этому поводу говорится: «ученики еще не обладаютъ понятіемъ о непрерывности измѣненія функціи, поэтому попадающіеся случаи разрыва тригонометрическихъ функцій при критическомъ значеніи аргумента не поддаются въ этихъ классахъ выясненію»;

въ 3 училищахъ ознакомленіе съ идеей функціональной зависимости ведется не только на урокахъ математики, но и физики; и сопровождается вычерчиваніемъ графикъ.

Въ протоколахъ предметныхъ комиссій намѣчаются и отдѣлы, изъ которыхъ главнымъ образомъ черпается матеріалъ для ознакомленія учащихся съ идеей функціональной зависимости:

1. Ариѳметика. Прямо и обратно-пропорціональныя величины.
2. Алгебра. Теорія уравненій.
3. Геометрія. а) Теорія предѣловъ.
   б) Всѣ теоремы, которыя устанавливаютъ метрическія соотношенія между элементами фигуръ.
   в) Приложеніе алгебры къ геометріи.
4. Тригонометрія. Процессъ измѣненія круговыхъ функцій.

По вопросу о томъ: какъ, когда и въ какомъ объемѣ слѣдуетъ вести такое ознакомленіе учащихся съ идеей функціональной зависимости, мнѣнія комиссій расходятся. Необходимость выполнить оффиціальную программу, боязнь, потерявъ время на «внѣпрограммную работу», не пройти положеннаго курса, новизна дѣла, разбросанность отдѣловъ, къ которымъ приурочивается ознакомленіе учащихся съ идеей функціональной зависимости — все это кладетъ неизгладимый отпечатокъ на заключенія комиссій.

Несмотря, однако, на существующія разногласія предметныхъ комиссій, въ большинствѣ реальныхъ училищъ Кавказскаго Учебнаго Округа ознакомленіе учащихся съ идеей функціональной зависимости, какъ видно изъ предыдущаго, въ большей или меньшей степени уже въ настоящее время имѣетъ мѣсто. Вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо замѣтить, что по свидѣтельству предметныхъ комиссій нѣкоторыхъ реальныхъ училищъ, гдѣ уже въ предшествующіе годы практиковалось ознакомленіе учащихся съ идеей функціональной зависимости и въ особенности въ тѣхъ изъ нихъ, въ которыхъ эта идея проводилась и на другихъ урокахъ въ связи съ графической интерпретаціей ея, замѣчается болѣе легкое и сознательное усвоеніе учащимися курса математики седьмого класса.

Въ отношеніи же времени начала ознакомленія учащихся съ этой идеею замѣчается два теченія среди предметныхъ комиссій. Однѣ изъ нихъ (большинство) считаютъ наиболѣе удобнымъ, ограничиваясь лишь общими указаніями въ курсѣ первыхъ пяти классовъ, начать болѣе детальное ознакомленіе учащихся съ этой идеей съ курса тригонометріи шестого класса; другія (меньшинство) находятъ возможнымъ приступить къ этому ознакомленію уже съ курса алгебры 4-го класса и начать вычерчиваніе графикъ въ этомъ же классѣ. Какое изъ этихъ теченій окажется болѣе жизненнымъ, и будетъ ли возможно при существующей оффиціальной программѣ вести ознакомленіе учащихся съ идеей функціональной зависимостью съ достаточной полнотой и безъ ущерба для обязательнаго курса съ 4-го класса, или же для этого необходима полная реформа преподаванія математики въ реальныхъ училищахъ, къ сожалѣнію, сейчасъ, въ виду недостаточнаго количества опытныхъ данныхъ, сказать нельзя.

Что же касается подробностей, какъ и въ какой мѣрѣ можетъ быть осуществлено ознакомленіе учащихся въ первыхъ шести классахъ реальныхъ училищъ съ идеей функціональной зависимости, то, хотя предметными комиссіями и намѣчены отдѣлы оффиціальной программы, изъ которыхъ можно черпать матеріалъ для указанной цѣли, но выработка систематическаго плана занятій ждетъ еще своего осуществленія.

Въ виду этого было бы крайне желательно имѣть подобный планъ, разработанный въ связи съ оффиціальной программой, для опытнаго испытанія его на практикѣ.

Въ заключеніе для иллюстраціи методовъ ознакомленія учащихся къ идеей функціональной зависимости, я позволю себѣ на нѣсколько минутъ задержать Ваше вниманіе на подробномъ описаніи одного изъ нихъ, практикуемомъ въ Темрюкскомъ реальномъ училищѣ.

«Въ текущемъ году первоначальное ознакомленіе съ понятіемъ о функціональной зависимости введено въ программу алгебры 4-го класса. Опытъ этотъ уже произведенъ, и по заявленію комиссіи результаты его оказались удачными. Ходъ къ рѣшенію работъ въ этомъ направленіи былъ таковъ. При переходѣ 2-хъ уравненій съ двумя неизвѣстными произведенъ былъ разборъ задачи, изъ условій которой возможно составить лишь одно уравненіе съ двумя неизвѣстными; далѣе шло рѣшеніе одного уравненія съ 2-мя неизвѣстными посредствомъ произвольнаго подбора числовыхъ значеній для одного изъ неизвѣстныхъ и соотвѣтствующаго вычисленія другого; такимъ образомъ выяснилась неопредѣленность задачи, приводящейся къ одному уравненію съ двумя неизвѣстными, и понятіе о функціональной зависимости между двумя величинами, связанными однимъ уравненіемъ; вмѣстѣ съ тѣмъ самимъ ученикамъ предлагалось привести примѣры функціональной зависимости, съ которыми они познакомились въ курсѣ ариѳметики 3-го класса (прибыль съ капитала, функція времени оборота и т. п.).

Далѣе шло ознакомленіе съ прямоугольной системой координатъ, правиломъ Декарта и составленіе графикъ.

При этомъ исходными пунктами служили: извѣстный ученикамъ способъ опредѣленія широты и долготы мѣста на картѣ и составленіе графикъ температуры (измѣненія температуры воздуха, измѣненія температуры больного съ теченіемъ болѣзни).

Всѣ эти предварительныя работы производились въ классѣ на спеціально разграфленной въ клѣтку классной доскѣ.

Затѣмъ выполнялось построеніе точекъ по даннымъ ихъ координатамъ (знакомство съ терминами: «координаты», «абсцисса», «ордината); построеніе по точкамъ прямой, выражаемой даннымъ уравненіемъ; при этомъ работа производилась на доскѣ и въ тетрадяхъ учениками при требованіи самаго тщательнаго выполненія чертежа (хотя-бы и карандашемъ). Въ томъ, что уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными выражаетъ прямую, ученики убѣждались, конечно, только практически, ибо соотвѣтствующее доказательство можно вывывести лишь въ 5-мъ классѣ, какъ интересную иллюстрацію подобія треугольниковъ. При построеніи графикъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, ученики находили точки пересѣченія этихъ графикъ, и такимъ образомъ было выяснено наглядно, что два уравненія съ двумя неизвѣстными могутъ имѣть, вообще говоря, лишь одну пару корней (общихъ). Далѣе слѣдовало рѣшеніе двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными сначала графическимъ путемъ, а затѣмъ общеизвѣстными пріемами. Послѣ ряда упражненій въ рѣшеніи уравненій съ двумя неизвѣстными алгебраическими способами, ученики были ознакомлены съ общими видами уравненія съ двумя неизвѣстными: $ax+by=c$ и $y=mx+n$ и затѣмъ съ задачей—составить уравненіе прямой по координатамъ ея двухъ точекъ.

Въ настоящее время курсъ доведенъ до рѣшенія задачъ на составленіе двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Отдѣлъ о рѣшеніи двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными будетъ законченъ разборомъ уравненій равносильныхъ и несовмѣстимыхъ, при чемъ для иллюстраціи будутъ вычерчиваться графики подобныхъ уравненій.

Необходимо замѣтить, что курсъ 4-го класса по алгебрѣ, какъ естественное продолженіе курса третьяго класса, начатъ съ рѣшенія уравненій, отдѣлы же о дѣленіи алгебраическихъ выраженій, разложеніе на множители отнесены на вторую часть курса и намѣчены для прохожденія въ связи съ буквеннымъ рѣшеніемъ уравненія».

Заканчивая этой иллюстраціей очеркъ о подготовкѣ учащихся въ первыхъ шести классахъ реальныхъ училищахъ Кавказскаго Учебнаго Округа къ болѣе сознательному усвоенію ими курса 7-го класса, я попытаюсь вкратцѣ изложить результаты трудовъ предметныхъ коммиссій этихъ училищъ по вопросу о наиболѣе цѣлесообразномъ распредѣленіи матеріала по математикѣ въ этомъ классѣ.

Выработать методическія программы по всѣмъ отдѣламъ курса, установить послѣдовательность прохожденія различныхъ отдѣловъ его на основаніи существующей между ними связи по содержанію, намѣтить количество уроковъ, которое необходимо посвятить каждому отдѣлу, выбрать наиболѣе соотвѣтствующія намѣченному плану занятій учебныя пособія—вотъ основные вопросы, подвергавшіеся всестороннему обсужденію на засѣданіяхъ предметныхъ комиссій.

Не имѣя возможности входить въ подробности, я ограничусь лишь указаніемъ на характерныя особенности программъ.

По ариѳметикѣ курсъ во всѣхъ реальныхъ училищахъ проходится въ объемѣ министерской программы за исключеніемъ Бакинскаго реальнаго училища, которое находитъ возможнымъ при этомъ и повторить весь курсъ ариѳметики.

По алгебрѣ оффиціальная программа въ 6 училищахъ дополняется ученіемъ о комплексныхъ выраженіяхъ въ тригонометрической формѣ, формулой Моавра и рѣшеніемъ двучленныхъ уравненій съ помощью комплексныхъ выраженій. Особенное вниманіе удѣляется теоріи равносильныхъ уравненій, потерѣ уравненіями корней и введенію ихъ (съ чѣмъ ученики уже отчасти бываютъ ознакомлены въ 5-мъ классѣ) и изслѣдованію уравненій.

По тригонометріи значительную часть курса 7-го класса въ четырехъ реальныхъ училищахъ преподаватели успѣваютъ пройти въ шестомъ классѣ. Рѣшеніе тригонометрическихъ уравненій обыкновенно приурочивается къ изученію теоріи уравненій по алгебрѣ.

Оффиціальная программа по тригонометріи дополняется въ большинствѣ ознакомленіемъ учащихся со способомъ введенія вспомогательнаго угла для приведенія выраженій къ логариѳмическому виду, столь необходимымъ для рѣшенія сложныхъ случаевъ треугольниковъ и уравненій. Въ качествѣ примѣра я позволю себѣ привести выдержку изъ методической программы Кутаисскаго реальнаго училища по вопросу о тригонометрическихъ уравненіяхъ.

1. Уравненія, обѣ части котораго содержатъ одну и ту же круговую функцію аргумента.

2. Обѣ части уравненія однородны относительно Sinx и Cosx.

3. Уравненія, приводящіяся къ однороднымъ относительно Sinx и Cosx.

4. Уравненія, изъ которыхъ исключаются Sinx и Cosx введеніемъ Sin2x.

5. Уравненія, рѣшаемыя съ помощью разложенія на множители послѣ перенесенія всѣхъ членовъ въ одну сторону.

6. Уравненія, рѣшаемыя на основаніи періодичности тригонометрическихъ функцій.

7. Уравненія, рѣшаемыя способомъ введенія вспомогательнаго угла.

8. Уравненія со многими неизвѣстными.

Бакинское реальное училище вводитъ начала сферической тригонометріи.

Курсъ анализа безконечно-малыхъ проходится обыкновенно въ послѣдовательности министерской программы, хотя въ 8 училищахъ свѣдѣнія о неопредѣленномъ интегралѣ сообщаются учащимся раньше свѣдѣній объ опредѣленномъ интегралѣ.

Два училища указываютъ на желательность сокращенія отдѣла объ объемахъ и поверхностяхъ круглыхъ тѣлъ въ виду его однообразія.

По аналитической геометріи большинство комиссій послѣ общихъ свѣдѣній о декартовой системѣ координатъ считаетъ необходимымъ основательно ознакомить учащихся съ ученіемъ о геометрическихъ мѣстахъ и способомъ составленія уравненій ихъ и съ геометрической интерпретаціей уравненій; лишь послѣ этого находятъ возможнымъ приступить къ выводу уравненій прямой.

При выводѣ основныхъ свойствъ коническихъ сѣченій предпочитаютъ пользоваться и тригонометріей, кромѣ 4 училищъ, а для болѣе яснаго усвоенія учащимися этой довольно трудной для нихъ части курса прибѣгаютъ къ помощи моделей.

Общее ученіе о центрѣ и діаметрахъ предпосылается (въ 8 училищахъ) приведенію уравненій коническихъ сѣченій къ каноническому виду.

Что же касается до времени прохожденія отдѣльныхъ частей курса, то въ этомъ отношеніи большинство училищъ устанавливаетъ приблизительно одинаковый порядокъ: къ изученію аналитической геометріи и анализа безконечно малыхъ приступаютъ одновременно, и оба эти отдѣла проходятся въ теченіе всего учебнаго года. Въ 2 училищахъ—Владикавказскомъ 2-омъ и Шемахинскомъ—анализъ безконечно-малыхъ начинаютъ изучать только со второй четверти, а въ Ейскомъ—только со второго полугодія.

Курсъ алгебры проходится въ теченіе 1-ой и 2-ой четверти почти во всѣхъ реальныхъ училищахъ Округа. Исключеніе составляютъ: Грозненское реальное училище, гдѣ алгебра проходится въ теченіе всего учебнаго года, Тифлисское и Кутаисское, въ которыхъ курсъ алгебры заканчивается въ 3-ю четверть, и совершенно особнякомъ стоитъ Кубанское: въ немъ весь курсъ алгебры проходится въ 4-ю четверть.

Вся программа по ариѳметикѣ выполняется въ большинствѣ училищъ въ 3-ю или 4-ю четверть; исключеніе въ этомъ случаѣ составляетъ Владикавказское 2-ое реальное училище, которое относитъ прохожденіе курса ариѳметики на первое полугодіе учебнаго года.

По тригонометріи теоретическій курсъ заканчивается почти во всѣхъ училищахъ въ теченіе перваго полугодія, а 3-я и 4-я четверть посвящаются практическимъ упражненіямъ въ рѣшеніи уравненій и сложныхъ случаевъ треугольника.

Что же касается до учебныхъ пособій, которыми пользуются въ реальныхъ училищахъ Кавказскаго Учебнаго Округа, то мы ограничимся обзоромъ учебниковъ и задачниковъ по аналитической геометріи и анализу безконечно-малыхъ.

По аналитической геометріи самымъ употребительнымъ учебникомъ является «Основаніе аналитической геометріи на плоскости»—Д. Горячева (принятъ въ 8 реальныхъ училищахъ). Въ 4 училищахъ пользуются «Основаніями аналитической геометріи» — К. Рашевскаго, причемъ въ одномъ изъ нихъ въ видѣ учебнаго пособія рекомендуются «Основанія Аналитической Геометріи»—К. Б. Пеніонжкевича, и въ 3 училищахъ учебникомъ Войнова.

Въ 4 училищахъ введенъ задачникъ по аналитической геометріи Казарова, а въ одномъ—Кильдюшевскаго.

По анализу безконечно-малыхъ также самымъ распространеннымъ является учебникъ Горячева (въ 8 реальныхъ училищахъ).

Въ 3—пользуются Войновымъ, въ одномъ—Киселевымъ и еще въ одномъ—Пеніонжкевичемъ.

Въ трехъ реальныхъ училищахъ введенъ задачникъ Минина.

Пожеланія предметныхъ комиссій по поводу этихъ учебниковъ сводятся къ слѣдующему.

Относительно учебника Д. Горячева предметныя комиссіи выражаютъ слѣдующія пожеланія.

1. Слѣдовало бы ясно установить понятіе о дифференціалѣ, которое, по мнѣнію многихъ предметныхъ комиссій, изложено въ учебникѣ непонятно.

2. Производную отъ сложной функціи вывести проще.

3. Снабдить учебникъ болѣе обширнымъ подборомъ задачъ изъ разныхъ областей знанія, а не ограничиваться лишь примѣрами, требующими механическаго примѣненія извѣстныхъ формулъ.

По поводу учебника Горячева—«Основанія аналитической геометріи на плоскости» высказаны предметными комиссіями слѣдующія пожеланія.

1. Слѣдовало бы болѣе развить отдѣлъ о геометрическихъ мѣстахъ.

2. Необходимо совершенно опустить въ этомъ отдѣлѣ первый примѣръ—выводъ нормальнаго уравненія прямой съ помощью перемѣны направленія осей координатъ—и замѣнить его рядомъ примѣровъ возрастающей трудности.

3. Необходимо ввести въ учебникъ составленіе уравненій прямыхъ, параллельныхъ осямъ координатъ.

4. Приведеніе уравненія прямой къ нормальному виду можно было бы упростить сразу, введя множителя m.

5. Глава о полярныхъ координатахъ нуждается въ дальнѣйшемъ развитіи.

6. Слѣдовало снабдить руководство болѣе разнообразными задачами—особенно отдѣлъ о геометрическихъ мѣстахъ.

По поводу учебника Рашевскаго—«Основанія аналитической геометріи»—предметныя комиссіи указываютъ на желательность слѣдующихъ измѣненій.

1. Необходимо развить отдѣлъ объ окружности.

2. Упростить чисто геометрическій выводъ свойствъ коническихъ сѣченій.

3. По возможности слѣдовало бы избѣгать всѣхъ доказательствъ вращеніемъ и перегибаніемъ въ курсѣ аналитической геометріи, представляющей полную возможность изслѣдовать свойства фигуръ аналитическимъ методомъ.

4. Необходимо провѣрить условія нѣкоторыхъ задачъ (№ 145, 162, 215).

5. Измѣнить невѣрно данные отвѣты нѣкоторыхъ задачъ (62, 136, 212).

Предметныя комиссіи нѣкоторыхъ реальныхъ училищъ находятъ крайне необходимымъ изданіе спеціальнаго задачника по анализу безконечно-малыхъ, приспособленнаго къ курсу 7-го класса реальныхъ училищъ.

Несомнѣнно, было бы крайне полезно для дѣла, если бы гг. составители учебниковъ и задачниковъ по математикѣ для 7-го класса реальныхъ училищъ приняли бы во вниманіе тѣ пожеланія предметныхъ комиссій, которыя съѣздъ признаетъ основательными и внесли бы соотвѣтствующія измѣненія въ свои руководства.

Переходя теперь къ вопросу о введеніи учащихся въ курсъ анализа безконечно-малыхъ, я, не имѣя возможности входить въ детали, ограничусь лишь указаніемъ на то, что на первый планъ предметными комиссіями выдвигается отчетливое усвоеніе учащимися теоріи предѣловъ и свойства непрерывности функцій; въ подробностяхъ же программъ замѣчаются тѣ или другія особенности, перечисленіе которыхъ большой роли для уясненія даннаго вопроса сыграть не можетъ. Поэтому я ограничусь лишь однимъ наиболѣе интереснымъ, по моему мнѣнію, примѣромъ изъ практики Тифлисскаго реальнаго училища. Вотъ выдержка изъ протокола предметной комиссіи этого училища.

«Общая идея, вводящая учащихся седьмого класса въ кругъ новыхъ для нихъ понятій строится въ общихъ чертахъ въ такой послѣдовательности. Математику, какъ науку о законахъ измѣненія величинъ, формально можно охарактеризовать, назвавъ ее ученіемъ о функціяхъ (понятіе о функціи является для учениковъ уже не новымъ). Изученіе любого явленія природы приводитъ насъ къ основному общему началу—къ измѣненію по законамъ функціональной зависимости однихъ величинъ отъ другихъ. Величина можетъ подлежать математическому изученію лишь съ того момента, когда она измѣрена, когда получено число, дающее намъ ясное представленіе о ея значеніи; съ этого момента весь процессъ измѣненія величины будетъ характеризоваться измѣненіемъ числа, ее измѣряющаго. Всѣ величины, наблюдаемыя въ природѣ, сплошныя; измѣненія ихъ непрерывны, въ то время какъ измѣненія числа разрывны; число можетъ измѣнятся только черезъ большія или меньшія интервалы. Сближеніе характера измѣненія числа съ измѣненіемъ величины достигается введеніемъ понятія о безконечно-маломъ. Развитіе понятія о безконечно-маломъ тѣсно связано вообще съ понятіемъ о перемѣнномъ. Въ виду такого соображенія курсъ анализа безконечно-малыхъ открывается съ выясненія учащимся понятія о процессѣ измѣненія величины съ подраздѣленіемъ входящихъ въ процессъ величинъ на постоянныя и перемѣнныя и классификаціей послѣднихъ. Слѣдуетъ затѣмъ естественный переходъ къ теоремамъ о безконечно-малыхъ и къ теоріи предѣловъ. Ознакомивши учащихся съ положеніями названной теоріи и ея геометрическими приложеніями въ качествѣ иллюстраціи ея важнаго значенія, преподаватель приступаетъ къ болѣе детальной разработкѣ понятія о функціяхъ и классификаціи послѣднихъ. Подоспѣвшее къ этому времени ознакомленіе учащихся съ методомъ координатъ на урокахъ аналитической геометріи дѣлаетъ легкимъ переходъ къ геометрическому представленію функцій одного аргумента, съ каковыми, по преимуществу, и приходится имѣть дѣло во всемъ курсѣ седьмого класса. При этомъ вездѣ, гдѣ удобно, подчеркивается различіе между непрерывными и разрывными функціями путемъ вычерчиванія графикъ и доказательства непрерывности нѣкоторыхъ функцій, и дается понятіе о maximum'ѣ и minimum'ѣ. При изученіи какого-либо процесса измѣненія послѣ рѣшенія вопроса о томъ, въ какую сторону измѣняется функція, въ сторону ли увеличенія или уменьшенія, тотчасъ же является вопросъ, съ какой скоростью она измѣняется.—Скорость измѣненія линейной функціи, какъ отношеніе приращенія этой функціи къ приращенію ея аргумента, сопоставляется со скоростью равномѣрнаго движенія. Слѣдующій затѣмъ переходъ къ неравномѣрному движенію, гдѣ скорость въ каждый моментъ есть величина, зависящая отъ положенія точки на траекторіи, гдѣ для опредѣленія скорости является необходимымъ разлагать аргументъ (время) на безконечно-малые элементы, подготовляетъ учащихся къ усвоенію, какъ понятія о существованіи производной, такъ и о томъ, что производная есть вообще функція того же аргумента, что и данная. Геометрическое значеніе производной въ дальнѣйшемъ укрѣпляетъ въ представленіи учащихся указанныя понятія. Развитіе ученія о производныхъ и его приложенія уже не представляютъ для учащихся особыхъ затрудненій».

Всѣ комиссіи считаютъ крайне желательной иллюстрацію курса анализа безконечно-малыхъ графическимъ изображеніемъ процесса измѣненія функцій.

Относительно же способа пользованія геометрическими образами при прохожденіи курса анализа безконечно-малыхъ—мнѣнія комиссій разошлись; однѣ изъ нихъ находятъ полезнымъ выяснять сущность изучаемаго свойства функціи сперва графически, а затѣмъ излагать аналитическое доказательство существованія этого свойства; другія считаютъ болѣе продуктивнымъ пользоваться геометрической интерпретаціей лишь какъ иллюстраціей уже аналитически доказаннаго свойства функціи.

Не менѣе интереса, чѣмъ самый способъ передачи учащимся содержанія курса 7-го класса по математикѣ, представлялъ вопросъ о степени сознательности, съ которой ученики пользуются своими знаніями по анализу и аналитической геометріи при рѣшеніи задачъ.

Въ виду этого Учебно-Окружное начальство и запросило предметныя комиссіи училищъ сообщить ему свои наблюденія надъ учащимися въ этомъ направленіи.

Изъ отвѣтовъ предметныхъ комиссій выяснилось, что по наблюденіямъ преподавателей (изъ 10-ти предметныхъ комиссій—

3 не дали отвѣта) учащіеся вообще сознательно примѣняютъ свои познанія, причемъ больше сознательности и больше интереса обнаруживаютъ они при рѣшеніи задачъ по аналитической геометріи, гдѣ имъ приходится имѣть дѣло съ болѣе конкретнымъ матеріаломъ, чѣмъ при рѣшеніи задачъ по анализу безконечно-малыхъ, отличающихся большой отвлеченностью.

Такимъ образомъ, опасенія, что начала высшей математики окажутся недоступными учащимся въ средней школѣ, надо признать неосновательными. Тѣмъ не менѣе, въ протоколахъ предметныхъ комиссій всюду разсѣяны жалобы на затрудненія, встрѣчаемыя преподавателями при прохожденіи курса математики въ 7-мъ классѣ, благодаря большему объему этого курса, его многопредметности при малой связи между отдѣльными частями его, недостаточности времени, отведеннаго на прохожденіе его и отсутствіи методически составленныхъ учебниковъ и руководствъ.

Вотъ что говоритъ по этому поводу предметная комиссія Бакинскаго реальнаго училища: «Предметная комиссія въ своихъ засѣданіяхъ пришла къ заключенію, что число уроковъ, положенное на прохожденіе курса математики въ 7-мъ классѣ, недостаточно для успѣшности выполненія программы. Въ настоящее время ученики при 5 урокахъ должны выполнить программу по, такъ называемому, спеціальному курсу и по тригонометріи, сверхъ того сдѣлать нѣкоторыя дополненія по курсу элементарной алгебры и ариѳметики. Обиліе матеріала не позволяетъ при маломъ количествѣ уроковъ, какъ показалъ опытъ, изложить въ полнотѣ нѣкоторые отдѣлы программы, напримѣръ, интегральное исчисленіе или приложенія интегральнаго и дифференціальнаго исчисленія къ геометріи, или же выяснить столь трудныя понятія, какъ дифференціалъ и пр., которыя требуютъ для усвоенія продолжительнаго времени. Въ дѣйствительности приходится лишь слегка касаться нѣкоторыхъ изъ этихъ вопросовъ, а слѣдовательно, отчасти не достигать цѣли самаго предмета, которая, по мнѣнію комиссіи, заключается въ выясненіи ученикамъ сущности новыхъ для нихъ методовъ.

Комиссія полагаетъ, что число уроковъ по математикѣ въ седьмомъ классѣ должно быть увеличено, по крайней мѣрѣ, на одинъ, съ такимъ разсчетомъ, чтобы 1 урокъ шелъ на тригонометрію, 1—на дополнительныя статьи по алгебрѣ и ариѳметикѣ, 2—на аналитическую геометрію, 2—на анализъ безконечно-малыхъ».

Много (9) аналогичныхъ выдержекъ можно было бы привести изъ протоколовъ другихъ комиссій.

По этому же поводу рецензентъ въ отчетѣ о письменныхъ работахъ по математикѣ, исполненныхъ въ 1910 г. на выпускныхъ экзаменахъ въ реальныхъ училищахъ Кавказскаго Учебнаго Округа, пишетъ на страницѣ 220:

«Недостаточная удовлетворительность результатовъ письменныхъ испытаній въ реальныхъ училищахъ зависитъ до нѣкоторой степени отъ сложнаго состава курса математики въ дополнительномъ классѣ, въ связи съ недостаточнымъ числомъ уроковъ, назначенныхъ на его прохожденіе, что не можетъ содѣйствовать основательному усвоенію курса и надлежащей постановкѣ практическихъ упражненій».

Въ цѣляхъ облегченія учащимся прохожденія курса и большей сознательности его усвоенія, многими реальными училищами уже и въ настоящее время практикуется рядъ мѣръ.

1. Ведется въ большей или меньшей мѣрѣ подготовительная работа къ курсу седьмого класса въ предшествующихъ ему классахъ какъ на урокахъ математики, такъ (въ нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ) и на урокахъ другихъ предметовъ.

2. Планъ занятій по математикѣ ежегодно просматривается всѣми предметными комиссіями и въ него вносятся измѣненія на основаніи опыта предыдущаго года.

3. Въ нѣкоторыхъ (Кубанское, Ейское, Бакинское) училищахъ назначаются дополнительные уроки по математикѣ или вечернія занятія.

4. Въ двухъ училищахъ (Грозненское и Бакинское) при прохожденіи физики примѣняются начала анализа безконечно-малыхъ.

Дѣлая все отъ нихъ зависящее, предметныя комиссіи указываютъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что для правильной постановки дѣла желательны, съ одной стороны, углубленіе и интесификація уже практикуемыхъ ими мѣръ, а съ другой—проведеніе ряда новыхъ мѣръ, съ помощью которыхъ обученіе математикѣ въ 7-мъ классѣ можетъ быть поставлено на должную высоту.

Подведя итоги всему вышесказанному и въ частности пожеланіямъ предметныхъ комиссій по вопросу объ улучшеніи постановки преподаванія въ 7-хъ классахъ реальныхъ училищъ, мы придемъ къ слѣдующему.

I. По своему содержанію курсъ по математикѣ седьмого класса реальныхъ училищъ вполнѣ доступенъ пониманію учащихся этого класса.

II. Несмотря на это при выполненіи программы по математикѣ этого класса, преподавателю приходится сталкиваться съ очень значительными затрудненіями. Самыя серіозныя изъ нихъ слѣдующія:

А. Отсутствіе органической связи между программами по математикѣ для 7-го класса и программами по этому предмету предшествующихъ ему классовъ.

Б. Недостаточность времени (5 уроковъ въ недѣлю), отведеннаго на прохожденіе черезвычайно большого по объему и новаго по методамъ матеріала по математикѣ въ седьмомъ классѣ реальныхъ училищъ.

В. Дефекты существующихъ руководствъ и задачниковъ по математикѣ для этого класса.

III. Для устраненія вышеуказанныхъ затрудненій и въ видахъ болѣе основательнаго усвоенія учащимися курса математики этого класса, предметныя комиссіи реальныхъ училищъ Кавказскаго Учебнаго Округа намѣчаютъ слѣдующія мѣры:

А. Планомѣрно организованная подготовительная работа съ учащимися въ первыхъ шести классахъ реальныхъ училищъ, имѣющая своей задачей какъ повышеніе общаго уровня математическаго развитія учащихся, такъ и ознакомленіе ихъ съ идеей функціональной зависимости между величинами. Достиженію указанной цѣли могутъ въ значительной степени содѣйствовать практическія занятія съ учащимися по математикѣ какъ на урокахъ этого и другихъ предметовъ, такъ и во внѣурочное время. Въ частности для ознакомленія учащихся съ идеей функціональной зависимости не только нужно использовать многіе отдѣлы элементарной математики, но эта идея должна настойчиво проводиться и на урокахъ другихъ предметовъ, гдѣ къ этому представляется возможность, причемъ слѣдуетъ обратить вниманіе на вычерчиваніе учащимися графикъ.

Б. Вмѣстѣ съ тѣмъ является настоятельно необходимымъ, чтобы въ учебникахъ и руководствахъ для первыхъ шести классовъ реальныхъ училищъ, какъ по математикѣ, такъ и по другимъ предметамъ, тѣ отдѣлы, которые могутъ быть использованы для ознакомленія учащихся съ идеей функціональной зависимости, были переработаны въ соотвѣтствіи съ этой задачей.

В. Желательно также, чтобы въ курсахъ и учебникахъ для 7-хъ классовъ реальныхъ училищъ по физикѣ и космографіи было введено примѣненіе началъ высшей математики тамъ, гдѣ это можетъ имѣть мѣсто.

Г. Желательно, чтобы учебники по аналитической геометріи и анализу безконечно-малыхъ были переработаны, какъ въ смыслѣ болѣе методическаго изложенія матеріала, такъ и въ смыслѣ обогащенія ихъ достаточнымъ количествомъ не только примѣровъ, но и задачъ изъ разныхъ областей знанія. Особенно острая нужда замѣчается въ подобномъ задачникѣ по исчисленію безконечно-малыхъ.

Д. Для облегченія прохожденія учащимися курса математики 7-го класса реальныхъ училищъ желательно было бы перенести нѣкоторые отдѣлы этого курса по тригонометріи, алгебрѣ и ариѳметикѣ въ курсъ 6-го класса, даже если бы для этого пришлось бы тамъ назначить одинъ лишній урокъ по математикѣ.

Е. Вмѣстѣ съ тѣмъ крайне желательно увеличеніе числа уроковъ по математикѣ въ седьмомъ классѣ реальныхъ училищъ, что дало бы возможность преподавателю выяснить учащимся съ должной полнотой на цѣлесообразно подобранныхъ примѣрахъ ту простоту и изящество, которыя вносятъ вновь сообщенные имъ методы въ рѣшеніе многочисленныхъ вопросовъ, а также и ознакомить ихъ съ достаточной полнотой съ основаніями интегральнаго исчисленія, проходимаго при настоящемъ положеніи дѣла лишь крайне поверхностно.

Ж. Вообще непрерывному развитію дѣла обученія математикѣ въ значительной мѣрѣ могли бы способствовать:

а) веденіе преподавателями рабочихъ журналовъ;

b) повѣрка тѣхъ или иныхъ методовъ преподаванія путемъ опытныхъ уроковъ;

c) съѣзды преподавателей математики, хотя бы одного и того же учебнаго округа;

d) изданіе спеціальнаго органа, посвященнаго вопросамъ методики математики въ средней школѣ; при немъ могъ быть организованъ ученическій отдѣлъ;

e) учрежденіе особаго бюро, которое могло бы, хотя бы за плату, доставлять свѣдѣнія о всѣхъ новыхъ какъ русскихъ, такъ и заграничныхъ изданіяхъ по вопросамъ преподаванія математики».

---

† Д. В. Ройтманъ.

Въ ночь съ 22 на 23 декабря 1911 г., послѣ тяжкой неизлѣчимой болѣзни, Д. В. Ройтманъ скончался, не достигнувъ сорокатѣтняго возраста. Тезисы къ предположенному имъ докладу онъ написалъ карандашомъ, уже прикованный къ постели и лишенный всякой надежды на выздоровленіе... Онъ умеръ на своемъ посту.

О систематическомъ курсѣ элементарной геометріи въ средней школѣ.

Тезисы

къ докладу Д. В. Ройтмана (Спб.).

1. Невозможность для средняго ученика усвоить толково и съ пользой систематическій курсъ геометріи въ Эвклидовской (или видоизмѣненной Лежандровской) формѣ есть положеніе, твердо установленное, какъ долгой практикой преподаванія, такъ и съ точки зрѣнія раціональныхъ требованій педагогики и дидактики.

2. Главная причина невозможности лежитъ въ огромномъ несоотвѣтствіи непосредственно интереснаго научнаго матеріала курса, непосредственно интересныхъ результатовъ дидуктивной системы съ тѣмъ сложнымъ и громоздкимъ аппаратомъ мате-

матической діалектики, которымъ эти результаты добываются. Молодой развивающійся умъ всегда будетъ склоненъ интересоваться и придавать значеніе самой истинѣ неизмѣримо болѣе, чѣмъ ведущему къ ней доказательству, и для него, чѣмъ доказательство нагляднѣе, короче и проще, чѣмъ быстрѣе ведетъ къ цѣли, тѣмъ лучше. Вкусъ къ системѣ, какъ цѣпи доказательствъ, развивается значительно позже, и по характеру средней школы въ нынѣшнее время его удовлетвореніе могло бы быть отнесено уже къ спеціализаціи предметовъ.

3. Новѣйшія изслѣдованія, споры и полемика въ области, такъ называемаго, «обоснованія» геометріи не только не помогаютъ разрѣшить задачу, но движутся какъ разъ въ обратномъ направленіи, увеличивая до колоссальныхъ размѣровъ именно аппаратъ діалектики и не внося ничего новаго въ смыслѣ новыхъ выводовъ и истинъ. Подтвердить это легко хотя бы ссылкой на модную теперь «Энциклопедію» Вебера и Велльштейна, которую намъ У. К. М. Н. Пр. счелъ нужнымъ даже рекомендовать для раздачи ученикамъ въ награду! Конечно, всѣми этими вещами слѣдуетъ пользоваться, но не для построенія всего курса, а только въ случаяхъ, если встрѣчается тамъ какое-нибудь улучшеніе вывода, упрощеніе доказательства или критическія указанія.

4. Матеріальное содержаніе обычнаго курса элементарной геометріи невелико. Это—ученіе о подобіи многоугольниковъ, теорема Пиѳагора и рядъ результатовъ измѣренія геометрическихъ величинъ (длинъ, площадей и объемовъ), кончая объемомъ шара. Если сопоставить съ этимъ содержаніемъ ту сложную цѣпь логическихъ заключеній, которою онъ добывается, то цѣпь эта не можетъ не казаться слишкомъ тяжеловѣсной, насильственно и неестественно извнѣ навязанной.

5. Курсъ и долженъ быть расположенъ такъ, чтобы указанные результаты достигались на возможно краткомъ, простомъ и наглядномъ пути, хоть это вовсе не значитъ, что возможно обойтись вовсе безъ болѣе или менѣе строгихъ отвлеченныхъ доказательствъ, ограничиваясь, напримѣръ, тѣмъ, что называютъ пропедевтическимъ курсомъ или «лабораторнымъ» методомъ. Есть возрастъ (лѣтъ 14—15), когда потребность въ доказательствѣ, въ болѣе или менѣе строгомъ обоснованіи

уже есть и чувствуется, и когда всякія «пропедевтики» или «лабораторіи» въ области математическаго обученія покажутся уже или игрушками, или скучною вещью. Такого рода пріемамъ преподаванія должно быть отведено почетное мѣсто, но на болѣе раннихъ ступеняхъ, и развиваться они должны съ первой же ступени параллельно съ обученіемъ ариѳметикѣ.

6. Курсъ элементарной геометріи долженъ быть поэтому радикально перестроенъ, и задача эта—весьма труднаго свойства. Принципомъ для ея рѣшенія нужно взять слѣдующій. Не доказывать теоремъ, для всякаго ученика очевидныхъ, когда для пониманія доказательство въ сотни разъ труднѣе самой теоремы и только затемняетъ эту теорему въ головѣ ученика. Тогда рядъ «теоремъ» о перпендикулярахъ, параллельныхъ перейдетъ въ разрядъ аксіомъ, и отъ этого ровно никто и ничто не проиграетъ.

7. Тогда уже въ началѣ курса можетъ быть поставлено интересное, наглядное и полезное ученіе о симметричныхъ фигурахъ, причемъ, напримѣръ, теоремы объ условіяхъ равенства треугольниковъ могутъ быть связаны непосредственно съ этимъ ученіемъ, а не образовывать какой-то краеугольный камень всей системы.

8. Теорію подобія должно сразу расширить и обобщить на всякія фигуры, пользуясь вначалѣ лишь грубыми наглядными методами разсужденія и отложивъ ихъ обоснованіе до болѣе или менѣе развитой теоріи предѣловъ.

9. Ученіе объ измѣреніи отрѣзковъ, о пропорціональности ихъ и о несоизмѣримыхъ отрѣзкахъ можетъ быть значительно улучшено слѣдующимъ образомъ: а) старый Эвклидовскій методъ нахожденія общей наибольшей мѣры долженъ быть выброшенъ, такъ какъ онъ не вразумителенъ ни теоретически, ни практически. Теоретически онъ грубо эмпириченъ и вовсе не является вычисленіемъ отношенія двухъ отрѣзковъ, основывается лишь на предварительныхъ произвольныхъ предположеніяхъ, практически же такъ никто отрѣзковъ не измѣряетъ; б) здѣсь достаточно установить слѣдующія истины: A) существуютъ соизмѣримые отрѣзки, и ихъ отношеніе можетъ быть выражено отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ; B) существуютъ несоизмѣримые отрѣзки, и нагляднѣйшій примѣръ

этого—діагональ и сторона квадрата (но отнюдь не введенный въ курсъ сравнительно недавно примѣръ равнобедреннаго треугольника угломъ въ $^{2}/_{5}$; б) теоремы этой части курса надо расположить такъ, чтобы еще до теоремы Пиѳагора можно было вывести, что отношеніе діагонали квадрата къ его сторонѣ выражается числомъ $\sqrt{2}$; в) дальше слѣдуетъ понятіе объ измѣреніи съ данною степенью точности, а въ случаѣ несоизмѣримости—съ неограниченно большою степенью точности.

10. Способъ предѣловъ долженъ быть изложенъ, съ одной стороны, возможно наглядно въ противоположность обычной отвлеченной ничего не говорящей сознанію ученика сухости, съ другой стороны, болѣе расчлененъ и разработанъ разъясненіемъ понятія о перемѣнной, о функціи, и соотвѣтствующихъ значеніяхъ двухъ параллельно мѣняющихся перемѣнныхъ и т. п. Здѣсь нуженъ большой рядъ конкретныхъ примѣровъ изъ ариѳметики, алгебры, геометріи, и вычисленіе съ предѣлами (по крайней мѣрѣ, теоремы объ умноженіи и дѣленіи) не должно быть обойдено. Самое примѣненіе способа къ геометрическимъ фигурамъ въ началѣ должно быть возможно просто, не бѣда, если даже грубо, и лучше дать болѣе изящные и строгіе способы въ высшемъ классѣ, куда съ успѣхомъ давно уже можно ввести (какъ въ Р. У.) понятія о функціи, производной и интегралѣ и приложить ихъ именно къ вычисленію элементарныхъ фигуръ (круга, пирамиды, цилиндра, конуса, шара).

11. Полезнымъ дополненіемъ къ геометрическимъ приложеніямъ теоріи предѣловъ можетъ явиться способъ Кавальери для сравненія равновеликихъ фигуръ.

12. Много новаго и реформирующаго курсъ элементарной геометріи можно почерпнуть изъ Начертательной Геометріи Монжа и изъ, такъ называемой, синтетической (проективной) Геометріи Понселе («Проективныя свойства фигуръ») и Штейнера («Зависимость геометрическихъ фигуръ другъ отъ друга»).

Тезисы къ докладу С. А. Богомолова:

Обоснованіе геометріи въ связи съ постановкой ея преподаванія.

1. Преподаваніе геометріи имѣетъ цѣлью, помимо сообщенія начальныхъ геометрическихъ свѣдѣній, развитіе двухъ умственныхъ способностей: a) пространственной интуиціи и b) логическаго мышленія.

2. Важнѣйшей причиной, почему въ настоящее время эти цѣли не осуществляются въ достаточной мѣрѣ, является смѣщеніе двухъ различныхъ методологическихъ моментовъ—интуиціи и логики—въ школьномъ построеніи геометріи.

3. Обоснованіе геометріи, какъ отрасли чистой математики, требуетъ, чтобы въ аксіомахъ были сформулированы всѣ важнѣйшія свойства основныхъ геометрическихъ образовъ, необходимыя для дедукціи остальныхъ; въ дальнѣйшемъ построеніи геометріи интуиціи отводится лишь вспомогательная и подчиненная роль.

4. Невозможность предложить приступающимъ къ изученію геометріи курсъ, построенный по этому плану, приводитъ къ мысли разбить преподаваніе геометріи на двѣ части:

a) *пропедевтическій курсъ,* основанный на широкомъ пользованіи интуиціей, лабораторнымъ методомъ и т. п.; цѣль его — накопленіе фактическихъ знаній и развитіе интуиціи пространства;

b) *систематическій курсъ,* гдѣ на первый планъ выдвигаются формально-логическіе интересы; его цѣль—изложеніе геометріи, какъ «гипотетически-дедуктивной системы».

5. Традиціонный матеріалъ элементарной геометріи можетъ оживить и пополнить ея новѣйшія теоріи: проективная геометрія, начертательная геометрія (въ пропедевтическомъ курсѣ), не-эвклидова геометрія (въ систематическомъ курсѣ).

---

*) См. стр. 24, докладъ С. А. Богомолова.

Пренія къ докладамъ С. А. Богомолова (стр. 24), П. А. Долгушина (стр. 150) и А. Р. Кулишера (стр. 376).

Т. А. Афанасьева-Эренфестъ (Спб.). „С. А. Богомоловъ высказалъ мысль о необходимости раздѣленія курса геометріи на два цикла, о необходимости пропедевтическаго курса геометріи, въ которомъ, если я вѣрно запомнила его выраженіе, въ широкомъ размѣрѣ примѣнялся бы лабораторный методъ. А. Р. Кулишеръ показалъ одинъ изъ примѣровъ этого пропедевтическаго курса“.

„Принципіально я совершенно согласна съ обоими докладчиками С. А. Богомоловымъ и А. Р. Кулишеромъ въ томъ, что систематическому курсу геометріи необходимо предпослать курсъ пропедевтическій, имѣющій цѣлью развить геометрическое воображеніе учащихся, освоить ихъ съ терминами, пріучить ихъ къ тому, чтобы съ названіями манипуляцій, упоминаемыхъ въ доказательствахъ геометрическихъ теоремъ (наложить, прибавить одинъ уголъ къ другому, сравнить и т. п.) они связывали и представленіе объ этихъ манипуляціяхъ и т. д. Но я должна сдѣлать двѣ оговорки“.

„I. Слово „лабораторный“ методъ можетъ легко повести къ недоразумѣніямъ. Этимъ словомъ напоминаются тѣ пріемы, которыми пользуются въ такъ называемыхъ экспериментальныхъ наукахъ. Въ нихъ экспериментъ служитъ для того, чтобы изъ ограниченнаго – часто весьма ограниченнаго числа болѣе или менѣе одинаковыхъ результатовъ—сдѣлать при помощи неполной индукціи общій выводъ съ цѣлью или: 1) этотъ общій выводъ принять за одну изъ аксіомъ, на которыхъ намѣрены строить данную науку, или 2) косвенно провѣрить аксіомы, уже ранѣе положенныя въ основу этой науки, путемъ сопоставленія логическихъ выводовъ изъ этихъ аксіомъ (гипотезъ) съ результатами эксперимента, или, наконецъ, 3) въ тѣхъ случаяхъ, когда въ аксіомахъ уже не сомнѣваются, получить экспериментальнымъ путемъ рѣшеніе какой-нибудь практически важной задачи, если дедуктивный выводъ этого рѣшенія изъ аксіомъ, хотя и возможенъ, но слишкомъ сложенъ и труденъ (требуетъ, напр., рѣшенія математическихъ задачъ, для которыхъ еще не выработаны методы).“

„Геометрія отличается отъ экспериментальныхъ наукъ тѣмъ что ея аксіомы настолько просты, что каждый, поступающій въ среднюю школу, убѣжденъ въ ихъ справедливости и не нуждается въ ихъ экспериментальной провѣркѣ. Задача пропедевтическаго курса сведется здѣсь лишь къ тому, чтобы обратить вниманіе учениковъ и раскрыть имъ глаза на то, что уже заложено въ ихъ сознаніи. Провѣрять эти аксіомы прямо или косвенно не приходится. Такимъ образомъ первыя двѣ цѣли эксперимента, наиболѣе существенныя для экспериментальныхъ наукъ, для геометріи отпадаютъ. Что касается третьей цѣли, то весь матеріалъ среднешкольнаго курса элементарной геометріи вполнѣ поддается дедуктивному выводу и не требуетъ математическихъ пріемовъ. недоступныхъ средней школѣ. Зачѣмъ же пріучать ученика получать результаты тѣмъ несовершеннымъ путемъ, отъ котораго охотно отказалась бы и всякая экспериментальная наука, когда онъ можетъ получить ихъ вполнѣ надежнымъ способомъ—зачѣмъ пріучать его пробовать тамъ, гдѣ онъ можетъ думать!“

„Опытъ, произведенный съ подобной цѣлью въ области какой-нибудъ экспериментальной науки, навѣрное, забудется очень скоро послѣ того, какъ будетъ найденъ методъ для дедуктивнаго рѣшенія данной задачи — подобно тому, какъ давно забыто, что Галилей для опредѣленія отношенія площади циклоиды къ площади производящаго круга прибѣгалъ къ взвѣшиванію.“

„II. Дедуктивный методъ придуманъ не для развлеченія ученыхъ и не для затрудненія учениковъ и преподавателей, а какъ разъ для ихъ облегченія: дедукція дѣлаетъ результатъ и болѣе достовѣрнымъ, чѣмъ опытъ (столь же достовѣрнымъ, какъ тѣ немногія посылки, которыя лежатъ въ ея основѣ), и болѣе прочно укрѣпляетъ его въ умѣ, т. к. въ случаѣ забвенія онъ вновь можетъ быть полученъ путемъ одного только размышленія, и помогаетъ легче разбираться во всемъ разнообразіи изучаемыхъ фактовъ.“

„Эти два соображенія, по моему мнѣнію, никогда не должны забываться учителемъ, ведущимъ пропедевтическій курсъ. Они должны въ теченіе всего школьнаго курса проникнуть и въ сознаніе каждаго учащагося и они же должны служить указаніемъ для выбора упражненій пропедевтическаго курса и для опредѣленія центра тяжести этихъ упражненій, того, на чемъ въ этихъ упражненіяхъ должно быть сосредоточено вниманіе учениковъ.“

„Кромѣ этого, я считаю необходимымъ сдѣлать еще одно замѣчаніе болѣе частнаго характера: не всякая лабораторная манипуляція одинаково содѣйствуетъ развитію геометрическаго воображенія. Такъ, если нужно внѣдрить въ сознаніи ученика понятіе о сравненіи угловъ, то дѣйствительное наложеніе картонныхъ угловъ гораздо лучше выясняетъ его, чѣмъ измѣреніе угловъ при помощи транспортира, при которомъ представленіе о самомъ углѣ замаскировано наблюденіемъ дугъ.“

„Въ заключеніе замѣчу, что пропедевтическій курсъ не долженъ быть слишкомъ продолжителенъ; учитель долженъ стараться вызвать въ сознаніи учениковъ потребность въ систематизаціи матеріала и развить угадываніе такихъ зависимостей, о которыхъ можно заключать, не прибѣгая къ эксперименту. Характеръ этого курса долженъ быть подобенъ характеру «Началъ» Эвклида, которыя только самыми первыми — слишкомъ очевидными — теоремами могутъ затруднить учащихся. Всѣ «очевидныя» ученикамъ предложенія слѣдуетъ принять безъ доказательства, но въ дальнѣйшемъ изложеніи „Начала“ могутъ служить образцомъ по доступности и матеріала, и цѣли, которую они себѣ ставятъ: вывести всѣ предложенія курса геометріи изъ опредѣленныхъ немногихъ предложеній, принятыхъ безъ доказательства. Этой цѣли отнюдь не слѣдуетъ смѣшивать съ задачей аксіоматики: найти всѣ аксіомы, независимыя другъ отъ друга, на которыхъ можетъ быть построена вся система предложеній геометріи“.

„Эту послѣднюю задачу можно понять только послѣ ознакомленія съ идеей «доказательства» вообще, для чего лучшимъ упражненіемъ опять таки можетъ послужить систематическій курсъ въ духѣ «Началъ» Эвклида.“

М. Н. Песоцкій (Тифлисъ). „Я желалъ бы обратить вниманіе на тотъ моментъ доклада С. А. Богомолова, гдѣ онъ говоритъ о методѣ движенія, Докладчикъ находитъ, что этотъ методъ чуждъ геометрической дисциплинѣ, такъ какъ представленіе о движеніи неразрывно связано съ понятіемъ «твердое тѣло», и такимъ образомъ этотъ методъ имѣетъ право на существованіе не раньше, чѣмъ въ кинематикѣ. Если стать на точку зрѣнія Гильберта, изложенную въ сочиненіи: „Die Grundlagen der Geometrie“, и принять схему формально-логическаго построенія геометріи, то, конечно, возразить противъ этого нечего. Тамъ основнымъ методомъ доказательства служитъ, такъ называемая, идеальная конгруэнтность, выведенная имъ изъ шести постулируемыхъ предложеній, устанавливающихъ шесть свойствъ движенія. Но я ни за что бы не согласился преподносить своимъ ученикамъ геометрическій матеріалъ въ видѣ той формальной дисциплины, какъ у Гильберта.“

„Въ самомъ дѣлѣ, что поймутъ ученики и какую пищу дастъ ихъ уму такого рода построеніе? «Будемъ мыслить, говоритъ Гильбертъ, вещи трехъ родовъ: 1) точки, 2) прямыя линіи, и 3) плоскости.—Условимся, что прямая будетъ опредѣляться двумя точками, и т. д.» При этомъ замѣтьте: не должно подъ этими вещами подразумѣвать никакого реальнаго образа, никакого реальнаго содержанія. Я думаю, что ученикамъ такого рода формальное построеніе ничего не дастъ. Вельштейнъ—этотъ знатокъ геометріи—считаетъ совершенно недопустимымъ вводить въ преподаваніе строгую, формально-логическую систему построенія современной геометріи. При этомъ я долженъ замѣтить и то что далеко не всѣ современные математики одинаково сочувствуютъ тому направленію, которое стремится превратить математику, въ категоризацію вещей, лишенныхъ всякаго внутренняго содержанія. Напримѣръ, Анри Пуанкаре говоритъ, что, превращая математику въ пустую форму, ее безусловно уродуютъ. Да и кромѣ того, что дастъ математика при такомъ своемъ направленіи натурфилософамъ на предъявляемые ими къ ней запросы?“

„Такимъ образомъ, не лишая въ школьномъ курсѣ геометрическихъ символовъ ихъ реальнаго содержанія, мы не можемъ отказаться отъ метода движенія при доказательствѣ, а неразрывно съ нимъ—и отъ интуиціи.“

„Если С. А. Богомоловъ въ области математическаго творчества признаетъ какъ средство даже грубый эмпиризмъ, то тѣмъ болѣе надо отвести почетное мѣсто интуиціи въ школѣ. Мы должны у учащихся воспитывать творчество, а формальная логика этого дать не можетъ; сократовскій δαίμον, французское esprit находятся въ области интуиціи.“

„Одинъ изъ основныхъ методическихъ принциповъ—это историческій путь развитія данной дисциплины, а такимъ путемъ развитія науки была и будетъ интуиція. Съ педагогической точки зрѣнія мы не имѣемъ права производить насиліе надъ учащимися и считать обязательнымъ для всѣхъ одинъ и тотъ же путь къ истинѣ».„

Н. А. Извольскій (Москва). „Изъ положенія, установленнаго въ докладѣ С. А. Богомолова, что въ созиданіи геометріи участвуютъ и интуиція и логика, выводъ сдѣланъ невѣрный. Изъ этого положенія слѣдуетъ, что должно стремиться выработать такой курсъ, гдѣ бы логика и интуиція, гармонически сочетаясь, вели бы къ общей цѣли. Для достиженія этой цѣли слѣдуетъ, пользуясь всѣми нашими духовными способностями, опираться на наглядность, а, можетъ быть, и на лабораторный методъ; логика шагъ за шагомъ сама постепенно займетъ надлежащее положеніе“.

„Имѣются свидѣтельства успѣшности отдѣльныхъ опытовъ пропедевтическаго курса. Но причина этого вовсе не самый фактъ существованія этого курса. Причина въ томъ, что на протяженіи всего пропедевтическаго курса отсутствуетъ главное зло нашей школы: здѣсь не задаютъ, не спрашиваютъ, а все время идетъ полезная работа учащихся подъ руководствомъ преподавателя.“

„Если бы было уничтожено это главное зло школы—„задаванье“ и „спрашиванье“ и если бы былъ выработанъ такой „единый общеобразовательный“ курсъ, гдѣ гармонически сочетались бы логика и интуиція, то никакой надобности не было бы въ пропедевтическомъ курсѣ“.

П. С. Эренфестъ (Спб.). „Н. А. Извольскій не противъ того, чтобы пропедевтическій курсъ соединялся съ систематическимъ. Мнѣ же кажется, что мы могли бы ясно увидѣть полную несовмѣстимость пропедевтическаго курса съ систематическимъ если бы формулировали противоположность задачъ того и другого. Пропедевтическій курсъ имѣетъ совсѣмъ другія задачи, и онъ долженъ быть отдѣленъ отъ систематическаго. Позвольте привести примѣры“.

„Если я хочу ребенку показать, что его могутъ интересовать и геометрическіе вопросы, то цѣлесообразный путь—исходить изъ пространственныхъ объектовъ, геометрическихъ тѣлъ, а не изъ простѣйшихъ геометрическихъ представленій. Исходя изъ предметовъ, которые меня окружаютъ, я показываю, что не только краски и запахи, но и протяженность, и другія свойства тѣлъ могутъ быть предметомъ изученія. Ребенокъ пойметъ, что напр. въ маленькомъ кускѣ сахара, кромѣ того, что онъ сладкій, есть еще много другихъ свойствъ, заслуживающихъ его вниманія. Вотъ одна изъ задачъ пропедевтическаго курса. Если же мы будемъ считаться съ этими цѣлями въ систематическомъ курсѣ средней школы и ради этого начинать его съ изученія тѣлъ, добавивъ лишь одинъ или два часа, то это только повредитъ дѣлу“.

Человѣкъ нуждается въ опытѣ, чтобы на учиться опредѣлять цѣль своей работы. Напр., онъ хочетъ знать, что такое „наложить“. Но какъ Вы объясните это, если и въ пропедевтическомъ, и въ систематическомъ курсѣ не будетъ экспериментовъ? И гдѣ же имъ отводить мѣсто?“

„Итакъ я требую сначала пропедевтическій курсъ, а потомъ систематическій. Надо, чтобы пропедевтическій курсъ существовалъ при болѣе свободной иниціативѣ преподавателя и рѣзко отграничивался отъ систематическаго курса; напр., при помощи индукціи можно на нѣсколькихъ опытахъ показать, что окружность круга $= 2\pi R$, гдѣ π — опредѣленное число, помноженное на діаметръ. Для старшей же группы желательно, чтобы при ихъ участіи былъ разрѣшенъ вопросъ, что вообще окружность возростаетъ пропорціонально радіусу. Это совсѣмъ разныя задачи“.

С. А. Богомоловъ (Спб.). „Къ выводамъ своего доклада я пришелъ не на основаніи педагогическаго опыта, а на основаніи теоретическихъ соображеній, вытекающихъ изъ современныхъ воззрѣній на обоснованіе геометріи. Я, дѣйствительно, дѣлалъ выводы съ нѣкоторымъ страхомъ. Не имѣя опыта я боялся, что выводы теоретическіе могутъ разойтись съ выводами практическими, что любой педагогъ отнесется отрицательно къ моему докладу. Но прошедшая предо мною картина возраженій на мой докладъ приводитъ меня къ другому выводу. Я не вижу уничтожающихъ доводовъ противъ моихъ положеній, изъ которыхъ основное—это дѣленіе курса геометріи на двѣ части: пропедевтическій курсъ и систематическій. Къ этому я пришелъ довольно длиннымъ путемъ и длинными разсужденіями. Изложивъ передъ вами начала аксіоматики и начала возникновенія геометрическихъ представленій, я, какъ единственно представляющійся исходъ изъ этого круга, въ который попалъ, предложилъ раздѣленіе на два курса.“

„Основное положеніе моего доклада, на основаніи котораго я пришелъ къ этому выводу, не было затронуто, и потому я считаю, что моя точка зрѣнія осталась непоколебленной до извѣстной степени. Я согласенъ, что систематическій курсъ можетъ оказаться въ высшей степени непонятнымъ ученикамъ и потому вреднымъ, но это можетъ быть только тогда, когда не будетъ широко поставленъ пропедевтическій курсъ; безъ этого систематическій курсъ невозможенъ“.

„Я считаю возможнымъ ввести въ школу и нѣкоторыя положенія современной аксіоматики, неразрывно связанныя съ широкимъ пропедевтическимъ курсомъ, гдѣ интуиція не только развивается, но и подкрѣпляется систематическими указаніями. На первомъ мѣстѣ въ пропедевтическомъ курсѣ стоитъ необходимость систематизаціи. Въ этомъ пунктѣ мое возраженіе относится къ рѣчи М. Н. Песоцкаго. Онъ доказывалъ, что ученики не понимаютъ Гильберта, и на этомъ основывалъ невозможность отказаться отъ движенія. Для меня важенъ вопросъ: какой ученикъ и и какого возраста? Если ученикъ малъ для пониманія основаній аксіоматики, то этому долженъ предшествовать пропедевтическій курсъ“.

„Т. А. Эренфестъ указала на то, что Эвклидова геометрія является образцомъ систематическаго курса. Съ этимъ я согласиться не могу, что я и старался доказать въ своемъ докладѣ. Эвклидъ является образцомъ смѣшаннаго курса, но не того, который я называю систематическимъ“.

„Н. А. Извольскій выставилъ положеніе, что не надо раздѣлять методы геометріи на интуитивный и логическій. Къ сожалѣнію, я не имѣлъ возможности слышать въ секціи докладъ оппонента, въ которомъ, вѣроятно, эта тема была развита. Я не представляю себѣ въ математикѣ такого смѣшенія различныхъ методовъ, какъ интуиція и логика. Что-нибудь одно изъ двухъ: либо ссылаться на интуицію, представляя ей рѣшающую роль и тогда все, что я предложилъ въ своемъ докладѣ, остается въ силѣ, либо интуиціи отводится только вспомогательная роль, а въ курсѣ геометріи выдвигается точка зрѣнія формальной логики. Но такой курсъ безъ пропедевтическаго курса учащіеся не поймутъ“.

„Я встрѣтилъ поддержку въ послѣднемъ выступившемъораторѣ по поводу тезисовъ моего доклада, также косвенную поддержку оказалъ мнѣ А. Р. Кулишеръ, который изложилъ основанія пропедевтическаго курса, но болѣе всѣхъ и самую сильную поддержку я получилъ не сегодня, а въ тотъ день, когда мы всѣ съ захватывающимъ вниманіемъ слушали докладъ П. А. Долгушина. Онъ осуществилъ самую завѣтную мысль моего доклада, которую, по его выраженію, я изложилъ наиболѣе робкимъ образомъ: онъ ввелъ въ жизнь неэвклидову геометрію. Этотъ блестящій докладъ убѣждаетъ меня, что я былъ на правильномъ пути, что нужно перейти къ систематическому курсу и ввести въ среднюю школу неэвклидову геометрію, которая не будетъ отставать отъ другихъ сторонъ школьной программы. По поводу сборника Лобачевскаго можно прочитать въ предисловіи къ моему курсу, что въ одной странѣ уже приняты работы Лобачевскаго, какъ пособіе къ преподаванію въ средней школѣ. Быть, можетъ нѣкоторая иронія заключается въ томъ, что эта страна Японія“.

„На мнѣ лежитъ долгъ отвѣтить на упрекъ, что въ докладѣ, посвященномъ основаніямъ геометріи, не упоминается имя В. Ф. Кагана; оно тамъ есть, но не услышано присутствующими вслѣдствіе слишкомъ поспѣшныхъ сокращеній, производившихся во время самаго чтенія доклада. Мой докладъ появится въ трудахъ съѣзда: если окажете честь съ нимъ познакомиться, то сдѣланное сегодня обвиненіе съ меня снимете“.

А. Р. Кулишеръ (Спб.). „Докладъ П. А. Долгушина я прослушалъ съ большимъ удовлетвореніемъ, особенно въ виду того, что докладчикъ осуществилъ право преподавателя старшихъ классовъ завершать свой курсъ такъ, какъ это представляется ему самому наиболѣе цѣлесообразнымъ. Распространеніе свѣдѣній по неэвклидовой геометріи тѣмъ болѣе полезно, что классическое сочиненіе Лобачевскаго на русскомъ языкѣ получить не такъ просто: легче получить его въ нѣмецкомъ переводѣ, потому что юбилейное изданіе совершенно разошлось. Конкретное изложеніе П. А. Долгушина достаточно вразумительно для учащихся несмотря на нѣкоторые пробѣлы въ развитіи выбранной иллюстраціи и убѣждаетъ въ томъ, что при основательномъ знакомствѣ преподавателя съ предметомъ можно внести въ курсъ старшихъ классовъ нѣкоторые на первый взглядъ трудные вопросы, представляя выборъ матеріала самому учителю“.

С. Б. Шарбе (Екатеринославъ). „Въ виду того, что на съѣздѣ предлагается внести въ преподаваніе въ средней школѣ отдѣлы высшей геометріи, а эти отдѣлы въ нѣкоторыхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ не читаются, вношу слѣдующее предложеніе: во всѣхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, дающихъ математическое образованіе будущимъ учителямъ, должны быть обязательно представлены слѣдующіе отдѣлы геометріи: 1) проэктивная геометрія, 2) неевклидова геометрія, 3) аксіоматическое развитіе эвклидовой геометріи въ связи съ началами понятія о числѣ".

Л. Д. Ханакадопуло (Одесса). „На дверяхъ философской школы Платона было написано: «Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω». (Никто, не знающій Эвклидовой геометріи, да не переступаетъ порога моей школы [1]). Въ настоящее время желающій знать и учить другихъ геометріи и вообще математикѣ долженъ знать неэвклидову геометрію. Поэтому я думаю, что нашъ съѣздъ преподавателей математики слѣдуетъ посвятить имени Лобачевскаго, подобно тому, какъ съѣзды по физикѣ и химіи посвящены имени Менделеева, а съѣздъ естество-испытателей—имени Пирогова".

П. А. Долгушинъ (Кіевъ). „Я совершенно согласенъ съ однимъ изъ предшествующихъ ораторовъ, что изложеніе геометріи, назначенное для высшей школы, обладаетъ недостатками. Обращаютъ вниманіе на аналитическую геометрію, которую считаютъ необходимой и очень часто заявляютъ о необходимости знаній изъ начертательной геометріи, но это потому, что ничего не читаютъ о неэвклидовой геометріи. Эти недостатки въ концѣ концовъ будутъ исправлены, на это будемъ надѣяться".

„Я хочу сказать о значеніи краткаго пропедевтическаго курса геометріи. Я совершенно согласенъ съ С. А. Богомоловымъ, что пропедевтическій курсъ намъ необходимъ, но онъ имѣетъ совершенно другой характеръ, чѣмъ, можетъ быть, нѣкоторые себѣ представляютъ. Дѣло идетъ не о томъ, чтобы постепенно готовить къ систематическому курсу, а о томъ, чтобы пріучить къ самодѣятельности; самое главное—заставить работать воображеніе. Я совершенно согласенъ, что одно изъ лучшихъ сочиненій, написанныхъ на эту тему, весьма серьезное, со всякаго рода историческими справками,—принадлежитъ Трейтлейну".

„Очень радъ, что первая часть сочиненія появилась на русскомъ языкѣ, потому что не всѣ владѣютъ иностранными языками; надѣюсь, что и вторая часть выйдетъ въ скоромъ времени".

„Одна изъ двухъ характерныхъ особенностей курса Трейтлейна заключается въ томъ, что онъ свободно и постоянно переходитъ отъ пространственныхъ представленій къ планиме-

---

[1] Эта фраза повторяется постоянно. Сомнительность ея видна изъ сопоставленія слѣдующихъ датъ: Платонъ (429 — 348 до Р. Х.) и Эвклидъ (330—275 до Р. Х.) Прим. Ред.

трическимъ. Трейтлейнъ начинаетъ свой курсъ съ разсмотрѣнія тѣхъ или другихъ тѣлъ, въ частности—съ куба, который ставится въ разнообразнѣйшія положенія по отношенію къ наблюдающимъ ученикамъ. Если же они имѣютъ его въ рукахъ, то разсматриваютъ одновременно съ учителемъ; поэтому сразу, уже на первомъ урокѣ, перечисляются отдѣльныя грани, ребра, углы; затѣмъ сравниваются между собой двухгранные углы и плоскости съ помощью двухъ одинаковыхъ кубовъ. Кубъ ставится на плоскость горизонтально и при этомъ дѣлаются выводы относительно горизонтальныхъ и вертикальныхъ линій и граней; затѣмъ Трейтлейнъ предлагаетъ перейти къ выкройкѣ этого куба, къ его разверткѣ. Я не совсѣмъ понялъ, почему А. Р. Кулишеръ называетъ оберткой кубическую развертку. Трейтлейнъ предложилъ: взять кубъ, приложивъ къ доскѣ одною гранью, потомъ другою и т. д., затѣмъ обвести слѣды мѣломъ—и получите развертку; а потомъ предлагается прибавить язычекъ: это весьма интересная работа. Сколько нужно такихъ язычковъ, если бы спросить каждаго изъ насъ? Я думаю, что многіе изъ насъ не отвѣтили бы. А если бы спросить,—почему? Я думалъ объ этомъ серьезно, когда началъ въ третьемъ классѣ свой курсъ. Я счастливъ, что перешелъ въ частное учебное заведеніе, тамъ можно сдѣлать то, чего не разрѣшили бы въ учебномъ заведеніи Министерства Народнаго Просвѣщенія. Мнѣ разрѣшили отвести одинъ часъ въ недѣлю для пропедевтическаго курса геометріи. И тутъ-то я поддерживаю идею Трейтлейна.“

„Значитъ, самой характерной особенностью этого курса является свободный переходъ отъ стереометріи къ планиметріи, а въ иллюстраціи этой идеи и проявляется творчество. Оставимъ кубъ и возьмемъ квадратъ. Если этотъ квадратъ раздѣлимъ прямыми линіями на двѣ части, то получается линія симметріи—одна изъ діагоналей. Ученіе о симметріи въ высшей степени цѣнно: оно можетъ облегчить и упростить систематическій курсъ геометріи, и потому его обходить ни въ какомъ случаѣ нельзя.“

„Трейтлейнъ дѣлаетъ весьма важное указаніе относительно работы воображенія при первыхъ же шагахъ въ этомъ курсѣ. Онъ прячетъ кубъ и спрашиваетъ: если я буду стоять лицомъ къ кубу, то какая грань будетъ задняя, какая направо и какая налѣво, какая вверху и какая внизу,—работа воображенія должна при этомъ сопровождать всѣ наши занятія. Далѣе, онъ предлагаетъ вырѣзывать рукой въ воздухѣ такой кубъ. Въ дальнѣйшихъ занятіяхъ онъ упражняетъ глазомѣръ нетолько по линейкѣ, нарисованной извѣстнымъ цвѣтомъ, но и на другихъ отрѣзкахъ. Это—тоже цѣнная вещь въ пропедевтическомъ курсѣ. Вообще долженъ сказать, что сліяніе планиметріи со стереометріей можетъ быть осуществлено, но только въ томъ случаѣ, если систематическому курсу будетъ предшествовать болѣе продолжительный подготовительный курсъ. А если этотъ курсъ будетъ непродолжительный, если учитель будетъ располагать всего однимъ часомъ, начиная съ октября, то, конечно, онъ не можетъ оказать вліянія на систематическій курсъ и тогда не будетъ сліянія планиметріи со стереометріей.“

„Вотъ какъ я достигалъ работы воображенія у учащихся. Я спустилъ штору, зажегъ лампочку и поставилъ модель куба; затѣмъ учащіеся увидѣли ее лишь на мгновеніе. Когда кубъ былъ снятъ, то одинъ изъ учениковъ пошелъ къ доскѣ и нарисовалъ его по памяти очень хорошо. Разъ я указалъ ученику на вершину невидимаго (воображаемаго) куба и сказалъ: тѣ ребра, которыя мы не видимъ, изобразите мнѣ пунктирными линіями. Ученикъ вышелъ къ доскѣ и прекрасно изобразилъ, что нужно. Другому ученику я указалъ на другую вершину, причемъ она помѣщалась сзади; онъ тоже воспроизвелъ фигуру совершенно правильно. Затѣмъ я предложилъ взять кубъ въ руки и привести въ тѣ положенія, какія изображены на доскѣ. Это было тоже сдѣлано. Въ одномъ учебномъ заведеніи, гдѣ я работаю два года, ученикъ 6-го класса, выйдя къ доскѣ, къ сожалѣнію, изобразилъ два ребра, идущія изъ этой невидимой точки, сплошными линіями; ученикъ же 3-го класса изобразилъ пунктиромъ. Въ этомъ отношеніи ученикъ 6-го класса оказался хуже: непонятно, о чемъ онъ думаетъ у доски—о томъ, какъ изобразить или о томъ, можетъ быть, какъ нужно доказать. Мнѣ кажется, что въ этомъ отношеніи работа воображенія, если будемъ слѣдовать указаніямъ Трейтлейна, въ высшей степени полезна“.

„Само собою разумѣется, нужно различать доказательства, какими пользуемся въ пропедевтическомъ курсѣ, отъ доказательствъ, которыя примѣняются въ систематическомъ курсѣ. При переходѣ отъ подготовительнаго курса къ систематическому, мнѣ кажется, нужно подчеркнуть тѣ способы доказательствъ, какими пользовались раньше. Для этого достаточно нѣсколькихъ уроковъ. На этотъ счетъ я могу привести интересную жизненную справку. Я—еще ученикъ 7-го класса,—пріѣхавъ на свою родину, пришелъ къ своему бывшему законоучителю. Тотъ сообщаетъ мнѣ важную новость, что отнынѣ крестьяне будутъ богаты, потому что онъ прочиталъ въ «Нивѣ», какъ изъ 64 получить 65 десятинъ. Я никакъ не могъ убѣдить его, что это невѣрно и что онъ впалъ въ ошибку, потому что положился на чувство зрѣнія. И вотъ нужно показать на примѣрахъ, что намъ пора теперь перейти къ другому, пора заняться разсужденіями и строить систематическій курсъ“.

В. П. Литвинскій. (Екатеринославъ). „Положенія А. Р. Кулишера не являются чѣмъ-либо новымъ. Пропедевтическій курсъ геометріи во многихъ коммерческихъ училищахъ уже введенъ и осуществляется Въ Екатеринославскомъ коммерческомъ училищѣ, гдѣ я имѣю удовольствіе преподавать, такой курсъ проходится по выработанной программѣ, проведенной гораздо шире, чѣмъ говорилъ докладчикъ“.

„Курсъ распадается на три концентра или цикла: первый—въ приготовительныхъ классахъ коммерческихъ училищъ (2 года), второй—въ младшихъ классахъ (3 года) и третій—въ старшихъ классахъ (2 года). Программа главнымъ образомъ касается второго цикла; первый и третій только намѣчены: 1-й—какъ подготовительная часть ко второму и третій—какъ заключительное звено всего курса, обнимающее добавленія и обобщеніе всего предыдущаго“.

„Въ приготовительныхъ классахъ, при наличности фребелевскихъ занятій и другихъ формъ ручного труда, вполнѣ возможно ознакомить учащихся съ простѣйшими фигурами:

дать названіе (прямая, ломанная и кривая линіи, треугольникъ, квадратъ, прямоугольникъ, трапеція, четыреугольникъ, многоугольникъ, кругъ, овалъ, спираль);

выдѣлить отдѣльныя части (стороны, діагонали, оси, діаметры, радіусы, корды, высоты, основанія, углы);

на готовыхъ фигурахъ опредѣлить равенство и неравенство элементовъ (сторонъ, угловъ, діагоналей, діаметровъ, радіусовъ, хордъ);

напрактиковать на комбинированіи равныхъ и неравныхъ фигуръ, одноименныхъ и разноименныхъ;

складываніемъ однихъ и тѣхъ же фигуръ различнымъ образомъ установить обращаемость фигуръ и ихъ равновеликость;

ознакомить съ измѣреніями линейкой съ дѣленіями, лентой, циркулемъ—первые сперва готовые, затѣмъ собственноручно сдѣланные;

дать названіе употребительнѣйшихъ мѣръ, дать примѣры симметріи.

Научить чертить окружности и ихъ комбинаціи, научить построенію простѣйшихъ фигуръ помощью линейки, наугольника и циркуля (квадратъ, прямоугольникъ, и треугольникъ равностороній, равнобедренный, равносторонній, шестиугольникъ).

Найти знакомыя фигуры на предметахъ, познакомить съ названіями тѣлъ (кубъ, шаръ, брусокъ, призма, пирамида, цилиндръ, конусъ), снять съ нихъ выкройки, сперва по отдѣльнымъ гранямъ и поверхностямъ, затѣмъ соединить и наконецъ по выкройкѣ построить тѣло.

Познакомить съ параллельностью линій и научить ихъ вычерчивать.

Измѣренія и подсчеты дадутъ матеріалъ для ознакомленія съ именованными числами, дробями и мѣрами поверхностей.

Знакомство съ тѣлами дастъ матеріалъ для выясненія понятія о вѣсѣ и объемѣ.

Провѣрка равновеликости помощью вѣсовъ, переливанія жидкостей и пересыпанія песка.

Научить подсчету по клѣткамъ, какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ величинъ.

Научить чертить фигуры по клѣткамъ, вырѣзывать изъ бумаги, клеить, лѣпить.

Ознакомить съ транспортиромъ. Дать понятіе о планѣ. Черченіе плана схематическаго и точнаго. Научить по глазомѣру сравнивать и опредѣлять размѣры.

Въ первомъ концентрѣ отдѣльныхъ уроковъ на пропедевтическій курсъ геометріи не отводится, а вся указанная программа проходится на урокахъ ручного труда, фребелевскихъ занятій и ариѳметики.

Второй циклъ. Въ этомъ циклѣ, распредѣленномъ на три первые класса, необходимо познакомить учащихся уже со всѣмъ тѣмъ матеріаломъ по геометріи, который дается существующимъ курсомъ примѣнительно къ задачамъ на вычисленіе площадей и объемовъ, чтобы въ четвертомъ классѣ былъ матеріалъ для рѣшенія уравненій первой и второй степени и научить основнымъ задачамъ на построеніе, чтобы въ пятомъ или четвертомъ классѣ могъ быть пройденъ курсъ геометрическаго черченія, обнимающій, какъ обычныя задачи на построеніе, такъ и начала начертательной геометріи.

I классъ: Прямая линія. Проведеніе прямыхъ въ тетрадяхъ, на доскѣ, на мѣстности. Измѣреніе длинъ на глазъ, шагами, аршиномъ, метромъ, лентой, цѣпью. Повторныя измѣренія. Опредѣленіе средняго.

Углы прямые, острые, тупые, смежныя, противоположные. Перпендикуляры и наклонные. Наугольникъ, отвѣсъ, ватерпасъ и уровень. Параллельныя прямыя и углы, образуемые параллельными и сѣкущей.

Прямолинейныя фигуры: треугольники, четыреугольники. Основанія и высоты фигуръ. Окружность и кругъ; діаметръ, радіусъ, хорда, сѣкущая, касательная, дуга. Дѣленіе окружности на градусы. Дуги и углы. Угловой градусъ. Измѣреніе угловъ на поверхности земли. Эккеръ. Опредѣленіе длины окружности (практически).

Внѣшній и внутренній углы треугольника. Углы треугольника, четыреугольника и многоугольниковъ.

Площадь прямоугольника, квадрата, параллелограмма, ромба, треугольника и круга. Упражненія въ измѣреніи площадей.

Объемъ--вмѣстимость. Объемъ куба, прямоугольнаго параллелепипеда, призмы, цилиндра.

Основныя задачи на построеніе.

„Для курса пропедевтической геометріи въ первомъ классѣ отводится 1 часъ въ недѣлю. Въ курсѣ перваго класса повторяется тотъ матеріалъ, съ которымъ ознакомились въ приготовительныхъ классахъ, но онъ проходится болѣе подробно; однако, свойства выводятся все еще главнымъ образомъ практическимъ путемъ. Болѣе основательное знакомство съ примѣненіемъ транспортира даетъ возможность предлагать разнообразныя задачи на вычисленіе угловъ. Далѣе—обильный матеріалъ для вычисленій даетъ изученіе опредѣленія площадей и объемовъ въ простѣйшихъ случаяхъ. При наличности удобныхъ условій (времени и мѣста) можно вынести упражненіе изъ классной комнаты на дворъ или поле. Во всѣхъ случаяхъ приложенія на практикѣ необходимо производить повторныя измѣренія, выбирать среднее и отмѣчать степень вѣроятности результата."

„Ручной трудъ по картону или дереву можетъ дать здѣсь матеріалъ для иллюстраціи всѣхъ проходимыхъ отдѣловъ. Собственноручно сдѣланный ватерпасъ, линейка, наугольникъ, наборъ фигуръ, наборъ круговъ, разрѣзанныя фигуры для преобразованія одной въ другую, наборъ тѣлъ и т. п. Необходимость предварительнаго черченія дастъ осмысленное усвоеніе первоначальныхъ задачъ на построеніе (построить уголъ равный данному, раздѣлить линію и уголъ пополамъ, возставить и опустить перпендикуляръ, провести параллельныя, начертить треугольникъ по даннымъ элементамъ, тоже для четыреугольниковъ)."

„Курсъ II-го класса. Повтореніе курса I-го класса съ добавленіемъ доказательства свойства вертикальныхъ угловъ, свойствъ равнобедреннаго треугольника, равенства треугольниковъ, соотношеніе между сторонами и углами треугольниковъ. Свойства сторонъ, угловъ и діагоналей четырехугольниковъ; вписанные и описанные углы; относительное положеніе окружностей; правильные многоугольники. Измѣреніе площадей сложныхъ фигуръ и измѣреніе боковыхъ поверхностей. Измѣреніе объемовъ пирамидъ, конусовъ, шара. Знакомство съ двугранными и многогранными углами. Выкройки правильныхъ многогранниковъ. Линіи въ пространствѣ. Во второмъ классѣ повтореніе матеріала перваго класса сопровождается введеніемъ логическаго доказательства. Измѣренія вписанныхъ и описанныхъ угловъ, площадей, поверхностей и объемовъ даетъ матеріалъ для задачъ. Знакомство съ многогранными углами приведетъ къ выдѣленію правильныхъ многогранниковъ и черченію ихъ развертокъ. Закончить курсъ этого класса можно бы знакомствомъ съ линіями въ пространствѣ и проэкціями линій на плоскости. Въ реальныхъ училищахъ существовалъ курсъ перспективы и усваивался учениками безъ особаго труда.

Для установленія формулъ объема пирамиды, конуса и шара необходимо примѣненіе переливанія и взвѣшиванія, что даетъ начало знакомству съ зависимостью вѣса отъ объема и плотности.

Приготовленіе набора пирамидъ можетъ быть произведено на урокахъ ручного труда.

Для курса второго класса отводится 1 урокъ въ недѣлю.

Курсъ III-го класса. Подобіе фигуръ. Масштабъ. Задачи на измѣреніе высотъ и разстоянія между двумя точками, пользуясь подобіемъ фигуръ.

Теорема Пиѳагора. Приложеніе ея къ равностороннему и равнобедренному треугольнику. Отношеніе площадей подобныхъ фигуръ. Отношеніе объемовъ подобныхъ тѣлъ. Понятіе о синусѣ косинусѣ, тангенсѣ и котангенсѣ угловъ прямоугольнаго треугольника, какъ отношеніяхъ сторонъ. Приложеніе ихъ къ косоугольному треугольнику. Рѣшеніе задачъ на вычисленіе, въ которыхъ среди данныхъ имѣются угловыя величины, при помощи таблицъ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. Вычерчиваніе графиковъ. Начатки начертательной геометріи.

Для курса III-го класса отводится 1 урокъ въ недѣлю".

Н. А. Извольскій (Москва). „Являясь противникомъ раздѣленія обученія геометріи на два курса—пропедевтическій и систематическій, —я въ то же время говорю, что можно и надо учить геометріи даже маленькихъ дѣтей. Въ теченіе прошлаго лѣта мнѣ пришлось на педагогическихъ курсахъ обучать геометріи въ 3-мъ и 4-мъ отдѣленіяхъ начальной школы. Я хотѣлъ бы указать, что этотъ маленькій курсъ геометріи можно вести не совсѣмъ такъ, какъ разсказывалъ А. Р. Кулишеръ. Начать съ того, что я считаю грубой ошибкой, начинать нашъ пропедевтическій курсъ съ разсмотрѣнія тѣлъ. Надо въ основу класть стремленіе къ тому, чтобы учащіеся сами могли все дѣлать. Въ основаніе было положено разсмотрѣніе параллельныхъ линій—отрѣзковъ бумаги, сравненіе этихъ отрѣзковъ, а затѣмъ перешли къ построенію угловъ, въ томъ числѣ и выпрямленныхъ. Затѣмъ, учениками и ученицами на моделяхъ продѣлывалось сложеніе, вычитаніе, умноженіе. Потомъ можно показать, какъ раздѣлить уголъ пополамъ, если сами ученики не догадаются, затѣмъ чертить на доскѣ, потомъ отмѣтить точки, а потомъ получимъ модель прямого угла.

Владѣя моделью прямого угла, ученики 3-го отдѣленія начальной школы сами строили квадраты, прямоугольники“.

М. Е. Волокобинскiй (Рига). „Я привѣтствую введенiе пропедевтическаго курса предварительно передъ систематическимъ, но долженъ оговориться, что нельзя противополагать одинъ курсъ другому. Это нововведенiе не исчерпываетъ вопроса: несомнѣнно, гдѣ будетъ пропедевтическiй курсъ, тамъ будетъ и систематическiй. Наглядность въ подобномъ курсѣ каждый учитель будетъ осуществлять по своему. Но какъ ввести наглядность, какъ связать ее съ изложенiемъ? Это будетъ большой процессъ творчества, громадное поле для работы, серьезнѣйшей работы, и только тогда выяснится, какова роль пропедевтическаго курса и какъ нужно преподавать геометрiю“.

„Привѣтствуя пропедевтическiй курсъ, я только высказываюсь противъ того, чтобы его считать панацеей отъ всѣхъ золъ“.

А. Р. Кулишеръ (СПБ.). „Мнѣ думается, что тѣ возраженiя, которыя пришлось выслушать сейчасъ, а также во время перерыва, дѣйствительно важны для наилучшаго выясненiя сложнаго вопроса о преподаванiи пропедевтическаго курса. Еще указали мнѣ во время перерыва, какъ на важное упущенiе съ моей стороны, что я не отмѣтилъ существовавшаго еще 20 лѣтъ тому назадъ курса Вулиха и другихъ авторовъ. Скажу только одно: всякiй, кто далъ бы себѣ трудъ ознакомиться съ названнымъ учебникомъ, тотчасъ бы увидѣлъ, что теперешнiе авторы начальныхъ курсовъ геометрiи (напр., тотъ же Трейтлейнъ) представляютъ себѣ дѣло совершенно иначе, чѣмъ это было тогда. А вѣдь я какъ разъ объ этомъ говорилъ въ своемъ докладѣ: въ мою сегодняшнюю задачу входило не перечисленiе именъ всѣхъ, кто писалъ по данному вопросу, но, наоборотъ, цѣлью его была характеристика нѣсколькихъ, наиболѣе важныхъ для освѣщенiя вопроса руководствъ, и это я въ своемъ мѣстѣ оговорилъ. Да и потомъ при ограниченности времени пришлось мнѣ умолчать о многомъ, занявшись перечисленiемъ болѣе необходимаго. Перейду поэтому къ возраженiямъ относительно отдѣльныхъ пунктовъ доклада. Т. А. Эренфестъ хотѣла бы, чтобы мы въ данномъ курсѣ чаще обращали вниманiе на развитiе воображенiя учащихся. Это замѣчанiе правильно; разумно проводимый начальный курсъ въ значительной степени повышаетъ способность представленiя геометрическихъ образовъ. Что же касается „лабораторнаго“ метода, то онъ можетъ быть очень плохъ при игнорированiи общедидактическихъ соображенiй, и очень хорошъ при ограниченномъ его примѣненiи и внесенiи въ качествѣ небольшой части работы подъ контролемъ требованiй здравой дидактики. Одной изъ высказанныхъ мной мыслей было пожеланiе—уменьшить содержанiе курса въ цѣляхъ наиболѣе основательной его проработки. Характеризуя курсъ Трейтлейна, я кое-что пропустилъ изъ намѣченнаго для изложенія, но опять повторяю: моей цѣлью была характеристика, а не изложеніе всѣхъ деталей (впрочемъ, вошедшихъ въ самый докладъ, который будетъ напечатанъ). Задача наша состоитъ въ томъ, чтобы, пользуясь готовой уже работой, проводить подобный начальный курсъ во многихъ школахъ; тогда, быть можетъ, доберемся до чего-нибудь существенно новаго. Теперь же надо пожелать осуществить хорошо и дѣльно то, чѣмъ уже обладаемъ".

СЕДЬМОЕ ЗАСѢДАНІЕ

3 января $10^1/_2$ час. дня.

Въ предсѣдатели II-ой половины засѣданія избранъ С. И. Шохоръ-Троцкій. Въ почетные секретари—Н. А. Извольскій.

XXX. О согласованіи программъ въ средней и высшей школахъ.

Докладъ проф. К. А. Поссе (Спб.).

«Подъ согласованіемъ программъ въ средней и высшей школахъ я понимаю такую постановку преподаванія, которая обезпечивала-бы учащимся по возможности плавный переходъ отъ ученія въ одной къ ученію въ другой.

Подробная разработка этой темы не укладывается въ рамки краткаго доклада и превосходитъ силу и компетенцію одного лица, поэтому я ограничусь лишь установленіемъ нѣкоторыхъ положеній, на которыхъ, по моему мнѣнію, должна основываться такая разработка, и краткимъ изложеніемъ тѣхъ соображеній, которыя привели меня къ постановкѣ этихъ положеній.

Вопросъ о согласованіи программъ математики въ средней и высшей школахъ нельзя разсматривать независимо отъ вопроса объ измѣненіи этихъ программъ. Дѣйствующія въ настоящее время программы (я говорю пока только о мужскихъ школахъ) уже согласованы между собою, по крайней мѣрѣ въ томъ отношеніи, что отъ поступающихъ въ высшую школу оффиціально не требуется свѣдѣній, выходящихъ за предѣлы программы средней.

Вопросъ о согласованіи программъ возникъ лишь потому, что традиціонныя программы считаются уже не соотвѣтствующими требованіямъ времени и подлежащими измѣненіямъ. Вслѣдствіе этого намъ и придется остановиться, главнымъ образомъ, на вопросѣ объ этихъ измѣненіяхъ и тѣсно связанномъ съ ними вопросѣ о постановкѣ самого преподаванія.

Въ общей системѣ образованія юношества средняя школа играетъ двоякую роль. Съ одной стороны эта общеобразовательная школа, которая должна дать ученикамъ законченное до извѣстной степени образованіе, не предрѣшая вопроса о характерѣ ея дальнѣйшей дѣятельности, и въ этомъ состоитъ, конечно, главная ея задача. Но на ряду съ этимъ она есть школа подготовительная къ высшей, дающая послѣдней главный контингентъ учащихся.

Поступающій въ высшую школу по необходимости долженъ выбрать тотъ или другой спеціальный циклъ наукъ. Явно или неявно высшая школа предъявляетъ къ нему опредѣленныя требованія, зависящія отъ сдѣланнаго имъ выбора. Различный характеръ этихъ требованій играетъ существенную роль въ занимающемъ насъ вопросѣ, и на него я прошу обратить ваше вниманіе. Все, что мнѣ пришлось слышать на нашемъ съѣздѣ по вопросу объ измѣненіи программъ математики въ средней школѣ, почти исключительно относилось къ ея общеобразовательнымъ задачамъ. О способахъ удовлетворить спеціальнымъ требованіямъ высшей школы было сказано очень мало. Я объясняю себѣ это тѣмъ, что, повидимому, господствуетъ мнѣніе, будто средняя школа, правильно выполняющая свои общеобразовательныя задачи, тѣмъ самымъ удовлетворитъ и требованіямъ высшей. Съ этимъ мнѣніемъ я согласиться не могу и постараюсь доказать, что оно не вполнѣ справедливо.

Остановимся прежде всего на слѣдующемъ вопросѣ, отъ рѣшенія котораго зависятъ всѣ дальнѣйшія заключенія. Имѣетъ-ли высшая школа право предъявить къ желающимъ въ нее попасть какія-нибудь спеціальныя требованія, опредѣляемыя выборомъ извѣстнаго цикла наукъ, или она должна примѣняться къ той подготовкѣ, которую даетъ средняя школа, имѣющая въ виду однѣ общеобразовательныя цѣли? Я думаю, что въ этомъ правѣ высшей школѣ отказать нельзя, и что фактически она всегда имъ пользовалась и не можетъ не пользоваться. Это не противорѣчитъ сказанному мною въ началѣ о внѣшнемъ согласованіи программъ средней и высшей школы. Изъ того, что спеціальныя требованія высшей школы не выражены явно, не слѣдуетъ, что они не существуютъ. Они существують несомнѣнно, но иногда въ скрытой формѣ и благодаря этому вводятъ многихъ въ заблужденіе.

Ежегодно многіе молодые люди, поступивъ на физико-математическій факультетъ университета, весьма скоро убѣждаются въ томъ, что они недостаточно подготовлены, чтобы слѣдить за университетскимъ преподаваніемъ, и переходятъ на другіе факультеты; и счастливы тѣ изъ нихъ, кто приходитъ къ этому убѣжденію, потерявъ лишь одинъ или два семестра. Менѣе счастливые или менѣе проницательные продолжаютъ съ грѣхомъ пополамъ удовлетворять снисходительнымъ требованіямъ университетскихъ экзаменовъ и кончаютъ курсъ, пріобрѣтая лишь поверхностныя и непрочныя познанія, которыми въ жизни воспользоваться не могутъ. Лишь немногіе, наиболѣе одаренные, сами пополняютъ недочеты своей подготовки, однако не безъ значительной потери въ экономіи своихъ силъ.

Поступающіе въ высшія техническія школы оказываются въ еще худшемъ положеніи. Пройдя черезъ горнило конкурсныхъ испытаній, къ которымъ ихъ готовитъ не средняя школа, а нарочито для этого устроенныя заведенія, или заполучивъ золотую медаль и поступая по конкурсу аттестатовъ, они попадаютъ въ школу, предъявляющую имъ требованіе въ 4, а иногда и 3 семестра (точнѣе говоря триместра) изучить высшую математику въ объемѣ, необходимомъ каждому ученому инженеру. Требованіе невыполнимое и ненормальное, но тѣмъ не менѣе существующее.

Переходя ко второй части нашего вопроса, т. е. спрашивая, не можетъ-ли высшая школа сама организовать свое преподаваніе такъ, чтобы оно было доступно всякому, успѣшно окончившему общеобразовательную среднюю школу, замѣчу слѣдующее: учебные планы университетовъ дѣйствительно даютъ студенту, какъ уже я сказалъ раньше, возможность использовать свободное отъ текущихъ занятій время на пополненіе недочетовъ его подготовки, но само университетское преподаваніе несомнѣнно страдаетъ отъ того, что по необходимости считается съ невысокимъ уровнемъ познаній учениковъ средней школы.

Почти цѣликомъ первые два года на физико-математическихъ факультетахъ посвящаются преподаванію такихъ предметовъ по математикѣ, которые, и иногда въ большемъ объемѣ, преподаются ученикамъ старшихъ классовъ французскихъ лицеевъ. Это обстоятельство, конечно, препятствуетъ поднять уровень университетскаго преподаванія на ту высоту, на которой оно могло-бы стоять при другихъ условіяхъ.

Переходя къ высшимъ техническимъ школамъ, мы встрѣчаемся съ полною невозможностью, безъ помощи средней школы, организовать преподаваніе математики и механики такъ, какъ этого требуютъ задачи современной, дѣйствительно высшей, технической школы. Необходимость солидныхъ математическихъ познаній не отрицается самими техниками: вспомнимъ привѣтственную телеграмму Предсѣдателя Императорскаго Техническаго Общества. Объемъ этихъ необходимыхъ познаній постоянно растетъ вмѣстѣ съ развитіемъ научной техники *). Между тѣмъ, даже при нормальной постановкѣ преподаванія теоретическихъ предметовъ въ стѣнахъ высшей технической школы, она не можетъ не сосредоточить это преподаваніе на промежутокъ времени въ два, много два съ половиною года. Я полагаю, никто не станетъ отрицать, что основательное изученіе этихъ предметовъ въ столь короткій срокъ, безъ спеціальной подготовки въ средней школѣ, невозможно.

Придя такимъ образомъ къ заключенію, что лишить высшую школу права предъявлять спеціальныя требованія нельзя, и въ то-же время нельзя ее обязать приноровить организацію преподаванія въ своихъ стѣнахъ къ несовершенной подготовкѣ учениковъ средней школы, я ставлю вопросъ:

---

*) Ученый инженеръ-электрикъ, напримѣръ, долженъ быть знакомъ съ рядами Фурье, интегрированіемъ уравненій математической физики и т. п. статьями, которыя еще недавно не входили въ программы даже университетскаго преподаванія.

Можно-ли составить такую программу математики въ средней школѣ, которая удовлетворяла-бы и общеобразовательнымъ задачамъ ея и спеціальнымъ требованіямъ высшей школы? Я утверждаю, что общей, обязательной для всѣхъ учениковъ, программы такого рода составить невозможно. Я не оспариваю возможности ввести въ курсъ средней школы нѣкоторыя свѣдѣнія изъ Аналитической Геометріи и, такъ называемаго, высшаго анализа, не оспариваю и общеобразовательнаго значенія такого обновленія и оживленія преподаванія математики. Вышеупомянутыя свѣдѣнія нужны, въ настоящее время, не только будущимъ математикамъ, инженерамъ и физикамъ, они нужны и натуралистамъ и медикамъ и полезны всякому образованному человѣку.

Но я глубоко убѣжденъ, что введеніе этихъ предметовъ въ томъ объемѣ, который доступенъ всѣмъ ученикамъ и сообразованъ съ общеобразовательнымъ характеромъ школы, не будетъ достаточнымъ для удовлетворенія требованіямъ высшихъ школъ, въ основѣ которыхъ лежитъ математика. Для будущихъ математиковъ и инженеровъ средняя школа должна дать систематическіе курсы Аналитической Геометріи и Анализа, посвятить имъ значительное время и избрать строго научное ихъ изложеніе. Само собою разумѣется, что сдѣлать такіе курсы общеобязательными немыслимо.

Всѣ вышеизложенныя соображенія привели меня къ установленію нижеслѣдующихъ положеній:

1. Наиболѣе раціональнымъ способомъ удовлетворить требованіямъ высшей школы, не вступая въ конфликтъ съ общеобразовательными цѣлями средней школы, является раздѣленіе курса математики на общій, обязательный для всѣхъ, и спеціальный, обязательный для тѣхъ, кто желаетъ поступить на математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета или въ высшую техническую школу.

Такая постановка преподаванія математики уже осуществлена въ средней школѣ Франціи, а въ главныхъ чертахъ и въ Скандинавіи.

2. Спеціальный курсъ математики долженъ изучаться въ спеціальныхъ математическихъ классахъ, вмѣстѣ съ новыми языками, знаніе которыхъ для математика необходимо.

3. При составленіи программъ, какъ общаго, такъ и спеціальнаго курса математики можно положить въ основу учебные планы и программы французскихъ школъ (Plans d'études et programmes de l'enseignement secondaire, 1902—05), разработанные въ теченіе многихъ лѣтъ при участіи представителей высшей и средней школы.

4. Дѣйствительнаго, а не формальнаго согласованія программъ въ средней и высшей школахъ лучше всего можно достигнуть при такой организаціи школы, которая допускаетъ спеціализацію преподаванія въ старшихъ классахъ средней школы, пріуроченную къ индивидуальнымъ способностямъ учащихся.

Все вышесказанное относится къ мужскимъ школамъ.

Позвольте мнѣ теперь сказать нѣсколько словъ о преподаваніи математики въ женскихъ школахъ.

Русская женщина, болѣе чѣмъ какая-нибудь другая, показала, что мнѣніе о недоступности усвоенія высшей математики женскому уму не болѣе, какъ предразсудокъ. Существованіе и постоянное развитіе высшихъ женскихъ курсовъ въ нѣсколькихъ городахъ Россіи служитъ непосредственнымъ тому доказательствомъ. Но между программами математики средней и высшей женскихъ школъ нѣтъ и того внѣшняго согласованія, которое мы видѣли въ мужской школѣ. Въ то время, какъ программы высшихъ курсовъ все болѣе приближаются къ университетскимъ, программы женскихъ гимназій остаются, вообще говоря, много ниже мужскихъ. Я не рѣшился-бы въ настоящее время защищать полное уравненіе программъ математики въ мужскихъ и женскихъ гимназіяхъ, но самымъ рѣшительнымъ образомъ привѣтствую путь, на который въ послѣднее время стали нѣкоторыя женскія 8-ми классныя гимназіи, путь спеціализаціи преподаванія въ старшемъ классѣ, причемъ въ изучаемыя тамъ спеціальности вошла и математика. Эти классы и даютъ главный контингентъ учащихся на математическомъ отдѣленіи высшихъ женскихъ курсовъ. Стать на этотъ путь я и приглашаю всѣ среднія школы, мужскія и женскія.

Заканчивая мой краткій докладъ, считаю долгомъ заявить слѣдующее.

Изъ статьи В. Б. Струве, напечатанной еще въ 1894 году въ Техническомъ Образованіи, я узналъ, что выставленныя мною положенія были имъ уже высказаны 20 лѣтъ тому назадъ въ собраніи преподавателей математики въ томъ самомъ помѣщеніи, гдѣ мы сегодня собрались. Съ разрѣшенія организаціоннаго Комитета съѣзда, я обратился къ В. Б. Струве съ просьбой прочесть докладъ по тому же вопросу, которому посвященъ и мой, на что В. Б. любезно согласился.

То обстоятельство, что В. Б. Струве въ теченіе истекшихъ 20 лѣтъ не отказался отъ своихъ положеній и собирается подкрѣпить ихъ аргументами, почерпнутыми изъ его долгаго педагогическаго опыта, даетъ мнѣ основаніе думать, что наши положенія основаны на правильномъ педагогическомъ принципѣ и, рано или поздно, перейдутъ изъ области мечтаній въ область дѣйствительности, какъ это уже имѣетъ мѣсто въ странѣ математики par excellence».

XXXI. Къ вопросу о согласованіи программъ математики въ средней и высшей школѣ.

Докладъ проф. В. Б. Струве (Москва).

«Намъ, педагогамъ, многое ставится въ вину, насъ во многомъ упрекаютъ. Не берусь судить, насколько справедливы тѣ многочисленные упреки, которые дѣлаются школѣ, но въ одномъ, мнѣ кажется, мы можемъ себя дѣйствительно упрекнуть. Есть слабость, въ которой у насъ, по общей ли человѣческой слабости или по какой-либо другой причинѣ, слово особенно рѣзко расходится съ дѣломъ. Мы очень много говоримъ о переутомленіи, о вредѣ многопредметности, о необходимости концентрировать обученіе на основательномъ изученіи немногаго (классическое non multa, sed multum), о важности индивидуализаціи. На ряду съ этимъ мы не дѣлаемъ ни одного шага, чтобы осуществить свои пожеланія, и при составленіи нашихъ учебныхъ плановъ идемъ какъ разъ вразрѣзъ съ ними. Всякому, кто принималъ когда-нибудь участіе въ составленіи табели средней школы того или другого типа, хорошо извѣстно, какъ представители и каждаго изъ многочисленныхъ предметовъ, входящихъ въ курсъ средней школы, стараются отвоевать себѣ возможно большее число часовъ и остаются въ окончательномъ счетѣ недовольными, такъ какъ и возможное число часовъ оказывается недостаточнымъ. За 33 года моей работы въ школахъ самаго разнообразнаго типа, какъ средней, такъ и высшей, я не припоминаю случая, чтобы я былъ свидѣтелемъ или участникомъ сокращенія числа предметовъ, или сокращенія программъ. Обратное происходитъ постоянно: число предметовъ увеличивается, программы расширяются. Мы не можемъ, если не захотимъ быть неискренними, отрицать этого несомнѣннаго факта несоотвѣтствія между нашимъ словомъ и нашимъ дѣломъ. Результаты, которые получаются, т. е. уровень общеобразовательной подготовки абитуріентовъ среднихъ школъ, не должны повышаться при наличіи такого противорѣчія слова съ дѣломъ, если слова наши говорятся не на вѣтеръ, если они дѣйствительно продуманы, если они выражаютъ сумму нашихъ наблюденій и нашего знанія. Это ясно à priori и подтверждается на опытѣ. Сѣтованія на недостаточность общеобразовательной подготовки учащихся вы можете услышать въ каждой высшей школѣ, и притомъ сѣтованія не голословныя, а подтверждаемыя документальными данными. Они подтверждаются тѣми изумительными сочиненіями, которыя пишутъ абитуріенты на конкурсныхъ испытаніяхъ, они подтверждаются тѣмъ фактомъ, что весьма небольшой процентъ поступающихъ въ высшія спеціальныя школы справляются даже съ очень скромнымъ minimum'омъ, требуемымъ для зачета перваго года по математикѣ, подтверждаются единодушнымъ отзывомъ лицъ, ведущихъ практическія занятія по математикѣ въ различныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Два основныхъ предмета школы — родной языкъ и математика поставлены такъ, что оставляютъ желать много лучшаго, выражаясь возможно сдержанно. Приписывать это явленіе несовершенству методовъ преподаванія, недостаточной требовательности въ средней школѣ, или несовершенству способовъ оцѣнки познаній учащихся было бы, я думаю, неосновательно, если на лицо имѣется основная причина — противорѣчіе дѣйствительнаго положенія дѣла тѣмъ принципамъ, передъ которыми мы сами преклоняемся и которымъ мы при всякомъ удобномъ случаѣ свидѣтельствуемъ свое почтеніе. Положеніе юноши на рубежѣ средней и высшей школы я позволилъ-бы себѣ характеризировать такъ: переходъ изъ одного водоворота многопредметности и разбросанности мысли въ другой.

Я позволю себѣ далѣе утверждать, Милостивые Государи, что какъ-бы мы ни старались усовершенствовать наши методы преподаванія, какъ-бы мы ни старались приспособить наши программы къ современному уровню науки, какъ-бы мы строго ни относились къ самимъ себѣ и къ учащимся, но до тѣхъ поръ, пока мы не дадимъ возможности учащемуся на извѣстной ступени его развитія сосредоточиться на небольшомъ циклѣ дисциплинъ, соотвѣтствующемъ его индивидуальному духовному складу, мы не достигнемъ у него той умственной зрѣлости и силы, которая необходима для успѣшнаго прохожденія высшей школы.

Авторъ настоящаго доклада около двадцати лѣтъ тому назадъ, послѣ внимательнаго ознакомленія на мѣстѣ съ постановкой преподаванія математики въ парижскихъ лицеяхъ, высказалъ въ стѣнахъ этого самаго Педагогическаго Музея, гостепріимно открывшаго намъ свои двери, свое убѣжденіе, что французская система спеціальныхъ математическихъ классовъ (тогда—classe des mathématiques élementaires и des mathématiques spéciales, по теперешнему обозначенію—classe des mathématiques и classe des mathématiques spéciales) наилучшимъ образомъ обезпечиваетъ математическую подготовку поступающихъ въ высшія спеціальныя школы.

За истекшія двадцать лѣтъ и собственный опытъ преподаванія, и продолжительное наблюденіе за преподаваніемъ въ одной изъ высшихъ спеціальныхъ школъ, и соображенія теоретическія только укрѣпили во мнѣ высказанное въ то время убѣжденіе. Разница, однако, большая между тогда и теперь. Тогда я увлекался единственно тою мыслью, что, какъ я старался показать, только при французской системѣ есть мѣсто въ средней школѣ для дѣйствительной культуры элементарной математики. Теперь я защищаю свои положенія не только въ интересахъ преподаванія математики, но и въ интересахъ общеобразовательнаго курса средней школы вообще, въ интересахъ духовнаго здоровья нашей молодежи въ тѣ критическіе годы ея развитія, когда она стоитъ на распутьи, и когда вопросъ самоопредѣленія, вопросъ «выбора факультета» является для нея другимъ и часто опредѣляющимъ неправильно и сумбурно все будущее индивидуума.

Мое утвержденіе, что культура элементарной математики находится во Франціи въ наиболѣе благопріятныхъ условіяхъ, подкрѣпляется въ настоящее время рядомъ новыхъ данныхъ. На этихъ дняхъ вы изволили выслушать, Милостивые Государи, глубокоинтересный докладъ М. Г. Попруженко о введеніи анализа безконечно-малыхъ въ курсъ средней школы, введеніи, которое докладчикъ назвалъ однимъ изъ важнѣйшихъ культурныхъ пріобрѣтеній школы XX вѣка. Докладчикъ справедливо указалъ, что инціатива этого введенія принадлежитъ французской математической школѣ. Переходя далѣе къ оцѣнкѣ учебной литературы по этому предмету, М. Г. Попруженко отдалъ рѣшительное предпочтеніе французскимъ учебникамъ передъ нѣмецкими. Оно и понятно: при французской системѣ есть возможность дать строгое научное изложеніе на своемъ мѣстѣ (Bourlet) и заложить основныя идеи при преобладаніи психологическихъ моментовъ надъ логическими—на своемъ (Borel). Профессоръ Клейнъ точно такъ же указываетъ своимъ соотечественникамъ на примѣръ учебной литературы зарейнскихъ сосѣдей. Не подлежитъ сомнѣнію. что и обратное вліяніе тоже велико. Двадцать лѣтъ тому назадъ преподаватели французскихъ лицеевъ совсѣмъ не занимались вопросами методики преподаванія, а органъ, посвященный этимъ вопросамъ, журналъ «Enseignement mathématique» праздновалъ въ прошломъ году лишь десятилѣтіе своего существованія. Чѣмъ объяснить такое равнодушіе? Я объясняю его ничѣмъ инымъ, какъ полной обезпеченностью собственнаго математическаго преподаванія и математической подготовки при наличіи спеціальныхъ математическихъ классовъ. Мы знаемъ, однако, что за послѣднее десятилѣтіе, когда интересъ къ общепедагогическимъ вопросамъ значительно поднялся во Франціи, общеобразовательный курсъ математики подвергся у нихъ тщательной переработкѣ.

Возвращаюсь къ основной мысли моего доклада и къ практическимъ изъ нея выводамъ. Я полагаю, что на высшей ступени средней школы нужно дать молодымъ людямъ возможность углубиться въ ту область идей, къ которой они намѣрены приложить свои силы въ высшей школѣ. Эта мысль при ея осуществленіи на практикѣ должна быть проведена не только по отношенію къ будущимъ слушателямъ математическаго отдѣленія физико-математическаго факультета и высшихъ техническихъ школъ, но и по отношенію къ будущимъ натуралистамъ, медикамъ, юристамъ и филологамъ съ соотвѣтствующими, конечно, модификаціями. Для полнаго развитія моей мысли и иллюстраціи ея практическими предложеніями потребовался-бы докладъ несравненно большаго объема, чѣмъ тотъ, который я могу предложить вашему вниманію. Соотвѣтственно задачамъ нашего съѣзда и предѣламъ нашей компетенціи я могу говорить теперь только о желательности математическихъ классовъ, какъ вѣнца зданія средней школы для тѣхъ ея учащихся, которые ищутъ высшаго математическаго или построеннаго на высшей математикѣ высшаго техническаго образованія. Предложеніе мое затрагиваетъ однако и общій для всѣхъ, независимо отъ выбора спеціальности, курсъ средней школы въ двухъ развѣтвленіяхъ. Во-первыхъ, возникаетъ вопросъ, съ какого класса начать раздѣленіе на спеціальности. Во-вторыхъ, естественно возникаетъ вопросъ объ объемѣ и характерѣ курса математики въ общихъ классахъ при существованіи спеціальныхъ математическихъ классовъ. Какъ тотъ, такъ и другой, вопросы требуютъ, конечно, всесторонней и тщательной разработки и въ настоящемъ докладѣ не только не могутъ быть исчерпаны, но даже въ общихъ чертахъ намѣчены: если основная мысль будетъ признана, то эти вопросы должны пройти черезъ горнило коллективной педагогической мысли, чтобы быть очищенными отъ шлаковъ субъективизма. Сдѣлаю по этому поводу только два замѣчанія. При разработкѣ обоихъ вопросовъ педагоги не будутъ стоять передъ tabula rasa, на которой имъ придется писать результаты одного педагогическаго творчества и вдохновенія. Пособіемъ, но отнюдь не обязательнымъ руководствомъ, будетъ служить тщательно выработанная и проведенная уже въ жизнь французская система средняго образованія. Второе замѣчаніе существенно связано съ моими дальнѣйшими разсужденіями и касается вопроса о продолжительности курса средней школы. Французская система средней школы строитъ два математическихъ класса на фундаментѣ шести общихъ, не считая приготовительныхъ. У насъ повидимому имѣется тенденція къ установленію такой же продолжительности, т. е. восьмилѣтней для курса средней школы съ уравненіемъ ея для гимназій и реальныхъ училищъ. Я лично сочувствую тому, чтобы продолжительность эта не возрастала, и чтобы общій курсъ можно было помѣстить въ 6 классахъ. Допуская однако то, необходимость чего я лично не предусматриваю безусловно, т. е., что общій курсъ потребуетъ для себя не шести, а семи классовъ и что продолжительность курса средней школы возраститъ до 9 лѣтъ по примѣру германской, я позволяю себѣ утверждать, что продолжительность пребыванія въ средней и высшей школѣ въ совокупности отъ этого все-таки не возраститъ, а имѣетъ даже шансы на сокращеніе сравнительно съ существующей. Къ этому убѣжденію приводятъ меня данныя о продолжительности пребыванія студентовъ въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Студенты, которые кончили-бы курсъ высшей школы въ число лѣтъ, опредѣленное нормальнымъ учебнымъ планомъ, составляютъ исключеніе. При другомъ уровнѣ и характерѣ подготовки это должно измѣниться, такъ какъ облегчится и упорядочится задача какъ средней, такъ и высшей школы.

Послѣ этихъ двухъ замѣчаній позвольте пойти дальше и, чтобы не разбрасывать вниманія, pour fixer les idées, какъ говорятъ французы, позвольте предложить, что основная мысль моя осуществлена и математическіе классы существуютъ. Посмотримъ, что можетъ выиграть отъ этого математическое преподаваніе въ средней школѣ и что дастъ этотъ порядокъ высшей. Что, наконецъ, это дастъ для полезнаго взаимодѣйствія обѣихъ. Въ высшую ступень средней школы, въ математическіе классы, перейдетъ значительная и существенная часть элементовъ высшей математики въ ихъ вполнѣ научной формѣ и въ томъ приблизительно объемѣ, въ которомъ они нынѣ читаются на обязательныхъ лекціяхъ двухъ первыхъ годовъ учебнаго плана высшихъ учебныхъ школъ и отчасти математическаго факультета университета. Не поставленныя въ положеніе воюющей державы, въ какомъ эти элементы находятся въ средней девятилѣтней школѣ германскаго типа по отношенію къ равноправнымъ humaniora и естествознанію, и во всѣхъ высшихъ нашихъ и германскихъ спеціальныхъ школахъ по отношенію къ техническимъ предметамъ, они могутъ вылиться въ ту строгую, изящную и чарующую форму, въ которой они намъ знакомы уже давно, современному уровню науки по классическимъ руководствамъ, предназначеннымъ для classe des mathématiques élementaires и classe des mathématiques spéciales, руководствамъ, находящимся всегда въ соотвѣтствіи съ консолидированнымъ уровнемъ современной науки. Ученики средней школы, находясь еще въ общихъ классахъ, будутъ знать о существованіи этой науки въ своихъ-же стѣнахъ, будутъ оріентированы до нѣкоторой степени въ ея розахъ и шипахъ, а перейдя въ самые математическіе классы, будутъ имѣть возможность испытать свои умственныя силы и вкусы на серьезной и тяжелой работѣ, условія которой существенно отличны отъ условій работы на младшихъ курсахъ высшей школы. Преподавательскій персоналъ средней школы совершенно иначе можетъ тогда осмысливать и проводить въ жизнь тотъ запасъ математическихъ идей, который мы считаемъ нужнымъ сдѣлать уже общимъ достояніемъ, которымъ долженъ быть проникнутъ курсъ общихъ классовъ. Въ то же время этотъ преподавательскій персоналъ не будетъ обреченъ на одну популяризацію математическихъ идей, на одну пропедевтику, а будетъ работать надъ изложеніемъ и усвоеніемъ ихъ въ строго научной формѣ, почерпая изъ этого источника и постоянное живое общеніе съ наукой и путеводную нить для построенія общаго курса. Пропасть между средней и высшей школами будетъ заполнена и заполнена такъ, что откроется широкая дорога для дѣйствительныхъ талантовъ, весьма часто гибнущихъ въ сумбурѣ школьнаго строя. Упомянутая пропасть существуетъ не только у насъ. На нее, какъ вамъ извѣстно, сѣтуетъ и профессоръ Клейнъ, который на ея заполненіе посвятилъ уже болѣе двадцати лѣтъ упорнаго труда. Мнѣ представляется, что эта перспектива и притомъ не гипотетическая, а имѣющая себѣ уже подтвержденіе въ вѣковомъ опытѣ, должна встрѣтить только сочувствіе преподавателей математики какъ съ обще-педагогической, такъ и со спеціально математической и, наконецъ, съ бытовой точки зрѣнія. Рѣчь идетъ о томъ, чтобы зажечь свѣточъ нашей науки не только въ сравнительно немногихъ университетскихъ городахъ, но и въ многочисленныхъ темныхъ и отдаленныхъ углахъ нашего отечества. Что можетъ дать этотъ порядокъ для высшей технической школы, для университета. Онъ можетъ, какъ я думаю, освободить эти учрежденія отъ тѣхъ задачъ, которыя имъ несвойственны и справляться съ рѣшеніемъ которыхъ имъ всегда труднѣе. Онъ дастъ имъ совершенно иначе подготовленный и дѣйствительно зрѣлый, сознательный контингентъ слушателей, который можетъ быть прямо поставленъ in medias res, въ самую суть спеціальной работы безъ всякихъ прелиминарій, которыя теперь являются источникомъ массы огорченій. Не нужно думать, чтобы эти огорченія составляли нашу русскую особенность, частное проявленіе нѣкоторой неустойчивости нашего жизненнаго уклада. Въ исторіи преподаванія математики въ высшихъ спеціальныхъ школахъ Германіи мы встрѣчаемся съ тѣмъ-же явленіемъ, которое получило тамъ даже терминъ Anti-Mathématik Bewegung—противо-математическое движеніе. Это настоящая война спеціальныхъ техническихъ предметовъ съ чистой математикой на почвѣ черезполосности изъ общей территоріи. Учащіеся спеціальныхъ высшихъ техническихъ школъ имѣютъ вездѣ опредѣленныя утилитарныя тенденціи, и о томъ, какъ нелегко впрячь ихъ въ оглобли строгой математической подготовки, могутъ вамъ пересказать многое присутствующіе здѣсь профессора. Я боюсь впасть въ преувеличеніе, сказавъ, что огромное большинство студентовъ-техниковъ въ этой области стараются какъ можно меньшему научиться и какъ можно основательнѣе позабыть. Отсюда и Anti-Mathématik Bewegung, въ которой студенты нашли союзниковъ въ профессорахъ-техникахъ и которая послужила въ Германіи толчкомъ къ возможной конкретизаціи математическаго преподаванія, къ возможно тѣсному сліянію его съ преподаваніемъ техническимъ путемъ постоянныхъ экскурсій въ область приложеній. Я лично не думаю, чтобы это само по себѣ полезное и плодотворное въ дидактическомъ смыслѣ направленіе могло существенно помочь злу, основы котораго я старался формулировать въ началѣ доклада. Основаніемъ аналитической геометріи, основаніемъ анализа со включеніемъ техники дифференцированія и интегрированія функцій и даже нѣкоторыхъ случаевъ интегрированія уравненій, основаніямъ аналитической механики, основаніямъ начертательной геометріи гораздо лучше можно научить въ математическихъ классахъ, чѣмъ на первыхъ двухъ курсахъ высшей школы при наличности той черезполосности, которая въ ней неизбѣжно существуетъ, и при условіи соотвѣтственной подготовки преподавателей. Если система, предлагаемая мною, будетъ проведена съ достаточной планомѣрностью и осмотрительностью (а безъ этихъ свойствъ никакая самая стройная система не можетъ имѣть успѣха), то органически должна улучшиться и научная подготовка преподавателей средней школы. Эта послѣдняя страдаетъ у насъ отъ той-же причины, которую профессоръ Клейнъ мѣтко охарактеризовалъ системой двойного забвенія: сначала, поступивъ въ высшую школу, ты долженъ забыть все, чему тебя учили въ средней; потомъ, поступивъ преподавателемъ въ среднюю, ты долженъ забыть все, чему научился въ высшей. Уничтоженіе искусственной пропасти, создавшейся между математикой средней и высшей школы, уничтоженіе вредной черезполосности, образовавшейся въ пограничныхъ областяхъ обѣихъ, созданіе свободной территоріи, на которой могла бы мысль учащаго и учащагося углубиться безпрепятственно въ величайшія созданія человѣческаго творчества,—вотъ то, чего я ожидалъ бы отъ принятія и проведенія въ жизнь защищаемыхъ мною положеній.

Я скажу немного относительно одного возраженія, которое можетъ быть мнѣ сдѣлано, относительно опасеній ранней спеціализаціи и сокращенія общеобразовательнаго курса. Милостивые Государи, наши дѣды спеціализировались въ гораздо болѣе раннемъ возрастѣ, и право это было не худо. Не слѣдуетъ забывать, что ранняя спеціализація нашихъ дѣдовъ происходила при условіяхъ, когда общее теченіе жизни давало гораздо менѣе стимуловъ и матеріала для поднятія и развитія общаго кругозора, когда не было того развитія общественной и политической жизни, какое мы имѣемъ теперь. Не будемъ же бояться этой не ранней, а своевременной спеціализаціи, при которой мы дѣйствительно научимъ нашу молодежь настоящему дѣлу и дадимъ ей возможность полюбить нашу науку.

Еще одно возраженіе, которое я могу предвидѣть. Тѣ, кто разочарованъ въ нашей средней школѣ и предубѣжденъ противъ нея, могутъ высказать опасеніе, что, вручая среднее обученіе основамъ высшей математики, университеты и высшія техническія школы разрушатъ свой фундаментъ и будутъ строить свое зданіе на пескѣ. Такіе голоса раздаваться будутъ. Позвольте обратить ваше вниманіе на то, что французская наука и французская техника не производятъ впечатлѣнія зданій, имѣющихъ тенденцію рухнуть. Позвольте сказать, что то, что я осмѣливаюсь предложить, диктуется естественнымъ ходомъ историческаго процесса въ строѣ школы. Прошу васъ развернуть очень старую, но вѣчно юную книгу Lacroix: Essay sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier, вышедшую въ началѣ XIX вѣка. Изъ нея вы узнаете, что въ росписаніи лекцій прусскихъ университетовъ въ началѣ прошлаго столѣтія значатся лекціи по элементарной математикѣ—алгебрѣ, геометріи, тригонометріи. Германскій университетъ ввѣрилъ затѣмъ эти дисциплины средней школѣ и не разрушился. Правда, онъ жалуется теперь на «систему двойного забвенія», но вѣдь я именно отъ этой системы предостерегаю. Теперь наступилъ моментъ, когда пора сдѣлать то же съ новой совокупностью математическихъ идей, знаній и навыковъ, но сдѣлать это такъ, какъ сдѣлано было сто лѣтъ назадъ, уже нельзя, не нарушая емкости общеобразовательнаго курса. Отсюда — необходимость созданія нейтральной территоріи—спеціальныхъ математическихъ классовъ.

Если-бы мы создали такіе классы, то спрашивается, какое мѣсто заняли-бы они формально въ іерархической лѣстницѣ учебныхъ заведеній. Я понимаю это такъ, что окончаніе шести или, если-бы это оказалось необходимымъ, семи общеобразовательныхъ классовъ должно дать всѣ права окончанія курса средней школы, кромѣ права поступленія въ высшую. Желающій поступить на математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета или въ высшую техническую школу, долженъ окончить два спеціальныхъ математическихъ класса.

Въ заключеніе позвольте, Милостивые Государи, принести извиненіе уважаемымъ членамъ съѣзда въ томъ, что спѣшность составленія доклада, явившагося для меня нѣкоторой неожиданностью, не позволила мнѣ дать ему ту полноту и обработку, которой заслуживала бы избранная мною тема. Помимо тѣхъ пробѣловъ, которые мнѣ могутъ указать, я вижу многіе самъ, а одинъ въ особенности: мнѣ слѣдовало-бы предпослать настоящему докладу другой съ подробнымъ очеркомъ французской системы средняго образованія, остановиться на подробностяхъ программы. Если окажется, что основныя мысли моего доклада вызовутъ интересъ и не пройдутъ незамѣченными, я постараюсь при соотвѣтственномъ случаѣ восполнить этотъ существенный пробѣлъ. Восполнить его тѣмъ болѣе для меня обязательно, что я отнюдь не являюсь слѣпымъ поклонникомъ французской школы вообще, и взялъ примѣръ ея только какъ иллюстрацію педагогическихъ принциповъ, которымъ, какъ мнѣ кажется, мы поклоняемся въ теоріи и которые нарушаемъ на дѣлѣ».

† В. Б. Струве.

Докладъ В. Б. Струве о связи между курсомъ математики въ средней школѣ и курсомъ ея на математическихъ факультетахъ университетовъ и въ нѣкоторыхъ спеціальныхъ учебныхъ заведеніяхъ былъ послѣднимъ общественнымъ выступленіемъ покойнаго. 10 Января онъ скончался. Но память о немъ не изгладится въ исторіи русской школы, какъ средней, такъ и высшей, которымъ онъ посвятилъ свои способности и недюжинныя дарованія.

Пренія по докладамъ К. А. Поссе и В. Б. Струве.

А. В. Полторацкій (Спб.). „Вполнѣ присоединяясь къ пожеланію, высказанному многоуважаемыми докладчиками, я позволю себѣ только привести еще нѣсколько соображеній. Наша военная школа въ Россіи завоевала довольно почетное мѣсто. Въ началѣ и въ срединѣ 19 столѣтія военная школа шла впереди гражданской. Если возьмете положеніе о военныхъ учебныхъ заведеніяхъ 1859 г., результатъ слишкомъ 20-лѣтней работы генерала Ростовцева, начальника военно-учебныхъ заведеній той эпохи, то тамъ увидите много педагогическихъ предложеній; примѣненіе которыхъ даже теперь было бы шагомъ впередъ. Въ военно-учебномъ вѣдомствѣ существуетъ такое подраздѣленіе учебныхъ заведеній, какого нѣтъ въ гражданскихъ школахъ: есть промежуточная школа между среднимъ учебнымъ заведеніемъ и Академіей:—военное училище. Лучшіе наши ученики, избирающіе своей спеціальностью артиллерійское или военно-инженерное дѣло, изучаютъ математику: въ корпусѣ семь лѣтъ, три года въ спеціальномъ Артиллерійскомъ или Инженерномъ училищѣ и три года въ соотвѣтствующей Академіи. Жалобъ на успѣхи по математикѣ учениковъ этой категоріи не приходилось слышать. Для учениковъ менѣе одаренныхъ математическими способностями открытъ доступъ въ училища пѣхотныя и кавалерійскія. Недостатокъ постановки курса математики у насъ заключается въ томъ, что ученикамъ этой второй категоріи приходится прорабатывать въ корпусѣ курсъ того-же объема и содержанія, какой проходятъ будущіе артиллеристы и инженеры, что отнимаетъ у нихъ слишкомъ много времени не только на урокахъ, но и при подготовленіи уроковъ и въ концѣ концовъ, имъ оказывается непосильнымъ. Въ пѣхотныхъ училищахъ преподаватели неоднократно заявляли, что ихъ затрудняетъ не то, что ученики не прошли аналитической геометріи, а то, что они въ старш. классахъ средняго учебнаго, заведенія забываютъ простыя и десятичныя дроби. И кадеты, и гимназисты, иреалисты, сходясь вмѣстѣ въ военныхъ училищахъ, оказываются чрезвычайно слабыми и по родному языку, и по исторіи, и по математикѣ; тутъ нѣтъ разницы между всѣми учениками средней школы. Наши корпуса нуждаются въ улучшеніи въ томъ отношеніи, что для нихъ желательно факультативное усвоеніе математики съ выдѣленіемъ менѣе способныхъ въ особую группу“.

„Оба докладчика внесли предложеніе о раздѣленіи курса на спеціальный и неспеціальный. Я уже говорилъ, что въ Скандинавіи это подраздѣленіе широко осуществлено. Здѣсь высказывалось мнѣніе, что заслуживаютъ подражанія французскія школы. Я знакомъ съ французской школой и съ учебниками ея. Тамъ учебники по физикѣ и математикѣ такъ обширны, что профессора обыкновенно разрѣшаютъ ученикамъ отвѣчать съ учебниками въ рукахъ. Въ Скандинавіи нѣтъ такой перегрузки, потому что тамъ врачамъ и низшимъ техникамъ не приходится сдавать экзаменъ на инженера, какъ во Франціи“.

„Курсъ высшей школы требуетъ большой разгрузки, но еще болѣе этой разгрузки требуетъ средняя школа. Введеніе начальнаго курса анализа важно и необходимо для наиболѣе одаренныхъ къ математикѣ молодыхъ людей, которые пойдутъ въ высшую школу—въ техническія училища или въ университеты, но для всѣхъ прочихъ гораздо важнѣе утвердиться въ знаніяхъ элементарной математики и общеобразовательныхъ предметовъ. Надо обратить вниманіе на новые языки, которые въ большомъ загонѣ какъ въ военной, такъ и въ гражданской школѣ, а между тѣмъ они являются источникомъ знанія для тѣхъ, кто, окончивъ школу, будетъ интересоваться наукой. Позволю себѣ закончить пожеланіемъ, высказаннымъ однимъ шведскимъ профессоромъ: пусть любовь къ наукамъ, къ семьѣ и отечеству руководитъ всей вашей дѣятельностью. Если всегда будемъ держать путь на этотъ маякъ, то рано или поздно придемъ къ вѣрной гавани".

В. Е. Загулинъ (Екатеринославъ). „Мы слышали доклады, касающіеся реформы преподаванія математики въ средней и высшей школахъ, реформы, основанной, главнымъ образомъ, на наглядности и на лабораторныхъ занятіяхъ воспитанниковъ. Къ чему эта реформа и какая основная мысль ея? Основная мысль — это живая преемственная связь между средней школой и высшей, связь, которая никогда не нарушалась бы, была бы непрерывна. Эта идея проникла во всѣ доклады и развивается постепенно. Особенно выпукло и ярко выразилась она въ лекціи проф. Нечаева, давшаго психологическія основанія развитія ребенка отъ его рожденія до юношества, по крайней мѣрѣ. Затѣмъ кульминаціоннымъ пунктомъ развитія этой идеи явились доклады уважаемыхъ проф. К. А. Поссе и В. Б. Струве. Эти доклады касались введенія дополнительныхъ классовъ въ наши средне-учебныя заведенія, классовъ, которые раздѣляли бы учениковъ по спеціальностямъ. Такимъ образомъ, ученики въ средней школѣ усвоили бы начала высшаго анализа и университетскихъ наукъ. Проф. Нечаевъ указалъ намъ, что, благодаря опытамъ его и другихъ лицъ, онъ убѣдился, что для ребенка имѣются три характерныхъ періода развитія: отъ 2-хъ до 7 или 8-ми лѣтъ, отъ 8 до 13, и отъ 13 или 14 лѣтъ до 16—17. Первый и второй—періоды колебанія математическаго развитія, а 3-й періодъ, для 16-ти лѣтняго возраста, является кульминаціоннымъ пунктомъ развитія человѣческой личности, когда юноша начинаетъ переходить къ полному созрѣванію: физическому, умственному и нравственному. Окончить теперешній гимназическій курсъ въ 16 лѣтъ—трудно, но дать законченное общее образованіе къ 16 году—вполнѣ возможно. Два или одинъ спеціальныхъ класса въ средней школѣ, смотря по обстоятельствамъ, надо выдѣлить, и въ этихъ дополнительныхъ классахъ раздѣлять учениковъ по природнымъ способностямъ для усовершенствованія въ тѣхъ дисциплинахъ, которыя они считаютъ для себя наиболѣе важными. Здѣсь-же должны изучаться и тѣ классическія произведенія и работы древнихъ, которыя необходимы для университетскихъ занятій. Тогда ученики, входя въ университетъ, могли бы почерпать сокровища знаній уже изъ наукъ современныхъ, не останавливаясь болѣе на изученіи классиковъ. Кромѣ того, когда будетъ раздѣленъ курсъ въ старшихъ классахъ по спеціальностямъ, то учащіеся станутъ получать высшее образованіе, не нарушая равновѣсія своихъ силъ, и умѣренный трудъ будетъ идти только на пользу организма".

В. М. Куперштейнъ (Елисаветградъ). „Проф. Поссе говоритъ, что онъ не настаиваетъ на уравненіи программъ математики женскихъ и мужскихъ училищъ. Это меня поразило. Я долгое время работала въ смѣшанныхъ школахъ низшаго типа, а также посѣщала массу уроковъ въ коммерческихъ училищахъ, но никогда различія въ пониманіи математики между мальчиками и дѣвочками не замѣчала. Мнѣ думается, что между мужчинами и женщинами разницы въ этомъ отношеніи нѣтъ. Я полагаю, что можно уравнять программу математики въ женскихъ и мужскихъ школахъ".

С. Б. Шарбе (Екатеринославъ). „Если я позволилъ себѣ взойти на эту кафедру, то не для того, чтобы возражать многоуважаемымъ докладчикамъ,—я хочу лишь подчеркнуть нѣкоторыя обстоятельства, которыя, мнѣ кажется, были недостаточно выпукло высказаны. Мы сегодня слыхали, какъ мѣтко Клейнъ охарактеризовалъ систему забвенія математики: это — система двойного забвенія. Предыдущіе докладчики и ораторы показали, какая глубокая пропасть лежитъ при переходѣ отъ средней школы къ высшей и отъ высшей школы къ средней. Докладчикъ показалъ достаточно подробно, что первую пропасть можно заполнить; необходимо заполнить и вторую пропасть. Чтобы была преемственная связь между средней школой и высшей нужно показать, какъ учащемуся въ высшей школѣ сдѣлаться преподавателемъ средней школы и низшей. Нужно высказать пожеланіе о непрерывномъ переходѣ отъ средней школы къ высшей. Необходимо обратить вниманіе на это положеніе, иначе то величественное зданіе, при постройкѣ котораго мы присутствуемъ, будетъ выстроено на пескѣ".

Проф. Д. М. Синцовъ (Харьковъ). „Я вполнѣ присоединяюсь ко всѣмъ предложеніямъ моихъ уважаемыхъ собратьевъ—проф. Поссе и Струве,—и если взошелъ на эту кафедру, то для того, чтобы сдѣлать небольшое дополненіе. Когда вамъ говорятъ о томъ, что во французской школѣ преподаютъ такъ много математики, то можетъ возникнуть вопросъ: а доступно ли силамъ учениковъ пройти столько въ теченіе курса? Конечно, вы можете сказать, что исключенія могутъ быть, что найдутся способные, но это, быть можетъ, будутъ только единицы. И вотъ съ этой стороны очень характерно, что французская школа, какъ она сложилась послѣ реформы 1902 г. и послѣ пересмотра программы въ 1905 г. и 1909 г., реформирована такъ, что въ первыхъ двухъ отдѣленіяхъ доходятъ до изученія производныхъ. Другой же типъ школы—classe des mathématiques speciales—это чисто французское учрежденіе, которое служитъ для подготовки къ конкурснымъ экзаменамъ, слѣдовательно, основной ихъ дѣятельностью является подготовка къ требованіямъ программы".

„У меня есть статистическія данныя за послѣдніе года, начиная съ 1903 г. и кончая 1909 г. Я не буду приводить всѣ цыфры, но оказывается слѣдующее: классъ latin-grec существуетъ въ немногихъ лицеяхъ и въ немъ на 100 всѣхъ учениковъ имѣется только 8 человѣкъ. Затѣмъ примѣрно 18--19 человѣкъ приходится на классъ latin, 28 latin-science и 45—46 science-langues. Такимъ образомъ чрезъ послѣдніе отдѣлы проходитъ 74%, и французская нація какъ бы доказываетъ, что $^3/_4$ ея населенія обладаютъ способностями къ математикѣ. Я не успѣлъ захватить съ собой отчета Коха, составленнаго для международной комиссіи по преподаванію математики, который говоритъ о преподаваніи въ шведскихъ школахъ, но тамъ не всѣ этимъ довольны. Такое же движеніе относительно реформы математики существуетъ и въ другихъ странахъ—въ Бельгіи, Голландіи, и во всякомъ случаѣ цѣль этихъ стремленій повышеніе дозы математики, которая необходима всякому образованному человѣку".

І. И. Чистяковъ (Москва). „Я тоже хотѣлъ сдѣлать нѣкоторыя добавленія къ докладу проф. В. Б. Струве. Постановка математики въ школахъ Франціи дѣйствительно весьма высока и можетъ увлекать, но необходимо вспомнить, какъ тамъ набирается кадръ преподавателей. Чтобы преподавать высшую математику, необходимо обладать большими математическими знаніями. На нашемъ опытѣ мы можемъ судить, какое смятеніе вызвало у насъ введеніе нѣсколько лѣтъ тому назадъ элементовъ анализа и аналитической геометріи въ средѣ преподавателей, изъ которыхъ многіе оказались къ этому мало подготовленными. Чтобы подготовить преподавателей высшей математики въ спеціальныхъ классахъ Франціи, принята особая мѣра. Туда поступаютъ лица, выдержавшія труднѣйшіе конкурсные экзамены на агреже. Это не есть ученая степень, это титулъ. Лицо, которое имѣетъ это званіе, гордится имъ всю свою жизнь. Дѣйствительно, выдержать этотъ экзаменъ весьма трудно. Мнѣ извѣстно, что къ этимъ экзаменамъ готовятся чуть ли не съ гимназической скамьи и дѣти неимущихъ классовъ, очень часто дѣти крестьянъ. Экзамены настолько трудны, что къ нимъ многіе готовятся половину своей жизни. Существуетъ высшая нормальная школа, которая занимается подготовкой къ этимъ экзаменамъ, въ которой преподаютъ самые извѣстные профессора. Въ результатѣ выдержаннаго экзамена на агреже человѣкъ непремѣнно получаетъ мѣсто преподавателя, и это мѣсто совершенно его обезпечиваетъ. Онъ имѣетъ возможность преподавать высшую математику и имѣетъ самъ возможность работать въ области ея. Многіе агреже оказываются преподавателями математики въ разныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. При такой подготовкѣ преподавательскаго персонала, конечно, можно имѣть въ спеціальныхъ классахъ достаточный кадръ подготовленныхъ преподавателей и можно въ нихъ вести преподаваніе математики съ тѣмъ блескомъ и успѣхомъ, какъ въ странѣ математики par excellence. При сравненіи этихъ условій съ тѣмъ, что имѣется у насъ, относительно открытія въ скоромъ времени спеціальныхъ классовъ, возникли бы большія затрудненія въ смыслѣ подготовки соотвѣтствующаго преподавательскаго персонала. Поэтому, какъ ни заманчива мысль перенести часть высшей математики въ среднюю школу, намъ долго придется ждать осуществленія спеціальныхъ классовъ. Мысли, подобныя изложеннымъ В. Б. Струве, высказывались чуть ли не 20 лѣтъ тому назадъ, а дѣло стоитъ въ этомъ отношеніи на той же точкѣ, на которой стояло тогда. Эта сторона имѣетъ чрезвычайно существенное значеніе, и какъ бы я горячо ни мечталъ о томъ, чтобы у насъ была устроена подобная система спеціальныхъ классовъ, я боюсь, что долго придется ждать осуществленія этого“.

В. Р. Мрочекъ (Спб.). „Въ связи съ сегодняшнимъ докладомъ меня интересуютъ 2 вопроса: первый—выиграетъ ли высшая школа отъ реформы средней школы и второй вопросъ, который тѣсно примыкаетъ къ первому,—если высшая школа выиграетъ, то отразится ли эта реформа на насъ – преподавателяхъ, получившихъ высшее образованіе въ той же высшей школѣ. Я имѣю возможность опираться при моемъ дальнѣйшемъ изложеніи на довольно интересный оффиціальный документъ. Это — оффиціальный отчетъ Русской Національной Подкомиссіи, представленный въ Международную Комиссію по реформѣ преподаванія математики: „О преподаваніи математики въ университетахъ и высшихъ спеціальныхъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи“. Въ этомъ докладѣ говорится между прочимъ слѣдующее: „Университетское образованіе должно считаться съ суммою знаній, выносимыхъ слушателями изъ тѣхъ школъ, откуда они приходятъ; но фактически эта сумма не велика, и поэтому курсъ первыхъ семестровъ университета начинается съ первыхъ понятій Аналитической Геометріи и съ такъ наз. Введенія въ Анализъ, содержащаго дополненія къ курсу элементарной алгебры“. Переходя далѣе къ разсмотрѣнію программъ университетовъ по отдѣльнымъ кафедрамъ, комиссія указываетъ на очень низкій уровень университетскаго преподаванія на первомъ и второмъ курсахъ. Такъ по поводу курса Введенія въ Анализъ говорится: „Опытъ показываетъ, что на экзаменахъ должны отказаться отъ всѣхъ подобныхъ вопросовъ, такъ какъ чаще всего невозможно было добиться маломальски удовлетворительныхъ результатовъ“.

Относительно Аналитической Геометріи говорится: „Въ среднемъ програма курса Аналитической Геометріи не превышаетъ извѣстной программы класса спеціальной математики французскихъ лицеевъ; обыкновенно она даже короче и не содержитъ ничего, основаннаго на понятіи о производной“.

„Тоже самое можно сказать и о курсѣ Начертательной Геометріи, программа которой тѣмъ болѣе не превышаетъ программы французскихъ лицеевъ“.

„Курсъ Высшей Алгебры содержитъ тоже весьма элементарные вопросы, составляющіе, впрочемъ, программу средней школы, и не включаетъ ни одного вопроса сколько-нибудь не элементарнаго“.

„Программа Дифференціальнаго и Интегральнаго исчисленія на первыхъ 4 семестрахъ въ среднемъ не выше подобныхъ же программъ подготовительныхъ курсовъ къ французскимъ Высшимъ Техническимъ учебнымъ заведеніямъ“.

„Геометрія въ русскихъ Университетахъ представлена гораздо меньше Анализа“.

„Есть и еще одна основная вѣтвь математики, которая представлена въ большинствѣ нашихъ университетовъ совершенно неполно, а именно– теорія функцій“.

„Вотъ тѣ краткія данныя, на которыхъ можно базировать вопросъ о томъ, выиграетъ ли высшая школа отъ реформы средней или не выиграетъ. Можетъ быть постоянныя возраженія, постоянные упреки, что мы стараемся ввести университетскіе элементы въ среднюю школу, будутъ совершенно оставлены, если мы сравнимъ наше университетское преподаваніе съ заграничнымъ, если мы увидимъ, насколько университеты должны понижать свои требованія, чтобы достичь какихъ нибудь результатовъ. Здѣсь въ оффиціальномъ отчетѣ констатируется массовое бѣгство съ физико-математическаго факультета на другіе факультеты именно потому, что студенты не въ состояніи послѣ средней школы войти въ кругъ идей болѣе высокаго порядка. Я думаю, мы — преподаватели — сами отъ этого выиграемъ, по крайней мѣрѣ выиграетъ наше будущее поколѣніе, которому придется вести дѣло въ реформированной школѣ“.

„Но и отъ насъ зависитъ весьма многое. Французская реформа, которая введена съ 1902 г. и частично улучшена въ 1905 г., дала возможность въ 1909 г. подвести нѣкоторые итоги; такъ называемый генеральный инспекторъ французскихъ школъ констатируетъ слѣдующее: Если реформа во Франціи прошла, если эта реформа получила и принципіальное обоснованіе, и реальныя твердость и увѣренность, что она хороша, то этимъ она обязана тѣмъ превосходнымъ преподавателямъ, которые должны были порвать со старыми, укоренившимися собственными воззрѣніями, должны были переработать собственное міросозерцаніе и храбро и энергично пошли впередъ, такъ какъ ставили дѣло творческаго развитія массъ выше своихъ собственныхъ интересовъ".

„Именно отъ поднятія этого уровня самосознанія среди самихъ преподавателей и зависитъ дѣло обновленной школы".

„*М. Г. Попруженко* (Спб.). Если осуществляется реформа средней школы, то является вопросъ о минимумѣ обязательнаго матеріала. Касаться этого сейчасъ я не могу; скажу лишь объ основахъ анализа безконечно-малыхъ. Я считаю, что маленькій курсъ анализа безконечно-малыхъ относится именно къ этому обязательному для всѣхъ минимуму, конечно—въ той или иной конструкціи. И именно въ такомъ смыслѣ этотъ вопросъ разрѣшается во Франціи, Германіи и другихъ странахъ. Вдаваться въ дальнѣйшія подробности по этому предмету я не считаю возможнымъ, потому что вопросъ объ анализѣ безконечно-малыхъ достаточно дебатировался на Съѣздѣ. Я только коснусь двухъ аргументовъ, которые были выдвинуты сегодня противъ введенія анализа безконечно малыхъ. Первый изъ нихъ касается того, что будто бы на математику ученики затрачиваютъ очень много времени, что все время, данное на подготовку уроковъ, идетъ на математику. Я считаю, что такой фактъ невѣренъ и если онъ можетъ имѣть мѣста въ частныхъ случаяхъ, то это только указываетъ на что, то въ тѣхъ заведеніяхъ, гдѣ это происходитъ, есть какія то ненормальности въ постановкѣ математики. Что касается второго аргумента, который состоитъ въ томъ, что нѣкоторые слабые ученики оказываются мало подготовленными въ области ариѳметическихъ дѣйствій, дѣленія десятичныхъ дробей, извлеченія квадратнаго корня и т. д., то я думаю, что масштабомъ для оцѣнки успѣшности занятій не могутъ служить малоспособные и лѣнивые ученики, которые есть въ каждомъ классѣ и по исторіи, и по географіи и т. д. Мы знаемъ, что есть извѣстный % малоуспѣвающихъ, но вовсе не этотъ % служитъ показателемъ успѣшности постановки того или иного предмета. Вообще странно выдвигать аргументомъ противъ введенія анализа безконечно-малыхъ случайный фактъ, что нѣсколько учениковъ не знали дѣленія десятичныхъ дробей, чему можно научить ихъ въ 1/2 часа“.

Е. С. Томашевичъ (Москва).. „Уважаемые докладчики и прочіе ораторы выдвигали логическій мотивъ въ вопросѣ о введеніи высшей математики въ среднюю школу, съ тѣмъ, чтобы это измѣненіе было согласовано съ программой высшей школы. Этотъ логическій мотивъ, конечно, несокрушимъ; но я хочу выдвинуть если не на первый планъ, то хотя бы на второй, мотивъ моральнаго порядка. Всѣ мы обязаны научить своему предмету всѣхъ своихъ учениковъ и мы отлично знаемъ, что въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ,—коммерческія училища Министерства Торговли и Промышленности, можетъ быть, болѣе свободны отъ предразсудковъ, коренящихся въ Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія,—мы не можемъ научить всѣхъ всему и должны такъ или иначе лавировать между необходимостью достигнуть удовлетворительнаго результата и невозможностью этого достиженія. И вотъ неоднократно приходилось мнѣ высказывать ту мысль, которую нынѣ высказалъ докладчикъ относительно бифуркаціи средней школы. Каковы мои идеалы, я распространяться не могу, потому что за однимъ идеаломъ идутъ другіе; мы приближаемся къ извѣстному идеалу, а какіе идеалы потомъ могутъ быть поставлены, говорить трудно,—но я выдвигаю тотъ моральный мотивъ, что намъ приходится при обученіи учениковъ фальсифицировать, можетъ быть, науку, въ чемъ былъ брошенъ упрекъ, какъ разъ съ этой каѳедры, но еще болѣе фальсифицировать отмѣтки учениковъ, которыя приходится ставить. Я думаю, вамъ не разъ приходилось на экзаменахъ, зная слабаго ученика, все-таки ставить 3, хотя онъ и отвѣчаетъ плохо, и знаетъ плохо. Мы даемъ ученикамъ не настоящія отмѣтки и обманываемъ и учениковъ, и родителей, и начальство, и самихъ себя. И вотъ теперь на этомъ Съѣздѣ я чувствую, что волна, которая поднялась и приближаетъ насъ къ тому идеалу, который поставилъ почтенный докладчикъ, волна- такъ или иначе вынесетъ насъ. Моя педагогическая дѣятельность приближается къ закату, но я, уѣзжая съ этого Съѣзда, чувствую, что идеалъ, который стоялъ предо мной, можетъ быть, недалекъ, и недалеко то будущее, когда мы перестанемъ быть фальсификаторами и сможемъ поставить себя дѣйствительно на болѣе высокое положеніе. Мнѣ кажется, нужно выдвинуть этотъ мотивъ моральнаго характера, имѣющій цѣлью избавить педагоговъ отъ того гнета, который лежитъ на нихъ, когда они исполняютъ свои обязанности, когда желаютъ достигнуть недостижимаго, обучить всѣхъ всему. Да, бифуркація школы необходима. Когда начать ее, вопросъ мудреный, но тѣмъ не менѣе всѣхъ всему обучать невозможно и невозможно ставить педагоговъ въ недостойное положеніе. И вотъ, можетъ быть, мы, разъѣхавшись отсюда и очутившись на мѣстахъ, почувствуемъ, что нашъ идеалъ хотя и не осуществится еще, но онъ не какая-нибудь несбыточная мечта, что онъ,—близко, близко".

Д. М. Левитусъ (Спб.). „Мы, математики, жалуемся, что у насъ въ нашей области дѣло идетъ неладно; но теперь одновременно съ нами засѣдаютъ преподаватели древнихъ языковъ, которые сильно жалуются, что у нихъ дѣло не клеится; мы проектируемъ усиленіе школьнаго преподаванія въ области математики, а тамъ проектируется весьма значительное усиленіе въ области древнихъ языковъ—въ частности и гуманитарныхъ наукъ—вообще. И мы правы, и они правы, но пока мы не дадимъ возможности ученикамъ на извѣстной ступени выбрать тотъ или иной путь для своего дальнѣйшаго развитія, до тѣхъ поръ ни мы, ни гуманисты ничего не достигнемъ. Единственный выходъ изъ создавшагося положенія—это предоставленіе учащимся возможности въ одномъ изъ старшихъ классовъ самимъ выбрать путь, по которому они пойдутъ, или въ области гуманитарныхъ знаній, или въ области математики".

С. М. Зегеръ (Москва). „Я приведу только маленькую историческую справку. Въ 1900 г., одиннадцать лѣтъ тому назадъ, при Московскомъ учебномъ округѣ была комиссія по разсмотрѣнію вопроса о преобразованіи среднихъ учебныхъ заведеній, комиссія очень многолюдная, имѣвшая большое количество засѣданій. Въ этой комиссіи проф. П. А. Некрасовъ сдѣлалъ тогда предложеніе о бифуркаціи школы, т. е. о томъ же, что сдѣлали сегодня. Этотъ вопросъ былъ разсмотрѣнъ довольно подробно, труды комиссіи были напечатаны въ 5—6 томахъ. Я считаю не лишнимъ напомнить это членамъ Собранія, такъ какъ многіе изъ нихъ не знаютъ, что этотъ вопросъ разработанъ даже оффиціальными педагогами. Что касается доклада по существу, то какъ въ теоріи, такъ и въ принципѣ можно только всецѣло къ нему присоединиться; какъ же разрѣшить его — вопросъ практики. Мы можемъ лишь пожелать, чтобы при разрѣшеніи его былъ извлеченъ максимумъ полезности".

С. Ц. Морозовскій (Ставрополь—губ.). „Я не намѣренъ ни возражать, ни дополнять доклады, но предлагаю обратиться съ покорнѣйшей просьбой къ Организаціонному Комитету: немедленно отпечатать оба доклада Поссе и Струве, чтобы мы съ ними уѣхали на мѣста, потому что ихъ идеи тѣсно граничатъ съ тѣми предначертаніями, которыя зародились у насъ на протяженіи 4-лѣтней практики преподаванія курса анализа въ седьмомъ классѣ. Въ этихъ докладахъ есть разрѣшеніе тѣхъ сомнѣній и трудностей, съ которыми мы боремся".

В. І. Шиффъ (Спб.). „Въ изложенныхъ докладахъ не разъ упоминалось о желательности развитія у учащихся функціональнаго мышленія и, если возможно, пріобщенія ихъ къ философскому мышленію. Для развитія функціональнаго мышленія и возбужденія философской мысли врядъ ли есть болѣе подходящій предметъ, чѣмъ аналитическая геометрія. Нельзя говорить о введеніи въ школу анализа безконечно-малыхъ, если не будетъ введена аналитическая геометрія, потому что тогда анализъ безконечно-малыхъ будетъ совершенно въ воздухѣ. Поэтому я позволяю себѣ выразить пожеланіе, чтобы не только въ реальныхъ училищахъ, въ которыхъ это введено, но и вообще во всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ была введена аналитическая геометрія хотя бы въ небольшомъ объемѣ".

В. Я. Гебель (Москва). „Предыдущіе ораторы исчерпали весь вопросъ и тѣ мысли, которыя я хотѣлъ сказать, предвосхищены моими предшественниками. Если не будетъ того раздѣленія, о которомъ говорили Поссе и Струве, то не будетъ оздоровленія школы. Этотъ вопросъ исчерпанъ, и я хочу только сказать два слова по поводу пессимистической фразы, раздавшейся изъ устъ одного оратора. Онъ напоминалъ о томъ, какъ произошла паника среди учителей, когда вводилась аналитическая геометрія на плоскости и начала анализа. Да, нѣчто подобное было въ то время, этого факта отрицать нельзя, но можно ли изъ этого факта дѣлать выводъ, что раздѣленіе нашей средней школы на классы, скажемъ, гуманитарные, историко-литературные и естественно-математическіе невозможно въ настоящее время? Такого заключенія нельзя сдѣлать. Паника явилась вслѣдствіе того, что введеніе анализа и аналитической геометріи въ реальныхъ училищахъ произошло внезапно, какъ молнія съ яснаго неба. Вы знаете, что никакихъ разговоровъ, никакой подготовки къ этой реформѣ не было, и понятно—въ первый моментъ были затрудненія и замѣшательства, но съ тѣхъ поръ мы видѣли много плодотворныхъ послѣдствій этой реформы. Явился рядъ трудовъ преподавателей средней школы, направленныхъ къ осуществленію этой реформы; въ съѣздахъ и математическихъ кружкахъ поднялась большая волна, достигшая своего верхняго уровня на этомъ Съѣздѣ, волна въ пользу того, чтобы распространить начала высшей математики на всякую среднюю школу. Развѣ это не есть слѣдствіе реформы? Конечно, противъ нея раздавались единичные голоса, но они тонули въ безнадежномъ мракѣ".

„Введеніе реформы въ реальныхъ училищахъ произвело большой переворотъ въ умахъ. Она доказала, что среди русскаго учительскаго персонала, который съ достоинствомъ выполняетъ проведеніе этихъ задачъ, нечего опасаться, какъ утверждалъ одинъ изъ ораторовъ, что въ случаѣ открытія спеціальнаго математическаго класса не будетъ преподавателей. Разумѣется, мы видимъ нѣкоторые дефекты современной подготовки, но и теперь нельзя утверждать, что нѣтъ кадра преподавателей, достойныхъ занять мѣста въ спеціальныхъ классахъ. Эти страхи и опасенія могутъ, пожалуй, затормазить эту реформу, а раздаются они обыкновенно при всякомъ новшествѣ. Вспомните слова одного нѣмецкаго учебника: не будемъ бояться, но пойдемъ впередъ".

Проф. К. А. Поссе (Спб.). „Изъ дополненій и возраженій къ моему докладу одно замѣчаніе меня чрезвычайно сильно задѣло, потому что показало, что, несмотря на всѣ усилія выражаться ясно, я этого не достигъ. Мнѣ было сказано уважаемой г-жей Куперштейнъ, что она не понимаетъ, почему я не настаиваю на уравненіи программъ математики женскихъ и мужскихъ гимназій. Можетъ быть, я пропустилъ вслѣдствіе того, что плохо вижу, но въ докладѣ написано, что я не рѣшился бы защищать въ настоящее время полное уравненіе. Это я написалъ потому, что считаю за истину правило, что защищать нужно то, что можно защищать хорошо вооруженнымъ, а по этому вопросу у меня нѣтъ достаточно компетенціи и достаточнаго оружія, чтобы его защищать. Поэтому я не рѣшился выступать съ этой защитой и останавливать ваше вниманіе на этомъ вопросѣ, а привѣтствовалъ только то, что сдѣлано женскими гимназіями въ направленіи уравненія программъ".

А. В. Полторацкій (Спб.). „Я основывался на фактахъ и могу представить доказательства, что эти факты не единичные, а, къ сожалѣнію, очень многочисленные. Затѣмъ, я слышалъ слова—не будемъ бояться, но смѣло пойдемъ впередъ. Я былъ бы счастливъ, если бы это могъ сказать не преподаватель, а ученикъ, и при рѣшеніи такихъ важныхъ вопросовъ, какіе рѣшаются теперь, было бы справедливо спрашивать не только преподавателей, но и учениковъ".

XXXIII. О подготовленіи преподавателей математики для среднихъ учебныхъ заведеній.

Докладъ пр.-доц. В. Ѳ. Кагана (Одесса).

«Составленіе настоящаго доклада[1]) находится въ тѣсной связи съ порученіемъ, которое я имѣлъ отъ Русской Подкомиссіи въ составѣ Международной Комиссіи по преподаванію математики. По порученію Подкомиссіи я занялся изученіемъ этого вопроса, пріобрѣтающаго въ настоящее время въ Россіи

---

[1]) За недостаткомъ времени на Съѣздѣ прочитана только II часть.

важное значеніе, такъ какъ именно теперь возникаетъ цѣлый рядъ учрежденій для приготовленія преподавателей средней школы. Мною представленъ въ Подкомиссію докладъ на нѣмецкомъ языкѣ о постановкѣ дѣла приготовленія учителей въ Россіи. Представляя одновременно докладъ по тому же предмету Первому Всероссійскому Съѣзду Преподавателей Математики, я считалъ необходимымъ войти здѣсь въ большія подробности. Русскому преподавателю могутъ быть интересны детали, которыя совершенно излишни въ докладѣ, предназначенномъ для Международной Комиссіи. Я считалъ необходимымъ, приступая къ изложенію вопроса о подготовкѣ преподаватей математики для среднихъ учебныхъ заведеній въ Россіи, дать краткія свѣдѣнія о тѣхъ начинаніяхъ, которыя въ этомъ направленіи дѣлались. Мною руководили при этомъ соображенія различнаго рода. Во-первыхъ, дѣйствующія въ настоящее время нормы относительно допущенія къ преподаванію кандидатовъ на учительскія мѣста въ такой мѣрѣ тѣсно связаны съ исторіей упомянутыхъ начинаній, что лишь въ связи съ нею они достаточно выясняются. Во-вторыхъ, немногія функціонирующія въ настоящее время учрежденія для приготовленія преподавателей средней школы возникли въ самые послѣдніе годы, носятъ временный характеръ и рѣшительно не даютъ представленія о тѣхъ усиліяхъ, которыя раньше были дѣйствительно сдѣланы для того, чтобы обезпечить нашу школу достаточнымъ контингентомъ подготовленныхъ учителей. Въ третьихъ, что важнѣе всего, при изложеніи соображеній относительно желательныхъ въ этомъ дѣлѣ улучшеній нельзя не учитывать сдѣланныхъ уже въ этомъ направленіи попытокъ.

Сообразно этому настоящій докладъ распадается на четыре части. Первая часть посвящена исторіи тѣхъ мѣръ, которыя принимались въ Россіи для подготовленія преподавателей средней школы; второй отдѣлъ содержитъ описаніе дѣйствующихъ въ настоящее время учрежденій для подготовки учителей; третій отдѣлъ содержитъ соображенія относительно наиболѣе цѣлесообразной постановки этого дѣла въ настоящее время; наконецъ, въ четвертомъ отдѣлѣ собрана русская литература вопроса. Перечень литературы не претендуетъ на исчерпывающую полноту; но существенныхъ матеріаловъ мы старались не пропустить. Перечень разбитъ на двѣ рубрики: въ рубрикѣ А) помѣщены оффиціальные матеріалы, въ рубрикѣ В)—неоффиціальные; сообразно этому и всѣ ссылки въ текстѣ отмѣчены литерой—рубрики и номеромъ—статьи.

I. Краткій историческій обзоръ мѣръ, которыя принимались въ Россіи для подготовленія преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній.

Вопросъ о подготовленіи учителей стоялъ для Россіи особенно остро въ ту эпоху, когда онъ въ западной Европѣ еще менѣе всего дебатировался. На западѣ школа развивалась въ теченіе многихъ вѣковъ, и съ такою же постепенностью къ ней приспособлялась педагогическая подготовка учителя. У насъ же учебныя заведенія насаждались спорадически, и въ раннюю пору русскаго просвѣщенія насаждались въ населеніи, которое чрезвычайно нуждалось въ школѣ, но еще совершенно не было въ состояніи дать для этой школы контингентъ учителей. Такимъ образомъ, о подготовкѣ учителей въ Россіи возникъ впервые вопросъ не въ смыслѣ сообщенія спеціальной педагогической подготовки лицамъ, владѣющимъ уже достаточнымъ научнымъ образованіемъ, а въ смыслѣ всего образованія будущихъ учителей.

Коренное значеніе этого дѣла для успѣха просвѣтительныхъ начинаній было уже вполнѣ ясно императору Петру I, и въ своемъ проектѣ устава (регламента) Академіи Наукъ (А, 1), которую Петръ предполагалъ учредить, онъ съ полною опредѣленностью высказалъ мысль, что Академія не можетъ ограничиваться въ Россіи тѣми исключительно учеными задачами, которымъ служатъ соотвѣтственныя учрежденія на западѣ; она должна быть не только средоточіемъ научнаго творчества, но и разсадникомъ знанія въ странѣ; а именно, академики должны явиться также профессорами академическаго университета, а воспитанники послѣдняго должны распространять просвѣщеніе дальше и, повидимому, прежде всего въ качествѣ учителей гимназіи, также состоящей при Академіи. Нужно, впрочемъ, сказать, что ни въ упомянутомъ проектѣ, ни въ регламентѣ, данномъ Академіи императрицей Елисаветой Петровной (А, 2) эта мысль не формулирована такъ, чтобы на академическій университетъ, какъ это настойчиво утверждаютъ нѣкоторые авторы (В, 1), можно было смотрѣть, какъ на первую педагогическую академію, возникшую въ эпоху, когда въ Европѣ еще не было и рѣчи о чисто педагогическихъ учрежденіяхъ. Справедливо лишь слѣдующее: при Академіи, открывшей свои дѣйствія въ 1725 г., согласно проекту Петра и потомъ согласно регламенту императрицы Елисаветы Петровны, состояли университетъ и гимназія; профессорами университета состояли отчасти академики, отчасти (по регламенту) особые профессора; на философскомъ факультетѣ на первомъ планѣ отмѣчены математическія науки; преподаваніе производилось безплатно; сверхъ того, по регламенту, въ университетѣ 30 студентовъ должны были состоять на полномъ содержаніи казны, а для замѣщенія этихъ вакансій въ гимназіи должны были содержаться за счетъ казны 20 воспитанниковъ; для этихъ казеннокоштныхъ воспитанниковъ университета и гимназіи долженъ былъ быть учрежденъ при Академіи интернатъ; казеннокоштные студенты предназначались (частью, а не исключительно) въ преподаватели немногихъ существовавшихъ уже среднихъ учебныхъ заведеній. Для насъ же наиболѣе существенно то, что интернатъ при университетѣ послужилъ, повидимому, типомъ, по которому позднѣе были устроены уже, дѣйствительно, чисто педагогическія учрежденія.

Потому ли, что для академиковъ и профессоровъ, почти исключительно иностранцевъ, преподаваніе въ чуждой и мало интеллигентной средѣ было по началу очень затруднительно, потому ли что учащихся было, дѣйствительно, очень трудно привлечь въ университетъ, потому ли, что привлеченные на русскую службу ученые не выказали достаточнаго радѣнія къ интересамъ ихъ новой отчизны,—такъ или иначе университетъ не наладился, не пошелъ. Иногда въ немъ годами почти не было учащихся; интернатъ функціонировалъ съ перерывами и влачилъ довольно жалкое существованіе; всѣ усилія Ломоносова поставить университетъ и гимназію такъ, чтобы они дѣйствительно служили той высокой задачѣ, для которой были предназначены, мало привели къ цѣли. Вслѣдствіе этого Императрица Екатерина II, принявъ Академію въ свое непосредственное вѣдѣніе (1766), повелѣла университетъ и гимназію закрыть.

Однако, черезъ 20 лѣтъ вопросъ о приготовленіи учителей предсталъ у насъ въ болѣе острой формѣ. Въ восьмидесятыхъ годахъ XVIII столѣтія была осуществлена коренная реформа въ дѣлѣ народнаго образованія. Императрица Екатерина II рѣшила покрыть Россію обширной сѣтью учебныхъ заведеній. Указомъ Императрицы на имя т. сов. Завадовскаго отъ 7-го Сентября 1782 г. была учреждена Комиссія по разработкѣ этого проекта (А, 3). Для ближайшаго же руководства этимъ дѣломъ Императрица пригласила изъ Австріи директора Темешварскихъ школъ Янковича-де Миріево, очень опытнаго педагога, принимавшаго дѣятельное участіе въ преобразованіи учебнаго дѣла въ Австріи при Маріи-Терезіи и владѣвшаго при этомъ русскимъ языкомъ (В, 2); выборъ былъ сдѣланъ, повидимому, очень удачно. По проекту Янковича надлежало открыть школы двухъ типовъ: малыя народныя училища во всѣхъ уѣздныхъ городахъ, приближавшіяся къ современнымъ начальнымъ школамъ, и главныя народныя училища во всѣхъ губернскихъ городахъ, приближавшіяся до нѣкоторой степени къ современнымъ среднимъ учебнымъ заведеніямъ; изъ физико-математическихъ наукъ въ програму главныхъ училищъ входили: ариѳметика, геометрія, физика и механика. Янковичъ хорошо понималъ, что на пути осуществленія этого проекта онъ прежде всего встрѣтится съ недостаткомъ учителей; и если для малыхъ училищъ и представлялось еще возможнымъ скомплектовать учителей изъ окончившихъ духовныя семинаріи, то для главныхъ училищъ учителей необходимо было еще подговить. Вотъ почему Янковичъ предложилъ открыть сначала только одно главное училище въ С.-Петербургѣ, а при немъ особые курсы для приготовленія учителей для предстоявшихъ къ открытію главныхъ училищъ. Указомъ Императрицы отъ 9-го іюня 1783 г. (А. 4) это главное училище было открыто, причемъ въ томъ же указѣ было повелѣно прикомандировать къ училищу сто молодыхъ людей изъ духовныхъ семинарій и другихъ учебныхъ заведеній для подготовленія къ учительскому званію; всѣ эти воспитанники должны были содержаться на казенномъ иждивеніи при самомъ училищѣ. Такимъ образомъ возникло закрытое учебное заведеніе, послужившее началомъ цѣлаго ряда постепенно развивавшихся педагогическихъ учрежденій. Впрочемъ, при главномъ училищѣ эти курсы просуществовали недолго. Когда въ 1786 г. былъ опубликованъ уставъ народныхъ училищъ (А, 5) и были открыты главныя народныя училища въ 25 городахъ (А, 6), то курсы пришлось расширить (А, 7); они и были преобразованы въ томъ же 1786 г. въ учительскую семинарію, которую позже называли также учительской гимназіей.

Екатерининская учительская семинарія была построена по слѣдующему плану (В, 3, 4). Эго не было, собственно, высшее учебное заведеніе: въ немъ преподавались только тѣ предметы, что и въ главныхъ народныхъ училищахъ, только въ нѣсколько бо́льшемъ объемѣ. Курсъ ученія раздѣленъ былъ на два разряда: математическихъ и историческихъ наукъ. Всѣ воспитанники учились тѣмъ и другимъ, но обязаны были обращать особенное вниманіе на предметы одного какого-нибудь разряда. Въ этомъ подраздѣленіи видно уже нѣчто, похожее на университетскіе факультеты. Никакихъ спеціально педагогическихъ предметовъ не преподавалось. Всѣ учащіеся жили вѣ интернатѣ и комплектовались почти исключительно изъ духовныхъ семинарій.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что какъ по своимъ программамъ, такъ и по подготовкѣ учащихся наша первая учительская семинарія представляла собой очень скромное учрежденіе. Но, какъ извѣстно, судьба учебнаго заведенія часто зависитъ не столько отъ программъ, сколько отъ лицъ, призванныхъ къ ихъ выполненію, и отъ общихъ условій работы. Янковичъ сумѣлъ вдохнуть въ него жизнь, и по согласному свидѣтельству всѣхъ, писавшихъ объ этомъ учрежденіи, оно въ первый періодъ своего существованія блестяще выполнило свою задачу и снабдило учителями много главныхъ училищъ. До 1801 года семинарія выпустила 275 учителей. Но дальнѣйшая судьба этихъ учителей, повидимому, оказала пагубное вліяніе на самое учрежденіе (В, 1): учительскій трудъ оплачивался нищенски; мало того, уставъ училищъ не устанавливалъ достаточно твердаго источника для бюджета школъ, — и городскія думы, на счетъ которыхъ была отнесена бо́льшая часть бюджета училищъ, годами не выплачивали учителямъ ихъ скромнаго содержанія. Въ результатѣ охотниковъ идти въ учителя оказывалось все меньше и меньше. Повидимому, и учебная часть находилась въ послѣднее время въ запущеніи, по крайней мѣрѣ, на это имѣется прямое указаніе въ докладѣ министра народнаго просвѣщенія Императору Александру I (А 9). Такъ или иначе къ началу XIX столѣтія учительская семинарія вовсе опустѣла. Въ 1801 г. состоялся послѣдній выпускъ, послѣ чего семинарія въ теченіе двухъ лѣтъ существовала только по имени.

Начало XIX столѣтія ознаменовалось въ Россіи особенно мощнымъ подъемомъ волны народнаго просвѣщенія. Въ 1802 г. были учреждены Министерства и, въ частности, Министерство Народнаго Просвѣщенія; первымъ Министромъ Народнаго Просвѣщенія былъ назначенъ графъ П. В. Завадовскій, состоявшій предсѣдателемъ учрежденной Императрицей Екатериной Комиссіи для заведенія въ Россіи народныхъ училищъ. Графъ Завадовскій проявилъ воистину кипучую дѣятельность, находившую твердую поддержку со стороны Императора. Высочайшимъ указомъ отъ 8 сентября 1802 г. Комиссія училищъ была пополнена новыми членами, а ей повелѣно было представить въ возможно короткій срокъ подробный планъ тѣхъ мѣропріятій, которыя должны были быть предприняты для широкаго распространенія просвѣщенія въ Имперіи (А, 8). Такой планъ, дѣйствительно, былъ представленъ Государю въ началѣ 1803 г. и былъ утвержденъ подъ названіемъ «Предварительныя правила народнаго просвѣщенія» (А, 9). По этому плану Имперія должна была быть раздѣлена на учебные округи, съ попечителемъ во главѣ каждаго, въ каждомъ округѣ долженъ былъ быть учрежденъ университетъ (въ Москвѣ, Вильнѣ и Дерптѣ таковые уже существовали), въ каждомъ губернскомъ городѣ предполагалось учредить гимназію, а въ остальныхъ городахъ уѣздныя училища; тѣ и другія съ значительно болѣе обширной программой, нежели прежнія народныя училища. Само собой разумѣется, что при этихъ условіяхъ необходимо было прежде всего озаботиться подготовленіемъ соотвѣтствующаго персонала учителей. Сообразно этому одновременно съ утвержденіемъ «Предварительныхъ правилъ» Святѣйшему Синоду повелѣно было распорядиться о привлеченіи семинаристовъ къ приготовленію для замѣщенія учительскихъ мѣстъ (А, 10). Для сообщенія же имъ необходимой подготовки Министръ Народнаго Просвѣщенія нашелъ необходимымъ возстановить Учительскую Семинарію», которая получила теперь наименованіе «Учительской гимназіи». Высочайшій указъ, которымъ это учрежденіе было вновь призвано къ жизни (А, 11), не содержитъ никакихъ указаній относительно организаціи учрежденія, и только по штатамъ (А, 12) можно судить о предполагавшемся его составѣ. Но мы не будемъ на этомъ учрежденіи останавливаться, такъ какъ въ этомъ видѣ оно не просуществовало и года. Когда учрежденіе было скомплектовано, оно было преобразовано въ «Педагогическій институтъ», и это было не одно только переименованіе; это было уже преобразованіе, какъ это видно по вновь утвержденнымъ штатамъ.

Уже «Предварительный планъ», о которомъ была рѣчь выше (А, 9), намѣчая общія черты устроенія будущихъ университетовъ, содержитъ слѣдующій параграфъ (пар. 39): «Всякій университетъ долженъ имѣть Учительскій или Педагогическій Институтъ. Студенты, принятые въ оный, получаютъ степень Кандидата, соединенную съ особенными выгодами въ содержаніи».

Въ 1804 г. были открыты гимназіи и новые университеты въ Харьковѣ и Казани. Въ уставѣ гимназій (А, 13) ничего не говорится о цензѣ, которымъ долженъ обладать учитель; но гимназіи подчинены университету, а въ уставахъ Московскаго, Харьковскаго и Казанскаго университетовъ (отъ того-же 5-го ноября 1804 г.) (А, 14) вопросу о приготовленіи учителей гимназіи посвящена особая (XII) глава О Педагогическомъ Институтѣ». При каждомъ изъ названныхъ университетовъ учреждается «Педагогическій Институтъ», закрытое учебное заведеніе, въ которое принимаются студенты, уже пробывшіе въ университетѣ 3 года. Дѣло въ томъ, что согласно пар. 112 устава—всѣ безъ исключенія студенты должны были въ теченіе трехъ лѣтъ прослушать нѣкоторый циклъ общихъ наукъ, и лишь послѣ этого они переходили «въ Главное Отдѣленіе наукъ, соотвѣтствующихъ ихъ будущему состоянію»; тѣ изъ студентовъ, которые готовили себя къ преподавательской дѣятельности, должны были поступать вмѣсто этого въ университетскій Педагогическій Институтъ, имѣвшій также 3-хъ-лѣтній курсъ. Управленіе Институтомъ поручалось Директору, избиравшемуся Совѣтомъ Университета изъ числа профессоровъ. Этимъ исчерпывается почти все, что содержится въ XII главѣ уставовъ Императорскихъ университетовъ относительно преподаванія въ педагогическихъ институтахъ. Согласно пар. 128, окончившіе институтъ, опредѣляются учителями, старшими или младшими, смотря по достоинствамъ. Въ университетскихъ институтахъ полагалось по 24 воспитанника, а въ Казанскомъ, въ виду обширности округа, 40.

Въ С.-Петербургѣ университета еще не было; его только предполагали открыть (ст. 14 предварительнаго плана), и это наболѣе сложное начинаніе новаго Министерства и Комиссіи Училищъ затянулось. Между тѣмъ обширный Петербургскій округъ болѣе другихъ нуждался въ учительскомъ персоналѣ, и потому только-что сформировавшуюся учительскую гимназію рѣшено было преобразовать въ Педагогическій Институтъ. Новый уставъ и штаты этого учрежденія были утверждены еще за полгода до открытія университетскихъ Институтовъ, именно 16 Апрѣля 1804 г. (А, 15). Уставъ гораздо подробнѣе регламентируетъ дѣятельность этого учрежденія и выясняетъ его характеръ, нежели XII глава Университетскихъ уставовъ: онъ, очевидно, долженъ былъ служить и, повидимому (В, 3), дѣйствительно служилъ образцомъ для всѣхъ университетскихъ институтовъ.

С.-Петербургскій Педагогическій Институтъ также представлялъ собой закрытое учебное заведеніе, «въ которомъ образуются молодые люди въ Учителя для Губернскихъ Гимназій». Пар. 2 устава гласитъ: «Дабы Губернскимъ Гимназіямъ доставить искусныхъ Учителей для всѣхъ предметовъ, коимъ предположено обучать въ оныхъ, надлежитъ: 1) принимать въ Педагогическій Институтъ учениковъ съ отличными дарованіями и съ достаточными въ словесныхъ наукахъ и иностранныхъ языкахъ свѣдѣніями; 2) преподавать въ ономъ положенныя въ Губернскихъ Гимназіяхъ науки съ возможной обширностью. Въ институтъ допускались также вольнослушателями, «приходящіе со стороны, какъ изъ любопытства, такъ и изъ намѣренія посвятить себя учительскому званію». Молодые люди принимались въ институтъ по экзамену. Въ первые два года они обучались всѣмъ наукамъ безъ изъятія, «дабы въ теченіе сего времени могли во всѣхъ оныхъ пріобрѣсть столь достаточныя познанія, чтобы въ случаѣ нужды въ состояніи были бы замѣнить каждаго Учителя въ Губернскихъ Гимназіяхъ». Послѣ двухъ лѣтъ производилось публичное испытаніе, послѣ котораго опредѣлялось, «какими науками каждый изъ студентовъ преимущественно долженъ заняться въ теченіе третьяго года, чтобы приготовить себя къ обученію онымъ въ Гимназіяхъ. По таковомъ расположеніи учебныхъ предметовъ Профессоры въ послѣднемъ году занимаютъ студентовъ Педагогіей или способомъ ученія». Институтъ дѣлится на два отдѣленія: въ первомъ обучаются слушавшіе предварительно (въ духовной семинаріи) риторику, во второмъ—обучавшіеся философіи. Учебнымъ дѣломъ завѣдуетъ конференція и директоръ, снабженный значительною властью. Тѣмъ не менѣе глава IV устава очень детально регулируетъ обязанности каждаго профессора въ отдѣльности. Вотъ что сказано, между прочимъ, въ пар. 69: «Преподающій Математику обучаетъ оба отдѣленія вмѣстѣ по четыре часа въ недѣлю и оканчиваетъ курсъ сей въ 2 года. Онъ проходитъ Чистую Математику по курсу Г. Осиповскаго, а Смѣшанную, поелику полнаго курса на Россійскомъ языкѣ еще нѣтъ, преподаетъ по курсу Кестнера, употребляя притомъ и другихъ писателей, на латинскомъ и нѣмецкомъ языкѣ извѣстныхъ, какъ-то: Вольфа, Цолингера, Метцбурга и имъ подобныхъ». Итакъ, 8 недѣльныхъ часовъ въ теченіе всего курса—вотъ то время, которое нашли возможнымъ удѣлить въ Институтѣ чистой и прикладной математикѣ. Это обстоятельство болѣе краснорѣчиво, чѣмъ приведенное выше ограниченіе программы исключительно предметами гимназическою курса свидѣтельствуетъ, что степень научной подготовки учителя была поставлена въ Институтѣ въ весьма узкія рамки. Универсальность преподаванія, желаніе подготовить преподавателя для всѣхъ предметовъ, снабжая его при этомъ лишь элементарнымъ общимъ образованіемъ и весьма скудной спеціальной подготовкой, представляла самую слабую сторону

Института. Несомнѣнно слабую сторону представляла также чрезвычайно детальная регламентація въ самомъ уставѣ (гл. III) жизни студентовъ, строго опредѣляющая каждый ихъ шагъ въ теченіе цѣлаго дня. Этотъ режимъ былъ, повидимому, главной причиной, вызвавшей позже необходимость закрыть Педагогическіе Институты.

По началу, въ столицѣ, не имѣвшей общеобразовательнаго высшаго учебнаго заведенія, Институтъ игралъ, конечно, важную роль и далъ значительный контингентъ педагоговъ. Но узкія рамки, въ которыя было поставлено преподаваніе, не могли не обратить на себя вниманія весьма скоро. Однако, трудные годы, которые вскорѣ пришлось пережить странѣ, не дали возможности произвести серьезной реформы. Лишь въ 1816 г., когда Россія справилась уже отъ потрясеній Отечественной войны, институтъ былъ преобразованъ по почину попечителя С.-Петербургскаго учебнаго округа С. С. Уварова, позднѣе возведеннаго въ графское достоинство. По его проекту С.-Петербургскій Педагогическій Институтъ былъ преобразованъ въ «Главный Педагогическій Институтъ», уставъ котораго былъ утвержденъ 23-го Декабря 1816 г. (A, 16). Параграфъ 2 его устава (A, 16) гласитъ: «Существенный предметъ Института сего состоитъ въ образованіи Учителей, Магистровъ, Адъюнктовъ, Профессоровъ для всѣхъ Училищъ въ Имперіи, подвѣдомственныхъ Министерству Просвѣщенія и независящихъ отъ онаго, наставниковъ для частныхъ учебныхъ заведеній или пансіоновъ и для домашняго воспитанія». Уже изъ этого предначертанія видно, что преобразованный Институтъ долженъ былъ представлять собой широко поставленное высшее учебное заведеніе. И дѣйствительно, планъ учебнаго заведенія задуманъ настолько широко, что невольно приходишь къ мысли, не былъ ли это заранѣе предусмотрѣнный этапъ по пути къ открытію университета. Прежде всего институтъ раздѣлялся на три «отдѣленія или факультета»: 1) отдѣленіе наукъ философскихъ и юридическихъ; 2) отдѣленіе наукъ физическихъ и математическихъ; 3) отдѣленіе наукъ историческихъ и словесныхъ. Какое значеніе могло имѣть, собственно, для дѣла подготовленія учителей спеціальное отдѣленіе философскихъ и особенно юридическихъ наукъ? Да и не была ли идея учрежденія для подготовленія преподавателей всевозможныхъ учебныхъ заведеній, не исключая профессоровъ, заранѣе обречена на неудачу? Мы не будемъ останавливаться подробно на организаціи этого учебнаго заведенія, потому что оно въ качествѣ Педагогическаго Института почти не существовало: когда преобразованный Педагогическій Институтъ открылъ свои дѣйствія, то всѣмъ стало ясно, что это скорѣе университетъ, чѣмъ педагогическое учрежденіе, и что во всякомъ случаѣ недостаетъ лишь немногихъ штриховъ, чтобы преобразовать его въ университетъ. Уже 8 Февраля 1819 г. Министръ Народнаго Просвѣщенія представилъ Императору Александру I докладъ (А, 17), который начинался словами: «Многолѣтніе опыты показали необходимость учрежденія въ здѣшней столицѣ Университета вмѣсто Главнаго Педагогическаго Института». Въ дальнѣйшемъ Министръ проводитъ мысль, что подготовлять учителей можетъ университетъ, который будетъ, однако, исполнять также многія другія важныя функціи. Матеріально преобразованіе Главнаго Педагогическаго Института въ университетъ, по исчисленію попечителя округа, требовало только новаго ассигнованія въ 4.300 р. въ годъ. Докладъ удостоился Высочайшаго одобренія, и Министру было поручено составить уставъ университета по общему плану, предначертанному въ самомъ докладѣ. Ст. 34 этого плана устанавливаетъ, что въ составъ университета организуется Педагогическій Институтъ, какъ и въ прочихъ университетахъ. Въ дѣйствительности, впослѣдствіи на Петербургскій университетъ былъ просто распространенъ уставъ Московскаго университета, также предусматривавшій Педагогическій Институтъ.

Но спросъ на учителей росъ, а университетскіе институты, очевидно, не давали достаточнаго контингента ихъ при быстро разроставшейся школьной сѣти. Въ 1828 г. былъ утвержденъ новый уставъ гимназій, коимъ предусматривалось открытіе таковыхъ не только въ губернскихъ, но и въ уѣздныхъ городахъ. Все это привело къ мысли вновь учредить высшее учебное заведеніе, которое имѣло бы спеціальной задачей приготовленіе учителей. Въ результатѣ 30-го Сентября 1828 г. былъ вновь учрежденъ въ С.-Петербургѣ Главный Педагогическій Институтъ (А, 18, 19). Это было несомнѣнно наиболѣе солидное изъ существовавшихъ у насъ учрежденій для подготовленія учителей, давшее Россіи, несмотря на существенные свои недостатки, немало хорошихъ педагоговъ.

Уставъ новаго института немногимъ отличается отъ устава Главнаго Педагогическаго Института 1816 года. Это есть высшее учебное заведеніе, которое, по значенію своему, оффиціально приравнивается университету (178 устава) и состоитъ подъ непосредственнымъ начальствомъ Министра Народнаго Просвѣщенія. Задача Института—готовить учителей и профессоровъ, хотя теперь только для училищъ народнаго просвѣщенія. Принимались въ институтъ по прежнему преимущественно воспитанники духовныхъ семинарій, которые должны были провести въ Институтѣ 6 лѣтъ. Эти 6 лѣтъ распадались на три курса: предварительный курсъ, который продолжался 2 года, окончательный курсъ—три года и курсъ педагогіи — одинъ годъ. Предварительный курсъ имѣлъ цѣлью укрѣпить общее образованіе молодыхъ людей, окончательный—дать имъ спеціальпое факультетское образованіе; — послѣдній годъ долженъ былъ быть посвященъ исключительно педагогическимъ занятіямъ. Замѣчательно, что при всемъ томъ особая каѳедра педагогіи была учреждена въ Институтѣ только черезъ 12 лѣтъ (А, 20). Окончательный курсъ подраздѣлялся на тѣ же три факультета, какъ и въ Институтѣ 1816-го г, причемъ на факультетѣ наукъ математическихъ и физическихъ преподавались слѣдующіе предметы: «Математика чистая и; въ особенности, Высшая; Прикладная и, въ особенности, Теоретическая Астрономія, 2) Физика, 3) Химія и Технологія, 4) Естественная исторія: Зоологія, Ботаника и Минералогія». § 34 устава предусматриваетъ, что учащіеся будутъ, при прохожденіи курса педагогіи, подъ надзоромъ и руководствомъ профессоровъ давать уроки въ разныхъ учебныхъ заведеніяхъ.

Главный Педагогическій Институтъ остался закрытымъ учебнымъ заведеніемъ и гл. V устава по прежнему необычайно детально регулируетъ каждый шагъ въ жизни воспитанниковъ института; это была врядъ ли не самая слабая сторона учрежденія. Профессорами института были, по большей части, профессора Петербургскаго университета. Каѳедру математики долгое время занималъ М. В. Остроградскій.

За 28 лѣтъ существованія Главнаго Педагогическаго Института во главѣ его стояли только два директора—Ѳ. И. Миддендорфъ (1828—1846) и И. И. Давыдовъ (1846—1856). Это были люди чрезвычайно различные по своимъ взглядамъ на сущность задачи подготовленія преподавателей (В, 1, 5, 6, 7). Можно сказать, что это были яркіе представители двухъ противоположныхъ взглядовъ на дѣло подготовленія преподавателей, которые красною нитью проходятъ черезъ всю литературу вопроса. Къ этимъ взглядамъ намъ придется еще не разъ возвращаться ниже. Миддендорфъ былъ представителемъ практическаго взгляда на дѣло. Центръ тяжести подготовки учителя онъ усматривалъ въ снабженіи будущаго педагога практическими знаніями въ дѣлѣ преподаванія и въ выработкѣ въ нихъ уже въ школѣ умѣнія вести это дѣло. Этой точкой зрѣнія проникнуты всѣ довольно многочисленныя и серьезныя преобразованія, произведенныя Миддендорфомъ въ Институтѣ. По его представленію въ институтѣ былъ учрежденъ, такъ называемый, «младшій возрастъ» воспитанниковъ (А, 21); онъ комплектовался изъ юношей отъ 12—14 лѣтъ, которые опредѣлялись въ Институтъ сначала изъ воспитанниковъ духовныхъ семинарій, а потомъ изъ учениковъ Петербургскихъ гимназій. Для этихъ учениковъ срокъ пребыванія въ Институтѣ былъ увеличенъ до 9 лѣтъ; а такъ какъ пріемъ въ 1832 г. производился только въ «младшій возрастъ», то срокъ пребыванія въ Институтѣ былъ фактически продленъ до 9 лѣтъ. Все дѣло обученія воспитанниковъ младшаго возраста было сосредоточено въ рукахъ старшихъ студентовъ послѣдняго курса. Давъ своимъ воспитанникамъ такую практическую школу, Миддендорфъ счелъ возможнымъ совершенно упразднить курсъ педагогіи, продливъ вмѣсто этого предварительный курсъ *). Въ 1838 г. по представленію Миддендорфа былъ утвержденъ при Главномъ Педагогическомъ

---

*) Нужно сказать, что увеличеніе числа воспитанниковъ устраивало Миддендорфа еще въ другомъ отношеніи. По уставу въ институтѣ былъ опредѣленъ комплектъ въ 100 воспитанниковъ. Совѣтъ имѣлъ неосторожность принять при открытіи института всѣхъ 100 воспитанниковъ: такимъ образомъ, новый пріемъ представлялось возможнымъ сдѣлать только черезъ 6 лѣтъ. Увеличеніе числа воспитанниковъ дало возможность производить пріемъ и выпускъ черезъ каждые три года.

Институтѣ такъ называемый «второй разрядъ» (А, 22). Это было отдѣленіе, предназначенное для приготовленія учителей для уѣздныхъ училищъ. Здѣсь уже по § 8 Высочайше утвержденныхъ временныхъ правилъ преподаваніе цѣликомъ возлагается на студентовъ перваго разряда. Миддендорфъ шелъ дальше и для упражненія учениковъ второго разряда устроилъ при Институтѣ нѣчто вродѣ начальной школы въ 10 — 20 воспитанниковъ, въ которой обученіе вели старшіе ученики второго разряда.

Врядъ ли нужно говорить, что точка зрѣнія практическаго обученія дѣлу педагогіи доведена здѣсь до крайнихъ предѣловъ. Трудно себѣ представить, какъ могли старшіе студенты найти время для собственныхъ занятій, когда на ихъ рукахъ находились цѣлые классы; несомнѣнно, что и классы эти страдали отъ неопытности учителей. Но какъ ни несовершенны были эти мѣры, онѣ всѣ были проникнуты единой идеей, которая проводилась твердой рукой и съ искреннимъ убѣжденіемъ; самъ Миддендорфъ былъ, повидимому, глубоко и искренно преданъ дѣлу, которое онъ велъ, и — судя по самымъ разнообразнымъ отзывамъ — умѣлъ внушить уваженіе и учащимъ и учащимся.

Въ 1846 г. Миддендорфа замѣнилъ И. И. Давыдовъ. Это былъ очень просвѣщенный человѣкъ, но на дѣло подготовленія педагоговъ онъ держался воззрѣній, діаметрально противоположныхъ. Онъ принадлежалъ къ числу тѣхъ, которые находятъ, что хорошему педагогу нужна не столько педагогическая подготовка, сколько достаточное общее и спеціальное образованіе. Исходя изъ этого взгляда, Давыдовъ исходатайствовалъ закрытіе «младшаго возраста», «второго разряда» и связанной съ нимъ начальной школы (А, 23); одновременно былъ закрытъ и юридическій факультетъ института; педагогическій же курсъ, какъ таковой, возстановленъ не былъ. Однако, И. И. Давыдовъ на этомъ не остановился и въ 1852 г. исходатайствовалъ также закрытіе предварительнаго курса, чтобы свести шестилѣтній курсъ на четырехлѣтній. Центръ тяжести задачи Института онъ усматривалъ въ томъ, чтобы науки излагались со всевозможною разносторонностью, съ освѣщеніемъ различныхъ существующихъ системъ и теорій (В, 7).

Съ тѣмъ, что такое теоретическое образованіе дѣйствительно должно было расширять кругозоръ будущаго учителя и что это несомнѣнно составляло прямую задачу Института, врядъ ли кто-либо не согласится. Но когда эти задачи были сведены исключительно къ научно-теоретическому образованію, то Главный Педагогическій Институтъ уже почти не отличался отъ Университета; тѣмъ болѣе, что лекціи, предназначенныя для воспитанниковъ Института, читались въ помѣщеніи Университета тѣми же профессорами. Между тѣмъ, воспитанникамъ Института приходилось жить при чрезвычайно стѣснительномъ режимѣ закрытаго учебнаго заведенія, а непокладистый характеръ второго директора служилъ не къ смягченію, а къ большему еще отягощенію этого режима. При этихъ условіяхъ число молодыхъ людей, склонныхъ поступить въ институтъ, стало падать; чтобы поддержать существованіе института, пришлось дѣлать большія послабленія, а это, естественно, привело къ пониженію уровня преподаванія. Во всеподданнѣйшемъ докладѣ Министра Народнаго Просвѣщенія отъ 30-го Ноября 1853 г. (А, 24) наряду съ нѣкоторыми несущественными измѣненіями, предложенными къ непосредственному утвержденію, указывается необходимость коренного измѣненія устава института. Новый уставъ къ тому времени былъ уже составленъ, но дальнѣйшее его обсужденіе въ Главномъ Правленіи Училищъ оказалось весьма неблагопріятнымъ для Института. Судьба Института въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ висѣла на волоскѣ, а это, конечно, еще болѣе парализовало его дѣятельность. Засѣданіе Главнаго Управленія Училищъ отъ 31 Октября 1858 г. было для института роковымъ. Въ журналѣ этого засѣданія, Высочайше утвержденномъ 15-го Ноября того же года (А, 25), Институту инкриминируются, главнымъ образомъ, два обстоятельства: «при настоящемъ порядкѣ пріема, основанномъ лишь на удостовѣреніи въ званіи гимназическаго курса, въ эти заведенія нерѣдко поступаютъ молодые люди, которые ни по способностямъ своимъ, ни по наклонностямъ не могутъ соотвѣтствовать тому званію, къ которому себя предназначаютъ; съ другой стороны, въ означенныхъ заведеніяхъ не употребляется почти никакихъ мѣръ къ практическому ознакомленію будущаго наставника со способами и пріемами практическаго дѣла». Въ виду этого Главное Правленіе Училищъ предложило закрыть какъ Главный Педагогическій Институтъ, такъ и остальные институты при университетахъ. Доводы, приведенные въ журналѣ, несомнѣнно очень серьезны, а, можетъ быть, болѣе еще серьезны могли быть обвиненія, оффиціально не высказанныя; но врядъ ли можно было съ легкимъ сердцемъ совершенно закрыть учрежденіе, которое несомнѣнно сыграло свою роль въ дѣлѣ постановки у насъ средняго образованія и при надлежащей реформѣ могло бы съ успѣхомъ служить своей задачѣ и дальше. Между тѣмъ, курсы, которые были призваны замѣстить собой институты, своей задачѣ безусловно не отвѣчали.

Съ этого времени задача о приготовленіи учителей для среднихъ учебныхъ заведеній вступаетъ у насъ въ новую фазу. Такъ какъ число высшихъ учебныхъ заведеній было уже къ этому времени значительно, и, что важнѣе всего, было значительно и число студентовъ, ихъ посѣщающихъ, то лицъ, обладающихъ въ общемъ достаточной научной подготовкой для преподаванія въ средней школѣ, было уже не такъ мало. Задача заключалась въ томъ, чтобы привлечь ихъ къ дѣлу преподаванія и снабдить ихъ для этого спеціальной педагогической подготовкой; дѣло обученія «на учителя» ab ovo можно было оставить.

Въ виду этого Главное Правленіе Училищъ предложило учредить во всѣхъ университетскихъ городахъ двухгодичные педагогическіе курсы, на которые принимались бы лица, уже окончившія университетъ. Общій планъ этихъ курсовъ получилъ Высочайшее одобреніи въ томъ же указѣ, которымъ закрывались Педагогическіе Институты (А, 25); окончательно же «Положеніе» о курсахъ было утверждено 20-го Марта 1860 г. (А, 26).

Основная мысль, что къ спеціально педагогической дѣятельности слѣдуетъ подготовлять уже болѣе или менѣе сложившихся молодыхъ людей, а не юношей, симпатіи, способности и влеченія которыхъ еще совершенно не опредѣлились,— несомнѣнно вполнѣ вѣрна. Однако, положеніе о курсахъ нужно признать наименѣе удачнымъ изъ всѣхъ начинаній, какія у насъ были сдѣланы въ этомъ направленіи. Организація курсовъ заключалась въ слѣдующемъ.

На курсы принимались молодые люди, окончившіе соотвѣтствующіе факультеты въ университетѣ (историко-филологическій и физико-математическій); окончившіе другіе факультеты и воспитанники лицеевъ могли быть приняты по особому испытанію. Наиболѣе достойные получаютъ казенныя стипендіи въ 350 руб. въ годъ, которыя обязывали ихъ прослужить по окончаніи курсовъ учителями не менѣе 4-хъ лѣтъ. Курсы представляли собой, такимъ образомъ, открытыя учебныя заведенія. Каждый изъ воспитанниковъ курсовъ прикомандировывался къ одной изъ гимназій университетскаго города. Начальство и въ особенности директоръ гимназіи должны были руководить практическими занятіями прикомандированныхъ къ нимъ курсистовъ; подъ наблюденіемъ директора они должны были давать уроки въ свободные часы, посѣщать уроки опытныхъ преподавателей. Теоретическимъ образованіемъ руководили профессора университета. Во всемъ же, что относится къ практическимъ занятіямъ, кандидаты состояли въ вѣдѣніи особаго комитета, составленнаго изъ членовъ Попечительскаго Совѣта, профессоровъ педагогики, директоровъ гимназіи и, если было нужно, еще изъ одного или двухъ лицъ, опытныхъ въ педагогикѣ. Комитетъ назначалъ курсистамъ въ непосредственные руководители наиболѣе опытныхъ учителей гимназій, къ которымъ курсисты были причислены. Общее же руководство всѣмъ дѣломъ принадлежало Попечительскому Совѣту. Ему представлялись два раза въ годъ отчеты профессоровъ о занятіяхъ съ курсистами и объ ихъ успѣхахъ; онъ производилъ испытанія курсистамъ и распредѣлялъ ихъ по должностямъ. Что касается испытаній, то они были очень серьезны; каждый курсистъ обязанъ былъ написать два сочиненія или диссертаціи—одну на научную, другую на педагогическую тему—и таковыя защитить въ полномъ присутствіи Попечительскаго Совѣта. Если диспуты признавались удовлетворительными, то кандидатъ допускался къ чтенію пробнаго урока также въ засѣданіи Попечительскаго Совѣта. Получившіе по всѣмъ этимъ испытаніямъ удовлетворительные отзывы признаются кандидатами на учительскую должность; тѣ же курсисты, которыхъ диссертаціи или пробный урокъ признаны Попечительскимъ Совѣтомъ не вполнѣ удовлетворительными, опредѣляются въ учителя уѣздныхъ училищъ съ правомъ, впрочемъ, переходить въ среднія учебныя заведенія, если ихъ дѣятельность будетъ признана заслуживающей одобренія.

Наиболѣе слабая сторона этого устава заключается въ томъ обиліи начальства и руководителей, отъ которыхъ курсисты зависѣли: начальство и директоръ гимназіи, профессора-руководители, учителя-руководители, Педагогическій Комитетъ, Попечительскій Совѣтъ. Внести въ это дѣло при такихъ условіяхъ необходимое единство было очень трудно. Нельзя не удивляться и тѣмъ необычайно высокимъ требованіямъ, которыя предъявлялись къ воспитанникамъ курсовъ; окончить университетъ, провести два года на курсахъ, написать и защитить двѣ диссертаціи, съ возможной при этомъ перспективой пойти не дальше учителя уѣзднаго училища—это были условія, которыя врядъ ли могли привлекать кандидатовъ. Все это не замедлило, конечно, сказаться на судьбѣ курсовъ, и министерство уже черезъ три-четыре года было вынуждено озаботиться новымъ преобразованіемъ ихъ. Суровую критику этихъ курсовъ мы находимъ въ представленіи Министра Народнаго Просвѣщенія въ Государственный Совѣтъ, которымъ былъ сопровожденъ проектъ устава Историко-Филологическаго Института (А, 29), а также въ журналѣ ряда засѣданій Ученаго Комитета, имѣвшихъ мѣсто въ 1891 и 1892 г.; объ этихъ засѣданіяхъ еще будетъ рѣчь ниже (А, 36).

Въ 1864 г. вопросъ этотъ былъ предметомъ очень детальнаго обсужденія въ Ученомъ Комитетѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія. Различные члены Комитета стояли, однако, на совершенно различныхъ точкахъ зрѣнія по этому вопросу (В, 7). Такъ, профессоръ Н. М. Благовѣщенскій, бывшій долгое время профессоромъ Главнаго Педагогическаго Института, настаивалъ на возстановленіи закрытаго учебнаго заведенія для приготовленія учителей. Предсѣдатель Ученаго Комитета, А. С. Вороновъ, отстаивалъ систему курсовъ, только въ существенно измѣненномъ видѣ; онъ полагалъ, что теоретическія занятія должны носить характеръ семинарскихъ курсовъ при различныхъ каѳедрахъ; что практическія занятія также должны находиться подъ руководствомъ профессоровъ.

Соображенія Ученаго Комитета были разосланы на заключеніе историко-филологическихъ и физико-математическихъ факультетовъ университетовъ и Попечительскихъ Совѣтовъ. Обзоръ полученныхъ отвѣтовъ приведенъ въ цитированной выше статьѣ (B, 7). Въ этихъ отвѣтахъ сказалось все различіе взглядовъ, царящихъ въ вопросѣ о приготовленіи преподавателей. Мы будемъ весьма недалеки отъ истины, если скажемъ, что вся дальнѣйшая литература вопроса врядъ ли прибавляетъ что-либо существенное къ тому, что мы находимъ въ этихъ мнѣніяхъ факультетовъ. Эта литература содержитъ лишь различные варіанты тѣхъ же споровъ, на которыхъ намъ придется еще остановиться ниже.

Въ одномъ, впрочемъ, всѣ мнѣнія сошлись, что закрытаго учебнаго заведенія для приготовленія учителей возстанавливать не слѣдуетъ. Во всемъ остальномъ мнѣнія чрезвычайно существенно расходятся. Такъ, по первому основному вопросу, въ чьихъ рукахъ, собственно, должно быть сосредоточено дѣло подготовленія будущихъ педагоговъ, одни факультеты находили, что это дѣло можетъ быть во всемъ объемѣ сосредоточено при университетѣ; другіе находили, что это задача, по существу, совершенно чуждая университету; третьи полагали, что подготовленіе учителей должно частью выполняться въ университетѣ, частью внѣ его, по окончаніи университета. Расходились взгляды и по вопросу о продолжительности подготовки (на это назначали отъ 2-хъ до 4-хъ лѣтъ). Впрочемъ, сторонники 4-хъ лѣтняго стажа относили два или даже три года къ университетскому курсу. Почти всѣ факультеты сходились на томъ, что подготовка должна быть теоретическая и практическая, но значительно расходились въ пониманіи сущности и задачъ того и другого рода занятій. На основаніи всего этого матеріала, былъ выработанъ проектъ новаго положенія учительскихъ курсовъ (B, 7). Однако, повидимому, вслѣдствіе значительнаго различія во взглядахъ, проектъ дальнѣйшаго движенія не нолучилъ.

Въ 1864 г. былъ утвержденъ новый уставъ Гимназій (A, 27); § 26-й этого Устава устанавливаетъ, что учителями Гимназій могутъ быть только лица, окончившія Университетъ и прослушавшія особый педагогическій курсъ. Въ 1866 г. постъ Министра Народнаго Просвѣщенія занялъ графъ Д. А. Толстой, крайній приверженецъ классическаго образованія. Графъ Толстой поставилъ на первую очередь усиленіе преподаванія древнихъ языковъ. Съ этою цѣлью онъ немедленно приступилъ къ переработкѣ лишь недавно утвержденнаго устава Гимназій; въ видахъ же подготовленія преподавателей древнихъ языковъ былъ открытъ въ Петербургѣ историко-филологическій институтъ. Высочайшимъ Указомъ, которымъ этотъ Институтъ былъ открытъ (А, 28 и 29), были упразднены курсы при университетахъ. Между тѣмъ, § 26-й устава Гимназій оставался въ силѣ. Выходъ изъ этого положенія былъ найденъ въ томъ, что было установлено спеціальное испытаніе на званіе учителя гимназій (А, 30). Такого рода испытаніе, правда, производилось иногда и раньше, но до сихъ поръ только въ случаѣ крайней надобности, на основаніи особаго каждый разъ распоряженія Попечителя Учебнаго Округа. Теперь эти испытанія вводились въ норму и становились единственнымъ средствомъ для полученія званія учителя среднихъ учебныхъ заведеній. Общее положеніе о спеціальныхъ испытаніяхъ было утверждено 22 Апрѣля 1868 года (А, 30); но этимъ положеніемъ только устанавливается на ряду съ другими спеціальными испытаніями по Министерству Народнаго Просвѣщенія таковое для пріобрѣтенія званія учителя гимназій. Выработать же правила производства этого испытанія предоставлено Министру Народнаго Просвѣщенія. Эти правила, дѣйствительно, были утверждены Министромъ 15-го Мая 1870 года (А, 31). Этими правилами устанавливаются полныя и сокращенныя испытанія. Къ полному испытанію допускались лица, окончившія курсъ въ гимназіяхъ, а также окончившія курсъ въ университетахъ, но не по тому факультету, къ которому относится избранный ими предметъ преподаванія. Къ сокращенному испытанію допускались лица, уже окончившія университетскій курсъ по соотвѣтствующему факультету.

Испытаніе состояло изъ двухъ частей: теоретической, которая производится при университетѣ особой университетской комиссіей, и практической, состоящей изъ двухъ пробныхъ уроковъ въ средне-учебныхъ заведеніяхъ, въ присутствіи директора, преподавателя и представителя отъ факультета. Программа теоретическаго испытанія правилами не устанавливается; указано только, что полное испытаніе должно производиться въ объемѣ университетскаго курса. Въ дѣйствительности, полное испытаніе по физико-математическому факультету производилось очень рѣдко. Что касается сокращеннаго испытанія, то оно сводилось, обыкновенно, къ письменной работѣ и къ упомянутымъ пробнымъ урокамъ. Эти пробные уроки нерѣдко сходили довольно слабо, но комиссія въ такихъ случаяхъ всегда оказывалась въ весьма затруднительномъ положеніи. Какъ закрыть доступъ къ преподаванію человѣку, прошедшему уже для этого университетскій курсъ только на основаніи пробныхъ уроковъ, неудачное выполненіе которыхъ могло обуславливаться чисто случайными причинами и тѣми ненормальными условіями, при которыхъ пробные уроки фактически всегда происходятъ. Вслѣдствіе этого, на эти испытанія довольно скоро установился какъ у испытующихъ, такъ и у испытуемыхъ взглядъ какъ на простую формальность. Уже въ 1871 году въ Московскомъ и Петербургскомъ Округахъ отъ испытанія были освобождены лица, окончившія курсъ со степенью кандидата (А, 32). Въ 1884 году былъ введенъ новый университетскій уставъ, по которому испытанія объ окончаніи университетскаго курса производятся особыми государственными испытательными комиссіями (А, 33). Для выдержавшихъ такимъ образомъ государственныя испытанія Министерство признало учительскій экзаменъ излишнимъ и предложеніемъ отъ 24 Ноября 1889 года (А, 34) освободило ихъ отъ таковаго. Окружному же начальству было предоставлено тѣмъ или инымъ способомъ убѣждаться въ пригодности кандидатовъ на учительскія мѣста. Въ виду неопредѣленности этого положенія кандидаты опредѣлялись на службу, обыкновенно, безъ всякаго испытанія; иногда же они прикомандировывались въ гимназіи въ качествѣ сверхштатныхъ преподавателей для испытанія на дѣлѣ ихъ способностей къ преподаванію. Однако, правила 1870 года отмѣнены не были. Они примѣняются къ окончившимъ тѣ университеты, на которые не былъ распространенъ уставъ 1884 года (Варшавскій и Юрьевскій Университетъ), къ кандидатамъ въ преподаватели новыхъ языковъ и къ желавшимъ подвергнуться полному испытанію.

Въ 1906 г., съ дарованіемъ нашимъ университетамъ нѣкоторыхъ автономныхъ правъ, строй преподаванія въ университетѣ значительно измѣнился. Наиболѣе существенная сторона дѣла заключается въ томъ, что курсовая система преподаванія была замѣнена предметной, и факультеты были раздѣлены на рядъ цикловъ. Въ виду разнообразія этихъ цикловъ и ихъ различія въ разныхъ университетахъ, министерство сочло себя вынужденнымъ установить тѣ предметы испытанія, которые требуются для учителя гимназіи. Циркулярнымъ предложеніемъ Министра Народнаго Просвѣщенія отъ 29 Января 1909 года (А, 35) испытаніе на право преподаванія математики и физики производится по слѣдующимъ предметамъ: 1) Аналитическая Геометрія; 2) Введеніе въ Анализъ; 3) Высшая Алгебра; 4) Исчисленія дифференціальное (съ приложеніями къ анализу и геометріи) и интегральное; 5) Теорія чиселъ; 6) Исчисленіе конечныхъ разностей; 7) Теорія вѣроятностей; 8) Теоретическая механика; 9) Физика съ метеорологіей; 10) Астрономія (описательная и сферическая).

Лица, обучавшіяся въ университетѣ, освобождаются отъ тѣхъ предметовъ этого испытанія, по которымъ у нихъ имѣются отмѣтки въ университетскомъ дипломѣ. По остальнымъ предметамъ производится дополнительное испытаніе въ факультетскихъ комиссіяхъ.

Таковы нормы, дѣйствующія въ настоящее время относительно допущенія къ преподаванію кандидатовъ на учительскія должности. При многочисленныхъ измѣненіяхъ они восходятъ все же по законодательному акту до 1868 года.

Что касается учрежденій, имѣющихъ задачей подготовленіе учителей, то таковыя, какъ мы видѣли, были закрыты въ 1867 году. Для учителей, которые должны получить подготовку на историко-филологическомъ факультетѣ, въ томъ же году былъ открытъ Историко-филологическій Институтъ въ С.-Петербугѣ; а въ 1875-омъ году былъ преобразованъ въ такой же Институтъ лицей князя Безбородко въ Нѣжинѣ. Преподаватели же математики и получали подготовку исключительно въ университетахъ, если не считать тѣхъ немногихъ, которые получили право на преподаваніе путемъ полнаго спеціальнаго испытанія. Въ теченіе почти 25-ти лѣтъ вопросъ о подготовленіи преподавателей, повидимому, не подымался. Онъ возникъ вновь въ Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія въ 1891 г. и съ этого времени, можно сказать, не сходитъ съ очереди, хотя дѣло это и по сей день еще не доведено до полнаго осуществленія.

24 Іюня 1894 года Министръ Народнаго Просвѣщенія графъ Деляновъ предложилъ Ученому Комитету заняться пересмотромъ правилъ о специальныхъ испытаніяхъ 70-го года. Этотъ важный вопросъ послужилъ предметомъ обстоятельной обработки и обсужденій въ Ученомъ Комитетѣ, которыя изложены въ журналѣ Ученаго Комитета за № 1155-ымъ (А, 36). На первую очередь былъ поставленъ вопросъ о томъ, не подлежатъ ли специальныя испытанія полной отмѣнѣ. Ученый Комитетъ пришелъ къ отрицательному отвѣту на этотъ вопросъ, находя, что, «кромѣ тѣхъ научныхъ познаній, которыя пріобрѣтаются въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ и удостовѣряются въ происходящихъ въ нихъ испытаніяхъ, отъ преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній нельзя не требовать еще многихъ другихъ познаній и умѣній, необходимыхъ для успѣшнаго прохожденія ихъ поприща. Для пріобрѣтенія этихъ познаній и умѣній необходима специальная подготовка, и Ученый Комитетъ, такимъ образомъ, естественно перешелъ къ вопросу о подготовленіи преподавателей. Какъ и прежде въ 1863-мъ году, при обсужденіи вопроса въ Попечительскихъ Совѣтахъ и въ факультетахъ, необходимость такой подготовки и соотвѣтствующихъ педагогическихъ учрежденій была признана всѣми; но относительно организаціи дѣла мнѣнія и здѣсь существенно расходились. Центральнымъ пунктомъ расхожденія здѣсь былъ вопросъ, оказавшійся до нѣкоторой степени роковымъ для этихъ новыхъ начинаній: должно ли новое учрежденіе состоять при средней школѣ (при образцовой гимназіи, одной изъ существующихъ или специально для того созданной) или при университетѣ. Одни члены Ученаго Комитета, во главѣ съ Д. И. Лаврентьевымъ, находили, что наша средняя школа не имѣетъ необходимыхъ силъ для руководства педагогическими курсами, и что дѣло нужно поэтому поручить университету. Другіе находили, что выдающіеся профессора могутъ оказаться

плохими педагогами и, такимъ образомъ, сослужатъ плохую службу будущимъ учителямъ.

Въ результатѣ большинство членовъ Ученаго Комитета склонилось къ тому, чтобы на первыхъ порахъ подготовленіе будущихъ преподавателей гимназій было сосредоточено въ одномъ пунктѣ, на глазахъ, такъ сказать, Министра Народнаго Просвѣщенія при одной изъ существующихъ гимназій. Директоръ этой гимназіи (непремѣнно филологъ) долженъ быть руководителемъ дѣла, а инспекторъ (математикъ или физикъ) —его помощникомъ.

Подъ главнымъ наблюденіемъ и руководствомъ означеннаго директора, при постоянномъ содѣйствіи инспектора и подъ непосредственнымъ руководствомъ преподавателей этой педагогической гимназіи, должна совершаться вся теоретическая и практическая подготовка кандидатовъ съ привлеченіемъ къ дѣлу, въ случаѣ надобности, и нѣкоторыхъ профессоровъ университета, по усмотрѣнію и избранію директора, съ утвержденіемъ министра.

Всѣ привлеченныя къ преподаванію лица должны получать значительно усиленное вознагражденіе, чтобы они могли цѣликомъ посвятить себя этому дѣлу. Число кандидатовъ педагоговъ ограничивается 24 (18 филологовъ и 6 математиковъ); они поступаютъ въ Педагогическій Институтъ послѣ окончанія университета, остаются въ немъ 2 года и въ теченіе этого времени получаютъ стипендіи по 600 рублей въ годъ. Въ остальномъ организація дѣла намѣчена лишь въ общихъ чертахъ; бюджетъ учрежденія исчисленъ въ 30 тысячъ рублей.

Изъ относящихся къ этому проекту поясненій слѣдуетъ отмѣтить, что въ Ученомъ Комитетѣ въ то время преобладала тенденція перейти отъ предметной системы преподаванія къ классной и, сообразно этому, Комитетъ полагалъ, что «въ предполагаемомъ педагогическомъ институтѣ одновременно и по возможности одинаково и совмѣстно подготовляются къ учительскому поприщу молодые люди по предметамъ какъ историко-словеснымъ, такъ и физико-математическимъ».

Что касается испытаній на учительское званіе, то проектъ таковыхъ былъ выработанъ Ученымъ Комитетомъ въ ближайшіе годы (А, 37). Проектъ отличается отъ дѣйствующихъ нынѣ правилъ существенно тѣмъ, что кандидаты на учительское званіе, сверхъ соотвѣтственно научнаго испытанія, подвергаются всѣ испытанію изъ психологіи и логики, а затѣмъ дополнительному испытанію по спеціальностямъ. Приводимъ цѣликомъ § 8-й этихъ правилъ, относящійся къ испытанію кандидатовъ въ преподаватели математики и физики.

§ 8. «Отъ желающихъ пріобрѣсти званіе преподава-«теля математики, физики и математической географіи, при «испытаніи въ коммиссіи физико-математической по отдѣленію «математическихъ наукъ, требуется, чтобы одинъ изъ трехъ пись-«менныхъ отвѣтовъ былъ по астрономіи (ср. 11 правилъ объ испы-«таніяхъ) и чтобы избранные для исполнительнаго испытанія два «предмета принадлежали оба къ области физики, или одинъ «къ чистой математикѣ, а другой къ физикѣ (§ 18 правилъ). «Сверхъ того означенныя лица подвергаются испытанію въ «элементарной математикѣ въ объемѣ, примѣрно, ариѳметики «и алгебры Бертрана, геометріи Руше и Комберусса, тригоно-«метріи Серре, при чемъ каждый изъ нихъ долженъ доказать «ясное и отчетливое представленіе: 1) объ отрицательныхъ «числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними; 2) о числахъ ирраціональ-«ныхъ и дѣйствіяхъ надъ ними; 3) о числахъ комплексныхъ «и дѣйствіяхъ надъ ними и 4) объ эквивалентности уравне-«ній, а также знаніе методъ рѣшенія геометрическихъ задачъ, «умѣнье рѣшать задачи на построеніе и знакомство съ осно-«ваніями новой геометріи. Для производства сего испытанія «изъ элементарной математики предсѣдателю испытательной «физико-математической комиссіи предоставляется приглашать «въ качествѣ экзаменатора опытнаго преподавателя матема-«тики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ по соглашенію съ «попечителемъ учебнаго округа и съ разрѣшенія Министра «Народнаго Просвѣщенія (ср. § 4 правилъ объ испытаніяхъ).

Мы не будемъ останавливаться на дальнѣйшихъ перипетіяхъ этого дѣла въ Ученомъ Комитетѣ въ 94 и 95-омъ годахъ; замѣтимъ только, что изъ опубликованныхъ журналовъ Комитета (А, 38—39) видно, что Комитетъ неоднократно возвращался къ вопросу о подготовленіи учителей (то по иниціативѣ своихъ членовъ, то по иниціативѣ Попечителя Кавказскаго Учебнаго Округа, извѣстнаго педагога К. П. Яновскаго) и всякій разъ высказывалъ твердое убѣжденіе въ необходимости подготовки учительскаго персонала и желаніе, чтобы дѣло «на разработку котораго Комитетъ затратилъ столько силъ и времени, получило осуществленіе». Относящаяся къ этому періоду неоффиціальная литература отмѣчена подъ номерами В, 10—16.

Именно въ то время, когда въ Ученомъ Комитетѣ началось обсужденіе этого вопроса, попечитель Одесскаго Округа Х. П. Сольскій вошелъ въ министерство съ предложеніемъ открыть въ Одессѣ въ видѣ опыта краткосрочные курсы для приготовленія учителей математики и физики для среднихъ учебныхъ заведеній Одесскаго Учебнаго Округа (А, 40). 20-го марта 1893 г. Министръ Народнаго Просвѣщенія утвердилъ «Положеніе» и «Учебный планъ» курсовъ въ видѣ опыта на 2 года (А, 40—41). Это были единственные въ своемъ родѣ курсы въ томъ отношеніи, что не только фактически (какъ курсы, функціонирующіе въ настоящее время въ Одессѣ), но и по замыслу своему они были предназначены именно для приготовленія учителей математики и физики. Мы приведемъ здѣсь цѣликомъ краткое «Положеніе» и «Учебный планъ» этихъ курсовъ.

I) Положеніе о временныхъ педагогическихъ курсахъ съ цѣлью приготовленія учителей математики и физики для среднихъ учебныхъ заведеній Одесскаго учебнаго округа.

1. При одной изъ Одесскихъ мужскихъ гимназій открываются въ видѣ опыта на 2 года педагогическіе курсы съ цѣлью приготовленія учителей математики и физики для среднихъ учебныхъ заведеній Одесскаго учебнаго округа.

2. На означенные курсы принимаются лишь лица, получившія въ одной изъ испытательныхъ комиссій по физико-математическимъ наукамъ дипломъ 1 или 2 степени.

3. Пріемъ на педагогическіе курсы бываетъ одинъ разъ въ годъ съ 1 по 15 Августа, но въ исключительныхъ случаяхъ съ разрѣшенія Попечителя Одесскаго Учебнаго Округа, допускается пріемъ и въ теченіе учебнаго года.

4. Прошенія о пріемѣ на курсы подаются въ Канцеляріи Попечителя Учебнаго Округа съ 1 Іюля по 1-ое Августа на

простой бумагѣ. Къ прошенію прилагается: а) метрическое свидѣтельство, б) дипломъ 1 или 2 степени, полученный въ одной изъ испытательныхъ комиссій по физико-математическимъ наукамъ, в) свидѣтельство объ одобрительномъ поведеніи.

5. Число слушателей на педагогическихъ курсахъ опредѣляется Попечителемъ Одесскаго Учебнаго Округа, сообразно нуждамъ среднихъ учебныхъ заведеній Округа.

6. Педагогическая подготовка учителей на курсахъ продолжается въ теченіе одного учебнаго года, съ 15 Августа по 1-ое Мая.

7. Въ административномъ отношеніи курсы состоятъ въ вѣдѣніи начальства того учебнаго заведенія, при которомъ они учреждаются.

8. Преподаватели курсовъ назначаются Попечителемъ Одесскаго Учебнаго Округа.

9. Всѣ дѣла по учебной части разсматриваются въ собраніи всѣхъ преподавателей курсовъ, подъ предсѣдательствомъ начальника заведенія.

10. Главныя основанія учебнаго плана курсовъ содержатся въ приложенной къ настоящимъ правиламъ таблицѣ учебныхъ предметовъ и недѣльныхъ занятій.

11. Подробные учебные планы и программы предметовъ и практическихъ упражненій, а равно и правила о производствѣ испытаній вообще, инструкціи по учебной части составляются по распоряженію Попечителя Одесскаго Учебнаго Округа и представляются на утвержденіе Министра Народнаго Просвѣщенія.

12. Въ концѣ учебнаго года слушатели курсовъ подвергаются испытанію въ собраніи всѣхъ преподавателей курсовъ.

13. Лица, съ успѣхомъ прошедшія педагогическіе курсы, получаютъ свидѣтельства о выслушаніи спеціальнаго педагогическаго курса математики и физики.

14. Лица, прослушавшія курсы, но не удостоенныя упомянутыхъ свидѣтельствъ, если неуспѣшность ихъ вызвана уважительными причинами, могутъ быть съ разрѣшенія попечителя округа допущены на повторительные курсы.

15. Слушатели курсовъ, на основаніи § 4 ст. 53 устава о воинской повинности, пользуются отсрочкой по отбыванію

воинской повинности до 27 лѣтъ, какъ избранные по окончаніи университетскаго курса для приготовленія на учительскія должности.

16. Средства содержанія педагогическихъ курсовъ состоятъ изъ а) платы за слушаніе курсовъ, взимаемой со слушателей въ размѣрѣ ста рублей въ годъ, и б) 2.200 рублей, ассигнуемыхъ для этого изъ спеціальныхъ средствъ учебныхъ заведеній округа.

II) Учебный планъ педагогическихъ курсовъ для приготовленія учителей математики и физики среднихъ учебныхъ заведеній Одесскаго учебнаго округа.

1-е полугодіе (съ 15-го Августа по 20 Декабря).

1. Дидактика и методика	6 часовъ въ недѣлю.
2. Изученіе учебниковъ и сборниковъ задачъ по математикѣ и физикѣ	4 часа въ недѣлю.
3. Техника гимназическаго курса опытной физики	4 часа въ недѣлю.
	Всего 14 часовъ въ недѣлю.

2-ое полугодіе (съ 7 Января по 1 Мая).

1. Изученіе учебниковъ и сборниковъ задачъ по математикѣ и физикѣ	3 часа въ недѣлю.
2. Пробные уроки въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ	6 часовъ въ недѣлю.
3. Обсужденіе пробныхъ уроковъ	3 часа
4. Техника гимназическаго курса опытной физики	2 часа въ недѣлю.
	Всего 14 часовъ въ недѣлю.

> *Примѣчаніе.* Помимо занятій, указанныхъ въ настоящей таблицѣ, слушатели курсовъ въ теченіе всего учебнаго года посѣщаютъ уроки математики и физики въ мѣстныхъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Курсы, дѣйствительно, открыли свои дѣйствія въ Сентябрѣ 1893 г. Относительно ихъ дѣятельности мы располагаемъ лишь краткими свѣдѣніями, сообщенными преподавателемъ и секретаремъ курсовъ Э. К. Шпачинскимъ въ журналѣ «Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики» (В, 8). Изъ этихъ свѣдѣній видно, что преподаваніе было ввѣрено весьма компетентнымъ лицамъ; лекціи проф. О. Н. Шведова по методикѣ физики были отпечатаны въ томъ же журналѣ (В, 9). Въ первомъ полугодіи (ос. сем. 1893 года) на курсахъ было семь слушателей, одинъ изъ которыхъ выбылъ въ концѣ семестра. Остальные шесть успѣшно выдержали установленныя Совѣтомъ испытанія (по педагогикѣ и методикамъ математики и физики) и были удостоены особыхъ свидѣтельствъ. Въ слѣдующемъ году слушателей было пять. Отсутствіе какой бы то ни было матеріальной поддержки, повидимому, значительно тормозило развитіе этого дѣла. Съ истеченіемъ срока, на который «положеніе» было утверждено, курсы не возобновили своей дѣятельности.

Съ новой энергіей вопросъ о подготовкѣ учителей былъ выдвинутъ въ 1898 г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія Н. П. Боголѣповымъ, смѣнившимъ на этомъ посту гр. Делянова. Въ циркулярномъ предложеніи отъ 16 ноября 1898 г. попечителямъ учебныхъ округовъ (А, 45) министръ указываетъ, что «по общему признанію, однимъ изъ главныхъ недостатковъ среднихъ учебныхъ заведеній Министерства Народнаго Просвѣщенія нужно считать то, что начинающіе преподаватели ихъ приступаютъ къ своему трудному и отвѣтственному дѣлу безъ всякой спеціально педагогической подготовки». Въ виду этого Министръ предлагаетъ обсудить въ Попечительскихъ Совѣтахъ съ участіемъ компетентныхъ лицъ вопросъ о подготовленіи учителей во всемъ его объемѣ: въ какой формѣ было бы желательно осуществить мысль о педагогической подготовкѣ преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній, какимъ образомъ, по какимъ предметамъ и въ теченіе какого времени должна вестись подготовка кандидатовъ на учительскія должности,— какія на это понадобятся матеріальныя средства и какъ таковыя могутъ быть изысканы.

Къ циркуляру были приложены «не для руководства и не для отзыва, а лишь для соображеній» относящіеся сюда журналы Ученаго Комитета за №№ 1155 и 1262, (содержаніе которыхъ было подробно изложено выше), а также проектъ учрежденія педагогической семинаріи, составленный однимъ изъ педагоговъ Московскаго Учебнаго Округа (А, 46).

Вторая часть циркуляра посвящена матеріальному положенію преподавателей. Министръ предлагаетъ также обсудить, «въ какой мѣрѣ и формѣ» было бы желательно улучшить матеріальное положеніе преподавателей, чтобы избавить ихъ отъ необходимости обременять себя непосильнымъ числомъ уроковъ.

Никогда до того вопросъ о подготовкѣ преподавателей не обсуждался въ нашей литературѣ такъ живо, какъ послѣ появленія этого циркуляра. Нужно удивляться тому необычайному разнообразію мнѣній, которыя были по этому поводу высказаны. Не входя въ подробное изложеніе этихъ споровъ (важнѣйшія статьи указаны подъ номерами В, 17—29), мы остановимся только на трехъ статьяхъ, служащихъ наиболѣе полнымъ выраженіемъ этихъ противоположныхъ тенденцій, которыя парятъ въ этомъ вопросѣ.

Первая статья С. Зенченко появилась сначала въ «Вѣстникѣ Воспитанія» (В, 17), а затѣмъ была выпущена отдѣльной брошюрой. Авторъ даетъ краткій обзоръ попытокъ, которыя у насъ дѣлались въ цѣляхъ подготовленія преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній. Онъ приходитъ къ заключенію, что педагогическія и, главное, практически-педагогическія задачи всегда были и будутъ чужды университету, а потому дѣло подготовленія учителей должно быть передано въ другія руки; должны быть устроены курсы, въ которыхъ преподавателями являются лучшіе педагоги, а руководители должны хорошо ознакомиться съ постановкой соотвѣтствующихъ учрежденій за границей.

Взгляды г. Зенченко не представляютъ, конечно, ничего новаго: напротивъ, мы находимъ ихъ какъ въ нѣкоторыхъ отзывахъ факультетовъ, о которыхъ была рѣчь выше, такъ и въ журналахъ Ученаго Комитета. Они представляютъ собой точку зрѣнія, наиболѣе близко подходящую къ воззрѣніямъ министерства.

На совершенно иной точкѣ зрѣнія стоитъ проф. В. Випперъ. Онъ озаглавилъ свою статью вопросомъ, характеризующимъ уже его позицію: «Спеціальная подготовка преподавателя или поднятіе его положенія» (В, 18). Г. Випперъ совершенно отвергаетъ спеціальную подготовку. Онъ совершенно отрицаетъ не только научное значеніе методики, но даже и педагогики вообще. Поскольку методика предмета является какъ бы энциклопедической сводкой науки, она можетъ найти себѣ мѣсто въ университетѣ; поскольку же она содержитъ изложеніе методовъ преподаванія, она не имѣетъ ничего сколько-нибудь твердо установленнаго и общепризнаннаго. Точно также ничего научно цѣльнаго и законченнаго авторъ не признаетъ и въ самой педагогикѣ. Преподаватель можетъ получить достаточную научную подготовку въ университетѣ, а то, что ему надлежало бы прочитать сверхъ университетскихъ курсовъ, онъ при желаніи можетъ получить безъ чужой помощи. Нужно только, чтобы онъ любилъ свое дѣло. а для этого, кромѣ личной добросовѣстности, нужны еще надлежащія условія: преподаватель долженъ быть опезпеченъ матеріально, долженъ быть поднятъ его моральный авторитетъ, ему—и въ особенности преподавательской коллегіи въ цѣломъ—должна быть предоставлена гораздо большая самостоятельность. Въ этомъ поднятіи положенія учителя проф. Виннеръ видитъ единственный путь къ повышенію уровня преподаванія въ нашей средней школѣ.

Отвѣтомъ на эту статью является очень продуманная статья извѣстнаго педагога А. Острогорскаго, озаглавленная «И спеціальная подготовка преподавателя средней школы и улучшеніе его положенія» (В, 19). Г. Острогорскій прежде всего указываетъ, что онъ такъ же горячо, какъ и проф. Випперъ, настаиваетъ на поднятіи положенія учителя; но онъ находитъ, что задача реформы этимъ не можетъ быть исчерпана. Шагъ за шагомъ разбираетъ онъ взгляды (отнюдь не новые) проф. Виппера и приходитъ къ заключенію, которое можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ: методика, дидактика и даже педагогика вообще, дѣйствительно, не достигли той устойчивости и тѣхъ прочныхъ результатовъ, какими владѣетъ положительное знаніе; но эти дисциплины содержатъ огромный матеріалъ вѣкового опыта и научнаго изслѣдованія, матеріалъ, который неподготовленному преподавателю приходится продумывать и рѣшать заново, за свой собственный страхъ, рѣшать часто при помощи вредныхъ экспериментовъ, для учащихся и для самаго педагога. Ознакомленіе съ этими дисциплинами должно поэтому принести начинающему педагогу большую и неоспоримую пользу. Отнюдь не впадая въ тонъ личныхъ нападокъ, г. Острогорскій высказываетъ глубокое убѣжденіе, что настойчивыми противниками спеціальной педагогической подготовки всегда являются лица, стоящія далеко какъ отъ школьнаго дѣла, такъ и отъ педагогической науки. Мы вполнѣ раздѣляемъ этотъ взглядъ

Возвратимся, однако, къ оффиціальной исторіи вопроса. Поставленные Н. П. Боголѣповымъ вопросы были подвергнуты обсужденію на мѣстахъ и отвѣты поступили въ министерство. Свободный обзоръ этихъ отвѣтовъ помѣщенъ въ Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія за 1899 г. (А, 47). Мы не будемъ, однако, останавливаться на этихъ отвѣтахъ, такъ какъ въ нихъ царитъ то же различіе мнѣній, какое мы уже наблюдали въ предыдущихъ стадіяхъ разработки вопроса.

8-го іюля 1899 г. Н. П. Боголѣповъ обратился къ попечителямъ учебныхъ округовъ съ новымъ циркуляромъ (А, 48), въ которомъ вопросъ о судьбахъ нашей средней школы былъ затронутъ гораздо глубже. Здѣсь рѣчь шла уже о коренномъ преобразованіи школы, для разработки котораго министръ предполагалъ созвать особую комиссію. Такая комиссія, дѣйствительно, была созвана по Высочайшему повелѣнію и приступила къ работамъ въ январѣ 1900 г. Въ эту комиссію были переданы всѣ матеріалы по подготовкѣ учителей. Для обсужденія этого вопроса была выдѣлена особая подкомиссія, докладъ которой напечатанъ во II выпускѣ «Трудовъ» Комиссіи (А, 49). Этотъ докладъ, на нашъ взглядъ, представляетъ собой лучшее, что было въ этомъ направленіи сдѣлано въ смыслѣ подготовительной работы.

Заключенія Подкомиссіи сводятся къ слѣдующему. Въ первую очередь Подкомиссія признала необходимымъ учредить каѳедру педагогики на историко-филологическихъ факультетахъ каждаго изъ русскихъ университетовъ. «Введеніе исторіи педагогики», говорится въ докладѣ, «въ курсъ университетскаго преподаванія не можетъ не повліять благотворно какъ на развитіе русской педагогической науки, такъ и на возбужденіе среди студентовъ интереса къ педагогическому дѣлу».

Въ дальнѣйшихъ заключеніяхъ Подкомиссіи особенно пріятное впечатлѣніе производитъ отсутствіе стремленія подогнать дѣло подъ строго опредѣленный шаблонъ. Для подготовленія преподавателей должны быть учреждены курсы, институты, семинаріи—все равно: дѣло, конечно, не въ названіи. Но эти учрежденія не должны быть связаны ни съ университетомъ, ни съ какой-либо опредѣленной гимназіей. Болѣе того, нѣтъ необходимости, чтобы всѣ эти учрежденія были построены по одному образцу; въ каждомъ университетскомъ городѣ институтъ можетъ носить свой индивидуальный характеръ, сообразованный съ мѣстными условіями и мѣстными силами. Занятія въ институтѣ должны быть теоретическія и практическія. Но и теоретическія занятія не должны носить строго лекціоннаго характера; самостоятельное изученіе отдѣльныхъ сочиненій, рефераты по этимъ работамъ, бесѣды по поводу рефератовъ должны имѣть преобладающее значеніе. Что касается предметовъ, подлежащихъ изученію, то они намѣчены лишь въ общихъ чертахъ: исторія Педагогики, психологія съ логикой, школьная гигіена. Занятія по методикѣ преподаванія отдѣльныхъ предметовъ подкомиссія полагала наиболѣе цѣлесообразнымъ связать съ практическими занятіями по этимъ предметамъ. Что касается практической подготовки, то сюда отнесены; посѣщеніе уроковъ опытныхъ педагоговъ по указанію директора б) пробные уроки въ присутствіи руководителей и ближайшихъ по спеціальности товарищей, в) участіе въ засѣданіяхъ всѣхъ кандидатовъ и руководителей подъ предсѣдательствомъ директора для выясненія важнѣйшихъ общихъ вопросовъ, возникшихъ во время практическихъ занятій, г) временное исполненіе обязанностей по воспитательной части при какомъ-либо среднемъ учебномъ заведеніи, преимущественно въ интернатахъ, д) систематическое преподаваніе цѣлыхъ отдѣловъ курса подъ руководствомъ директора и соотвѣтственныхъ наставниковъ, е) разборъ учебниковъ и ознакомленіе съ учебными планами.

Быть можетъ, не вся эта программа въ одинаковой мѣрѣ выполнима; но докладъ вездѣ подчеркиваетъ, что практика и живая дѣятельность учрежденія должны нормировать детали.

Что касается продолжительности пребыванія кандидатовъ въ подготовительномъ учрежденіи, то въ этомъ отношеніи голоса раздѣлились поровну между сторонниками двухлѣтняго и годичнаго курса; послѣдніе полагали, что сокращеніе времени подготовки должно быть сдѣлано за счетъ теоретическихъ курсовъ. Кандидаты во время пребыванія въ институтѣ должны получать стипендіи въ 600 руб. въ годъ, а время этого пребыванія должно потомъ зачитываться въ службу.

Къ докладу Подкомиссіи приложена записка декана историко-филологическаго факультета Московскаго Университета А. И. Кирпичникова «О научныхъ работахъ преподавателей». Не можетъ быть сомнѣнія въ томъ, что собственныя научныя работы преподавателя одухотворяютъ его педагогическую дѣятельность; но врядъ ли тѣ «мѣры», которыя предлагаетъ для этой цѣли покойный профессоръ, способны создать у насъ научныхъ работниковъ въ педагогическихъ коллегіяхъ средней школы.

Трагическая смерть Н. П. Боголѣпова пріостановила всѣ эти начинанія, а дальнѣйшія событія сосредоточили вниманіе правительства, главнымъ образомъ, на высшей школѣ. Въ 1902 г., по почину управляющаго Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія Г. Э. Зенгера, была Высочайше учреждена Комиссія по преобразованію высшихъ учебныхъ заведеній. Быть можетъ, не безъ связи съ тѣмъ обстоятельствомъ, что новый министръ былъ въ 1900 г. предсѣдателемъ Подкомиссіи по вопросу о подготовленіи преподавателей, весь этотъ вопросъ былъ переданъ въ новую Комиссію. Здѣсь онъ былъ порученъ спеціальной секціи, отчетъ о занятіяхъ которой помѣщенъ въ 3-емъ томѣ «Трудовъ» Комиссіи (А, 50). Въ секціи снова возникли горячіе дебаты по тѣмъ сторонамъ вопроса, которыя неоднократно уже обсуждались раньше; но центральнымъ пунктомъ довольно напряженнаго спора здѣсь былъ вопросъ, можетъ ли университетъ взять на себя все дѣло подготовленія преподавателей во всѣхъ его стадіяхъ. Комиссія въ большинствѣ своемъ дала положительный отвѣтъ на этотъ вопросъ. Врядъ ли это рѣшеніе могло содѣйствовать успѣху дѣла; во всякомъ случаѣ, движенія оно въ то время не получило.

Именно въ ту пору, когда курсы для подготовки преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній въ Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія прекратили свое существованіе, были учреждены педагогическіе курсы въ военномъ вѣдомствѣ при 2-ой Петербургской военной гимназіи. Положеніе объ этихъ курсахъ было Высочайше утверждено 13-го Февраля 1865 г. (А, 51); этимъ положеніемъ курсы учреждаются временно въ видѣ опыта на 3 года. По прошествіи этого срока то же положеніе было утверждено для постояннаго дѣйствія. Однако, въ началѣ 80-хъ годовъ эти курсы были закрыты. О постановкѣ этихъ курсовъ можно составить себѣ представленіе по статьѣ К. Сентъ-Илера, помѣщенной въ «Педагогическомъ Сборникѣ» за 1871 г. (В, 30).

Весною 1899 г., по распоряженію Военнаго Министра, былъ составленъ проектъ организаціи курсовъ для подготовленія офицеровъ къ воспитательной дѣятельности въ кадетскихъ корпусахъ. И здѣсь на почвѣ осуществленія этого проекта возникли споры, мало отличающіеся отъ тѣхъ, о которыхъ была рѣчь выше. Однако, 15-го іюня 1900 г. эти курсы были учреждены, а черезъ 3 года къ нимъ были присоединены курсы для подготовленія кандидатовъ на учительскія должности въ кадетскихъ корпусахъ. Курсы для подготовки воспитателей одногодичные, для подготовки учителей—двугодичные. Курсы военнаго вѣдомства функціонируютъ уже свыше 10 лѣтъ при Педагогическомъ Музеѣ Военно Учебныхъ Заведеній. Съ тѣхъ поръ Педагогическимъ Музеемъ выпущено три отчета о дѣятельности курсовъ (А, 52). Послѣдній изъ нихъ, опубликованный по случаю десятилѣтія дѣятельности курсовъ, содержитъ всѣ матеріалы относительно организаціи этого учрежденія и постановки преподаванія въ немъ. Курсы поставлены очень серьезно и владѣютъ значительнымъ бюджетомъ. Мы не даемъ болѣе подробнаго описанія учрежденія, такъ какъ это сдѣлаютъ болѣе освѣдомленныя лица въ другомъ докладѣ.

II. Дѣйствующія учрежденія.

Изъ предыдущаго историческаго очерка видно, что вопросъ о надлежащемъ подготовленіи преподавателей для средней школы служилъ у насъ постояннымъ предметомъ обсужденія и живо интересовалъ какъ министерство, такъ и Общество. Съ самаго возникновенія у насъ средней школы и вплоть до 70-хъ годовъ истекшаго столѣтія въ Россіи существовали спеціальныя учрежденія, предназначенныя для этой цѣли; но вслѣдствіе различія во взглядахъ на задачи и устройство этихъ учрежденій, какъ у высшихъ представителей власти, такъ и у руководителей педагогическихъ учебныхъ заведеній,— вслѣдствіе трудности организаціи этого дѣла въ странѣ съ молодой культурой, при недостаткѣ интеллигентныхъ силъ и просвѣщенныхъ педагоговъ, эти учрежденія постепенно прекратили свое существованіе. Но вопросъ объ учрежденіи на смѣну имъ новыхъ педагогическихъ институтовъ, можно сказать, не сходилъ у насъ съ очереди. Эти новыя начинанія получили, однако, осуществленіе только въ самые послѣдніе годы и то не въ томъ порядкѣ, въ какомъ они разрабатывались. Всѣ дѣйствующія въ настоящее время педагогическія учрежденія предназначенныя для подготовленія преподавателей средней школы, возникли въ 1908 и 1909 г.г. непосредственно по наступленіи успокоенія послѣ бурныхъ событій. пережитыхъ страной. Одни изъ этихъ учрежденій народились, благодаря частной инициативѣ, другія возникли въ отдѣльныхъ учебныхъ округахъ по почину попечителей. Благодаря этому, каждое изъ этихъ небольшихъ учрежденій было построено на иныхъ началахъ, чѣмъ другія, и эти отличія значительно, а иногда даже коренннымъ образомъ мѣняютъ характеръ учрежденія. Это было дѣйствительнымъ осуществленіемъ принципа, настойчиво высказаннаго Комиссіей по преобразованію средней школы,— предоставить возможно больше инициативы организаторамъ дѣла на мѣстахъ. Такимъ образомъ, получается возможность прослѣдить на опытѣ результаты различной организаціи, что весьма цѣнно для развитія дѣла. Съ другой стороны, дѣйствующія учрежденія до послѣдняго времени не имѣли, а—въ сущности, и теперь еще не имѣютъ достаточныхъ средствъ, не имѣли даже увѣренности въ полной прочности скромнаго бюджета, которымъ они временно владѣли. Это лишало ихъ необходимой устойчивости, лишало руководителей увѣренности въ прочности дѣла. На эти небольшія учрежденія нельзя поэтому смотрѣть, какъ на сложившіеся институты; это новыя, молодыя попытки поднять у насъ педагогическое дѣло въ средней школѣ,—попытки, судьба которыхъ еще далеко не опредѣлилась. Впрочемъ, какъ мы увидимъ ниже, въ самое послѣднее время Министерство Народнаго Просвѣщенія сдѣлало серьезные шаги къ тому, чтобы эти начинанія упрочить.

Нужно, впрочемъ, сказать, что Педагогическіе курсы военнаго вѣдомства, о которыхъ мы упоминали выше, имѣютъ за собою уже десятилѣтнюю практику, располагаютъ прочнымъ бюджетомъ и, въ ряду дѣйствующихъ учрежденій этого рода, несомнѣнно занимаютъ первое мѣсто. Такъ какъ, однако, о подготовленіи преподавателей математики для кадетскихъ корпусовъ, какъ мы уже упоминали выше, будетъ изложено обстоятельно въ другомъ докладѣ, то мы здѣсь этихъ курсовъ касаться не будемъ.

1. Педагогическая Академія Лиги образованія.

Лига образованія представляетъ собое частное общество, имѣющее цѣлью содѣйствовать распространенію въ странѣ образованія. Лига существуетъ только съ 1906 г., и одной изъ первыхъ задачъ, которыя она себѣ поставила, было учрежденіе высшаго педагогическаго учебнаго заведенія. 18 Августа 1907 г. Управляющій Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія утвердилъ уставъ «Педагогической Академіи Лиги Образованія». (А, 53). По этому уставу слушателями Академіи могутъ быть лица обоего пола, окончившія курсъ высшихъ учебныхъ заведеній. Курсъ Академіи разсчитанъ на 2 года. Преподаваемые предметы раздѣляются на общіе и спеціальные. Общіе предметы имѣютъ цѣлью достаточно ознакомить слушателей съ современной наукой о воспитаніи, спеціальные же—содѣйствовать подготовкѣ преподавателей по тѣмъ наукамъ, къ преподаванію которыхъ они себя готовятъ. Слушателямъ Академіи, успѣшно сдавшимъ экзамены по всѣмъ общимъ предметамъ и не менѣе какъ по двумъ добавочнымъ предметамъ, а также исполнившимъ всѣ занятія, связанныя съ изученіемъ предметовъ ихъ спеціальности, выдается дипломъ объ окончаніи Педагогической Академіи. Однако, этотъ дипломъ никакихъ служебныхъ преимуществъ не представляетъ. Совѣтъ можетъ допускать желающихъ къ слушанію отдѣльныхъ курсовъ, но такіе слушатели правъ держать экзамены не имѣютъ. За обученіе слушатели уплачиваютъ по 100 рублей въ годъ.

Распредѣленіе преподаванія устанавливается Совѣтомъ Академіи. Согласно опубликованному отчету за 1908—9 и 1909—10 годы (А, 53) основными дисциплинами, на которыя опирается современная педагогика, въ Академіи признаются: педагогическая психологія, исторія педагогики, введеніе въ педагогику (обзоръ современныхъ педагогическихъ проблеммъ), школьная гигіена, патологическая педагогика и школовѣдѣніе. Однако, изученіе этихъ наукъ требуетъ предварительныхъ познаній изъ области анатоміи, фозіологіи, психологіи, исторіи философіи и права, которыя могутъ отсутствовать у лицъ, не слушавшихъ этихъ курсовъ въ томъ высшемъ учебномъ заведеніи, въ которомъ они получили дипломъ. Сообразно этому на курсахъ читаются лекціи и по этимъ предметамъ.

Занятія въ Академіи начались осенью 1908 г., и въ теченіе 1908—9 академическаго года преподаваніе общихъ предметовъ было распредѣлено слѣдующимъ образомъ: анатомія (22 часа), гистологія (30 часовъ), анатомія и физіологія мозга (7 ч.), физіологія (32 ч.), психологія (19 ч.). педагогическая психологія (19 ч.), индивидуальная психологія (28 ч.). исторія древней философіи (27 ч.), исторія новой философіи (30 ч.), антропологія (36 ч.) и экциклопедія права (29 ч.). Въ связи съ общими курсами индивидуальной и педагогической психологіи быля организованы практическія занятія по изученію методовъ лабораторнаго и школьнаго изслѣдованія психической жизни учащихся. Въ слѣдующемъ 1909—1910 уч. году, кромѣ этихъ предметовъ читались еще: исторія педагогики, патологическая педагогика, психофизіологія органовъ чувствъ и школьная гигіена.

Для спеціальныхъ занятій всѣ слушатели (въ 1-мъ году ихъ было 149) раздѣлялись на 9 группъ, изъ которыхъ каждая находилась въ завѣдываніи одного изъ членовъ Совѣта. Эти группы были слѣдующія: 1) одна группа педагогики и психологіи, 2) русскаго языка и словесности, 3) математики и физики, 4) естествознанія, 5) географіи, 6) исторіи, 7) юридическихъ наукъ, 8) новыхъ языковъ, 9) народнаго образованія.

Группа математики и физики находилась въ завѣдываніи извѣстнаго педагога А. Н. Макарова, долгое время состоявшаго Директоромъ Педагогическаго Музея Военно-Учебныхъ заведеній. Для слушателей этой группы въ первый годъ существованія Академіи были прочитаны курсы: «Обзоръ важнѣйшихъ вопросовъ философіи математики» (40 ч.), «Методика математики» (С. И. Шохоръ-Троцкій, 21 ч.). По физикѣ состоялся рядъ бесѣдъ (проф. Б. П. Вейнбергъ, 10 ч.) объ основныхъ физическихъ понятіяхъ. Практическимъ занятіямъ по физикѣ (Я. И. Ковальскій) удалось отвести только очень мало времени (6 ч.). Во второмъ году практическимъ занятіямъ по физикѣ было удѣлено больше времени и, кромѣ того, читался еще курсъ: «Методика рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе» (Я. В. Успенскій).

Какъ видно изъ изложеннаго обзора, Академія культивируетъ, по преимуществу, собственно педагогическія науки и тѣсно связанные съ ней отдѣлы психологіи. Спеціальной подготовкѣ преподавателя по предметамъ, которые ему придется преподавать, несомнѣнно удѣлено недостаточно времени; такъ, во всякомъ случаѣ, обстоитъ дѣло по отношенію къ математической группѣ. То немногое, что дѣлается спеціально для подготовленія преподавателей математики. во всякомъ случаѣ не можетъ быть признано достаточнымъ. Главная причина кроется, новидимому, въ недостаткѣ средствъ для широкой, постановки преподаванія во всѣхъ группахъ; возможно, что очень широкая постановка обще-педагогическихъ предметовъ при этихъ условіяхъ идетъ до нѣкоторой степени въ ущербъ нуждамъ спеціальной подготовки учителей. Собственно, практическихъ занятій въ смыслѣ практической подготовки преподаванія въ Академіи по началу вовсе не было. Въ 1910 году при Академіи была учреждена средняя школа—коммерческое училище,—функціонировавшая въ 1910—11 г. еще только въ составѣ одного класса. Школы этого типа у насъ мало отличаются отъ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеній; въ особенности, въ младшихъ классахъ. Учреждая это училище, руководители дѣла имѣли въ виду, съ одной стороны, создать образцовую школу въ согласіи съ тѣми идеями, которыя проводятся въ Академіи, а съ другой стороны,—располагать учебнымъ заведеніемъ для практическихъ занятій слушателей Академіи. Въ какой мѣрѣ Академіи удастся осуществить эти задачи, вопросъ будущаго.

Во всякомъ случаѣ, при оцѣнкѣ дѣятельности Академіи нужно помнить, что она представляетъ собой дѣло исключительно частной иниціативы, энергіи небольшого круга лицъ,— что она работаетъ при ничтожныхъ средствахъ и мало благопріятныхъ условіяхъ, а въ такомъ случаѣ каждая неудача заслуживаетъ двойного снисхожденія, каждый успѣхъ—двойной похвалы.

2. Педагогическіе курсы при Управленіи Одесскимъ Учебнымъ Округомъ.

Годомъ позже, чѣмъ Педагогическая Академія, именно осенью 1909 года, открылись временные педагогическіе курсы въ С.-Петербургѣ, Москвѣ, Кіевѣ и Одессѣ. Всѣ эти учрежденія функціонируютъ каждое при управленіи соотвѣтствующаго Учебнаго Округа подъ ближайшимъ наблюденіемъ Попечителя или его помощника. Всѣ курсы краткосрочные—годичные, а въ Москвѣ они первоначально были даже полугодичные. Никакихъ правъ или преимуществъ эти курсы оффиціально не представляли; фактически, конечно, окончившіе ихъ, въ особенности, хорошо окончившіе, являются кандидатами, быть можетъ, даже первыми кандидатами на полученіе учительскаго мѣста. Какъ уже было сказано выше, всѣ эти курсы организованы по планамъ, разработаннымъ на мѣстахъ, а потому и различаются между собой довольно существенно. Несмотря на короткій срокъ существованія эти курсы пережили уже значительную эволюцію. Мы начинаемъ съ Одесскихъ курсовъ главнымъ образомъ потому, что они первоначально сложились именно въ физико-математическіе педагогическіе курсы.

Педагогическіе курсы при Управленіи Одесскимъ Учебнымъ Округомъ возникли по иниціативѣ Попечителя Округа А. И. Щербакова. Еще въ 1908 г. А. И. Щербаковъ обратился сначала къ отдѣльнымъ профессорамъ Новороссійскаго Университета, близко стоящимъ къ педагогическому дѣлу, а затѣмъ къ факультетамъ физико-математическому и историко-филологическому съ предложеніемъ представить свои соображенія объ организаціи курсовъ для приготовленія преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній и о программахъ преподаванія на нихъ. Факультеты были къ этому вопросу тѣмъ болѣе подготовлены, что они лишь незадолго передъ тѣмъ, по запросу министерства, представили свои соображенія о требованіяхъ, какія надлежитъ предъявлять при испытаніяхъ учительскихъ кандидатовъ. Соображенія факультетовъ были направлены въ Попечительскій Совѣтъ, при чемъ къ нимъ были также присоединены заключенія Педагогическаго Отдѣла состоящаго при Новороссійскомъ Университетѣ историко-филологическаго общества. Попечительскимъ Совѣтомъ былъ установленъ планъ организаціи курсовъ, который и былъ затѣмъ одобренъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія.

По этому плану педагогическіе курсы разсчитаны на одинъ годъ обученія; они раздѣляются на два отдѣленія: историко-филологическое и физико-математическое, на каждомъ изъ которыхъ должно обучаться по пяти человѣкъ. Этотъ ограниченный комплектъ, принятый во многихъ германскихъ семинаріяхъ, имѣетъ цѣлью достигнуть большей интенсивности занятій, въ особенности, практическихъ, мало осуществимыхъ при большомъ числѣ участниковъ; къ тому же это число приблизительно соотвѣтствуетъ количеству освобождающихся въ теченіе года вакансій. На курсы принимаются окончившіе университетъ, и они пользуются въ теченіе своего пребыванія на курсахъ стипендіей въ размѣрѣ 600 р. въ годъ. Въ весьма ограниченномъ количествѣ проектъ допускалъ также своекоштныхъ слушателей. Курсы были учреждены при 3-ьей Одесской гимназіи, директоръ которой является и главнымъ руководителемъ дѣла. На каждомъ отдѣленіи предусмотрѣны преподаватели и руководители; послѣдніе руководятъ практической подготовкой кандидатовъ. Преподаватели и руководители образуютъ Совѣтъ курсовъ, въ вѣдѣніи котораго находится вся постановка педагогическаго дѣла на курсахъ.

Однако, при осуществленіи дѣла въ первомъ году желающихъ поступить на филологическое отдѣленіе почти не окаазлось. Оканчивающихъ историко-филологическій факультетъ у насъ вообще весьма мало, а спросъ на преподавателей, какъ въ казенныхъ, такъ и въ частныхъ учебныхъ заведеніяхъ довольно великъ, и молодые люди предпочитаютъ непосредственно устраиваться на мѣстахъ. Такимъ образомъ, въ теченіе перваго года функціонировало только физико-математическое отдѣленіе. Въ началѣ второго года были кандидаты для поступленія на то и другое отдѣленіе; но округъ не располагалъ средствами для веденія обоихъ отдѣленій. Такъ какъ физико-математическое отдѣленіе уже было организовано, и самая предварительная подготовка была признана болѣе необходимой для физиковъ и математиковъ, то и въ истекшемъ 1910—11 году функціонировало только физико-математическое отдѣленіе.

Самое преподаваніе на курсахъ велось слѣдующимъ образомъ: для ознакомленія съ обще-педагогическими дисциплинами (психологія, исторія педагогики) курсисты прикомандировывались къ Новороссійскому Университету, гдѣ эти предметы читаются на историко-филологическомъ факультетѣ. Далѣе на курсахъ читались теоретическіе предметы, имѣщіе цѣлью дополнить спеціальное образованіе кандидатовъ въ тѣхъ отдѣлахъ, которые имъ при преподаваніи особенно важны. Эти предметы слѣдующіе: теоретическая ариѳметика (приватъ-доцентъ С. О. Шатуновскій, 2 год. часа), геометрическія упражненія и рѣшеніе конструктивныхъ задачъ (прив.-доц. С. О. Шатуновскій, 2 часа); исторія элементарной математики (прив.-доц. И. Ю. Тимченко, 3 часа). Предусмотрѣнный программой курсъ основаній геометріи не читался.

Что касается программъ по этимъ предметамъ, то курсъ теоретической ариѳметики имѣлъ цѣлью ознакомить слушателей съ различными системами теоретическаго обоснованія ариѳметики приблизительно въ томъ размѣрѣ, какъ это сдѣлано въ книгѣ Штольца и Гмейнера и въ новой книгѣ Фербера. При изложеніи методовъ рѣшенія конструктивныхъ задачъ преподаватель, рядомъ съ упражненіями въ рѣшеніи таковыхъ, старался выяснить тѣ общіе методы, къ которымъ сводятся употребляемые здѣсь пріемы (см. Адлеръ «Теорія геометрическихъ построеній»). Курсъ исторіи элементарной математики охватывалъ по существу также развитіе важнѣйшихъ идей высшей математики.

Руководители по математикѣ (прив.-доц. А. Д. Агура) и физикѣ (прив.-доц. И. Я. Точидловскій) имѣли въ своемъ распоряженіи по 6 недѣльныхъ часовъ, которые посвящались изложенію методики предмета, разбору важнѣйшихъ учебниковъ и руководствъ, подготовленію пробныхъ уроковъ, а по физикѣ — и практическимъ занятіямъ по постановкѣ опытовъ.

Каждый изъ кандидатовъ долженъ былъ дать 2 пробныхъ урока и выдержать экзамены по всѣмъ теоретическимъ предметамъ. Выполнившіе это успѣшно получали соотвѣтствующее свидѣтельство.

Въ 1909—10 учебномъ году на курсахъ было 4 слушателя, а въ 1910—11 г. ихъ было 5. Бюджетъ курсовъ, около 5000 р. въ годъ, составляется частью изъ спеціальнаго ассигнованія министерства, частью изъ отчисленій изъ спеціальныхъ средствъ всѣхъ гимназій округа.

Въ настоящее время постановка преподаванія на курсахъ значительно измѣнена, вслѣдствіе новаго закона, о которомъ будетъ рѣчь ниже.

3. Временные педагогическіе курсы при Управленіи Кіевскаго Учебнаго Округа.

Къ Одесскимъ курсамъ по характеру преподаванія ближе всего подходятъ временные курсы, устроенные при Управленіи Кіевскаго Учебнаго Округа. Это сходство заключается въ томъ же приблизительно соотвѣтствіи между теоретическими и практическими занятіями. Тѣмъ не менѣе, по постановкѣ своей Кіевскіе курсы во многомъ значительно отличаются отъ Одесскихъ (А, 54).

Кіевскіе курсы также начали свое дѣйствіе въ осеннемъ семестрѣ 1909 года, по началу только съ нѣкоторымъ опозданіемъ. На курсахъ функціонировали первоначально 3 отдѣленія: по русскому языку, по математикѣ и по физикѣ, причемъ послѣднія два отдѣленія тѣсно связаны между собой, тогда какъ отдѣленіе русскаго языка составляетъ какъ бы особое учрежденіе. Общая организація, установленная для курсовъ по математикѣ и физикѣ, сводится къ слѣдующему.

Общее завѣдываніе курсами предоставляется особой комиссіи изъ преподавателей и руководителей и небольшого числа компетентныхъ лицъ, назначаемыхъ попечителемъ Учебнаго

Округа. Эта комиссія разсматриваетъ вопросы, имѣющіе общее значеніе для курсовъ,—смѣты и отчеты по расходованію суммъ,—обсуждаетъ пробные уроки, даваемые лицами, оканчивающими курсъ. Распредѣленіе занятій устанавливается подкомиссіями для каждаго отдѣленія отдѣльно.

Въ отдѣльности для курсовъ по математикѣ были приняты слѣдующія основныя положенія.

I) Предметы и роды занятій на курсахъ.

1) Ознакомленіе съ программами и учебными планами по математикѣ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

2) Ознакомленіе съ учебниками и учебными пособіями по математикѣ.

3) Разсмотрѣніе основныхъ теоретическихъ положеній математики въ примѣненіи къ преподаванію въ средней школѣ.

4) Ознакомленіе съ главными вопросами методики ариѳметики, алгебры, и геометріи съ тригонометріею.

> *Примѣчаніе.* Осуществленію задачъ, указанныхъ въ этихъ четырехъ пунктахъ, должны служить какъ лекціи и сообщенія преподавателей-руководителей, такъ и рефераты, составленные участниками курсовъ подъ руководствомъ преподавателей.

5) Образцовые уроки преподавателей-руководителей и бесѣды съ участниками курсовъ по поводу этихъ курсовъ.

6) Составленіе конспектовъ пробныхъ уроковъ, пробные уроки участниковъ курсовъ и обсужденіе этихъ уроковъ.

7) Посѣщеніе участниками курсовъ уроковъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ съ разрѣшенія начальства послѣднихъ.

II) Занятія распредѣляются по тремъ специальностямъ: 1) ариѳметикѣ, 2) алгебрѣ, 3) геометріи съ тригонометріею.

III) Каждая специальность поручается отдѣльному руководителю и на занятія по ней назначается по два часа въ недѣлю.

Что касается занятій по физикѣ, то на этомъ отдѣленіи было отведено на теоретическіе предметы по 4 часа въ недѣлю въ первомъ семестрѣ и по 2—во второмъ; на занятія же по экспериментированію было положено по 2 часа въ первомъ семестрѣ и по 4—во второмъ.

Сравнивая постановку дѣла на Одесскихъ и Кіевскихъ курсахъ, мы сказали бы, что на Одесскихъ получили преобладаніе теоретическія, на Кіевскихъ—практическія занятія. На это преобладаніе практическихъ занятій на Кіевскихъ курсахъ указываетъ и завѣдующій курсами проф. Г. К. Сусловъ въ своемъ заключеніи.

Кіевскіе курсы обладали тѣмъ же бюджетомъ (около 5000 р.), что и Одесскіе; между тѣмъ, въ Кіевѣ было налажено 3 отдѣленія; ясно, что это могло быть осуществлено только за счетъ другихъ частей бюджета. Вслѣдствіе этого никакихъ субсидій слушателямъ на Кіевскихъ курсахъ не выдавалось; но при такихъ условіяхъ на курсы должны были быть приняты такіе слушатели, для которыхъ это имѣетъ болѣе или менѣе второстепенное значеніе. Въ то время, какъ въ Одессѣ допускались исключительно окончившіе университетъ и готовящіеся къ педагогической дѣятельности, въ Кіевѣ были допущены также студенты послѣдняго курса и лица обоего пола, состоявшія уже преподавателями среднихъ учебныхъ заведеній. Комплектъ слушателей на каждомъ отдѣленіи былъ опредѣленъ въ 10 человѣкъ. По математикѣ этотъ комплектъ былъ заполненъ исключительно студентами университета; въ качествѣ вольнослушателей (т. е. лицъ, допускавшихся къ практическимъ занятіямъ только по мѣрѣ возможности) было принято еще 13 лицъ, исключительно преподаватели и преподавательницы среднихъ учебныхъ заведеній.

На курсы по физикѣ вольнослушатели допущены не были, такъ какъ занятія безъ практическихъ работъ были здѣсь признаны безцѣльными. Изъ 10 слушателей—4 студента, всѣ остальные-преподаватели. Сообразно этому составу, занятія на курсахъ были вечернія. Но само собой разумѣется, что слушатели курсовъ находились въ весьма неблагопріятныхъ условіяхъ: всѣ они были обременены серьезной посторонней работой и могли удѣлять курсамъ только свой досугъ. Это сказалось и на результатахъ: по математикѣ четверо слушателей не получили свидѣтельства, по физикѣ полнаго свидѣтельства не получили пять человѣкъ. Курсы и въ этомъ видѣ безспорно приносятъ значительную пользу; но столь же несомнѣнно, что на высотѣ своей задачи они могутъ стоять только тогда, когда будутъ имѣть составъ слушателей, спеціально посвящающихъ свое время занятіямъ на курсахъ. Кіевскіе курсы также въ настоящее время значительно реорганизованы.

4. Временные педагогическіе курсы въ столицахъ.

Съ осенняго семестра 1909 года функціонируютъ также краткосрочные временные педагогическіе курсы и въ столицахъ. Однако, организованы они были значительно иначе, нежели въ Одессѣ и въ Кіевѣ и также пережили значительную эволюцію.

По существу, различіе заключается въ слѣдующемъ: въ Одессѣ и въ Кіевѣ практическія и теоретическія занятія установлены въ извѣстномъ равновѣсіи, съ небольшимъ лишь преобладаніемъ теоретической стороны въ Одессѣ и практической— въ Кіевѣ. Между тѣмъ, въ Петербургѣ курсы носили, можно сказать, исключительно практическій характеръ, а въ Москвѣ— почти исключительно теоретическій.

Какъ видно изъ отпечатанныхъ отчетовъ (А, 55), а также изъ личныхъ сообщеній, любезно сдѣланныхъ мнѣ руководителемъ математической группы при С.-Петербургскихъ курсахъ, директоромъ 8-й гимназіи В. А. Кондратьевымъ и завѣдующимъ Московскими курсами, помощникомъ попечителя В. Исаенковымъ, это различіе обуславливается не столько коренной разницей въ воззрѣніяхъ на постановку педагогическихъ курсовъ, сколько трудностью наладить это дѣло при наличныхъ условіяхъ. Каждое учрежденіе располагаетъ скромнымъ бюджетомъ—около 5000 рублей въ годъ. Этимъ, конечно, предрѣшенъ уже вопросъ о срокѣ обученія, такъ какъ объ организаціи двухлѣтнихъ курсовъ на эти средства не можетъ быть и рѣчи. Но и годичные курсы на эти средства невозможно хорошо и разносторонне обставить, въ особенности, при необходимости субсидировать учащихся. Организаторы дѣла были, такимъ образомъ, вездѣ поставлены въ необходимость значительно ограничить себя въ томъ или другомъ отношеніи. Вотъ эта задача и была на мѣстахъ разрѣшена различно. Въ Одессѣ было организовано только одно отдѣленіе; благодаря этому было возможно обставить удовлетворительно и теоретическія и практическія занятія, субсидируя при этомъ учащихся. Въ Кіевѣ число отдѣленій было больше, но зато не было стипендій. Мы уже видѣли, что это отразилось неблагопріятно на составѣ слушателей.

Въ Петербургѣ слушатели получали небольшія субсидіи по 300 р. въ годъ, но зато организовать теоретическія занятія оказалось уже невозможнымъ. Впрочемъ, по сообщенію г. Кондратьева, теоретическіе курсы не были учреждены еще и потому, что руководители дѣла считали мало осуществимымъ совмѣстить на краткосрочныхъ курсахъ серьезныя теоретическія и практическія занятія. Въ Москвѣ теоретическія занятія были обставлены съ большей разносторонностью, чѣмъ гдѣ бы то ни было, но зато практическихъ занятій, можно сказать, вовсе не было.

Объ организаціи С.-Петербургскихъ курсовъ можно судить по слѣдующему положенію, на основаніи котораго они первоначально существовали.

1) Временные одногодичные курсы при С.-Петербургскомъ Учебномъ Округѣ имѣютъ цѣлью подготовить, главнымъ образомъ, практически учителей среднихъ учебныхъ заведеній по научнымъ предметамъ.

2) На эти курсы принимаются лица, окончившія курсъ университета по историко-филологическому или физико-математическому факультету, выдержавшія государственные экзамены, а также представившія свидѣтельства о благонадежности.

3) Болѣе нуждающіеся изъ поступившихъ на курсы пользуются пособіемъ въ 300 рублей. Сверхъ такого денежнаго пособія практикантамъ предполагается поручать за опредѣленное вознагражденіе, по усмотрѣнію Дирекціи того учебнаго заведенія, при которомъ они будутъ состоять, замѣщеніе нѣкоторыхъ уроковъ отсутствующихъ преподавателей, а также занятія съ пенсіонерами, нуждающимися въ помощи, въ видахъ болѣе успѣшнаго усвоенія курса.

4) Практиканты одной спеціальности, группами по 2 или 3 лица, причисляются къ гимназіямъ или реальнымъ училищамъ.

5) Ближайшее руководство занятіями и уроками практикантовъ лежитъ на избранныхъ Управленіемъ Округа препода-

вателяхъ-руководителяхъ, а общее руководство организацией занятій той или другой группы и наблюденіе за ходомъ ихъ— на директорахъ.

Общее завѣдываніе устройствомъ и веденіемъ подготовки всѣхъ практикантовъ ввѣрено Комитету, состоящему изъ директоровъ-наблюдателей подъ предсѣдательствомъ представителя Учебнаго Округа; въ Комитетъ могутъ быть приглашены и преподаватели-руководители.

На практикантовъ возлагаются слѣдующія обязанности:

а) хорошо ознакомиться съ содержаніемъ курса среднихъ учебныхъ заведеній по предмету ихъ спеціальности, а также съ курсомъ методики этого предмета по указаннымъ преподавателемъ-руководителемъ сочиненіямъ и учебникамъ;

б) посѣщать уроки преподавателя-руководителя и, по указанію директора, другихъ преподавателей того же предмета и давать преподавателю-руководителю отчетъ въ прослушанномъ урокѣ;

в) присутствовать на пробныхъ урокахъ товарищей по группѣ;

г) участвовать въ разборѣ пробныхъ уроковъ, данныхъ кѣмъ-либо изъ той же группы;

д) представлять по указанію преподавателя-руководителя или директора рефераты по разнымъ вопросамъ, какъ общепедагогическаго характера, такъ по методикамъ и разбору учебниковъ;

е) близко знакомиться съ дѣтскою природою, принимая участіе въ надзорѣ и наблюденіи за учениками вообще или за указанной группой учениковъ во время перемѣны, въ ихъ играхъ, въ экскурсіяхъ и прогулкахъ;

ж) посѣщать засѣданія Педагогическаго Совѣта;

з) посѣщать лекціи и бесѣды по педагогикѣ и давать отчетъ въ усвоеніи прослушаннаго. На первый годъ предполагается назначить лишь 3 лекціи по общей педагогикѣ, въ связи съ педагогической психологіей;

и) практикантъ, не удовлетворяющій предъявленнымъ требованіямъ, увольняется изъ состава практикантовъ.

Въ концѣ учебнаго года въ общемъ засѣданіи Комитета, при участіи преподавателей-руководителей выясняется результатъ годичной работы и устанавливается характеристика практикантовъ.

Въ 1909—10 году математическую группу составляли 2, а въ 1910—11 г. 3 практиканта. Какъ видно изъ сообщенія г. Кондратьева, практическимъ занятіямъ было удѣлено много времени. Помимо ознакомленія съ основными практическими методами преподаванія, съ характеромъ гимназическаго курса даннаго предмета во всемъ его объемѣ и съ достоинствами и недостатками наиболѣе распространенныхъ учебниковъ,—каждый практикантъ далъ не менѣе 20 пробныхъ уроковъ и замѣщалъ около 30 разъ отсутствующихъ преподавателей (за замѣщенные уроки практиканты получали вознагражденіе, какъ и полноправные преподаватели, изъ спеціальныхъ средствъ гимназіи). Матеріаломъ для замѣщенныхъ уроковъ служили рѣшенія заранѣе выбранныхъ задачъ.

Обращаясь теперь къ Московскимъ курсамъ, мы должны прежде всего указать на ту ихъ особенность, что занятія первоначально происходили здѣсь только въ осеннемъ семестрѣ. Какъ было уже указано выше, занятія на курсахъ носили теоретическій характеръ. На курсахъ читались слѣдующіе предметы (А, 55): логика (3 нед. часа, пр.-доц. Г. Г. Шпетъ), психологія (2 нед. часа, проф. Б. Б. Соколовъ), экспериментальная психологія (1 часъ, проф. Г. И. Челпановъ), исторія педагогики (3 часа, проф. Н. Д. Виноградовъ), школьная гигіена (2 часа, д-ръ С. С. Орловъ). Кромѣ того,—методики: а) русскаго языка и словесности (2 часа въ недѣлю, дир. 7-ой гимназіи К. Ѳ. Гордѣевъ), б) латинскаго языка (2 часа, дир. гимназіи имени Гр. Шелапутина—Д. Н. Корольковъ), в) исторіи (3 часа, инсп. 5-ой гимназіи Н. Г. Тарасовъ), г) математики (2 часа, пр.-доц. А. А. Волковъ), д) физики (3 часа, преп. 2-ой гимназіи Н. В. Кашинъ), е) географіи (2 часа, пр.-доц. А. А. Ивановскій), ж) естествовѣдѣнія (2 часа, проф. Г. А. Кожевниковъ).

Каждый, записавшійся на курсы, обязанъ прослушать всѣ общіе курсы и сверхъ того курсъ методики, по крайней мѣрѣ, одного изъ перечисленныхъ выше предметовъ. По математикѣ въ теченіе курса 1909—10 года были заслушаны и обсуждены слѣдующіе рефераты: 1) классификація и методы рѣшенія ариѳметическихъ задачъ, 2) геометрія, какъ учебный предметъ, 3) доказательство нѣкоторыхъ теоремъ въ учебникѣ геометріи г. Киселева (наиболѣе распространенный въ Россіи), 4) первый концентръ ученія о способѣ предѣловъ, 5) цѣли, преслѣдуемыя курсомъ элементарной математики.

Слушателямъ субсидіи не выдавались. Вслѣдствіе этого на курсы записываются исключительно лица, занятыя въ учебное время дня своимъ дѣломъ, дающимъ имъ средства къ существованію, т. е. 1) уже состоящіе на государственной службѣ учителя, 2) лица, дающія уроки въ частныхъ учебныхъ заведеніяхъ. Отъ такого состава зависѣло то, что 1) занятія на курсахъ должны были происходить исключительно по вечерамъ, 2) слушателей нельзя было привлечь на практическія занятія въ школы. Послѣднее обстоятельство завѣдующій курсами г. Исаенковъ считалъ крупнымъ недостаткомъ. Нужно, однако, отмѣтить, что нѣкоторыя попытки установить практическія занятія дѣлались и здѣсь. Такъ, производились, насколько позволяло время, практическія занятія по логикѣ, по школьной гигіенѣ, физикѣ, а также читались рефераты по разнымъ отдѣламъ (темы рефератовъ по математикѣ указаны выше).

Число слушателей въ 1909 г. было 88, въ 1910 г.—73. Какъ было уже сказано, всѣ эти курсы значительно реорганизованы вслѣдствіе введенія въ дѣйствіе закона 3-го іюня 1911 г. Къ этому мы еще возвратимся ниже.

5. Женскій Педагогическій Институтъ.

Въ настоящемъ очеркѣ мы собственно не имѣли въ виду вопроса о приготовленіи учительницъ для женскихъ учебныхъ заведеній. Обусловливается это, главнымъ образомъ, тѣмъ, что здѣсь имѣются въ виду иныя цѣли. До послѣдняго времени нормально лица женскаго пола допускались у насъ къ преподаванію только въ первыхъ трехъ классахъ женскихъ гимназій. Такъ какъ въ этихъ классахъ преподается только ариѳметика, которая доводится до ученія о пропорціяхъ, то здѣсь врядъ ли собственно можетъ быть рѣчь о подготовленіи преподавателей для средне-учебныхъ заведеній. Большинство преподавательницъ женскихъ гимназій получаютъ образованіе въ женскихъ гимназіяхъ и заканчиваютъ его въ 8-мъ дополнительномъ классѣ этихъ гимназій, спеціально посвященномъ педагогическимъ задачамъ. Эти лица сами обладаютъ, такимъ образомъ, только среднимъ образованіемъ. По Международной Комиссіи докладъ о подготовкѣ преподавательницъ для средне-учебныяъ заведеній также порученъ другому лицу *).

Однако, Женскій Педагогическій Институтъ играетъ такую выдающуюся роль, что мы не можемъ на немъ не остановиться. Институтъ этотъ возникъ въ 1903 году (А, 57), именно, онъ преобразованъ изъ Педагогическихъ Женскихъ Курсовъ при С.-Петербургскихъ женскихъ гимназіяхъ. Институтъ принадлежитъ къ разряду высшихъ учебныхъ заведеній и имѣетъ цѣлью высшее педагогическое образованіе женщинъ и приготовленіе преподавательницъ для всѣхъ классовъ женскихъ учебныхъ заведеній, а равно классныхъ и домашнихъ наставницъ. Институтъ находится въ вѣдомствѣ учрежденій Императрицы Маріи. Общій надзоръ за постановкою дѣла принадлежитъ Почетному Попечителю изъ Членовъ Императорской Фамиліи. Ближайшее же управленіе Институтомъ принадлежитъ: по воспитательной части—начальницѣ при участіи Воспитательнаго Комитета, а по учебной части—директору при участіи Педагогическаго Комитета.

Для практическихъ упражненій учащихся въ преподаваніи при Институтѣ состоитъ женская гимназія съ начальною школою и дѣтскимъ садомъ.

Институтъ раздѣляется на два отдѣленія: словесно-историческое и физико-математическое, съ четырехлѣтнимъ курсомъ въ каждомъ. Первые два года посвящаются исключительно теоретическимъ занятіямъ, состоящимъ въ слушаніи лекцій и, главнымъ образомъ, въ самостоятельныхъ работахъ, руководимыхъ и провѣряемыхъ преподавателями и направляемыхъ къ расширенію образованія слушательницъ; съ третьяго учебнаго года начинаются практическія педагогическія занятія, получающія въ послѣдній годъ преобладающее значеніе.

---

*) По тѣмъ же причинамъ мы и при докладѣ на Съѣздѣ не касались вопроса о подготовленіи учительницъ. Получивъ въ этомъ отношеніи указаніе, мы пополнили докладъ настоящей рубрикой.

Въ Институтъ принимаются дѣвицы не моложе 16-ти лѣтъ по окончаніи курса въ женскихъ гимназіяхъ, институтахъ и равныхъ имъ по правамъ учебныхъ заведеніяхъ. По уставу безъ экзамена принимаются только дѣвицы, окончившія гимназію съ медалью или съ наградами, другія же подвергаются повѣрочному испытанію. Однако, на практикѣ въ Институтъ принимаются только лица, получившія медали или награды, такъ какъ желающихъ поступить очень много.

Въ 1906 году управленіе Институтомъ было нѣсколько преобразовано въ смыслѣ большаго приближенія организаціи Института къ высшему учебному заведенію: во главѣ отдѣленій поставлены деканы, была учреждена конференція изъ всего преподавательскаго персонала, которой предоставлено, кромѣ общаго руководства учебнымъ дѣломъ, избраніе преподавателей и нѣкоторыхъ должностныхъ лицъ. Въ настоящее время предполагается реорганизація Института.

Институтъ располагаетъ бюджетомъ въ 75.000 рублей, ассигнуемыхъ изъ средствъ государственнаго казначейства, и спеціальными средствами, которыя составляются изъ платы, вносимой слушательницами института. Такъ какъ слушательницъ въ институтѣ много, то плата эта даетъ значительныя суммы. Институтъ обставленъ поэтому очень широко.

Обращаемся къ постановкѣ преподаванія на физико-математическомъ отдѣленіи.

Физико-математическое отдѣленіе состоитъ изъ двухъ разрядовъ: 1) разряда математики и физики и 2) разряда естественныхъ наукъ, физики и географіи.

Дѣленіе на разряды начинается со II-го курса, дабы слушательницы могли въ теченіе перваго года пребыванія въ Институтѣ опредѣлить свою склонность къ математическимъ или естественнымъ наукамъ.

На физико-математическомъ отдѣленіи преподаются предметы общеобразовательные и спеціальные. Общеобразовательные предметы и нѣкоторые спеціальные (алгебра, геометрія и тригонометрія, методика ариѳметики, экспериментальная физика и неорганическая химія) обязательны для слушательницъ обоихъ разрядовъ; остальные спеціальные предметы обязательны соотвѣтственно избраннымъ слушательницами спеціальностямъ.

На разрядѣ математики и физики слушательницы могутъ избирать спеціальностью одну изъ названныхъ дисциплинъ или обѣ вмѣстѣ.

Слушательницы математическаго разряда, избравшія спеціальностью лишь математику, слушаютъ также весь курсъ теоретической физики, экзаменъ же сдаютъ только по тѣмъ отдѣламъ его, которые будутъ указаны имъ профессоромъ.

Курсъ ученія на физико-математическомъ отдѣленіи продолжается $4^1/_2$ года. Первые $3^1/_2$ года посвящаются исключительно теоретическимъ занятіямъ, состоящимъ въ слушаніи лекцій и въ исполненіи практическихъ и лабораторныхъ работъ. Во второй половинѣ четвертаго учебнаго года (т. е. въ 8-мъ полугодіи) слушательницы, имѣя незначительное число еженедѣльныхъ часовъ (10—15) теоретическихъ и практическихъ занятій въ Институтѣ, посѣщаютъ уроки въ гимназіи и затѣмъ представляютъ отчеты о прослушанныхъ урокахъ. Въ пятомъ учебномъ году (т. е. въ 9-мъ полугодіи) слушательницы не имѣютъ обязательныхъ занятій въ Институтѣ, а занимаются только въ гимназіи и даютъ пробные уроки подъ руководствомъ преподаватели методики соотвѣтственнаго предмета.

Практическія занятія обязательны для слушательницъ; не получившія зачета не допускаются къ испытаніямъ.

Съ 1907-го года преподаваніе на математическомъ разрядѣ ведется по слѣдующей схемѣ.

I. Общеобразовательные предметы: Богословіе (4 год. ч.), русскій языкъ (3 ч.), методика русскаго языка (1 ч.), психологія (2 ч.), логика (2 ч.), исторія философіи (4 ч.), педагогика (5 ч.). II. Математика: алгебра (6 ч.), геометрія и тригонометрія (5 ч.), методика ариѳметики (2 ч.), введеніе въ анализъ (5 ч.), аналитическая геометрія (5 ч.), дифференціальное и интегральное исчисленія (9 ч.), высшая алгебра или теорія чиселъ и аксіомы геометріи (4 ч.), механика (4 ч.), энциклопедія высшей математики (1 ч.), очеркъ исторіи математики (1 ч.).

6. Учительскій Институтъ имени П. Г. Шелапутина.

Дѣйствительный статскій совѣтникъ П. Г. Шелапутинъ въ Москвѣ еще въ 1902 г. соорудилъ зданіе подъ гимназію и передалъ его Министерству Народнаго Просвѣщенія съ тѣмъ, чтобы гимназія носила имя его покойнаго сына Григорія Шелапутина. Потерявъ еще одного сына, П. Г. Шелапутинъ выразилъ готовность построить рядомъ съ гимназіей зданія для реальнаго училища и педагогическаго института съ тѣмъ, чтобы реальному училищу было присвоено имя его сына, а институту его собственное имя. Смѣта по сооруженію превышала полмилліона рублей. П. Г. Шелапутинъ выразилъ готовность взять эти расходы на себя, если правительство возьметъ на себя содержаніе этихъ учрежденій, и 10-го марта 1910 г. въ Государственную Думу былъ внесенъ законопроектъ объ учрежденіи въ Москвѣ педагогическаго института имени П. Г. Шелапутина (А, 56). Законопроектъ подвергся нѣкоторымъ измѣненіямъ въ законодательныхъ учрежденіяхъ, и 3-го Іюня 1911 г. получилъ Высочайшее утвержденіе (А, 59). Институтъ открытъ въ текущемъ году и находится въ стадіи первой организаціи.

Положеніе о педагогическомъ институтѣ имени Павла Григорьевича Шелапутина въ г. Москвѣ въ общихъ чертахъ сводится къ слѣдующему.

Въ институтъ принимаются лица мужского пола, русскіе подданные, православнаго исповѣданія, окончившія курсъ въ одномъ изъ высшихъ учебныхъ заведеній. Къ институту могутъ быть прикомандировываемы для усовершенствованія преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній. 40 слушателей пользуются стипендіями по 900 руб. и за это должны по окончаніи института служить въ должности учителя или воспитателя одного изъ среднихъ учебныхъ заведеній $1^1/_2$ года за каждый годъ пользованія стипендіей. Слушатели, успѣшно прошедшіе двухгодичный курсъ института, получаютъ званіе учителя гимназіи, по поступленіи на службу время обученія въ институтѣ зачитывается имъ (черезъ 4 года) въ срокъ дѣйствительной службы.

Руководителемъ института является директоръ, который избирается изъ лицъ, обладающихъ ученою степенью магистра или доктора; лишь въ случаѣ необходимости на этотъ постъ можетъ быть назначено лицо, таковой степени не имѣющее, однако, только съ согласія Совѣта Министровъ. Руководство учебнымъ дѣломъ въ значительной мѣрѣ принадлежитъ также Педагогическому Совѣту Института.

Занятія въ институтѣ раздѣляются на общія и спеціальныя. Общія занятія состоятъ въ изученіи логики, общей педагогики и исторіи педагогическихъ ученій и школьной гигіены. Преподаваніе этихъ предметовъ поручается лицамъ, имѣющимъ право на преподаваніе въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Спеціальныя занятія разбиваются на 5 группъ, одна изъ которыхъ посвящена математикѣ, физикѣ и космографіи. Въ составъ спеціальныхъ занятій по каждой изъ избранныхъ группъ входятъ: 1) научно-семинарскія работы по избранной спеціальности въ примѣненіи къ практическимъ требованіямъ преподаванія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, 2) практическія упражненія въ преподаваніи и 3) изученіе методикъ, руководствъ и учебной литературы по избраннымъ предметамъ.

Для практическихъ занятій молодыхъ педагоговъ, въ распоряженіе института предоставлены гимназія и реальное училище имени сыновей П. Г. Шелапутина; директора этихъ двухъ среднихъ учебныхъ заведеній входятъ въ составъ Правленія института.

Въ вокаціонное время въ институтѣ могутъ быть устраиваемы занятія для лицъ, командированныхъ учебнымъ начальствомъ.

Программы и правила преподаванія въ подробностяхъ составляются Педагогическимъ Совѣтомъ и утверждаются высшимъ учебнымъ начальствомъ. Въ настоящее время, какъ мы уже сказали, институтъ находится въ стадіи организаціи; отъ того, сумѣютъ ли руководители дѣла вдохнуть въ него жизнь зависитъ, будетъ ли институтъ содѣйствовать подъему учебнаго дѣла въ странѣ или раздѣлитъ судьбу прежнихъ аналогичныхъ учрежденій. Во всякомъ случаѣ онъ снабженъ достаточными средствами (бюджетъ достигаетъ 80.000 рублей помимо спеціальныхъ средствъ) и богато оборудованъ щедрымъ учредителемъ.

7. Новыя узаконенія.

Одновременно съ проектомъ устава института имени П. Г. Шелапутина Министръ Народнаго Просвѣщенія внесъ въ Государственную Думу законопроектъ объ одногодичныхъ и краткосрочныхъ курсахъ для подготовки учителей и учительницъ среднихъ учебныхъ заведеній. Соотвѣтствующій законъ также удостоился Высочайшаго одобренія 3-го іюня 1911 г. Этимъ закономъ какъ бы санкціонируются курсы, состоящіе при нѣкоторыхъ учебныхъ округахъ, и учреждаются въ остальныхъ университетскихъ городахъ, но все еще временно въ видѣ опыта на 3 года (А, 60). Самый законъ очень кратокъ. Онъ устанавливаетъ ассигнованіе изъ средствъ Государственнаго Казначейства по 200.000 р. въ годъ, которые подлежатъ распредѣленію между округами для содержанія курсовъ. Относительно организаціи курсовъ законъ устанавливаетъ лишь самыя общія положенія, которыя по идеѣ совпадаютъ съ началами, положенными въ основу института П. Г. Шелапутина: тѣ же общія и спеціальныя занятія, тѣ же 5 группъ спеціальныхъ занятій. На курсы принимаются, однако, лица обоего пола, получившія высшее образованіе. Часть слушателей можетъ пользоваться стипендіями по 600 руб. въ годъ. Министру Народнаго Просвѣщенія предоставлено нормировать дѣятельность курсовъ особыми правилами.

Однако, въ первый же годъ по введеніи этого закона, выяснилось, что онъ не создаетъ для курсовъ благопріятныхъ условій. По разверсткѣ на 10 университетскихъ городовъ получается сумма приблизительно въ 20.000 р. на каждое учрежденіе, но тогда какъ прежде каждый округъ устраивалъ одно-два отдѣленія, теперь курсы должны имѣть 5 спеціальностей; обставить ихъ удовлетворительно на эти средства, при необходимости субсидировать хотя бы часть учащихся, представляется мало возможнымъ.

Въ самое послѣднее время Министерство издало и правила, детально нормирующія дѣятельность курсовъ (А, 61).

Въ существенномъ правила эти, поскольку они относятся къ учебной части, сводятся къ слѣдующему.

Общія занятія состоятъ въ изученіи педагогики въ связи съ главными положеніями психологіи и логики, и краткою исторіею педагогическихъ, а также основныхъ началъ школьной гигіены. Спеціальныя занятія могутъ быть устраиваемы примѣнительно къ постановкѣ преподаванія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ либо отдѣльнымъ предметомъ, либо по слѣдующимъ 5 группамъ: а) русскій языкъ и словесность; б) математика, физика и космографія; в) естествознаніе, химія и географія; г) древніе языки и е) новые языки. Занятія спеціальныя состоятъ въ изученіи методикъ, руководствъ и учебной литературы по избранному предмету или предметамъ. Изученіе это по возможности сопровождается научно-семинарскими работами по избранной спеціальности въ примѣненіи къ практическимъ требованіямъ преподаванія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и практическими упражненіями въ преподаваніи. Для этого курсисты и курсистки могутъ быть допускаемы къ посѣщенію уроковъ опытныхъ преподавателей, къ производству надзора за учениками во время перемѣнъ, принимаютъ участіе въ играхъ, экскурсіяхъ и прогулкахъ, даютъ пробные уроки.

Правила содержатъ также примѣрное распредѣленіе занятій на курсахъ и примѣрную смѣту. Таблица числа часовъ удѣляетъ общеобразовательнымъ предметамъ 8 часовъ, а спеціальнымъ 32 часа; изъ нихъ математикѣ съ математической географіей вмѣстѣ 2—3 часа въ недѣлю. Врядъ ли такой курсъ можетъ имѣть то коренное значеніе для будущаго преподавателя математики, ради котораго курсы только и могли бы быть призваны къ жизни. Въ виду того, что законъ и новыя правила только вводятся въ жизнь, мы не располагаемъ еще свѣдѣніями о томъ, какъ они отразились на всѣхъ дѣйствующихъ курсахъ. Въ Одессѣ, гдѣ курсы представляли собой вначалѣ какъ бы небольшой институтъ для приготовленія преподавателей математики, послѣднимъ пришлось сократиться и уступить мѣсто представителямъ другихъ наукъ; произошло расширеніе объема въ ущербъ содержанію; врядъ ли это желательно. Но важно то, что создана прочная ячейка въ дѣлѣ подготовленія у насъ преподавателей средней школы. Недостатки и недочеты не замедлятъ обнаружиться; черезъ 3 года вопросъ объ ассигнованіи на это дѣло новыхъ средствъ опять поступитъ въ законодательныя учрежденія страны, которыя на цѣлесообразныя затраты по народному образованію охотно ассигнуютъ необходимыя средства.

Мы уже указали, что на педагогическіе курсы принимаются лица обоего пола. Это находилось въ тѣсной связи съ внесеннымъ уже въ то время законопроектомъ о предоставленіи лицамъ женскаго пола право преподаванія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Этотъ законъ (А, 62) получилъ Высочайшее одобреніе 19 Декабря 1911 г. и сводится къ слѣдующему.

Лицамъ женскаго пола, прослушавшимъ курсъ въ одномъ изъ высшихъ учебныхъ заведеній, предоставляется держать экзаменъ въ соотвѣтствующихъ государственныхъ испытательныхъ комиссіяхъ наравнѣ съ молодыми людьми, прослушавшими курсъ въ университетахъ. Особыя правила нормируютъ порядокъ допущенія къ этимъ испытаніямъ; существенная часть этихъ правилъ сводится къ тому, что аспирантки должны предварительно выдержать дополнительный экзаменъ при средней школѣ и тѣмъ удостовѣрить, что и общее (среднее) ихъ образованіе стоитъ на той же высотѣ, какая требуется отъ мужчинъ, поступающихъ въ университеты. Лица, получившія такимъ образомъ дипломъ, получаютъ всѣ права и преимущества, предоставляемыя дипломами соотвѣтственныхъ мужскихъ учебныхъ заведеній, кромѣ правъ служебныхъ и сословныхъ.

Вмѣсѣ съ тѣмъ устанавливается званіе «учительницы среднихъ учебныхъ заведеній». Для пріобрѣтенія этого званія необходимо еще выдержать въ одной изъ испытательныхъ комиссій дополнительное испытаніе по педагогикѣ, исторіи педагогическихъ ученій, по методикѣ избраннаго имъ для преподаванія предмета, а также по логикѣ и психологіи, если науки эти не входили въ общій экзаменъ. Выдержавшія этотъ экзаменъ получаютъ право на преподаваніе предметовъ своей спеціальности во всѣхъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній.

8. Соображенія относительно постановки дѣла подготовленія учителей математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Итакъ, немногія функціонирующія въ настоящее время въ Россіи при учебныхъ округахъ учрежденія для подготовленія учителей среднихъ учебныхъ заведеній представляютъ собой временные курсы, обладающіе весьма скромнымъ и непостояннымъ бюджетомъ, не дающіе своимъ воспитанникамъ никакихъ правъ или преимуществъ, не выработавшіе еще ни въ какомъ отношеніи опредѣленныхъ болѣе или менѣе постоянныхъ нормъ дѣятельности. Въ настоящее время Министерство Народнаго Просвѣщенія дѣлаетъ шаги къ тому, чтобы эти учрежденія упрочить. Въ законодательныхъ учрежденіяхъ страны въ настоящее время разсматривается внесенный Министерствомъ законопроектъ объ учрежденіи Педагогическаго Института въ Москвѣ и краткосрочныхъ падагогическихъ курсовъ въ различныхъ центрахъ *). Къ этому законопроекту мы еще возвратимся ниже; здѣсь же замѣтимъ, что самую постановку учебнаго дѣла въ возникающихъ учрежденіяхъ онъ еще не предрѣшаетъ. Обсужденіе вопроса о дальнѣйшей постановкѣ у насъ дѣла подготовленія учителей для среднихъ учебныхъ заведеній является поэтому весьма своевременнымъ. Излагаемыя ниже соображенія очень близко подходятъ къ тѣмъ заключеніямъ, къ которымъ пришла математическая коллегія Новороссійскаго Университета при обсужденіи этого вопроса еще въ 1908 г. по предложенію Министерства.

Мы отнюдь не намѣрены возвращаться здѣсь къ нескончаемымъ спорамъ о томъ, нужна ли учителю вообще спеціальная подготовка и спеціальное образованіе, или для него достаточно овладѣть цикломъ факультетскихъ наукъ. Изъ того, что было изложено въ докладѣ, видно, что разномысліе по этому вопросу въ Россіи очень велико; но опубликованные уже доклады Германской Подкоммиссіи обнаруживаютъ, что разногласія по этимъ вопросамъ концентрируются у насъ приблизительно на тѣхъ же пунктахъ, которые вызываютъ довольно оживленные споры и въ Западной Европѣ. Но именно поэтому необходимо формулировать тѣ общія положенія, на которыхъ основаны излагаемыя ниже соображенія.

Никакая школа не можетъ, конечно, создать опытнаго педагога, но именно совершенно въ той же мѣрѣ, какъ и во-

---

*) Въ настоящее время оба закона уже получили утвержденіе. Институтъ имени П. Г. Шелапутина уже открытъ, на усиленіе дѣйствующихъ краткосрочныхъ курсовъ и открытіе новыхъ при всѣхъ учебныхъ округахъ отпущены средства.

обще опытнаго спеціалиста въ какой-либо отрасли. Вѣрно и то, что наука о воспитаніи не выработала готовыхъ схемъ, которыя въ каждый моментъ указывали бы педагогу, что ему дѣлать; и никогда, конечно, педагогика не выработаетъ, не будетъ даже стараться выработать такія схемы. Но вѣковой педагогическій опытъ и вѣковая работа человѣческой мысли надъ задачами воспитанія и обученія несомнѣнно установили немало положеній, которыя съ полнымъ правомъ могутъ быть названы общепризнанными устоями въ дѣлѣ воспитанія; и эти положенія отнюдь не настолько просты, чтобы ихъ можно было считать общимъ достояніемъ образованнаго человѣка, которое онъ очень скоро пріобрѣтаетъ жизненнымъ опытомъ, помимо всякаго обученія. Съ этими результатами педагогической науки, съ общимъ ходомъ логической и жизненной борьбы, которая къ этимъ устоямъ привела, съ тѣми разногласіями, которыя въ этой области царятъ еще по сей день въ отношеніи болѣе важныхъ вопросовъ,—со всѣмъ этимъ долженъ быть ознакомленъ всякій, вступающій на педагогическое поприще.

Въ самыя послѣднія десятилѣтія научно-экспериментальнымъ путемъ установленъ рядъ положеній относительно хода и условій воспріятія, усвоенія и сохраненія впечатлѣній, а слѣдовательно, и знаній. Горячіе сторонники этого направленія утверждаютъ, что результаты экспериментальной психологіи могутъ быть въ настоящее время положены въ основу обученія и воспитанія. Другіе считаютъ это преувеличеніемъ; но знакомые съ дѣломъ, повидимому, согласно признаютъ завоеванія экспериментальной психологіи весьма существеннымъ пріобрѣтеніемъ для педагогическаго дѣла. Независимо отъ того, въ какой мѣрѣ этотъ матеріалъ можетъ получить непосредственное примѣненіе въ школьно-педагогической практикѣ, учитель долженъ быть ознакомленъ съ этими идеями и результатами.

Наконецъ, учитель долженъ быть также ознакомленъ съ тѣмъ вліяніемъ, которое условія школьной работы и педагогическаго воздѣйствія оказываютъ на здоровье ребенка.

Сказаннымъ опредѣляется первый циклъ наукъ, которыя должны составить предметъ изученія при подготовкѣ къ учительскому дѣлу. Эту группу въ германской литературѣ вопроса принято называть философской; будетъ правильнѣй назвать ее общe-педагогической.

Матеріалъ, который можетъ составить предметъ обученія въ элементарной школѣ, всегда существенно отличается отъ научнаго содержанія соотвѣтствующей дисциплины. Кореннымъ образомъ отличается также изложеніе, доступное дѣтямъ и даже юношамъ, отъ научной разработки предмета. Эти элементарныя истины пріобрѣтаютъ въ настоящее время именно для математики совершенно исключительное значеніе. Въ настоящее время болѣе чѣмъ когда-либо культивируется научная разработка основъ метематики и—въ значительной мѣрѣ—того именно матеріала, который составляетъ предметъ обученія въ средней школѣ. Хотя эти изслѣдованія относятся, быть можетъ, къ числу труднѣйшихъ въ наукѣ, они все-таки связаны неразрывно съ предметомъ обученія въ школѣ. Опытному глазу совершенно ясно видно, какъ эти изслѣдованія кладутъ свой отпечатокъ на настроеніе современныхъ учебниковъ. Сглаживаніе же коллизій, возникающихъ на почвѣ существующаго различія между тѣмъ, что научно правильно и тѣмъ, что доступно учащемуся, составляетъ въ настоящее время едва ли не труднѣйшую задачу въ дѣлѣ обученія математикѣ. Не многимъ проще обстоитъ дѣло и въ физикѣ, основныя понятія и идеи которой переживаютъ глубокій переворотъ, естественно отражающійся на преподаваніи. Совершенно необходимо, чтобы учитель съ полною ясностью представлялъ себѣ строго-научную разработку того матеріала, который онъ намѣренъ излагать учащимся. Только это обезпечитъ ему возможность сознательно выбирать матеріалъ и сознательно же относиться къ тѣмъ коллизіямъ, о которыхъ была рѣчь выше. Этимъ обусловливается необходимость въ дѣлѣ подготовки учителей второй группы предметовъ преподаванія, которую можно назвать спеціально-теоретической; она должна содержать изложеніе научной разработки дисциплинъ, составляющихъ предметъ непосредственнаго обученія въ школѣ или весьма тѣсно къ послѣднимъ примыкающихъ.

Третью группу предметовъ составляютъ собственно методическія дисциплины: обозрѣніе способовъ и пріемовъ обученія отдѣльнымъ предметамъ. Наконецъ, четвертую группу занятій готовящихся педагоговъ составляютъ прямыя практическія занятія.

Попытаемся теперь намѣтить схему, по которой должны бытъ составлены эти группы. Конечно, въ этой схемѣ возможны и даже должны быть болѣе или менѣе значительныя измѣненія, какъ въ выборѣ отдѣльныхъ предметовъ, такъ и въ количествѣ удѣляемаго имъ времени; это должно зависѣть отъ мѣстныхъ условій, отъ силъ и взглядовъ руководителей дѣла. Но такая схема все же дастъ намъ возможность до нѣкоторой степени оріентироваться въ организаціи дѣла. Нѣсколько предварительныхъ замѣчаній мы, однако, считаемъ еще необходимымъ сдѣлать.

Прежде всего мы стоимъ на той точкѣ зрѣнія, что упрочить у насъ дѣло подготовленія учителей можно только путемъ созданія цѣльной системы, способной дѣйствительно значительно повысить уровень знаній и подготовки учительскаго персонала, поднять постановку преподаванія въ школѣ. Конечно, всякое даяніе—благо, и лучше мало, чѣмъ ничего. И два часа въ теченіе одного семестра, отведенные методикѣ всѣхъ отдѣловъ математики на Московскихъ Курсахъ *), составляютъ нѣкоторый плюсъ, способный въ извѣстной мѣрѣ оріентировать учителя, хотя бы относительно сущности наиболѣе серьезныхъ вопросовъ методики элементарной математики и литературы вопроса; но существенное вліяніе на кругозоръ и подготовку учителя такой курсъ врядъ ли въ состояніи оказать. Само собою разумѣется, что именно въ интересахъ осуществленія дѣла необходимо проявить, такъ сказать, возможную бережливость въ отношеніи удѣляемаго каждому предмету времени; перегруженіе учащихся работой и лекціями можетъ въ такой же мѣрѣ затормозить дѣло, какъ и чрезмѣрныя требованія къ государственному казначейству. Но, съ другой стороны, за извѣстными предѣлами, сокращеніе можетъ быть прямо гибельнымъ для дѣла. Курсы, прочитанные наспѣхъ, скользящіе по верхамъ, часто приводятъ только къ дилетантизму, иногда болѣе вредному, чѣмъ простая неосвѣдомленность. Это особенно существенно у насъ въ Россіи. Учи-

---

*) См. изложеніе постановки дѣла на дѣйствующихъ курсахъ въ докладѣ.

тель, очутившійся далеко отъ научнаго центра,—а такихъ огромное большинство,—лишь въ рѣдкихъ случаяхъ имѣетъ у насъ возможность использовать полученныя литературныя указанія; и можно съ увѣренностью сказать, что для значительнаго большинства свѣдѣнія, непосредственно пріобрѣтенныя на курсахъ, долгое время будутъ составлять всю его теоретическую подготовку.

Еще одно существенное замѣчаніе. Врядъ ли у насъ цѣлесообразно отдѣлять математическую группу отъ физической. Быть можетъ, по существу такая дифференціація и имѣла бы свои преимущества, но фактическія условія преподаванія въ провинціи таковы, что преподаватель математики сплошь и рядомъ долженъ преподавать и физику; спеціализироваться же исключительно въ преподаваніи физики преподаватель имѣетъ возможность только въ такихъ городахъ, въ которыхъ имѣется достаточное число среднихъ учебныхъ заведеній.

Въ виду всего вышеизложеннаго слѣдующая схема представляется соотвѣтствующей задачѣ.

I. Предметы обще-педагогическіе.

1.	Исторія философіи	2	нед.	часа	въ	теч.	года.
2.	Психологія	2	»	»	»	»	»
3.	Экспериментальная психологія	1	»	»	»	»	»
4.	Логика	2	»	»	»	»	»
5.	Исторія педагогики	2	»	»	»	»	»
6.	Школьная гигіена	1	»	»	»	»	»

Всего 10 нед. час. въ теч. года.

II. Предметы спеціально-теоретическіе.

1.	Теоретическая ариѳметика . .	3	нед.	часа	въ	теч.	года.
2.	Основанія геометріи	3	»	»	»	»	»
3.	Проективная геометрія . . .	2	»	»	»	»	»
4.	Черч. и рѣш. конструкт. задачъ	2	»	»	»	»	»
5.	Коммерческая ариѳметика . .	1	»	»	»	»	»
6.	Теоретическая физика . . .	2	»	»	»	»	»
7.	Исторія математики . . .	2	»	»	»	»	»

Всего 15 нед. час. въ теч. года.

III. Предметы методическіе.

1. Методика ариѳметики . . .	1	нед. часъ въ теч. года.
2. » геометріи и тригон.	2	» » » » »
3. » алгебры	2	» » » » »
4. » физики	2	» » » » »
5. » космографіи . . .	1	» » » » »

Всего 8 нед. час. въ теч. года.

IV. Практическія занятія.

1. Семинарскія занятія по всѣмъ перечисленнымъ выше отдѣламъ	4	нед. часа въ теч. года.
2. Производство опыт. по физикѣ	2	» » » » »
3. » » » химіи .	1	» » » » »
4. Пробные уроки и ихъ обсужд.	—	» » » »
5. Замѣщеніе преподавателей, посѣщеніе уроковъ опытныхъ педагоговъ	—	» » » » »

Всего 7 нед. час. въ теч. года.

Пишущій эти строки глубоко убѣжденъ, что указанное здѣсь число часовъ не преувеличено, если желательно поставить преподаваніе дѣйствительно серьезно. Какъ было уже сказано выше, очень возможно, что одни признаютъ здѣсь кое что излишнимъ, что другіе найдутъ пропуски. При бесѣдѣ объ этомъ предметѣ съ коллегами и освѣдомленными людьми, при сопоставленіи этой схемы съ программами германскихъ семинарій и съ проектомъ, выработаннымъ извѣстной Комиссіей Германскихъ Естествоиспытателей и Врачей, намъ во всякомъ случаѣ не приходилось встрѣчать рѣзкихъ расхожденій. И именно поэтому мы ограничимся лишь нѣсколькими замѣчаніями въ защиту этой программы.

Теоретической ариѳметикѣ и основаніямъ геометріи отведено по три годовыхъ часа потому, что мы считаемъ необходимымъ ознакомить начинающаго педагога не съ одной какой-либо схемой научнаго обоснованія ариѳметики и геометріи, а со всѣми важнѣйшими теченіями. Проективная геометрія у насъ не входитъ въ число обязательныхъ предметовъ на математическомъ факультетѣ и во многихъ нашихъ университетахъ вовсе не читается; между тѣмъ, ознакомить слушателей съ этимъ предметомъ существенно важно какъ въ цѣляхъ общаго математическаго развитія, такъ и въ виду того значенія, какое эта дисциплина имѣетъ въ ученіи объ основаніяхъ геометріи. Проективная геометрія включена во всѣ германскія и французскія программы испытанія учительскихъ кандидатовъ. Изъ «прикладныхъ» дисциплинъ, о которыхъ такъ много говорятъ въ настоящее время сторонники реформы въ Германіи и которыя включены уже въ программы испытаній въ Пруссіи и нѣкоторыхъ другихъ германскихъ государствахъ, мы включили лишь черченіе (считая на него 1 ч.) и коммерческую ариѳметику (1 ч.). Мы, дѣйствительно, считаемъ чрезвычайно полезнымъ для преподавателя ариѳметики ознакомиться съ техникой счета въ торговой практикѣ; по нашему убѣжденію этотъ небольшой курсъ можетъ содѣйствовать большему оживленію въ дѣлѣ преподаванія ариѳметики. Но, повторяемъ, детали не играютъ существенной роли. Важно то, что эта программа приводитъ къ 40 часамъ недѣльныхъ занятій, помимо посѣщенія уроковъ, приготовленія пробныхъ уроковъ и т. д. Если даже внести здѣсь значительныя сокращенія, то мы все же имѣемъ программу, явно неосуществимую въ теченіе одного года. Мы не говоримъ уже о томъ, что между нѣкоторыми изъ перечисленныхъ дисциплинъ должна быть преемственная связь, что разнообразіе предметовъ и идей требуетъ значительнаго времени не только для усвоенія, но и для размышленія,—что живая самостоятельная работа въ этой стадіи обученія чрезвычайно необходима и требуетъ нѣкотораго досуга.

Практика дѣйствующихъ у насъ учрежденій съ несомнѣнною ясностью подтверждаетъ эту точку зрѣнія. Въ Одессѣ, гдѣ программа нѣсколько приближается къ намѣченной выше схемѣ (хотя далеко ее не выполняетъ), слушатели несомнѣнно уже значительно обременены работой.

Естественный выводъ отсюда былъ бы, казалось, тотъ, что курсы должны быть двухгодичные. На этой точкѣ зрѣнія и стояло большинство членовъ совѣщаній, обсуждавшихъ этотъ вопросъ; одногодичные курсы возникли и возникаютъ у насъ, такъ сказать, по необходимости,—вслѣдствіе затруднительности наладить курсы съ большимъ срокомъ обученія. Но и это есть указаніе живой практики, котораго рѣшительно нельзя игнорировать,—по нашему убѣжденію, оно должно, напротивъ, играть, быть можетъ, рѣшающую роль. Населеніе Россіи въ преобладающемъ большинствѣ мало состоятельное; большинство молодыхъ людей учится при весьма неблагопріятныхъ матеріальныхъ условіяхъ. Каждый лишній годъ представляетъ тяжелое бремя, часто непреодолимое. Планъ подготовки къ учительскому званію для преподаванія въ средней школѣ математики и физики выработанъ упомянутой выше Комиссіей Германскаго Общества Естествоиспытателей съ такимъ разсчетомъ, чтобы лицо, имѣющее среднее образованіе, могло подготовиться къ учительскому экзамену въ 6 семестровъ. Мы, положимъ, считаемъ это мало осуществимымъ даже при нѣмецкой выдержкѣ. У насъ университетскій курсъ разсчитанъ на 4 года, но въ этотъ срокъ кончаетъ лишь небольшое меньшинство; большинство затрачиваетъ на это 5 лѣтъ, — нѣкоторые больше. Такимъ образомъ, чтобы подготовиться къ преподаванію у насъ (при двугодичныхъ курсахъ), потребовался бы срокъ въ 6—7 лѣтъ; врядъ ли нужно доказывать ненормальность такого положенія. Это ясно сознавали у насъ и раньше; и потому у насъ давно утвердился взглядъ, что педагогическіе курсы могутъ правильно функціонировать лишь ири субсидированіи учащихся. Практика это подтверждаетъ въ полной мѣрѣ. Мы видѣли, что для привлеченія слушателей на курсы были необходимы стипендіи еще въ 60-хъ годахъ; недостаточность этихъ стипендій по количеству и по размѣру были одной изъ причинъ ихъ упадка; мы видимъ теперь, что въ Москвѣ и въ Кіевѣ, гдѣ нѣтъ стипендій, не оказалось вовсе слушателей, дѣйствительно «готовящихъ» себя къ учительской дѣятельности; были только люди, отдававшіе курсамъ свой досугъ. «Незначительность субсидій» писалъ намъ г. Кондратьевъ изъ Петербурга, «является несомнѣнной причиной того, что практикантовъ такъ мало»; къ тому же они ходатайствовали объ увеличеніи размѣра стипендій. Даже въ Одессѣ, гдѣ стипендія доведена до 600 руб. въ годъ, отнюдь не было избытка желающихъ поступить на курсы. Въ Россіи теперь много казенныхъ и частныхъ учебныхъ заведеній; спросъ на учительскій трудъ значителенъ, и молодые люди пристраиваются непосредственно по окончаніи университета. Для того, чтобы дать имъ возможность посвятить два года подготовкѣ къ преподавательской дѣятельности, нужно ихъ солидно обезпечить. Слушатели курсовъ военнаго вѣдомства, состоящіе въ офицерскихъ чинахъ, получаютъ опредѣленное денежное содержаніе примѣнительно къ окладамъ, получаемымъ слушателями Военныхъ Академій и Интендантскаго курса. Кандидаты не офицерскаго званія получаютъ по 75 р. въ мѣсяцъ. Такую же стипендію въ 900 р. въ годъ устанавливаетъ положеніе о Педагогическомъ Институтѣ имени П. Г. Шелапутина въ Москвѣ, о которомъ еще будетъ рѣчь ниже. Но если по такому разсчету провести черезъ двугодичные курсы всѣхъ будущихъ учителей (а мы это считаемъ необходимымъ не только для учителей, но и для самихъ курсовъ [1]), то на однѣ стипендіи потребуются огромныя средства, ассигнованіе которыхъ врядъ ли возможно. Въ виду всего сказаннаго мы считаемъ желательнымъ открытіе одного, много двухъ Педагогическихъ Институтовъ съ двухлѣтнимъ курсомъ. Эти институты будутъ привлекать сравнительно болѣе состоятельныхъ молодыхъ людей, которымъ легче выдержать двухгодичный стажъ для основательной подготовки; изъ менѣе состоятельныхъ можно будетъ привлечь приличной субсидіей болѣе одаренныхъ, если надлежащимъ образомъ дѣлать выборъ.

Остальные кандидаты должны проходить краткосрочные курсы. Но, чтобы совмѣстить годичный курсъ съ болѣе или менѣе цѣлесообразной и солидной программой, есть только одно средство: часть программы должна быть отнесена къ университетскому курсу. Эта идея по существу, конечно, не нова; ее высказывали нѣкоторые факультеты еще при первомъ опросѣ въ 1864 году; неоднократно она повторялась, какъ при оффиціальномъ обсужденіи вопроса, такъ и въ неоффиціальной литературѣ. Мы видѣли, что университетская комиссія 1902 года признала даже возможнымъ ввѣрить университету дѣло приготовленія учителей во всемъ его объемѣ. Мы считаемъ это

---

[1] См. ниже, стр. 10—11.

большой ошибкой; болѣе того, мы считали бы ошибкой порученіе университетамъ какой бы то ни было роли въ этомъ дѣлѣ, которая не соотвѣтствуетъ прямымъ и общепризнаннымъ задачамъ университетскаго преподаванія. Иначе говоря, мы стоимъ за внесеніе въ курсъ университетскаго преподаванія тѣхъ дисциплинъ, которыя не связаны исключительно съ педагогической дѣятельностью, которыя могутъ и даже должны оказать значительное вліяніе и на общее математическое развитіе студента. Всѣ предметы первой (обще-педагогической) группы въ настоящее время въ университетѣ читаются; мы стоимъ за внесеніе въ число предметовъ, обязательныхъ къ чтенію на физико-математическомъ факультетѣ, почти всѣхъ предметовъ второй (спеціально теоретической) группы. Нужно удивляться оторванности университетскаго преподаванія математики отъ средней школы. Поступая на математическое отдѣленіе, нашъ студентъ какъ бы совершенно порываетъ съ тѣмъ матеріаломъ, которымъ онъ занимался въ средней школѣ, и переносится въ сферу совершенно иныхъ идей, съ которыми онъ вновь порываетъ, оставляя университетскую аудиторію. На нашъ взглядъ, трудно даже учесть тотъ вредъ, который приноситъ «эта система двойного забвенія», какъ ее называетъ Ф. Клейнъ. Между тѣмъ, элементарная математика содержитъ въ себѣ обильный источникъ идей и методовъ, болѣе серьезное изученіе которыхъ въ высшей школѣ содѣйствовало бы расширенію кругозора учащихся и воспріятію основъ высшей математики. Что же касается основаній ариѳметики и геометріи, то, на нашъ взглядъ, включеніе этихъ предметовъ въ курсъ университетскаго преподаванія составляетъ въ настоящее время насущную необходимость. Мы не говоримъ уже о томъ, что въ настоящее время въ Западной Европѣ не найдется университета, въ которомъ эти предметы періодически не читались бы. Совершенно независимо отъ этого, эти дисциплины содержатъ такое обиліе глубокихъ и притомъ строго-математическихъ идей, что игнорированіе ихъ въ циклѣ университетскихъ наукъ мы считаемъ какимъ-то недоразумѣніемъ.

Два обстоятельства нужно серьезно обсудить, отстаивая это предложеніе; во-первыхъ, не переобременитъ ли студентовъ эта новая серія предметовъ; во-вторыхъ, осуществимо ли это съ точки зрѣнія наличности преподавательскихъ силъ.

Что касается перваго вопроса, то этого опасаться, на нашъ взглядъ, нѣтъ серьезныхъ основаній. Часть того матеріала, который относятъ къ теоретической ариѳметикѣ, можетъ быть включенъ въ курсъ введенія въ анализъ, признанный уже министерствомъ обязательнымъ для учительскихъ кандидатовъ. Понадобился бы лишь небольшой курсъ на старшихъ семестрахъ, чтобы округлить и дополнить эти свѣдѣнія. Каждый студентъ математическаго отдѣленія, по дѣйствующимъ у насъ правиламъ, долженъ для полученія университетскаго диплома выдержать испытанія, сверхъ общеобязательныхъ предметовъ, по двумъ имъ избраннымъ дополнительнымъ предметамъ. Мы считали бы вполнѣ естественнымъ, чтобы лица, готовящія себя къ учительскому званію, избирали въ качествѣ таковыхъ предметы нашей спеціально теоретической группы. Тогда останется дополнить лишь весьма немногое. Предметы обще-педагогической группы студенты могли бы съ успѣхомъ прослушать, распредѣливъ ихъ по всему университетскому курсу. Нѣсколько болѣе затруднительно это будетъ для тѣхъ, которые рѣшатъ посвятить себя учительскому дѣлу сравнительно поздно; но и они предпочтутъ это затратѣ лишняго года. Весьма возможно, что нѣкоторую часть обще-педагогическихъ предметовъ было бы желательно отнести къ педагогическимъ курсамъ; но это уже детали, которыя здѣсь врядъ ли цѣлесообразно обсуждать.

Серьезнѣе мы считаемъ второе затрудненіе, заключающееся въ недостаткѣ преподавательскихъ силъ. Противники введенія перечисленныхъ выше предметовъ (спеціальной группы) въ курсъ нормальнаго университетскаго преподаванія указываютъ, что именно эти предметы должны читаться людьми, глубоко ихъ продумавшими и серьезно ими занимавшимися; что при преобладающемъ у насъ на математическомъ факультетѣ реалистическомъ направленіи, въ нашихъ университетахъ мало спеціалистовъ по этимъ предметамъ. Признавая всю серьезность этихъ соображеній, мы все же возразимъ на это. Во-первыхъ, если преподаваніе новыхъ предметовъ будетъ признано необходимымъ, то это, въ свою очередь, поведетъ къ тому, что такіе спеціалисты черезъ непродолжительное время появятся. Во-вторыхъ, отсутствіе подходящихъ людей всегда выдвигалось у насъ, какъ препятствіе къ осуществленію серьезныхъ реформъ, и, вопреки этимъ возраженіямъ, реформы часто проводились съ успѣхомъ, и люди для ихъ осуществленія находились.

Итакъ, по существу изложенныя выше соображенія сводятся къ слѣдующему.

Было бы цѣлесообразно открыть у насъ одинъ, много два—педагогическихъ института съ двухлѣтнимъ курсомъ. Въ дополненіе къ нимъ,—по возможности, во всѣхъ университетскихъ городахъ,—желательно учредить одногодичные педагогическіе курсы; но для того, чтобы эти курсы могли достигать своей дѣли, имъ на помощь долженъ притти университетъ. На университетъ не слѣдуетъ возлагать чуждыхъ ему задачъ; но тѣ дисциплины, которыя не только необходимы преподавателю, но при своемъ строго научномъ характерѣ полезны для общаго математическаго образованія и естественно укладываются въ рамки университетскаго преподаванія, должны быть включены въ число предметовъ, обязательныхъ къ чтенію. Этимъ путемъ курсы будутъ неразрывно связаны, какъ съ высшей, такъ и со средней школой.

Обсуждать здѣсь возможную регламентацію дѣла врядъ ли умѣстно, но одно обстоятельство мы считаемъ нужнымъ подчеркнуть. Если спеціальная подготовка преподавателей будетъ признана необходимой, то она должна быть сдѣлана и обязательной. Иначе можетъ получиться весьма нежелательное явленіе: въ виду значительнаго спроса на учительскій трудъ, наиболѣе способные будутъ пристраиваться непосредственно по окончаніи университетскаго курса; убѣжища же на курсахъ и дальнѣйшаго покровительства, связаннаго съ окончаніемъ курсовъ, будутъ искать болѣе слабые молодые люди; курсы будутъ привлекать, такимъ образомъ, не лучшія, а худшія силы. Это не произвольное предположеніе: несмотря на то, что дѣйэта новая серія предметовъ; во-вторыхъ, осуществимо ли это съ точки зрѣнія наличности преподавательскихъ силъ.

Что касается перваго вопроса, то этого опасаться, на нашъ взглядъ, нѣтъ серьезныхъ основаній. Часть того матеріала, который относятъ къ теоретической ариѳметикѣ, можетъ быть включенъ въ курсъ введенія въ анализъ, признанный уже министерствомъ обязательнымъ для учительскихъ кандидатовъ. Понадобился бы лишь небольшой курсъ на старшихъ семестрахъ, чтобы округлить и дополнить эти свѣдѣнія. Каждый студентъ математическаго отдѣленія, по дѣйствующимъ у насъ правиламъ, долженъ для полученія университетскаго диплома выдержать испытанія, сверхъ общеобязательныхъ предметовъ, по двумъ имъ избраннымъ дополнительнымъ предметамъ. Мы считали бы вполнѣ естественнымъ, чтобы лица, готовящія себя къ учительскому званію, избирали въ качествѣ таковыхъ предметы нашей спеціально теоретической группы. Тогда останется дополнить лишь весьма немногое. Предметы обще-педагогической группы студенты могли бы съ успѣхомъ прослушать, распредѣливъ ихъ по всему университетскому курсу. Нѣсколько болѣе затруднительно это будетъ для тѣхъ, которые рѣшатъ посвятить себя учительскому дѣлу сравнительно поздно; но и они предпочтутъ это затратѣ лишняго года. Весьма возможно, что нѣкоторую частъ обще-педагогическихъ предметовъ было бы желательно отнести къ педагогическимъ курсамъ; но это уже детали, которыя здѣсь врядъ ли цѣлесообразно обсуждать.

Серьезнѣе мы считаемъ второе затрудненіе, заключающееся въ недостаткѣ преподавательскихъ силъ. Противники введенія перечисленныхъ выше предметовъ (спеціальной группы) въ курсъ нормальнаго университетскаго преподаванія указываютъ, что именно эти предметы должны читаться людьми, глубоко ихъ продумавшими и серьезно ими занимавшимися; что при преобладающемъ у насъ на математическомъ факультетѣ реалистическомъ направленіи, въ нашихъ университетахъ мало спеціалистовъ по этимъ предметамъ. Признавая всю серьезность этихъ соображеній, мы все же возразимъ на это. Во-первыхъ, если преподаваніе новыхъ предметовъ будетъ признано необходимымъ, то это, въ свою очередь, поведетъ къ тому, что такіе спеціалисты черезъ непродолжительное время появятся. Во-вторыхъ, отсутствіе подходящихъ людей всегда выдвигалось у насъ, какъ препятствіе къ осуществленію серьезныхъ реформъ, и, вопреки этимъ возраженіямъ, реформы часто проводились съ успѣхомъ, и люди для ихъ осуществленія находились.

Итакъ, по существу изложенныя выше соображенія сводятся къ слѣдующему.

Было бы цѣлесообразно открыть у насъ одинъ, много два—педагогическихъ института съ двухлѣтнимъ курсомъ. Въ дополненіе къ нимъ,—по возможности, во всѣхъ университетскихъ городахъ,—желательно учредить одногодичные педагогическіе курсы; но для того, чтобы эти курсы могли достигать своей цѣли, имъ на помощь долженъ притти университетъ. На университетъ не слѣдуетъ возлагать чуждыхъ ему задачъ; но тѣ дисциплины, которыя не только необходимы преподавателю, но при своемъ строго научномъ характерѣ полезны для общаго математическаго образованія и естественно укладываются въ рамки университетскаго преподаванія, должны быть включены въ число предметовъ, обязательныхъ къ чтенію. Этимъ путемъ курсы будутъ неразрывно связаны, какъ съ высшей, такъ и со средней школой.

Обсуждать здѣсь возможную регламентацію дѣла врядъ ли умѣстно, но одно обстоятельство мы считаемъ нужнымъ подчеркнуть. Если специальная подготовка преподавателей будетъ признана необходимой, то она должна быть сдѣлана и обязательной. Иначе можетъ получиться весьма нежелательное явленіе: въ виду значительнаго спроса на учительскій трудъ, наиболѣе способные будутъ пристраиваться непосредственно по окончаніи университетскаго курса; убѣжища же на курсахъ и дальнѣйшаго покровительства, связаннаго съ окончаніемъ курсовъ, будутъ искать болѣе слабые молодые люди; курсы будутъ привлекать, такимъ образомъ, не лучшія, а худшія силы. Это не произвольное предположеніе: несмотря на то, что дѣйствующіе курсы функціонируютъ недавно, приходится слышать очень серьезныя жалобы въ этомъ отношеніи.

Прибавимъ еще въ заключеніе, что было бы въ высшей степени важно принять нѣкоторыя мѣры для освѣженія знаній работающихъ уже педагоговъ. Вслѣдствіе громадности территоріи, въ Россіи больше чѣмъ гдѣ бы то ни было провинціальные города оторваны отъ университетскихъ центровъ. Заброшенный на многіе годы въ небольшой городокъ, преподаватель совершенно теряетъ связь съ наукой. Въ высшей степени желательно, чтобы на курсы отъ времени до времени откомандировывались преподаватели провинціальныхъ гимназій. Но такъ какъ, по чисто техническимъ условіямъ, это будетъ довольно трудно практиковать, то было бы весьма полезно устраивать каникулярные курсы. Конечно, такіе курсы не въ состояніи дать того, что преподаватель можетъ получить въ правильно функціонирующемъ учрежденіи; но при надлежащей постановкѣ они несомнѣнно будутъ полезны: они будутъ оріентировать преподавателя въ содержаніи наиболѣе обсуждаемыхъ въ настоящій моментъ вопросовъ въ литературѣ».

VI. Литература вопроса.

А. Оффиціальная литература.

Сокращенія.

П. С. З.—Полное Собраніе Законовъ Россійской Имперіи.

С. П. М. Н. П.—Сборникъ Постановленій Министерства Народнаго Просвѣщенія.

Ж. М. Н. П.—Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія.

1. Объ учрежденіи Академіи и о назначеніи для оной доходовъ. Съ приложеніемъ проекта объ учрежденіи Академіи П. С. З., т. XII. № 4443. Особ. пар. 5 и 7. 1724.
2. Регламентъ Императорской Академіи Наукъ и Художествъ въ Санктпетербургѣ. П. С. З., т. XII, № 9425. Особ. пар. 37.
3. Объ учрежденіи Коммисіи для заведенія въ Россіи народныхъ училищъ. П. С. З., т. XXI, № 15507. 1782.
4. О заведеніи въ Санктпетербургѣ главнаго народнаго училища. П. С. З., томъ XXI, № 15755. 1783.
5. Высочайше утвержденный Уставъ народнымъ училищамъ въ Россійской Имперіи. П. С. З., т. XXII, № 16421. 1786.

6. Объ открытіи Народныхъ Училищъ. П. С. З., т. XXII, № 16425. 1786.
7. О избраніи и отправленіи въ Санктпетербургъ изъ разныхъ семинарій учениковъ для преподаванія ученія въ Народныхъ Училищахъ. П. С. З. т. XXII, № 16342. 1786.
8. Объ обязанностяхъ Коммисіи Училищъ. С. П. М. Н. П., т. I, № 2. 1802.
9. Объ устройствѣ училищъ. С. П. М. Н. П., т. I, № 7. 1803.
10. О принятіи мѣръ для содѣйствія благоуспѣшному теченію народнаго просвѣщенія. С. П. М. Н. П., т. I, № 9. 1803.
11. О возобновленіи Учительской Гимназіи въ С.-Петербургѣ. С. П. М. Н. П. I, № 19. 1803.
12. О жалованьѣ директору, профессорамъ и учителямъ Учительской Гимназіи въ С.-Петербургѣ. С. П. М. Н. П. № 36. 1804.
13. Уставъ учебныхъ заведеній, подвѣдомыхъ университету. С. П. М. Н. П. I, № 64. 1804.
14. Уставы Императорскихъ Московскаго, Харьковскаго и Казанскаго Университетовъ, гл. XII. С. П. М. Н. П. I, № 63. 1804.
15. Объ учрежденіи Педагогическаго Института въ С.-Петербургѣ С. П. М. Н. П. I, № 44. 1804.
16. Образованіе Главнаго Педагогическаго Института. С. П. М. Н. П, I, № 334. 1816.
17. Объ учрежденіи Университета въ С.-Петербургѣ. С. П. М. Н. П. I, № 427. 1819.
18. Объ учрежденіи въ С.-Петербургѣ Главнаго Педагогическаго Института. С. П. М. Н. П. II, 1, № 78.
19. Уставъ Главнаго Педагогическаго Института. С. П. М. Н. П. II, 1 № 79. 1828.
20. Объ учрежденіи при Главномъ Педагогическомъ Институтѣ каѳедры педагогіи. С. П. М. Н. П. II, 2, № 6. 1840.
21. Объ увеличеніи числа воспитанниковъ Главнаго Педагогическаго Института. С. П. М. Н. П. II, 1, № 189. 1832.
22. Объ учрежденіи второго разряда Главнаго Педагогическаго Института. С. П. М. Н. П. II, 1, № 659, 1838.
23. Объ упраздненіи второго разряда и малолѣтняго отдѣленія при Главномъ Педагогическомъ Институтѣ. С. П. М. Н. П. II, 2, № 414. 1847.
24. О нѣкоторыхъ мѣрахъ относительно Главнаго Педагогическаго Института. С. П. М. Н. П. II, 2, № 725. 1853.
25. Объ упраздненіи Главнаго Педагогическаго Института и объ учрежденіи особыхъ педагогическихъ курсовъ при университетахъ. С. П. М. Н. П. III, № 171. 1858.
26. Положеніе о педагогическихъ курсахъ. С. П. М. Н. П. III. № 257. 1860.
27. Уставъ Гимназій и Прогимназій вѣдомства Министерства Народнаго Просвѣщенія. С. П. М. Н. П. III, № 631. 1864.
28. Объ учрежденіи Императорскаго Историко-филологическаго института. С. П. М. Н. П. IV, № 220. 1867.
29. Объ уставѣ и штатѣ Императорскаго Историко-филологическаго института. С. П. М. Н. П. IV, № 221. 1867.
30. По вопросу о спеціальныхъ испытаніяхъ по Министерству Народнаго Просвѣщенія. С. П. М. Н. П. IV, № 298, 1870.
31. Постановленіе Совѣта Министра Народнаго Просвѣщенія о спеціальныхъ испытаніяхъ на званіе учителя и воспитателя гимназіи и прогимназіи. Сборникъ постановленій и распоряженій по гимназіямъ и прогимназіямъ вѣдомства М. Н. П. Спб. 1874.

33. Уставъ Императорскихъ Россійскихъ Университетовъ. Св. Зак., т. XI.
34. Объ испытаніяхъ на учительскія званія. Циркулярное предложеніе Министра Народнаго Просвѣщенія отъ 24 ноября 1889 г. № 19612.
35. Объ испытаніяхъ на званіе учителя гимназіи и прогимназіи. Циркулярное предложеніе Министра Народнаго Просвѣщенія отъ 29 Янв. 1909 г. № 2040. Ж. М. Н. П. Новая серія, ч. XX. 1909 г.
36. По дѣлу о приготовленіи преподавателей гимназій и объ ихъ испытаніи. Журналъ Ученаго Комитета. Засѣданія 24-го Іюля 1891 года, 15, 21, 28 Сентября, 6, 12, 19, 26 Октября, 2 и 16 Ноября 1892 г. № 1155.
37. Журналъ Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія № 1262. Засѣданія 15 Ноября 1893, 17 Января и 21 Марта 1894 г. и 25 Сентября 1895 г.
38. Выписка изъ Журнала Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія 5-го Декабря 1894 г. № 1231.
39. Выписка изъ Журнала Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія 16 и 23 Января 1895 г. № 1231.
40. Представленіе попечителя Одесскаго Учебнаго Округа г. Министру Народнаго Просвѣщенія 17 Января 1892 г. № 664. Циркуляръ по Одесскому Учебн. Округу 1893 г. № 5.
41. Выписка изъ журнала Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія по дѣлу объ учрежденіи педагогическихъ курсовъ математики и физики въ Одессѣ. Тамъ-же.
42. Объ учрежденіи педагогическихъ курсовъ для приготовленія учителей математики и физики для среднихъ учебныхъ заведеній Одесскаго Учебнаго Округа. Тамъ-же.
43. Положеніе о временныхъ педагогическихъ курсахъ съ цѣлью приготовленія учителей математики и физики для среднихъ учебныхъ заведеній Одесскаго Учебнаго Округа, утвержденное г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія 21 Марта 1893 г.
44. Учебный планъ педагогическихъ курсовъ для приготовленія учителей математики и физики для среднихъ учебныхъ заведеній Одесскаго Учебнаго Округа. Тамъ-же.
45. Циркулярное предложеніе Министра Народнаго Просвѣщенія Попечителямъ Учебныхъ Округовъ отъ 16-го Ноября 1898. Ж. М. Н. П. 1898. XII.
46. Положеніе о Педагогическихъ Институтахъ (проектъ) и Уставъ Педагогическаго Института (проектъ). Напечатано по распоряженію Министерства Народнаго Просвѣщенія.
47. Къ вопросу о педагогической подготовкѣ учителей для среднихъ учебныхъ заведеній и объ улучшеніи матеріальнаго ихъ положенія. Ж. М. Н. П., ч. 325, 326. 1899.
48. Циркулярное предложеніе Министра Народнаго Просвѣщенія попечителямъ учебныхъ округовъ отъ 8-го Іюля 1899 г. Труды Высочайше учрежденной Комиссіи по вопросу объ улучшеніяхъ въ средней общеобразовательной школѣ. Выпускъ I.
49. Труды Высочайше учрежденной Комиссіи по вопросу объ улучшеніяхъ въ средней общеобразовательной школѣ. На правахъ рукописи. Спб. 1900.
50. Труды Высочайше учрежденной Комиссіи по преобразованію Высшихъ Учебныхъ Заведеній. Спб. 1903. На правахъ рукописи.
51. Положеніе о приготовленіи учителей для военныхъ гимназій. Педагогич. Сборникъ. 1865. Мартъ.
52. Педагогическіе курсы Вѣдомства Военно-Учебныхъ Заведеній. СПБургъ. Выпускъ I—1902. Выпускъ II—1904. Выпускъ III—1911.
53. Педагогическая Академія 1908—1909 и 1909—1910 уч. года.

54. Отчетъ о временныхъ педагогическихъ курсахъ при управленіи Ківскаго Учебнаго Округа для подготовленія учителей среднихъ учебныхъ заведеній. 1909—1910 г. Кіевъ 1910.

55. Временные курсы при Управленіи Московскаго Учебнаго Округа для подготовки преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній. Москва. 1) 2-ое полугодіе 1906 г. 2) 2-ое полугодіе 1910 г.

56. О педагогическомъ институтѣ имени П. Г. Шелапутина въ г. Москвѣ и объ одногодичныхъ и краткосрочныхъ курсахъ для подготовки учителей и учительницъ среднихъ учебныхъ заведеній. Представленіе Министра Народнаго Просвѣщенія въ Государственную Думу отъ 10 Марта 1910 г. № 7284.

57. Положеніе о Женскомъ Педагогическомъ Институтѣ вѣдомства учрежденій Императрицы Маріи. Собр. Узакон. и Расп. Правительства. 1903.

58. Обозрѣніе преподаванія на физико-математическомъ отдѣленіи Женскаго Педагогическаго Института.

59. Законъ объ учрежденіи въ Москвѣ Педагогическаго института имени П. Г. Шелапутина Собр. узаконеній и распоряженій Правительства. 1911.

60. Законъ о временномъ учрежденіи одногодичныхъ и краткогодичныхъ курсовъ для подготовленія учителей и учительницъ среднихъ учебныхъ заведеній. Тамъ же.

61. Правила объ одногодичныхъ курсахъ для подготовленія учителей и учительнихъ среднихъ учебныхъ заведеній. Циркулярное предложеніе Министра Народнаго Просвѣщенія попечителямъ учебныхъ округовъ отъ 1-го мая 1912 г. за № 18387.

62. Объ испытаніи лицъ женскаго пола въ знаніи курса высшихъ учебныхъ заведеній и о порядкѣ пріобрѣтенія ими ученыхъ степеней и званія учительницы среднихъ учебныхъ заведеній. Собраніе узаконеній и распоряженій Правительства. 1911.

В. Неоффиціальная литература.

1. В. В. И. По вопросу о приготовленіи учителей для гимназій и прогимназій. Ж. М. Н. П., ч. 134. 1867.

2. А. Вороновъ. Ѳедоръ Ивановичъ Янковичъ де-Миріево или народныя училища въ Россіи при Императрицѣ Екатеринѣ II. Спб. 1858.

3. А. Вороновъ. Историческо-Статистическое Обозрѣніе Учебныхъ Заведеній С.-Петербургскаго Учебнаго Округа съ 1715 по 1828 годъ включительно. СПБ. 1849.

4. Зябловскій. «Историческая повѣсть объ Учительской Семинаріи и Педагогическомъ Институтѣ». СПБ. 1838.

5. А. Вороновъ. Историко-Статистическое обозрѣніе учебныхъ заведеній С.-Петербургскаго Учебнаго Округа съ 1829 по 1853 годъ. Спб. 1854.

6. А. Смирновъ. Краткое историческое обозрѣніе 25-лѣтія Главнаго Педагогическаго Института. Ж. М. Н. П., ч. 131. 1853.

7. Матеріалы по вопросу о приготовленіи учителей для гимназій и прогимназій. Ж. М. Н. П., ч. 127. 1865.

8. Педагогическіе курсы въ Одессѣ. «Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики», №№ 161, 191, 195.

9. Ѳ. Шведовъ. Введеніе въ методику физики. «Вѣстникъ Опытной Физики», №№ 172, 175, 181, 186, 189, 191.

10. М. И. Демковъ. Педагогическая и философская подготовка учителей среднихъ учебныхъ заведеній. Русская Школа. 1891.

11. А. А. Нейфельдъ. Приготовленіе учителей средне-учебныхъ заведеній въ Финляндіи. Русская школа. 1891, №№ 7—8.
12. В. И. Модестовъ. Вопросъ о приготовленіи преподавателей для гимназій. Русская школа. 1893, кн. IV.
13. Я. Г. Къ вопросу о приготовленіи преподавателей гимназій. Русская школа, 1893, т. II, кн. IX—X.
14. В. Сиповскій. Учительскій вопросъ. Образованіе. 1893, кн. 10.
15. А. Д. Вейсманъ. (проф.). По вопросу о приготовленіи учителей гимназій. Русская Школа. 1894, кн. VII—VIII.
16. Д. Д. Семеновъ. Педагогическая подготовка учителей заграницей и у насъ. Русская Школа, 1896, кн. I.
17. С. Зенченко. О подготовкѣ преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній къ педагогической дѣятельности. Вѣстникъ Воспитанія, 1892. Апрѣль.
18. В. Випперъ. Спеціальная подготовка преподавателя или поднятіе его положенія? Вѣстникъ Воспитанія. 1898. Октябрь.
19. А. Острогорскій. И спеціальная подготовка преподавателя средней школы и улучшеніе его положенія. Педагогическій Сборникъ. 1899. Январь.
20. С. Зенченко. И поднятіе положенія преподавателя средней школы и спеціальная его подготовка. Вѣстникъ Воспитанія. 1899. Мартъ.
21. Н. С. По вопросу о спеціальной подготовкѣ преподавателей въ среднія школы. Педагогическій Сборникъ. 1899. Августъ.
22. М. А. Миропіевъ. О педагогической подготовкѣ учителей для среднихъ учебныхъ заведеній. Русская Школа. 1899. кн. 1.
23. А. И. Кирпичниковъ (проф.). Къ вопросу о подготовкѣ учителей. Русская школа, 1899, кн. II.
24. А. И. Анастасіевъ. Къ вопросу объ организаціи педагогической подготовки проподавателей для среднихъ учебныхъ заведеній. Русская Школа. 1899, кн. III.
25. Я. Г. Гуревичъ. Къ вопросу о педагогической подготовкѣ преподавателей для среднихъ учебныхъ заведеній и объ улучшеніи ихъ матеріальнаго положенія. Русская Школа, 1899, кн. IV.
26. Д-ръ А. С. Виреніусъ. Къ вопросу о подготовленіи учителей (педагоговъ) для среднихъ учебныхъ заведеній. Русская Школа. 1899. кн. X.
27. Д. Мижуевъ. О подготовкѣ учителей для средней школы въ Сѣв. Америкѣ. Образованіе. 1899, кн. 11 и 12.
28. А. А. Готлибъ. О матеріальномъ и служебномъ положеніи учебно-административнаго персонала среднихъ учебныхъ заведеній въ нѣкоторыхъ государствахъ Европы. Русская Школа, 1901, кн. X—XI.
29. А. Г. Готлибъ. Къ вопросу о подготовкѣ преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній. Русская Школа, 1901, кн. VII—VIII—IX.
30. К. Сентъ-Илеръ. Педагогическіе курсы при 2-ой Петербургской Военной Гимназіи. Педагогическій Сборникъ. 1871. Январь.

Дополненія къ докладу пр.-доц. В. Ѳ. Кагана.

Курсы для подготовленія кандидатовъ на учительскія должности въ кадетскихъ корпусахъ*).

Докладъ С. И. Шохоръ-Троцкаго (Спб.).

«Я сдѣлаю только нѣкоторыя добавленія къ только что заслушанному обстоятельнѣйшему докладу, представляющему прекрасную страницу въ исторіи нашего вопроса.

Исходя изъ того, что недостаточно знать свой предметъ и обладать нѣкоторымъ даромъ слова для того, чтобы быть хорошимъ учителемъ, разныя вѣдомства принимали мѣры къ улучшенію этого дѣла. Не вдаваясь въ исторію вопроса по военному вѣдомству (у него были въ 70-хъ годахъ курсы, которые впослѣдствіи закрылись), начну съ того, что насъ сейчасъ занимаетъ. Въ 1903 г. были учреждены двухгодичные курсы военно-учебнаго вѣдомства для подготовки лицъ съ высшимъ образованіемъ къ учительской дѣятельности въ кадетскихъ корпусахъ. Каждому педагогу нужны основныя познанія, какъ естественно-научныя, такъ и педагогическія; поэтому, въ первый годъ пребыванія на курсахъ кандидатъ на учительскія должности былъ занятъ изученіемъ основъ: анатоміи въ связи съ физіологіей, школьной гигіены, гигіены дѣтскаго возраста, составленіемъ рефератовъ по педагогикѣ, общей школьной исторіи педагогическихъ идей и физіологической гигіены; второй годъ посвящался спеціально педагогической подготовкѣ въ данной области. Чтобы показать хотя кратко, въ какихъ размѣрахъ ведутся эти обще-педагогическія занятія, укажу слѣдующіе пункты изъ программы по исторіи педагогическихъ идей: философія и теорія воспитанія, греческое воспитаніе, вліяніе философіи на греческое воспитаніе, воспитательныя средства, указанныя Платономъ, средневѣковый строй воспитанія во Франціи и т. д. вплоть до нашихъ дней. Я перечислилъ нѣсколько пунктовъ, а ихъ 30,

---

*) Болѣе подробныя свѣдѣнія объ этихъ курсахъ можно найти въ изданіи: „Педагогическіе курсы вѣдомства в.-уч. заведеній“. С.-Петерб. 1911 г. Стр. 299. Ц. 1 р. Изданіе Педагогическаго Музея в.-уч. заведеній.

кончается это Спенсеромъ, ученіемъ о развитіи, объ умственномъ и нравственномъ воспитаніи. Я взялъ одинъ предметъ, чтобы переселить васъ въ міръ идей педагогики, въ которомъ въ теченіе перваго года вращается кандидатъ. Этотъ міръ идей для большинства слушателей совершенно чуждъ.

По 1908 г. математика на курсахъ была представлена только методикой преподованія этого предмета; но очень скоро оказалось, что поступающіе на курсы молодые люди съ высшимъ математическимъ и техническимъ образованіемъ, хотя и превосходно владѣютъ всѣми орудіями математическаго анализа, но не имѣютъ, однако, истиннаго критерія для рѣшенія вопросовъ, касающихся оцѣнки доказательствъ и содержанія общеобразовательнаго курса средней школы; чрезвычайно строго относясь къ доказательствамъ своихъ мыслейвъ высшемъ анализѣ и въ механикѣ, усматривая малѣйшія неточности въ этихъ доказательствахъ, кандидатъ не въ силахъ разобраться въ этихъ-же вопросахъ въ курсѣ средней школы. И вотъ, въ 1908 г. конференція постановила ввести въ видѣ опыта начатки критики основныхъ началъ ариѳметики и геометріи. Всего на эти начатки и на методику было отведено 50 часовъ. Теперь сначала излагается критика основныхъ началъ въ самомъ элементарномъ видѣ, а потомъ уже методика математики. То и другое ведется въ формѣ бесѣдъ: лекторъ читаетъ, а затѣмъ по поводу прочитаннаго происходитъ обмѣнъ мнѣній и выясненіе возникшихъ вопросовъ. Занятія курсистовъ этимъ не ограничиваются: они участвуютъ въ качествѣ референтовъ въ бесѣдахъ по общепедагогическимъ вопросамъ и дѣлаютъ доклады и рефераты по своей спеціальности. Рефераты второй категоріи бываютъ двухъ родовъ: на первомъ курсѣ историческаго или историконаучнаго содержанія: изученіе классиковъ (Лежандра, Эвклида), и на второмъ—исключительно методическіе, напр., объ умноженіи на дробь, объ умноженіи вообще и т. д. Кромѣ того, изучаются au fond употребляемые учебники. Конференція признала, что разъ учебники являются средствами обученія, то нужно, чтобы кандидаты ими владѣли вполнѣ. Тутъ дѣло не въ осужденіи или одобреніи, а въ томъ, чтобы будущій учитель зналъ, какъ данный вопросъ поставленъ въ разныхъ учебникахъ. Во второй годъ кандидаты даютъ еще практическіе уроки въ классахъ Петербургскихъ Кадетскихъ Корпусовъ. Передъ уроками составляются ихъ планы, а послѣ уроковъ происходитъ ихъ обсужденіе въ присутствіи руководителей и всѣхъ слушателей курсовъ даннаго отдѣленія.

Если объединить все, что я изложилъ, то можно охарактеризовать занятія такъ: кандидатъ, подготовляющій себя къ преподаванію математики въ средней школѣ, получаетъ извѣстное естественно-научное дополнительное образованіе по физіологіи, анатоміи, гигіенѣ и т. д., получаетъ общее педагогическое образованіе въ области психологіи, исторіи педагогическихъ идей и т. д. и знакомится съ критикой основъ, иначе говоря—трактуетъ вопросы метологіи математики съ точки зрѣнія гносеологической и чисто логической. Главными пособіями служатъ Гильбертъ, Веберъ и Вельштейнъ и классическая работа Дедекинда съ замѣчаніями С. О. Шатуновскаго.

Въ Педагогической Академіи, о которой высказался В. Ѳ. Каганъ, тоже ведутся занятся по критикѣ основныхъ началъ, но это не такъ твердо поставлено. Равнымъ образомъ изучаются учебники, но уже не самостоятельно, а подъ руководствомъ руководителя этими занятіями.

Наконецъ, долженъ упомянуть, что есть еще одно высшее учебное заведеніе, еще только организующееся, это—Психо-Неврологическій Институтъ, въ которомъ есть педагогическій факультетъ, распадающійся на два общеобразовательныхъ курса энциклопедическаго содержанія: естественно-научный и гуманитарно-философскій. Спеціально математической подготовки студенты института не получаютъ, такъ что о подготовкѣ учителей математики для средней школы тамъ говорить нечего.

Гг. кандидаты вначалѣ бываютъ обезкуражены тѣми трудностями, которыми сопровождается изученіе основныхъ началъ, и это продолжается не одну и не двѣ недѣли, несмотря на добросовѣстность и превосходное отношеніе къ дѣлу. Тѣмъ не менѣе, знакомство съ этими вопросами я признаю необходимымъ, потому что здѣсь лежитъ грань между истинной, чистой наукой и учебнымъ предметомъ, между строго-научнымъ изложеніемъ и учебнымъ построеніемъ въ школѣ, и эту грань каждый учитель долженъ пройти. Безъ этой грани не будетъ надлежащаго отношенія къ учебному предмету и не будетъ вѣрнаго отношенія къ наукѣ».

П. А. Домушинъ (Кіевъ). «Въ своемъ докладѣ В. Ѳ. Каганъ уже много сказалъ объ исторіи временныхъ педагогическихъ курсовъ Кіевскаго учебнаго округа. Мнѣ остается добавить очень немногое. Кромѣ спеціальныхъ отдѣленій, о которыхъ говорилъ В. Ѳ. Каганъ, для всѣхъ: и филологовъ, и математиковъ, и географовъ,—обязательно посѣщеніе двучасовой лекціи молодого ученаго Музыченко, весьма освѣдомленнаго въ экспериментальной психологіи и исторіи педагогическихъ ученій. Всѣ учащіеся обязаны сдать коллоквіумы по этому предмету. Думскій законъ относительно временныхъ педагогическихъ курсовъ, который дѣйствуетъ съ осени этого года, принесъ нѣкоторыя измѣненія въ ихъ организацію. Эти измѣненія касаются стипендій для слушателей. Правда, тамъ есть пунктъ, который съ практической точки зрѣнія для насъ неудобенъ, именно—думскій законъ требуетъ выдавать эти стипендіи только лицамъ, окончившимъ высшія учебныя заведенія, а между тѣмъ, въ настоящее время, при недостаткѣ преподователей, окончившихъ университеты, тѣ, которые записываются въ слушатели нашихъ курсовъ, не успѣютъ начать слушать лекціи, какъ назначаются преподавателями въ различныя учебныя заведенія, которыя обезпечиваютъ ихъ лучше, чѣмъ наши 600 р. стипендіи.

Мы стараемся соблюсти равновѣсіе между теоретическими и практическими занятіями; это лучше всего доказывается программами различныхъ отдѣловъ математики.

Скажу нѣсколько словъ объ организаціи занятій, которая создалась съ этой осени, благодаря бóльшимъ средствамъ. Одинъ изъ округовъ отказался отъ веденія такихъ курсовъ, и нашъ округъ получилъ до 23.000 руб. на веденіе дѣла. Кромѣ преподавателей—руководителей, на эти курсы приглашены преподаватели-ассистенты: Оглоблинъ и Остроменскій. Двѣнадцать слушателей, пользующихся полными правами, имѣющіе право получать стипендіи и окончившіе высшія учебныя заведенія, раздѣлились на двѣ группы: одна идетъ къ Оглобину, другая къ Остроменскому. Черезъ опредѣленное время эти группы мѣняются и, такимъ образомъ, всѣ могутъ побывать въ трехъ различныхъ гимназіяхъ. Въ 4-ой гимназіи учатся дѣти бѣдняковъ, въ нашей гимназіи—Науменко, учатся дѣти очень богатыхъ родителей, такъ какъ плата 250—300 р. высока и классы не переполнены такъ, какъ въ казенныхъ гимназіяхъ. Такимъ образомъ, слушатели знакомятся съ различной постановкой дѣла и при различныхъ обстоятельствахъ. По требованію руководителей курсисты представляютъ подробные конспекты объ интересующемъ руководителя вопросѣ. Затѣмъ курсисты пробуютъ свои силы въ классахъ. Къ Великому посту практическія занятія ослабляются и начинаются зачетные уроки. У насъ на математическомъ отдѣленіи приглашается комиссія, подъ предсѣдательствомъ проф. Суслова, изъ директора, пр.-доц. Вишмовича, руководителей и т. д. Комиссія большая и она обезпечиваетъ весьма разностороннее обсужденіе этихъ зачетныхъ уроковъ; если они будутъ признаны удовлетворительными такъ же, какъ практическія и теоретическія работы, то кандидатъ получаетъ свидѣтельство. Правда, вслѣдствіе недостаточности подготовки этихъ курсистовъ въ теоретическомъ отношеніи (потому что курсы высшихъ учебныхъ заведеній не приноровлены къ практическимъ требованіямъ), курсисты не знаютъ основъ геометріи, часто не слушаютъ курса синтетической геометріи, не всѣ проходятъ даже курсъ начертательной геометріи, недостаточно усваиваютъ теорію отрицательныхъ, ирраціональныхъ, комплексныхъ чиселъ. Все это отнимаетъ у насъ время и его, можетъ быть, не вполнѣ хватаетъ, а если осуществить пожеланіе, которое мы слышали изъ устъ В. Θ. Кагана, то больше времени останется на практическія занятія, въ чемъ курсисты очень нуждаются. Проф. Струве указалъ на преимущества французскихъ курсовъ въ теоретическомъ отношеніи. Наши курсы имѣютъ большое сходство съ нѣмецкими, но надо отличать нѣмецкій методъ отъ французскаго. Во Франціи мы встрѣчаемъ методологію, но вовсе не методику, а въ Германіи болѣе или менѣе разработана методика математики. Я еще отмѣчу весьма симпатичный обычай нѣмецкой школы. Въ концѣ года издаются краткіе отчеты учебныхъ заведеній, и кромѣ программъ и темъ, которыя предлагаются на экзаменахъ, въ каждомъ отчетѣ есть работы преподавателей этого учебнаго заведенія настолько серьезныя, что онѣ интересны, не для однихъ нѣмцевъ, но и для другихъ народовъ. Было бы хорошо, если бы у насъ привился подобный обычай. Намъ необходимо работать, и поэтому дадимъ обѣщаніе, особенно послѣ Перваго Съѣзда, работать настойчиво, энергично, не покладая рукъ, для того, чтобы черезъ нѣкоторое время наша дорогая родина заняла въ дѣлѣ средняго образованія надлежащее, подобающее мѣсто среди передовыхъ государствъ Европы».

Н. Н. Гернетъ (Спб.). «Мнѣ хотѣлось бы сказать нѣсколько словъ о женскомъ Педагогическомъ Институтѣ, который находится въ Петербургѣ и имѣетъ два факультета: историко-филологическій и математическій. Курсъ обученія $4^1/_2$ г. Первые три года посвящаются изученію спеціальныхъ и общеобразовательныхъ предметовъ, 4-ый годъ и 9-ое полугодіе—отдаются практическимъ занятіямъ. При курсахъ имѣется гимназія. На третьемъ курсѣ слушательницы посѣщаютъ уроки преподавателей, сами даютъ уроки, пишутъ рефераты. Здѣсь жалуются, что вообще институты имѣютъ очень мало средствъ, у насъ же ихъ очень много. Съ самаго начала существованія института,- мы еще организуемся,—наплывъ прошеній очень великъ и приходится многимъ отказывать. Слушательницъ 500. Принимаемъ исключительно лицъ, окончившихъ курсъ съ золотой медалью. Пока результаты довольно благопріятные, и нужно надѣяться, что и впредь будутъ хороши».

И. Т. Зубковъ (Гори, Тифл. губ.). «Уважаемые предшествующіе докладчики довольно обстоятельно освѣтили вопросы о желательной постановкѣ и объемѣ математики въ среднихъ и высшихъ учебныхъ заведеніяхъ и о подготовкѣ преподавателей математики для среднихъ учебныхъ заведеній.

Я задержу на малое время вниманіе милостивыхъ коллегъ вопросомъ желательнаго объема этого предмета въ учительскихъ семинаріяхъ.

Существующая оффиціальная программа этого предмета для учительскихъ семинарій составлена, если не ошибаюсь, 35 лѣтъ тому назадъ и представляется въ такомъ видѣ:

Ариѳметика:

Въ старшемъ пригот. классѣ—дѣйствія съ цѣлыми отвлеч. и имен. числами:

I классъ—дроби обыкнов. и десятичныя.

II классъ—задачи на пропорціональныя величины.

III классъ—повтореніе курса ариѳметики.

Геометрія:

Приготов. классъ—до вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ.

I классъ—оканчивается планиметрія.

II классъ—стереометрія.

Алгебра:

Лишь въ III-мъ классѣ рекомендуется ознакомить съ численными ур—ніями 1-ой степени съ однимъ и двумя неизвѣстными.

Методика ариѳметики начинается во II-мъ классѣ во второмъ полугодіи и оканчивается въ III-мъ классѣ, гдѣ и сообщаются нѣкоторыя свѣдѣнія по методикѣ геометріи.

Надо сказать, что объемъ геометріи опредѣляется учебникомъ Вулиха.

Переходное состояніе, указанное жизненной потребностью, выразилось введеніемъ по геометріи курса среднихъ учебныхъ заведеній, какъ необходимаго фундамента для физики, географіи и другихъ общеобраз. предметовъ; заставило переиначить распредѣленіе матеріала и слегка его расширить. Приблизительно самою жизнью курсъ математики въ учительскихъ семинаріяхъ представляется распредѣленнымъ въ такомъ видѣ:

Приготовительный классъ.

Ариѳметика и алгебра проходятся попутно. Дѣйствія съ цѣлыми отвлеч. и именован. числами. Рѣшеніе и составленіе ур-ній 1-ой степени съ однимъ и двумя неизвѣстными; постепенное знакомство съ алгебраическими упрощеніями и дѣйствіями надъ цѣлыми алгебраич. количествами. Отношенія и пропорціи.

I классъ.

Параллельно проходятся ариѳметическія и алгебраическія дроби. Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Квадратныя ур-нія.

II классъ.

Задачи на пропорціональныя числа, обобщаемыя алгеброю и поясняемыя графикомъ.

III классъ.

Повтореніе ариѳметики того же курса.

Геометрія, при такомъ распредѣленіи алгебры, вполнѣ проходится въ объемѣ среднихъ учебныхъ заведеній.

Методики ариѳметики и геометріи остались на прежнемъ своемъ мѣстѣ.

Въ настоящее время нарождается вопросъ о необходимости болѣе нормальнаго распредѣленія курса и возможности помѣщенія необходимаго, хотя бы общаго для среднихъ учебныхъ заведеній, объема этого предмета въ курсѣ учительскихъ семинарій.

Средство для этого единственно—открытіе 5-го класса при учительскихъ семинаріяхъ. Тогда курсъ математики распредѣлится нормально по классамъ и будетъ возможно въ послѣднемъ классѣ пройти теоретическую ариѳметику, закончить необходимые для общеобразовательнаго уровня курсы алгебры, тригонометріи и космографіи и элементарно ознакомить будущихъ народныхъ учителей съ аналитической геометріей.

Необходимость сказаннаго ясно вытекаетъ изъ жизненныхъ требованій, предъявляемыхъ къ народнымъ учителямъ.

Мало того, что имъ необходимо имѣть общее образованіе для прямыхъ своихъ цѣлей, еще необходимо имѣть въ виду, что имъ, почти всѣмъ безъ исключенія, приходится вести вечерніе курсы со взрослыми.

Не слѣдуетъ, мнѣ кажется, бояться, что при такой программѣ учительскихъ семинарій оканчивающіе будутъ убѣгать отъ своего прямого назначенія. Вѣдь и теперь находятся люди, недовольные своимъ положеніемъ на мѣстѣ народнаго учителя и превосходно за 1 — 2 года подготовляющіеся на аттестатъ зрѣлости.

Такихъ мало, да и пусть они уходятъ! Тѣ, кто останется, будутъ любить свое дѣло, такъ какъ будутъ чувствовать свое нравственное удовлетвореніе въ томъ, что ихъ общее образованіе равно общеобразовательному уровню россійскихъ гражданъ, отсутствіе чего теперь такъ ихъ мучитъ, волнуетъ и подъ-часъ заставляетъ ихъ покинуть свое прямое дѣло.

Я считаю нужнымъ добавить, что недалеко то время, когда придется сказать, что въ борьбѣ разныхъ народовъ выйдетъ побѣдителемъ тотъ народный учитель, который успѣетъ разсѣять мракъ невѣжества массъ.

Стоя близко къ этому дѣлу, я утверждаю, что нашъ учитель-семинаристъ понимаетъ истинное свое назначеніе, имѣетъ во всѣхъ отношеніяхъ довольно обстоятельную подготовку къ педагогической дѣятельности; въ массѣ — онъ болѣе патріотиченъ, чѣмъ кто либо, въ истинномъ смыслѣ этого слова. Онъ угнетенъ лишь неполнымъ своимъ общимъ образованіемъ, что его какъ бы роняетъ въ глазахъ интеллигентнаго общества и нарушаетъ его духовный міръ.

Какъ видите, я все время стою на однихъ лишь духовныхъ запросахъ народнаго учителя и думаю, что желаемое измѣненіе курса математики въ учительскихъ семинаріяхъ возможно и насущно-необходимо для государства.

Возымѣю смѣлость хотя бы слегка коснуться матеріальной стороны народнаго учителя. Пора намъ, памятуя, что хорошій народный учитель въ критическія минуты отечества побѣждаетъ врага, обратить вниманіе и на эту сторону его жизни, и, хотя бы въ видѣ незначительныхъ періодическихъ добавокъ къ его жалованію (въ 3 года—по 60 рублей), дать народному учителю матеріальное подкрѣпленіе.

Я обращаюсь къ членамъ высокаго собранія коллегъ и къ глубокоуважаемымъ руководителямъ настоящаго съѣзда съ просьбой — не оставить моихъ словъ безъ слѣда и откликнуться на мой призывъ. Тысячи тружениковъ и труженицъ, настоящихъ и будущихъ, на почвѣ народной нивы ожидаютъ съ нетерпѣніемъ благосклоннаго вниманія. Мнѣ бы весьма хотѣлось, чтобы слѣдующій съѣздъ математиковъ не оставилъ этого вопроса безъ отвѣта».

Закрытіе Съѣзда.

3 января.

Въ 9 час. вечера въ большой аудиторіи Соляного Городка состоялось закрытіе Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики. Предсѣдатель Съѣзда, проф. А. В. Васильевъ, открылъ Собраніе слѣдующей рѣчью:

«Милостивыя Государыни и Милостивые Государи! Наша работа приближается къ концу. Я позволю себѣ выразить убѣжденіе, что нашъ трудъ не пропадетъ. Но прежде, чѣмъ закончить наши занятія, мы нравственно обязаны вспомнить о тѣхъ дѣятеляхъ, которые сдѣлали очень многое въ области преподаванія математики въ средней школѣ, и прежде всего о двухъ русскихъ дѣятеляхъ. Мы собрались здѣсь подъ гостепріимный кровъ Педагогическаго Музея Военно-Учебныхъ заведеній. Генералъ А. Н. Макаровъ, бывшій въ теченіе многихъ лѣтъ директоромъ Музея, былъ также иниціаторомъ Педагогическихъ курсовъ военно-учебнаго вѣдомства и руководителемъ занятій по математикѣ на нихъ, а эти курсы, какъ вы знаете, составляютъ и до сихъ поръ почти единственное заведеніе для педагогической подготовки преподавателей математики. Организаціонный Комитетъ предлагаетъ послать телеграмму генералу Макарову, который съ такимъ интересомъ и любовью всегда относился къ дѣлу математическаго преподаванія».

«Проф. В. П. Ермаковымъ былъ организованъ журналъ: «Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики». Онъ былъ первымъ редакторомъ и интереснымъ сотрудникомъ журнала. По недостатку времени редактированіе было передано имъ г. Шпачинскому. Въ настоящее время этомъ журналъ издается подъ редакціей В. Ѳ. Кагана; Вы знаете, что журналъ приноситъ громадную пользу всѣмъ преподавателямъ. Организаціонный Комитетъ предлагаетъ послать телеграмму проф. В. П. Ермакову».

«При самомъ возникновеніи идеи о Съѣздѣ Преподавателей Математики являлась надежда, что нашъ Съѣздъ свяжетъ преподавателей математики средне-учебныхъ заведеній болѣе тѣсно, чѣмъ это было до сихъ поръ, и объединенными силами поможетъ какъ улучшенію преподаванія математики въ Россіи, такъ и ознакомленію съ тѣмъ движеніемъ по преобразованію математическаго преподаванія, которое возникло въ Германіи и оттуда распространилось на всѣ культурныя страны. Инціаторомъ этого движенія является, несомнѣнно, профессоръ Феликсъ Клейнъ. Онъ въ теченіе 20-ти лѣтъ работалъ надъ вопросами педагогики математики на всѣхъ ступеняхъ образованія и на Бреславльскомъ Конгрессѣ въ 1904 году первый подалъ мысль о необходимости обратить вниманіе на преподаваніе математики и создать объединяющую расторженныя усилія въ этой области организацію. Затѣмъ на Меранскомъ Конгрессѣ имъ былъ выработанъ учебный планъ, который и въ настоящее время является руководящей нитью для рѣшенія вопросовъ о реформѣ преподаванія въ средне-учебныхъ заведеніяхъ Германіи. Организаціонный Комитетъ предлагаетъ послать привѣтственную телеграмму проф. Клейну въ Гётингенѣ».

«Очень много положилъ трудовъ въ пользу реформы преподаванія математики въ Германіи сотрудникъ проф. Клейна — проф. Университета въ Галле — Гуцмеръ. Онъ состоитъ предсѣдателемъ Общества реформы преподаванія математики и естественныхъ наукъ, предсѣдателемъ Комиссіи германскихъ естествоиспытателей и врачей; ему же обязано возникновеніемъ большое количество работъ по этому вопросу, составляющихъ въ настоящее время нѣсколько большихъ томовъ. Организаціонный Комитетъ считаетъ долгомъ предложить Вамъ послать привѣтственную телеграмму проф. Гуцмеру въ Галле».

«Движеніе въ пользу реформы преподаванія математики въ Германіи не осталось безъ вліянія и на другія страны. Но еще раньше въ томъ же направленіи были сдѣланы попытки во Франціи, которыя привели къ очень серіознымъ измѣненіямъ въ планѣ преподаванія математики. Не только значительное, но и выдающееся участіе принялъ въ этой работѣ журналъ Enseignement mathématique, который ведется въ теченіе 10-ти лѣтъ подъ редакціей Шарля Лезана; послѣдній являлся всегда сторонникомъ международнаго объединенія математиковъ какъ въ наукѣ, такъ и въ вопросахъ преподаванія. И эта идея нашла осуществленіе на конгрессѣ, имѣвшемъ мѣсто въ Римѣ въ Апрѣлѣ 1908 г. Тамъ было постановлено образовать Международную комиссію по реформѣ преподаванія математики; собраніе этой комиссіи будетъ имѣть мѣсто въ нынѣшнемъ году отъ 22-го по 28-ое августа во время Международнаго Математическаго Конгресса въ Кембриджѣ и выслушаетъ отчеты о всѣхъ тѣхъ работахъ, которыя вызваны ея инціативой».

«Вопросъ о преподаваніи математики занимаетъ въ настоящее время многихъ педагоговъ всѣхъ странъ, что̀ видно изъ протоколовъ конференціи въ Миланѣ о работахъ всѣхъ государствъ культурнаго міра. Одно перечисленіе работъ различныхъ національныхъ отдѣловъ международной организаціи занимаетъ 4 или 5 страницъ весьма мелкаго убористаго шрифта. Организаціонный Комитетъ полагаетъ, что и дѣятелю по реформѣ преподаванія математики во Франціи, редактору журнала, который въ теченіе 10-ти лѣтняго существованія принесъ большую пользу математическому преподаванію, дѣятельному объединителю математиковъ, Шарлю Лезану,—точно также желательно послать телеграмму».

«Позвольте перейти къ вотированію тѣхъ резолюцій, которыя обсуждались Организаціоннымъ Комитетомъ и проектъ которыхъ вамъ былъ розданъ во время утренняго засѣданія. Но Организаціонный Комитетъ въ засѣданіи, которое только что имѣло мѣсто, принявъ во вниманіе различнаго рода заявленія, нѣсколько резолюцій добавилъ и измѣнилъ, а также измѣнилъ и ихъ порядокъ».

«Я прочитаю всѣ резолюціи по порядку для того, чтобы

Вы имѣли возможность увидѣть, что онѣ составлены въ томъ духѣ, какимъ были проникнуты всѣ наши работы, затѣмъ буду читать каждую резолюцію отдѣльно и баллотировать».

«Вы сейчасъ усмотрите, что проектъ избѣгаетъ формулированія какихъ-нибудь вполнѣ опредѣленныхъ пожеланій относительно постановки преподаванія математики въ средней школѣ. Нашей семидневной работы было недостаточно для того, чтобы высказать какія-либо вполнѣ опредѣленныя пожеланія. Также шла и работа въ Германіи; когда наши нѣмецкіе товарищи приступили къ вопросу о реформѣ преподаванія, то на Первомъ Конгрессѣ они отложили выработку даже общихъ положеній до слѣдующаго Съѣзда. Тѣ резолюціи, которыя мы Вамъ предложили, проникнуты духомъ осторожности: мы намѣчаемъ сущность вопроса и предлагаемъ детальную разработку отложить уже до слѣдующаго Съѣзда, который будетъ имѣть мѣсто въ самомъ непродолжительномъ времени».

Послѣ рѣчи предсѣдателя поднятіемъ рукъ были вотированы слѣдующія

Резолюціи Съѣзда.

1) Съѣздъ признаетъ необходимымъ поднять самодѣятельность и активность учащихся, а также усилить наглядность преподаванія на всѣхъ его ступеняхъ и въ то же время повысить логическій элементъ въ старшихъ классахъ, считаясь однако съ психологическими особенностями возраста учащихся и съ доступностью для нихъ преподаваемаго матеріала.

2) Съѣздъ признаетъ своевременнымъ опустить изъ курса математики средней школы нѣкоторые вопросы второстепеннаго значенія, провести чрезъ курсъ и ярко освѣтить идею функціональной зависимости, а также—въ цѣляхъ сближенія преподаванія въ средней школѣ съ требованіями современной науки и жизни—ознакомить учащихся съ простѣйшими

и несомнѣнно доступными имъ идеями аналитической геометріи и анализа.

3) Съѣздъ признаетъ крайне желательнымъ, чтобы авторы настоящихъ и будущихъ учебниковъ приняли во вниманіе точки зрѣнія, изложенныя во 2-омъ пунктѣ настоящихъ резолюцій. Въ частности признается желательнымъ выработка задачниковъ, соотвѣтствующихъ кругу интересовъ учащихся на каждой ступени ихъ обученія и включающихъ въ себя данныя изъ физики, космографіи, механики и пр., а также составленіе математической хрестоматіи, дополняющей и углубляющей свѣдѣнія, выносимыя учащимися изъ обязательной программы.

4) Съѣздъ признаетъ желательной подробную разработку вопроса о такой организаціи преподаванія въ средней школѣ, которая, сохраняя общеобразовательный ея характеръ, допускала бы спеціализацію въ старшихъ классахъ, приноровленную къ индивидуальнымъ способностямъ учащихся и удовлетворяющую требованіямъ высшей школы.

5) Съѣздъ признаетъ желательнымъ, чтобы наиболѣе одаренные въ математическомъ отношеніи учащіеся могли найти въ учебномъ заведеніи удовлетвореніе своимъ запросамъ, а также организованное руководительство со стороны учебнаго персонала.

6) Съѣздъ признаетъ необходимымъ, чтобы университетъ, безъ ущерба для главнаго своего назначенія—служить наукѣ и научному образованію,—усилилъ свое преподаваніе элементами, необходимыми для будущаго преподавателя средней школы.

7) Съѣздъ признаетъ необходимымъ, чтобы кандидаты въ преподаватели по окончаніи высшаго учебнаго заведенія получали спеціальную педагогическую подготовку на курсахъ, возможно лучше обезпеченныхъ преподавательскими силами и матеріальными средствами.

8) Съѣздъ считаетъ необходимымъ, помимо постоянныхъ курсовъ, устраивать для освѣженія какъ научной, такъ и педагогической подготовки учителей среднихъ учебныхъ заведеній, также краткосрочные курсы и съѣзды.

9) Въ цѣляхъ повышенія спеціальнаго и педагогическаго самообразованія преподавателей желательно, чтобы библіотеки учебныхъ заведеній были въ полной мѣрѣ снабжены необходимыми учеными, учебными, методическими сочиненіями, справочными изданіями и журналами.

10) Съѣздъ признаетъ желательнымъ, чтобы педагогическимъ совѣтамъ учебныхъ заведеній было предоставлено больше самостоятельности въ дѣлѣ распредѣленія учебнаго матеріала по классамъ и въ выборѣ учебныхъ руководствъ.

11) Съѣздъ признаетъ желательнымъ повысить въ женскихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ уровень преподаванія математики, какъ въ виду высокаго образовательнаго значенія этого предмета, такъ и въ виду широкаго стремленія оканчивающихъ женскую школу къ высшему образованію.

12) Сознавая всю сложность высказанныхъ здѣсь пожеланій, Съѣздъ признаетъ необходимымъ проявить соотвѣтствующую осторожность при всѣхъ начинаніяхъ, касающихся проведенія ихъ въ жизнь. Въ виду этого, Съѣздъ выразилъ настоящія резолюціи въ весьма общей формѣ и поручаетъ Организаціонному Комитету 2-го Съѣзда составить комиссіи, которыя занялись бы тщательной и детальной обработкой высказанныхъ здѣсь общихъ пожеланій.

Доклады этихъ комиссій необходимо отпечатать и не позже, чѣмъ за 3 мѣсяца до начала 2-го Съѣзда, разослать состоящимъ при всѣхъ вѣдомствахъ ученымъ комитетамъ, совѣтамъ и конференціямъ высшихъ учебныхъ заведеній, математическимъ обществамъ и кружкамъ, преподавателямъ математики среднихъ учебныхъ заведеній, а также органамъ педагогической печати.

Обсужденіе этихъ докладовъ и постановленіе по нимъ окончательныхъ рѣшеній должно составить главную задачу 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

13) Съѣздъ признаетъ желательнымъ, чтобы отдѣльные члены его представили въ организуемыя комиссіи свои соображенія по указаннымъ въ предыдущихъ пунктахъ вопросамъ. Соображенія эти, если не будутъ включены въ доклады, должны быть къ нимъ приложены.

14) Въ виду того, что крайне серьезный вопросъ объ экзаменахъ и письменныхъ работахъ обсуждался только въ одной изъ секцiй и не прошелъ черезъ общее собранiе, Съѣздъ, признавая неудовлетворительность современной постановки этого дѣла въ средней школѣ и необходимость коренныхъ въ ней измѣненiй, поручаетъ Организацiонному Комитету 2-го Съѣзда организовать отдѣльную комиссiю, въ которую передать и поступившiя по этому вопросу изъ 2-ой секцiи заявленiя.

15) Съѣздъ выражаетъ желанiе, чтобы на 2-омъ Съѣздѣ преподавателей математики были образованы особыя секцiи преподавателей женскихъ, техническихъ и коммерческихъ учебныхъ заведенiй и чтобы туда были представлены доклады о переработкѣ программъ математики этихъ учебныхъ заведенiй.

16) Въ виду того, что въ настоящее время въ различныхъ мѣстахъ Россiи работаетъ довольно много математическихъ кружковъ, желательно созданiе особой организацiи, которая, оставляя эти кружки вполнѣ самостоятельными, объединила бы ихъ на почвѣ общихъ интересовъ и стремленiй.

17) Съѣздъ выражаетъ свою признательность тѣмъ органамъ печати, которые служили и служатъ дѣлу преподаванiя математическихъ наукъ, и привѣтствуетъ начинанiе Московскаго Математическаго кружка, выразившееся въ изданiи журнала «Математическое Образованiе», который включилъ въ свои задачи содѣйствiе взаимному освѣдомленiю обществъ и кружковъ, посвящающихъ себя дѣлу математическаго образованiя.

18) Съѣздъ признаетъ необходимымъ созвать Второй Всероссiйскiй Съѣздъ преподавателей математики въ Москвѣ въ декабрѣ 1913-го года и проситъ Московскiй Математическiй Кружокъ, въ виду выраженной предсѣдателемъ и присутствующими его членами готовности организовать Второй Съѣздъ, взять на себя выполненiе этой задачи.

19) Съѣздъ поручаетъ своему Организацiонному Комитету сообщить настоящiя свои постановленiя Министрамъ и Главноуправляющимъ, въ вѣдѣнiи которыхъ находятся среднiя учебныя заведенiя.

По принятіи резолюцій Съѣздъ рукоплесканіемъ выразилъ благодарность за понесенные труды предсѣдателю Съѣзда, проф. А. В. Васильеву, и предсѣдателю Организаціоннаго Комитета, ген.-л. З. А. Макшееву.

З. А. Макшеевъ. «Въ отдѣлѣ Математики Педагогическаго Музея въ 1909—10—11 годахъ разсматривались вопросы о преподаваніи математики и о реформѣ его въ особенности. Двое изъ членовъ отдѣла обратились ко мнѣ съ просьбой сорганизовать Съѣздъ. Этими лицами, которые первые подняли вопросъ о Съѣздѣ и имена которыхъ я считаю нужнымъ упомянуть, были В. Р. Мрочекъ и Ф. В. Филипповичъ. По первому впечатлѣнію эта затѣя, какъ тогда казалось, представлялась сомнительной. Собрать Съѣздъ по такому специальному вопросу, Съѣздъ такого рода, который въ прошломъ у насъ совсѣмъ не имѣетъ примѣра, представлялось въ смыслѣ успѣха очень гадательнымъ. Конечно, я, какъ предсѣдатель Отдѣла Математики, какъ Директоръ Музея и руководитель курсовъ для подготовки преподавателей, наконецъ, какъ лицо, которое въ продолженіе $\frac{1}{4}$ вѣка занималось преподаваніемъ математики,— не могъ остаться равнодушнымъ къ этому заявленію; но во мнѣ боролись самыя противоположныя чувства. Съ одной стороны, хотѣлось осуществить эту мысль, а съ другой казалось, что изъ этого ничего не выйдетъ. Подъ вліяніемъ такихъ разнородныхъ чувствъ и колебаній я обратился къ тѣмъ лицамъ, на участіе которыхъ я могъ надѣяться, потому что зналъ, какъ сочувственно они относятся ко всякому дѣлу общественнаго объединенія на почвѣ науки. Это были профессора: Васильевъ, Поссе и Савичъ. Они поддержали мое начинаніе и обѣщали свою поддержку въ созывѣ Съѣзда. Я приношу имъ глубокую признательность: если бы они отнеслись отрицательно къ моему предложенію, то Съѣздъ не могъ бы осуществиться».

«Въ маѣ мѣсяцѣ мы обратились съ воззваніемъ къ преподавательскому персоналу Россіи. Разославъ воззваніе по учебнымъ заведеніямъ въ числѣ 2000 экземпляровъ, мы составили проектъ положенія о Съѣздѣ и представили его подлежащимъ властямъ; въ теченіе лѣта этотъ проектъ былъ утвержденъ. Затѣмъ, съ сентября мѣсяца, началась организаціонная работа.

Въ этой работѣ трудъ легъ не столько на меня, сколько на остальныхъ членовъ Комитета. Обязанности Казначея, Предсѣдателя Выставочной Комиссіи и Предсѣдателя Хозяйственной Комиссіи взялъ на себя Д. Э. Теннеръ. Громадную помощь оказали секретари В. Р. Мрочекъ и Ф. В. Филипповичъ. Наконецъ, я долженъ упомянуть, что въ продолжавшейся болѣе двухъ мѣсяцевъ работѣ по устройству выставки дѣятельное участіе приняли слушатели и слушательницы нѣкоторыхъ Высшихъ учебныхъ заведеній, особенно слушательницы Педагогическаго Института, которыя отдавали этому дѣлу ежедневно по нѣсколько часовъ. Въ заботахъ о размѣщеніи членовъ Съѣзда по квартирамъ намъ пришли на помощь студенты Технологическаго Института и Университета. Изъ учрежденій, которыя облегчили задачу устройства Съѣзда, я долженъ указать на Педагогическій Музей и Императорское Русское Техническое Общество, безплатно предоставившія намъ свои помѣщенія, и на учебныя заведенія, которыя дали возможность безплатно или на льготныхъ условіяхъ помѣстить у нихъ членовъ Съѣзда на квартирѣ. Только при совокупности такихъ условій удалось осуществить Съѣздъ, и я просилъ бы васъ, Милостивыя Государыни и Милостивые Государи, дать мнѣ возможность выразить благодарность всѣмъ указаннымъ лицамъ и учрежденіямъ за ихъ работу».

(Продолжительные аплодисменты).

«Позвольте закончить пожеланіемъ, чтобы вы возвратились на мѣста, къ своей трудовой дѣятельности, ободренные и освѣженные той вѣрой въ педагогическое дѣло, которая такъ ярко давала себя чувствовать здѣсь, на нашихъ собраніяхъ. Не все, что здѣсь говорилось, можно немедленно приложить; но тѣ новыя мысли и идеи, съ которыми Вы здѣсь столкнулись, расчистятъ мало-по-малу путь къ усовершенствованію. Дай Богъ, чтобы дѣятельность Съѣзда нашла откликъ въ отдаленныхъ уголкахъ нашего отечества. Въ заключеніе желаю Вамъ благополучно возвратиться къ семьямъ, отъ которыхъ вы были оторваны въ самое дорогое для учителя время — время Рождественскихъ каникулъ».

А. В. Васильевъ. «Предлагаю выразить благодарность всѣмъ членамъ Организаціоннаго Комитета», а также тѣмъ лицамъ, которыя приняли на себя во время занятій Съѣзда почетную и трудную обязанность быть предсѣдателями какъ общихъ засѣданій, такъ и засѣданій секцій, и секретарями этихъ засѣданій. Я увѣренъ, что Вы признаете желательнымъ выразить благодарность также и лицамъ, которыя приняли на себя главную активную роль—составленіе докладовъ по различнымъ вопросамъ и защиту ихъ, равно какъ и тѣмъ, которыя принимали участіе въ ихъ обсужденіи».

В. Б. Струве (Москва). «По порученію членовъ Съѣзда-москвичей и Московскаго математическаго кружка, который просилъ меня объ этомъ, какъ одного изъ своихъ старшинъ, приношу глубочайшую благодарность иниціаторамъ Съѣзда, Предсѣдателю и членамъ Организаціоннаго Комитета и Предсѣдателю Съѣзда за тѣ огромные труды, которые они понесли по организаціи Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики. Мы не сомнѣваемся, что этотъ первый Съѣздъ, эта первая попытка, этотъ починъ и его исполненіе—будутъ записаны съ благодарностью въ исторіи русской культуры и въ частности русской школы и что онъ явится начальнымъ звеномъ въ дальнѣйшемъ цѣломъ рядѣ Съѣздовъ, на которыхъ объединится активная педагогическая мысль всѣхъ работающихъ въ области преподаванія математики. Вмѣстѣ съ тѣмъ я, какъ москвичъ, въ частности долженъ выразить благодарность Съѣзду за желаніе собраться въ слѣдующій разъ въ Москвѣ, т. е. въ сердцѣ Россіи. Милости просимъ, добро пожаловать въ Бѣлокаменную».

А. В. Васильевъ. «Позвольте сказать нѣсколько заключительныхъ словъ.—Одинъ изъ почтенныхъ членовъ Съѣзда, принимавшій живое участіе въ нашихъ занятіяхъ — проф. П. А. Некрасовъ—предоставилъ въ распоряженіе членовъ Съѣзда значительное число своихъ книгъ подъ заглавіемъ «Вѣра, знаніе и опытъ». — Я хочу съ этимъ заглавіемъ связать мое заключительное слово. Я убѣжденъ, что мы разъѣдемся съ этого Съѣзда съ окрѣпшей вѣрой въ значеніе науки, съ расширившимся кругомъ знаній и съ обогащеннымъ опытомъ.

Нашъ неизмѣнный товарищъ по вопросамъ математическаго преподаванія — это вѣра въ значеніе нашей науки. Она, конечно, одухотворяетъ учителя; тотъ, кто не имѣетъ этой вѣры, не можетъ быть хорошимъ учителемъ».

«Въ то время, какъ мы говоримъ о математикѣ, раздались голоса о необходимости увеличить значеніе древнихъ языковъ въ системѣ образованія средней школы. Я увѣренъ, что это не принесетъ ущерба математическому преподаванію, важность котораго въ культурной жизни страны представляется несомнѣнной. Можетъ быть, произойдетъ нѣчто вродѣ германскаго согласованія: при этомъ потерпятъ ущербъ тѣ элементы, преподающіеся въ средней школѣ, которые не имѣютъ никакого отношенія ни къ математикѣ, ни къ преподаванію классическихъ языковъ. Мы, конечно, не будемъ огорчены, если займутъ два или три часа классическими языками, если только эти часы послужатъ цѣлямъ уясненія значенія и пробужденію уваженія къ древней культурѣ, которая доставила математической наукѣ такихъ гигантовъ мысли, какъ Эвклидъ, Архимедъ, Аполлоній, главныхъ представителей абстракнаго мышленія».

«Вы слышали на Съѣздѣ нѣсколько докладовъ по очень труднымъ вопросамъ нешкольной математики и большое число докладовъ, освѣщающихъ преподаваніе школьной математики съ разныхъ точекъ зрѣнія. Наша выставка, которая такъ усердно посѣщалась Вами, дала возможность познакомиться съ состояніемъ математической литературы, съ математическими учебниками разныхъ странъ. Мы прослушали здѣсь доклады о преподаваніи на всѣхъ ступеняхъ, начиная съ вопроса объ именованныхъ числахъ до анализа безконечно-малыхъ и такихъ абстрактныхъ элементовъ, какъ ученіе о числѣ. Все это расширило нашъ кругозоръ».

«Кромѣ того, настоящій Съѣздъ въ теченіе кратковременнаго существованія успѣлъ уже оказать большую услугу дѣлу объединенія преподавателей различныхъ городовъ. Москва, создавая свой журналъ «Математическое Образованіе», имѣла цѣлью способствовать развитію успѣха математическаго преподаванія во всей Россіи. Мы увѣрены, что Московскому Кружку своими трудами помогутъ и другіе города, Кружку, гдѣ работали Бугаевъ, Брашманъ, въ которомъ до сихъ поръ работалъ проф. Давыдовъ. Мы увѣрены также, что всѣ поддержатъ Московскій Математическій Кружокъ въ его стремленіи сдѣлать II-ой Математическій Съѣздъ еще болѣе плодотворнымъ, чѣмъ Первый Съѣздъ, потому что на долю этого Второго Съѣзда выпадетъ детальная разработка вопросовъ, которые мы могли лишь намѣтить. Итакъ—до свиданія, до Московскаго Математическаго Съѣзда. Объявляю Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики закрытымъ».

ПРИЛОЖЕНІЯ.

XXXIII. Краткое содержаніе доклада М. Г. Попруженко: «Объ анализѣ безконечно-малыхъ въ средней школѣ».

Докладчикъ указалъ на проявившуюся во Франціи, Германіи, Россіи, Австро-Венгріи, Швейцаріи, Голландіи, Бельгіи, Англіи и Америкѣ тенденцію ко введенію въ курсъ средней школы основаній анализа безконечно-малыхъ. Связанное съ этой тенденціей преобразованіе программъ имѣетъ важное культурное и общественное значеніе, но для того, чтобы оно дало ожидаемый результатъ, необходимо очень внимательно отнестись къ новому отдѣлу курса и выяснить тѣ условія, которымъ онъ долженъ удовлетворять. Такихъ условій докладчикъ намѣтилъ четыре:

1) Общедоступность курса;

2) Честность его;

3) Краткость;

4) Органическая связанность съ общимъ курсомъ математики средней школы.

Возраженія противъ общедоступности анализа опровергаются разборомъ тѣхъ понятій, которыя входятъ въ составъ его и практикой преподаванія, нашей и иностранной. При всемъ томъ очевидно, что курсъ анализа средней школы не можетъ строиться на тѣхъ тонкихъ, строго и исключительно логическихъ началахъ, которыя легли въ основу современныхъ научныхъ курсовъ. Но, съ другой стороны, по своей научной конструкціи онъ не долженъ быть ниже другихъ отдѣловъ школьной математики, и честность этого курса заключается въ ясномъ и отчетливомъ указаніи всѣхъ допущеній, пробѣловъ дедукціи, значеніи геометрическихъ иллюстрацій и др.

Однако такъ называемая патологія функцій вѣдѣнію средней школы не подлежитъ.

Краткость курса обусловливается недостаткомъ времени, ему удѣляемаго и, главное, необходимостью создать прочныя ассоціаціи между старымъ и новымъ матеріаломъ. Послѣднее обстоятельство требуетъ общей связанности курса математики средней школы, которая будетъ осуществлена при проведеніи черезъ всѣ классы идеи функціональной зависимости. Въ частности при обслѣдованіи графиковъ въ 5-мъ классѣ слѣдуетъ внимательно всматриваться въ измѣненіе функцій и вычислять угловые коэффиціенты касательныхъ. При исполненіи этихъ условій статья о графикахъ явится прекрасной пропедевтической главой къ курсу анализа. Пріобрѣтенныя по анализу свѣдѣнія, разумѣется, должны быть въ полной мѣрѣ использованы въ курсахъ физики и механики.

Переходя затѣмъ къ обзору учебной литературы, докладчикъ приходитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

I. a) Маленькіе французскіе курсы Borel'я и Bourlet даютъ прекрасный матеріалъ для пропедевтическаго курса анализа.

b) Книга Bourlet «Leçons d'algebre» подходитъ по своему изложенію основаній анализа къ потребностямъ старшаго класса.

c) Книга «Notions de mathématiques» Tannery цѣнна по талантливому изложенію многихъ вопросовъ и даетъ поучительные примѣры сокращенія техники интегрированія.

2) Нѣмецкіе учебники (Lesser'a, Schroder'a, Dasing'a, Leutenegger'a, Schülke, Hartl'я и др.) изобилуютъ методическими точками зрѣнія, но часто построены совершенно антинаучно, содержатъ грубыя ошибки и не чужды метафизики.

По мнѣнію Mansion, «ils ne peuvent que fausser les idées des éléves qui en font l'usage». Знакомство съ нѣмецкими курсами все-таки полезно въ методическомъ отношеніи и со стороны тѣхъ богатыхъ приложеній анализа, которыя въ нихъ имѣются.

III. Русская учебная литература по анализу б. м. однотипна и въ общемъ построена на правильныхъ основаніяхъ.

Совершенно ненужнымъ и громоздкимъ придаткомъ нашихъ курсовъ служитъ примѣненіе теоріи предѣловъ къ вычисленію длины окружности, площади круга, поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ.

Выводомъ изъ разсмотрѣнія учебной литературы является заключеніе о возможности весьма разнообразныхъ конструкцій курса анализа, причемъ простѣйшая изъ нихъ обнимаетъ собою только ученіе о производной съ примѣненіемъ его къ очень ограниченному ряду функцій. Слѣдовательно, курсъ анализа обладаетъ гибкостью и приспособляемостью къ условіямъ времени и силъ учениковъ.

Подробное разсмотрѣніе учебниковъ и курсовъ по анализу приводитъ также къ цѣлому ряду соображеній о той или другой обработкѣ матеріала, касающагося предѣловъ, непрерывности, производной и пр., и пр. *).

XXXIV. О преобразованіи многогранниковъ.

Пр.-доц. В. Ѳ. Кагана (Одесса). Докладъ.

§ 1. Постановка задачи.

„При доказательствѣ основной теоремы о равновеликости двухъ пирамидъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, геометрія искони прибѣгаетъ къ методу предѣловъ, разсматривая пирамиды, какъ предѣлы вписанныхъ и описанныхъ призмъ. Помимо дидактическихъ трудностей (учащіеся не даромъ назвали эту фигуру чертовой лѣстницей), появленіе здѣсь метода предѣловъ сначала представляется страннымъ по существу. Когда мы доказываемъ равновеликость прямолинейныхъ фигуръ въ планиметріи, мы не только не прибѣгаемъ къ предѣламъ, но пользуемся наиболѣе элементарными средствами. Именно, для этой цѣли примѣняются два пріема, изъ которыхъ одинъ въ нѣмецкой литературѣ принято называть

---

*) Подробное изложеніе всѣхъ этихъ вопросовъ содержится въ брошюрѣ М. Попруженко. «Матеріалы по методикѣ анализа б. м. въ средней школѣ».

**) Пренія по докладу см. стр. 117.

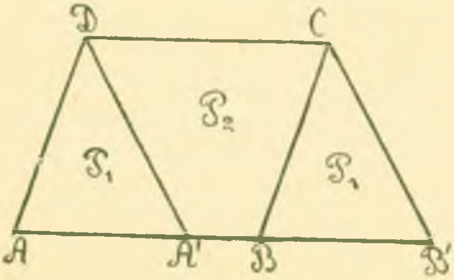
методомъ разложенія (Zerlegungsmethode), а другой— методомъ дополненія (Ergänzungsmethode). Методъ разложенія заключается въ томъ, что для доказательства равновеликости двухъ фигуръ одну изъ нихъ разрѣзаютъ на части, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи можетъ быть составлена вторая фигура. Такъ, для доказательства равновеликости параллелограммовъ (Q) $ABCD$ и (Q') $A'B'CD$ (фиг. 1) мы первый разлагаемъ на треугольникъ P_1 и трапецію P_2, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи составляется второй параллелограммъ. Можно сказать, что методъ разложенія заключается въ томъ, что фигуры представляются, какъ суммы соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей. Методъ дополненія заключается въ томъ, что къ обоимъ многоугольникамъ различнымъ образомъ присоединяются конгруэнтные многоугольники такъ, что въ результатѣ получаются конгруэнтныя фигуры. Чтобы доказать равновеликость параллелограммовъ Q ($ABCD$) и Q' ($A'B'CD$) (фиг. 2) къ нимъ присоединяютъ конгруэнтные треугольники ADA' и BCB' (P_1) и такимъ образомъ дополняютъ до трапеціи P ($AB'CD$); такъ что

$$P = P_1 + Q \text{ и } P = P_1 + Q';$$

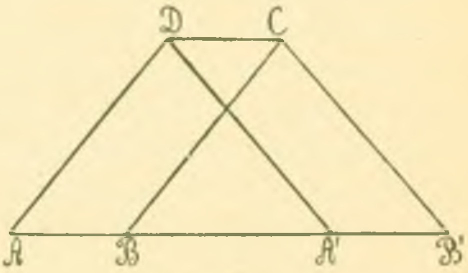
откуда

$$Q = P - P_1 \text{ и } Q' = P - P_1.$$

Методъ дополненія заключается, слѣдовательно, въ томъ, что оба многоугольника представляются въ видѣ разности конгруэнтныхъ многоугольниковъ.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Очень часто комбинируются оба пріема; въ такомъ случаѣ дѣло сводится къ тому, что оба многоугольника представляются въ видѣ алгебраической суммы соотвѣтственно конгруэнтныхъ многоугольниковъ. Примѣненіе обоихъ пріемовъ даетъ обыкновенно лучшіе результаты въ томъ смыслѣ, что доказательства получаются наиболѣе простыя. Но, какъ оказывается, необходимости въ примѣненіи обоихъ пріемовъ нѣтъ.—Въ 1895 г. проф. Лаццери доказалъ *), что эквивалентность двухъ многоугольниковъ, когда таковая имѣетъ мѣсто, всегда можетъ быть доказана методомъ разложенія. Иными словами, проф. Лаццери доказалъ слѣдующую замѣчательную теорему:

Если два многоугольника равновелики, то любой изъ нихъ всегда можно разрѣзать на конечное число частей, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи можно составить второй многоугольникъ.

Иначе: два равновеликихъ многоугольника всегда могутъ быть составлены изъ соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей, взятыхъ въ конечномъ числѣ.

Въ частности, каждый многоугольникъ можно такимъ путемъ превратить въ квадратъ, т. е. каждый многоугольникъ можно разрѣзать на такія части, изъ которыхъ при иномъ расположеніи ихъ составляется равновеликій этому многоугольнику квадратъ.

Доказательство проф. Лаццери отличается полной элементарностью, но за недостаткомъ времени я не имѣю возможности его здѣсь приводить; въ настоящемъ докладѣ я желалъ бы сосредоточить ваше вниманіе на другой сторонѣ дѣла—на доказательствахъ равновеликости многогранниковъ.

Казалось бы, что и здѣсь доказательство слѣдуетъ вести въ томъ же порядкѣ идей—методами разложенія и дополненія. И дѣйствительно, при доказательствѣ равновеликости многогранниковъ чаще всего и находятъ себѣ примѣненіе эти пріемы. Съ помощью ихъ мы доказываемъ равновеликость параллелепипедовъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, а также равновеликость прямой и наклонной призмы при извѣстныхъ условіяхъ. Но, когда мы обращаемся къ доказа-

---

*) G. Lazzeri. «Sulla teoria della equivalenza geometrica». «Periodico di matematica, 10, 1895. G. Sforza. A proposito della nota del prof. Lazzeri sulla teoria dell'equivalenza geometrica». Ibidem.

тельству равновеликости пирамидъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, то эти пріемы отказываются служить: какъ я уже сказалъ, геометрія искони прибѣгаетъ здѣсь къ методу предѣловъ; мы находимъ его уже въ XII книгѣ Евклида.

Гдѣ источникъ этого затрудненія? Коренится ли оно въ существѣ дѣла или оно обусловливается тѣмъ, что мы не умѣемъ примѣнить здѣсь прежнихъ методовъ. Иначе говоря, можетъ ли теорема Лаццери быть распространена и на многогранники или нѣтъ? Если каждый многогранникъ можетъ быть путемъ разложенія или хотя бы путемъ разложенія и дополненія преобразованъ въ любой равновеликій ему многогранникъ, то нужно будетъ только указать, какъ это выполнить по отношенію къ трехграннымъ пирамидамъ, и предѣлы будутъ изъ этого отдѣла геометріи изгнаны. Если же обнаружится, что многогранники въ этомъ отношеніи коренными образомъ отличаются отъ многоугольниковъ, т. е. если будетъ доказано, что существуютъ, скажемъ, равновеликія пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами, которыя не могутъ быть преобразованы одна въ другую разложеніемъ и дополненіемъ, то тогда станетъ ясно, что именно заставило ввести въ этомъ пунктѣ предѣлы.

Надъ разрѣшеніемъ этой задачи немало трудились, но безуспѣшно. Не только не удавалось доказать, что всякій многогранникъ можетъ быть преобразованъ въ любой другой равновеликій ему многогранникъ, но даже построить одну пирамиду, которую удалось бы разрѣзать на части такъ, чтобы изъ нихъ можно было составить кубъ, даже это оказалось задачей отнюдь не изъ легкихъ. Въ математическомъ кабинетѣ Гёттингенскаго университета имѣются только двѣ такія модели *), изъ которыхъ одна указана датскимъ математикомъ Джюлемъ, а другая—англійскимъ математикомъ Гилломъ.

Въ 1900 г. на I Международномъ Математическомъ Кон-

---

*) C. Juel «Egalité par addition de quelques polyedres». Kjobenhavn. Overs. Vid. Selsk. 1903. Небольшой рефератъ объ этой работѣ подъ заглавіемъ «Ueber das Volumen der Pyramide» помѣщенъ въ XII томѣ журнала «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung».

Hill. Proceedings of the London Math. Society. Vol. XXVII.

грессѣ профессоръ Гёттингенскаго университета Д. Гильбертъ произнесъ рѣчь подъ названіемъ «Математическія проблемы». Въ этой рѣчи онъ сконцентрировалъ рядъ задачъ, разрѣшеніе которыхъ поглотило уже не мало усилій, не давшихъ еще благопріятныхъ результатовъ. Онъ указалъ важнѣйшія изъ этихъ проблемъ, на которыхъ должно быть сосредоточено вниманіе математиковъ. Третья изъ этихъ 23 проблемъ и есть задача о преобразованіи многогранниковъ*). Задача поставлена здѣсь Гильбертомъ такъ: можетъ ли всякій тетраэдръ быть преобразованъ въ любой равновеликій тетраэдръ методомъ разложенія?

Черезъ два года ученикъ Гильберта, М. Денъ, нынѣ профессоръ въ Мюнстерѣ, опубликовалъ въ журналѣ «Mathematische Annalen» статью, содержащую отвѣтъ на этотъ вопросъ **).

Статья Дена содержитъ даже больше, чѣмъ одинъ только отвѣтъ на этотъ вопросъ. Онъ доказываетъ, что многогранники, могущіе быть преобразованными одинъ въ другой путемъ разложенія или дополненія, должны удовлетворять условію, заключающемуся въ слѣдующемъ.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots, \alpha_m$ суть двугранные углы одного многогранника, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3\ldots, \beta_m$—двугранные углы второго многогранника, выраженные въ частяхъ прямого угла, то существуютъ такія цѣлыя положительныя числа $A_1, A_2,\ldots, A_m$ и $B_1, B_2,\ldots, B_n$ и такое цѣлое (положительное или отрицательное) число k, что

$$(A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\ldots+A_m\alpha_m)-(B_1\beta_1+B_2\beta_2+\ldots+B_n\beta_n)=2kd. \quad (1)$$

А такъ какъ, далѣе, существуютъ равновеликіе многогранники, для которыхъ условіе (1) не выполняется, то отсюда слѣдуетъ, что равновеликіе многогранники не всегда могутъ быть этимъ путемъ преобразованы другъ въ друга; напротивъ, какъ мы увидимъ ниже, возможность такого преобразованія является рѣдкимъ исключеніемъ.

---

*) D. Hilbert. «Les problèmes mathématiques». Comptes Rendus du Congrès International Mathématique. Paris. 1900. См. также Göttingener Nachrichten, 1900.

**) M. Dehn. «Ueber Raumgleiche Polyeder», Göttingener Nachrichten, 1900; «Ueber den Rauminhalt», Mathematische Annalen. 55. 1901.

Работа Дена написана крайне сжато и доступна только спеціалистамъ. Когда она появилась въ свѣтъ, я поручилъ одному изъ своихъ учениковъ, г. Рейтеру, изложить это изслѣдованіе въ болѣе доступной формѣ для опубликованія въ «Вѣстникѣ Опытной Физики». Я долженъ сказать, однако, что, лишь скрѣпя сердце, помѣстилъ эту статью; она осталась мало доступной, хотя г. Рейтеръ несомнѣнно сдѣлалъ все возможное, чтобы изложить эти идеи возможно яснѣе.

Но въ виду фундаментальной важности теоремы Дена меня неотступно занимала мысль найти иное, болѣе простое доказательство этого предложенія. Черезъ два года мнѣ дѣйствительно удалось найти неизмѣримо болѣе простое доказательство теоремы Дена, основанное на совершенно иномъ принципѣ. Это доказательство было мною опубликовано въ 57 томѣ «Mathem. Annalen» *). Но и послѣ этого я не разъ возвращался къ этой же проблемѣ и внесъ въ нее значительныя упрощенія. Мнѣ кажется, что въ этомъ упрощенномъ видѣ мнѣ удастся изложить Вамъ это доказательство и сдѣлать изъ него необходимые выводы.

§ 2. Нѣсколько словъ объ однородныхъ уравненіяхъ.

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ разсужденіямъ геометрическаго характера, мнѣ необходимо нѣсколько остановиться на системѣ линейныхъ однородныхъ уравненій.

Положимъ, что мы имѣемъ рядъ линейныхъ однородныхъ уравненій, связывающихъ n неизвѣстныхъ

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

именно:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_n x_n &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_n x_n &= 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_n x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \dots + k_n x_n &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

---

*) B. Kagan. „Ueber die Transformation der Polyeder“, Leipzig. Mathematische Annalen, 1903.

Если такая система имѣетъ рѣшенія, отличныя отъ нуля, точнѣе, если этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ значенія, которыя не всѣ сводятся къ нулю, то число независимыхъ уравненій въ этой системѣ меньше числа неизвѣстныхъ (n); остальныя же, если таковыя существуютъ, представляютъ собой слѣдствія предыдущихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы допустить, что среди уравненій (1) имѣется n независимыхъ, то они имѣли бы только одну систему рѣшеній и именно:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Если, слѣдовательно, помимо нулевыхъ рѣшеній имѣются другія, которыя не сводятся всѣ къ нулю, то число h независимыхъ уравненій въ системѣ (1) меньше n.

Но отсюда слѣдуетъ, далѣе, что такая система уравненій имѣетъ также безчисленное множество системъ цѣлыхъ рѣшеній, если только коэффиціенты этихъ уравненій раціональны.

Въ самомъ дѣлѣ, если среди уравненій (1) имѣется h независимыхъ уравненій, а остальныя представляютъ собой слѣдствія этихъ послѣднихъ, то изъ независимыхъ уравненій можно опредѣлить h неизвѣстныхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_h$ въ зависимости отъ остальныхъ; получимъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 x_{h+1} + A_2 x_{h+2} + \ldots + A_{n-h} x_n, \\ x_2 &= B_1 x_{h+1} + B_2 x_{h+2} + \ldots + B_{n-h} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_h &= G_1 x_{h+1} + G_2 x_{h+2} + \ldots + G_{n-h} x_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

гдѣ коэффиціенты $A, B, C, \ldots, G$ суть раціональныя числа. Теперь мы можемъ дать неизвѣстнымъ $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$ произвольныя значенія, и тогда уравненія (2) опредѣлятъ значенія остальныхъ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_h$. Если мы дадимъ неизвѣстнымъ $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$ раціональныя значенія, то при раціональныхъ коэффиціентахъ и остальныя неизвѣстныя получатъ раціональныя значенія. Значенія всѣхъ неизвѣстныхъ мы можемъ привести къ одному знаменателю, такъ что получимъ:

$$x_1 = \frac{M_1}{M},\ x_2 = \frac{M_2}{M}, \ldots,\ x_h = \frac{M_h}{M}, \ldots,\ x_n = \frac{M_n}{M}. \qquad (3)$$

Но если однороднымъ уравненіямъ удовлетворяютъ нѣкоторыя значенія неизвѣстныхъ, то мы получимъ другія значенія, удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ, если помножимъ первыя на одно и то-же число. Если помножимъ поэтому значенія (3) на M, то получимъ цѣлыя числа

$$x_1 = M_1,\ x_2 = M_2, \ldots,\ x_n = M_n,$$

удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ.

Но для насъ имѣетъ важное значеніе еще одна подробность. Уравненіямъ (1) можно удовлетворить ирраціональными, раціональными и цѣлыми значеніями для неизвѣстныхъ. Но если можно подобрать какую-либо систему рѣшеній, хотя бы даже ирраціональныхъ, но составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ (конечно, отличныхъ отъ нуля), то уравненія имѣютъ также систему цѣлыхъ рѣшеній, составленныхъ изъ положительныхъ чиселъ (опять таки, конечно, отличныхъ отъ нуля). Въ самомъ дѣлѣ, если уравненія имѣютъ систему раціональныхъ положительныхъ рѣшеній, то, умноживъ ихъ на общаго знаменателя, получимъ систему цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Положимъ теперь, что уравненіямъ (1) удовлетворяютъ положительныя значенія

$$l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots,\ l_h,\ l_{h+1},\ l_{h+2}, \ldots,\ l_n, \tag{4}$$

среди которыхъ есть и ирраціональныя. Это значитъ, если мы неизвѣстнымъ

$$x_{h+1},\ x_{h+2}, \ldots,\ x_n,$$

дадимъ значенія

$$l_{h+1},\ l_{h+2}, \ldots,\ l_n, \tag{5}$$

то неизвѣстныя

$$x_1, x_2, \ldots, x_h$$

изъ уравненій (2) получатъ значенія

$$l_1,\ l_2, \ldots,\ l_h. \tag{6}$$

Въ первой группѣ необходимо имѣются ирраціональныя значенія, такъ какъ иначе всѣ неизвѣстныя получили бы раціональныя значенія. Но формулы (2) обнаруживаютъ, что значенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2\, x_3, \ldots, x_n$ измѣняются непрерывно, когда мы непрерывно измѣняемъ значенія неизвѣстныхъ $(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$. Если поэтому при положительныхъ значеніяхъ (5) неизвѣстныхъ $x_{h+1}\ {}_{h+2}, , \ldots, x_n$ первыя неизвѣстныя $(x_1, x_2, \ldots, x_h)$ получаютъ положительныя значенія, то мы получимъ другія положительныя же значенія для неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_h$, если возьмемъ для $x_{h+1}, x_{h+2} \ldots, x_n$ иныя значенія, достаточно близкія къ числамъ (5). Но сколько угодно близко къ ирраціональному числу имѣются раціональныя числа; мы можемъ, слѣдовательно, второй группѣ неизвѣстныхъ дать раціональныя положительныя значенія, настолько мало отличающіяся отъ чиселъ (5), что остальныя неизвѣстныя сохранятъ положительныя значенія, хотя и станутъ раціональными. Получивъ же систему положительныхъ раціональныхъ рѣшеній, мы можемъ отъ нихъ перейти къ системѣ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Итакъ, если система однородныхъ линейныхъ уравненій удовлетворяется значеніями, отличными отъ нуля, то она допускаетъ также системы цѣлыхъ рѣшеній. Если же она имѣетъ хоть одну систему рѣшеній, составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ, то она допускаетъ систему цѣлыхъ рѣшеній, также составленную изъ положительныхъ чиселъ.

§ 3. О скелетѣ разложенія.

Положимъ, что нѣкоторый многогранникъ какимъ либо образомъ разбитъ на составляющіе многогранники; ребра этихъ послѣднихъ располагаются въ исходномъ многогранникѣ по отрѣзкамъ, совокупность которыхъ мы будемъ называть скелетомъ разложенія. Мы представляемъ себѣ этотъ скелетъ, какъ совокупность натянутыхъ и скрѣпленныхъ между собою проволокъ, которыя мы можемъ при желаніи отдѣлить какъ отъ исходнаго многогранника, такъ и отъ составляющихъ многогранниковъ. Пояснимъ это на примѣрахъ.

На фиг. 3 изображена четырехгранная пирамида $ABCDE$, которая разложена на четыре трехгранныя пирамиды $(OABC,$

Но если однороднымъ уравненіямъ удовлетворяютъ нѣкоторыя значенія неизвѣстныхъ, то мы получимъ другія значенія, удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ, если помножимъ первыя на одно и то-же число. Если помножимъ поэтому значенія (3) на M, то получимъ цѣлыя числа

$$x_1 = M_1,\ x_2 = M_2, \ldots,\ x_n = M_n,$$

удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ.

Но для насъ имѣетъ важное значеніе еще одна подробность. Уравненіямъ (1) можно удовлетворить ирраціональными, раціональными и цѣлыми значеніями для неизвѣстныхъ. Но если можно подобрать какую-либо систему рѣшеній, хотя бы даже ирраціональныхъ, но составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ (конечно, отличныхъ отъ нуля), то уравненія имѣютъ также систему цѣлыхъ рѣшеній, составленныхъ изъ положительныхъ чиселъ (опять таки, конечно, отличныхъ отъ нуля). Въ самомъ дѣлѣ, если уравненія имѣютъ систему раціональныхъ положительныхъ рѣшеній, то, умноживъ ихъ на общаго знаменателя, получимъ систему цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Положимъ теперь, что уравненіямъ (1) удовлетворяютъ положительныя значенія

$$l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots,\ l_h,\ l_{h+1},\ l_{h+2}, \ldots,\ l_n, \tag{4}$$

среди которыхъ есть и ирраціональныя. Это значитъ, если мы неизвѣстнымъ

$$x_{h+1},\ x_{h+2}, \ldots,\ x_n,$$

дадимъ значенія

$$l_{h+1},\ l_{h+2}, \ldots,\ l_n, \tag{5}$$

то неизвѣстныя

$$x_1, x_2, \ldots, x_h$$

изъ уравненій (2) получатъ значенія

$$l_1,\ l_2, \ldots,\ l_h. \tag{6}$$

Въ первой группѣ необходимо имѣются ирраціональныя значенія, такъ какъ иначе всѣ неизвѣстныя получили бы раціональныя значенія. Но формулы (2) обнаруживаютъ, что значенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2\, x_3, \ldots, x_n$ измѣняются непрерывно, когда мы непрерывно измѣняемъ значенія неизвѣстныхъ $(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$. Если поэтому при положительныхъ значеніяхъ (5) неизвѣстныхъ $x_{h+1}\ {}_{h+2}, \ldots, x_n$ первыя неизвѣстныя $(x_1, x_2, \ldots, x_h)$ получаютъ положительныя значенія, то мы получимъ другія положительныя же значенія для неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_h$, если возьмемъ для $x_{h+1}, x_{h+2} \ldots, x_n$ иныя значенія, достаточно близкія къ числамъ (5). Но сколько угодно близко къ ирраціональному числу имѣются раціональныя числа; мы можемъ, слѣдовательно, второй группѣ неизвѣстныхъ дать раціональныя положительныя значенія, настолько мало отличающіяся отъ чиселъ (5), что остальныя неизвѣстныя сохранятъ положительныя значенія, хотя и станутъ раціональными. Получивъ же систему положительныхъ раціональныхъ рѣшеній, мы можемъ отъ нихъ перейти къ системѣ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

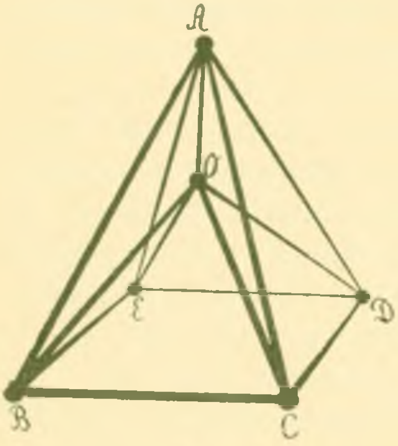
Итакъ, если система однородныхъ линейныхъ уравненій удовлетворяется значеніями, отличными отъ нуля, то она допускаетъ также системы цѣлыхъ рѣшеній. Если же она имѣетъ хоть одну систему рѣшеній, составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ, то она допускаетъ систему цѣлыхъ рѣшеній, также составленную изъ положительныхъ чиселъ.

§ 3. О скелетѣ разложенія.

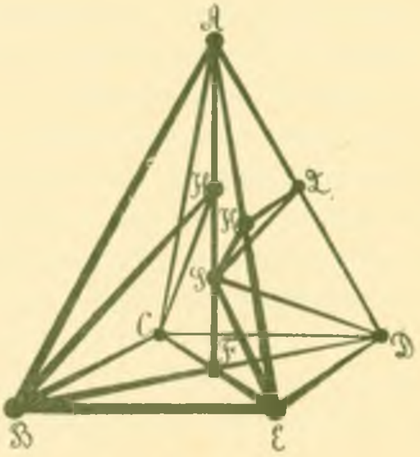
Положимъ, что нѣкоторый многогранникъ какимъ либо образомъ разбитъ на составляющіе многогранники; ребра этихъ послѣднихъ располагаются въ исходномъ многогранникѣ по отрѣзкамъ, совокупность которыхъ мы будемъ называть *скелетомъ разложенія*. Мы представляемъ себѣ этотъ скелетъ, какъ совокупность натянутыхъ и скрѣпленныхъ между собою проволокъ, которыя мы можемъ при желаніи отдѣлить какъ отъ исходнаго многогранника, такъ и отъ составляющихъ многогранниковъ. Поясними это на примѣрахъ.

На фиг. 3 изображена четырехгранная пирамида $ABCDE$, которая разложена на четыре трехгранныя пирамиды $(OABC,$

OACD, OADE, OAEB) и одну четырехгранную пирамиду (*OBCDE*), которыя имѣютъ общую вершину въ точкѣ *O*. Ребра составляющихъ пирамидъ располагаются по 13 отрѣзкамъ, изъ которыхъ 8 совпадаютъ съ ребрами исходной пирамиды, а остальные 5 сходятся въ точкѣ *O* и расположены внутри исходной пирамиды. Эти 13 отрѣзковъ изображены на чертежѣ; если себѣ представить, что нанесенныя на чертежѣ линіи реализованы въ видѣ безконечно тонкихъ, скрѣпленныхъ проволокъ, то скелетъ будетъ реализованъ: его можно будетъ отдѣлить отъ многогранниковъ, въ него можно вложить составляющіе многогранники, которые въ совокупности составятъ исходный многогранникъ.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 4 изображена четырехгранная пирамида *ABCDE*. Она разложена на четыре трехгранныя пирамиды: *ABCF, ACDF, ADEF, AEBF*; изъ нихъ первая, въ свою очередь, разложена на двѣ трехгранныя пирамиды (*BACH* и *BCHF*), а третья на три пирамиды, сходящіяся въ вершинѣ *G* (*GFED, GEKLD, GAKL*). Такимъ образомъ получается 7 пирамидъ, на которыя разбивается наша исходная пирамида. Глядя на этотъ рисунокъ, мы представляемъ себѣ исходную и составляющія пирамиды. Но если мы отрѣшимся отъ тѣлесныхъ представленій и вообразимъ себѣ просто проволоки, натянутыя по всѣмъ линіямъ рисунка, то онѣ составятъ скелетъ разложенія.

Разсматривая эти скелеты, мы видимъ, что на ребрѣ составляющаго многогранника могутъ находиться вершины и другихъ составляющихъ многогранниковъ. Всѣ точки, въ которыхъ находятся вершины составляющихъ многогранниковъ, мы будемъ называть сочлененіями скелета: въ этихъ точкахъ должны быть скрѣплены наши воображаемыя проволоки, чтобы скелетъ представлялъ собою одно цѣлое. На нашихъ рисункахъ сочлененія отмѣчены буквами; въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 3, ихъ имѣется 6 (A, B, C, D, E, O); въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 4, ихъ 10 $(A, B, C, D, E, F, G, H, K, L)$.

Сочлененія разбиваютъ каждый отрѣзокъ скелета, на части, которыя мы будемъ называть звеньями скелета. Въ разложеніи на фигурѣ 3 каждый отрѣзокъ образуетъ одно звено; въ разложеніи на фигурѣ 4 отрѣзокъ AF распадается на три звена (AH, HG, GF), отрѣзокъ AE распадается на два звена $(AK$ и $KE)$, отрѣзокъ AD—также на два звена $(AL$ и $LD)$. Весь скелетъ всегда состоитъ изъ звеньевъ, скрѣпленныхъ въ сочлененіяхъ.

Къ каждому звену скелета прилегаютъ ребра или части реберъ составляющихъ многогранниковъ. Въ разложеніи изображенномъ на фигурѣ 3, къ звену OA, скажемъ, прилегаютъ 4 составляющихъ многогранника, къ каждому изъ звеньевъ OB, OC, OD, OE прилегаютъ по 3 составляющихъ многогранника, къ каждому изъ нижнихъ звеньевъ BC, CD, DE, EB и боковыхъ звеньевъ AB, AC, AD, AE, прилегаютъ по 2 многогранника. Въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 4, звено GH окружено 4 многогранниками; къ звену CH прилегаютъ ребра двухъ многогранниковъ и въ то же время оно само лежитъ на грани (ACF) одного изъ составляющихъ многогранниковъ.

Изъ этихъ примѣровъ мы видимъ, что звенья могутъ быть различно расположены относительно составляющихъ многогранниковъ; сообразно этому мы ихъ разобьемъ на 3 типа.

Мы будемъ относить звено къ первому типу, если многогранники, ребра котораго къ нему прилегаютъ, окружаютъ это звено со всѣхъ сторонъ, такъ что прилегающіе къ нему двугранные углы составляютъ въ суммѣ $4d$. Таковы внутреннія гранника при этомъ ребрѣ равенъ a, то сумма двугранныхъ угловъ составляющихъ многогранниковъ, прилегающихъ къ этому звену также равна a. Такого рода звено BF изображено на фигурѣ 8-ой; къ нему прилегаютъ ребра двухъ составляющихъ призмъ такъ что сумма двугранныхъ угловъ при этихъ ребрахъ равна двугранному углу a, образуемому заштрихованными гранями исходнаго многогранника.

Такого рода звенья мы будемъ относить къ третьему типу и каждому такому звену отнесемъ аргументъ, равный двугранному углу a исходнаго многогранника, на которомъ оно лежитъ.

Итакъ, звенья скелета разлагаются на три типа звенья перваго типа имѣютъ аргументъ $4d$, звенья второго типа имѣютъ аргументъ $2d$, звенья третьяго типа; имѣютъ аргументы, равные двуграннымъ угламъ исходнаго многогранника.

§ 4. Объ отрѣзкахъ разложенія.

Ребра составляющихъ многогранниковъ прилегаютъ къ звеньямъ скелета. Иногда ребро цѣликомъ прилегаетъ къ одному звену, иногда же ребро разбивается сочлененіями на нѣсколько частей. Эти части мы будемъ называть отрѣзками разложенія. Нужно отчетливо уяснить себѣ разницу между звеньями и отрѣзками разложенія; звенья принадлежатъ скелету; каждый же отрѣзокъ разложенія лежитъ на одномъ изъ реберъ составляющаго многогранника. Если мы раздвинемъ составляющіе многогранники, то звенья останутся на скелетѣ, а отрѣзки разложенія отойдутъ вмѣстѣ съ ребрами. Это отчетливо видно на фигурѣ 6-ой. На скелетѣ ABC, отмѣченномъ жирнымъ штрихомъ, мы видимъ звенья AB и BC. Ребро AB правой пирамиды цѣликомъ примыкаетъ къ звену AB; это ребро содержитъ поэтому только одинъ отрѣзокъ разложенія. Ребро AC лѣвой пирамиды разлагается звеньями на 2 отрѣзка разложенія AB и BC. Точно такъ же ребро AC передней призмы состоитъ изъ двухъ отрѣзокъ разложенія, а ребро AB задней призмы имѣетъ только одинъ отрѣзокъ разложенія. Если мы сдвинемъ снова составляющіе многогранники, то къ звену AB на скелетѣ примкнутъ 4 равныхъ ему отрѣзка разложенія на четырехъ прилегающихъ къ этому звену многогранникахъ.

§ 5. О двухъ разложеніяхъ.

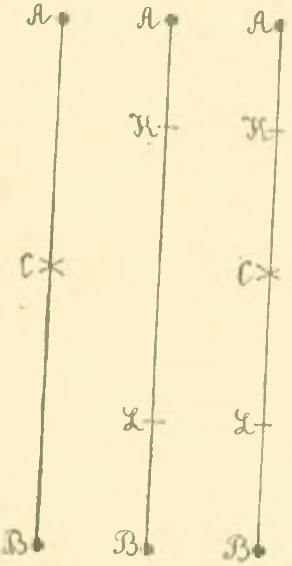
Положимъ теперь, что мы имѣемъ два многогранника, которые составлены изъ соотвѣтственно конгруэнтныхъ многогранниковъ. Выражаясь нагляднѣе, можно сказать, что второй многогранникъ составленъ изъ тѣхъ же составляющихъ многогранниковъ, что и первый, только иначе расположенныхъ. Для большей простоты и наглядности мы будемъ называть наши два исходныхъ многогранника большими многогранниками а тѣ многогранники, изъ которыхъ они составлены, малыми многогранниками.

Итакъ, оба большихъ многогранника различнымъ образомъ составлены изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Каждый изъ малыхъ многогранниковъ фигурируетъ, слѣдовательно, въ одномъ и въ другомъ разложеніи.

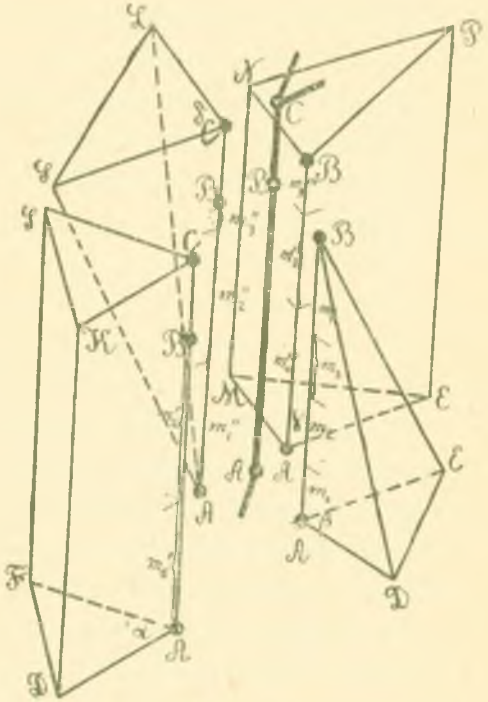
Каждому разложенію соотвѣтствуетъ свой скелетъ; звенья каждаго изъ скелетовъ раздѣляютъ ребра малыхъ многогранниковъ на отрѣзки разложенія. Возьмемъ какое либо ребро AB одного изъ малыхъ многогранниковъ; оно фигурируетъ въ одномъ и въ другомъ разложеніи. Въ первомъ разложеніи это ребро раздѣляется звеньями, скажемъ, на два отрѣзка AC и CB (фиг. 9); въ другомъ разложеніи то же самое ребро раздѣляется на иное число частей, скажемъ, на три (AK, KL и LB на фиг. 9). Нанесемъ теперь на ребрѣ точки дѣленія, соотвѣтствующія одному и другому разложенію, какъ это показано на 3-мъ отрѣзкѣ AB на фиг. 9. Отрѣзки разобьются теперь на болѣе мелкіе отрѣзки, которые мы будемъ называть элементарными отрѣзками. Эти элементарные отрѣзки опредѣляются уже не однимъ, а обоими разложеніями.

Мы представимъ себѣ теперь, что на каждомъ ребрѣ каждаго изъ малыхъ многогранниковъ нанесены элементарные отрѣзки, опредѣляемые на этомъ ребрѣ обоими разложеніями. Эти элементарные отрѣзки располагаются на ребрахъ малыхъ многогранниковъ въ одномъ и другомъ разложеніи, причемъ въ обоихъ разложеніяхъ мы имѣемъ тѣ же элементарные отрѣзки.

Фигура 10 воспроизводитъ фигуру 6 съ тѣмъ различіемъ, что на отрѣзкѣ разложенія *AB* каждаго изъ малыхъ многогранниковъ нанесены элементарные отрѣзки. На ребрѣ *AB* правой пирамиды мы видимъ четыре элементарныхъ отрѣзка. На передней призмѣ отрѣзокъ *AB* имѣетъ два элементарныхъ отрѣзка, а на каждомъ изъ остальныхъ многогранниковъ отрѣзокъ *AB* разбитъ на 3 элементарныхъ отрѣзка.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

Каждому элементарному отрѣзку мы вновь припишемъ аргументъ; именно, подъ аргументомъ каждаго элементарнаго отрѣзка мы будемъ разумѣть двугранный уголъ при томъ ребрѣ, на которомъ онъ лежитъ. Всѣ элементарные отрѣзки, лежащіе на одномъ и томъ же ребрѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же аргументъ, именно двугранный уголъ при этомъ ребрѣ.

Но мы пойдемъ дальше и каждому элементарному отрѣзку отнесемъ нѣкоторое положительное число, которое будемъ называть массой этого элементарнаго отрѣзка. Эти положительныя числа мы выберемъ совершенно произвольно съ однимъ только условіемъ: если къ одному и тому же звену, въ томъ или другомъ разложеніи прилегаютъ на одномъ отрѣзкѣ разложенія элементарные отрѣзки съ массами m_1, m_2, m_3, .. m_i, на другомъ отрѣзкѣ разложенія—элементарные отрѣзки съ массами m_1', m_2', ... m_j', наконецъ, на третьемъ отрѣзкѣ разложенія—элементарные отрѣзки съ массами m_1'', m_2'', m_3'', ...$m_\varkappa''$ и т. д., то наше единственное требованіе будетъ заключаться въ томъ, чтобы были равны ихъ суммы:

$$m_1+m_2+\ldots+m_i=m_1'+m_2'+\ldots+m'_j=m_1''+m_2''+\ldots\ldots+m''_\varkappa \qquad (7).$$

Этой группѣ уравненій должны удовлетворять массы элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ одному звену; общее значеніе M этихъ суммъ мы примемъ за массу самого звена. Звено AB на фигурѣ 10 потребуетъ, такимъ образомъ, слѣдующихъ уравненій:

$$m_1+m_2+m_3+m_4=m_1'+m_2'=m_1''+m_2''+m_3''=m_1'''+m_2'''+m_3''';\qquad (8)$$

общее же значеніе каждой изъ этихъ суммъ представитъ массу звена AB.

Каждому звену соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, группа уравненій вида (7). Такихъ группъ получится, слѣдовательно, столько, сколько есть звеньевъ въ обоихъ разложеніяхъ.

Уравненій получится много; можно ли всѣмъ этимъ уравненіямъ удовлетворить? Очевидно, возможно: для этого достаточно принять за массу каждаго элементарнаго отрѣзка его длину. Мы сдѣлаемъ, однако, другой выборъ. Согласно нашему требованію, массы должны удовлетворять только системамъ уравненій вида (7). Но это суть однородныя линейныя уравненія съ цѣлыми коэффиціентами; и разъ они удовлетворяются одной системой положительныхъ значеній, то имъ можно удовлетворить также цѣлыми положительными значеніями для неизвѣстныхъ (§ 2). Вотъ такую систему цѣлыхъ положительныхъ значеній мы примемъ за массы элементарныхъ отрѣзковъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ массы звеньевъ также выразятся цѣлыми числами.

Прежде чѣмъ перейти къ послѣдней и важнѣйшей части этихъ разсужденій резюмируемъ установленные термины и положенія.

Мы имѣемъ два большихъ многогранника, составленныхъ изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Каждому разложенію соотвѣтствуетъ свой скелетъ, составленный изъ звеньевъ. Каждому звену приписанъ аргументъ, равный $4d$, $2d$ или одному изъ двугранныхъ угловъ большого многогранника.

Звенья раздѣляютъ ребра малыхъ многогранниковъ на отрѣзки разложенія; соединяя дѣленія одного и того же ребра въ обоихъ разложеніяхъ, мы разбили эти отрѣзки на меньшіе элементарные отрѣзки. Каждому элементарному отрѣзку мы приписали аргументъ; это есть двугранный уголъ при томъ ребрѣ, на которомъ этотъ элементарный отрѣзокъ лежитъ. Элементарные отрѣзки, лежащіе на одномъ и томъ же ребрѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же аргументъ.

Каждому элементарному отрѣзку мы также отнесли цѣлое положительное число, которое мы назвали его массой. Эти числа удовлетворяютъ слѣдующему условію: если къ одному и тому же звену прилегаютъ нѣсколько реберъ, то массы элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ этому звену, имѣютъ на одномъ ребрѣ такую же сумму, какъ на другомъ, третьемъ и т. д. Эту общую сумму, выражающуюся, конечно, также цѣлымъ положительнымъ числомъ, мы назвали массой звена.

Итакъ, каждое звено скелета имѣетъ массу и аргументъ.

§ 6. Основная теорема.

Мы введемъ еще одно—уже послѣднее—новое понятіе.

Подъ вѣсомъ элементарнаго отрѣзка или звена мы будемъ разумѣть произведеніе изъ его массы на аргументъ. Подъ вѣсомъ нѣсколькихъ отрѣзковъ или звеньевъ мы будемъ разумѣть сумму вѣсовъ этихъ отрѣзковъ или этихъ звеньевъ. Подъ вѣсомъ скелета мы будемъ разумѣть сумму вѣсовъ всѣхъ его звеньевъ.

Мы имѣемъ два большихъ многогранника, составленныхъ изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Моя основная теорема заключается въ томъ, что оба скелета имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ.

Основная теорема. Если два многогранника составлены изъ однихъ и тѣхъ же составляющихъ многогранниковъ, то скелеты обоихъ разложеній имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, мы покажемъ предварительно, что вѣсъ каждаго звена въ скелетѣ равенъ суммѣ вѣсовъ всѣхъ прилегающихъ къ нему элементарныхъ отрѣзковъ.

Возьмемъ звено AB на фигурѣ 10-й; къ нему прилегаютъ 4 отрѣзка AB на ребрахъ четырехъ составляющихъ многогранниковъ. На ребрѣ правой пирамиды отрѣзокъ AB состоитъ изъ четырехъ элементарныхъ отрѣзковъ съ массами m_1, m_2, m_3, m_4, и общимъ аргументомъ β. Поэтому сумма вѣсовъ этихъ элементарныхъ отрѣзковъ равна:

$$m_1\beta + m_2\beta + m_3\beta + m_4\beta = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\,\beta = M\beta,$$

гдѣ M есть масса звена AB. Точно такъ же сумма вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB и лежащихъ на ребрѣ передней призмы, равна:

$$m_1'\alpha + m_2'\alpha = (m_1' + m_2')\,\alpha = M\alpha.$$

Сумма вѣсовъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ тому же звену со стороны лѣвой пирамиды, равна $M\delta$, а сумма вѣсовъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB со стороны задней призмы, равна $M\gamma$.

Такимъ образомъ сумма вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB, равна:

$$M\alpha + M\beta + M\gamma + M\delta = M\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

гдѣ M есть масса звена, а сумма $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ равна $4d$, т. е. аргументу звена. Правая часть послѣдняго равенства представляетъ, такимъ образомъ, вѣсъ звена.

Совершенно ясно, что это разсужденіе носитъ общій характеръ и можетъ быть примѣнено ко всякому звену. Но если вѣсъ звена равняется суммѣ вѣсовъ всѣхъ прилегающихъ къ нему элементарныхъ отрѣзковъ, то вѣсъ всего скелета равенъ суммѣ вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ этого разложенія.

Съ другой стороны, какъ мы видѣли выше, элементарные отрѣзки въ обоихъ разложеніяхъ одни и тѣ же, такъ какъ они опредѣляются совокупностью двухъ разложеній; при этомъ каждый элементарный отрѣзокъ имѣетъ въ обоихъ разложеніяхъ одну и ту же массу, одинъ и тотъ же аргументъ, а, слѣдовательно, одинъ и тотъ же вѣсъ. Отсюда слѣдуетъ, что вѣса обоихъ скелетовъ могутъ быть представлены въ видѣ суммъ одинаковыхъ слагаемыхъ, а потому равны между собой.

§ 7. Теорема Дена.

Теперь нетрудно видѣть, что теорема Дена, формулированная въ § 1-мъ, представляетъ собой прямое слѣдствіе доказаннаго предложенія; въ самомъ дѣлѣ, пусть α_1, α_2, α_3, . . . , α_k будутъ двугранные углы перваго большого многогранника. Въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли въ § 3, звенья его скелета имѣютъ аргументами эти двугранные углы, а также $2d$ и $4d$. Пусть M_1 будетъ сумма массъ всѣхъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументы α_1; пусть M_2 будетъ сумма массъ всѣхъ звеньевъ съ аргументомъ α_2 и т. д.; пусть наконецъ M_k будетъ суммой массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ α_k. Далѣе черезъ M' обозначимъ сумму массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ $2d$, а черезъ M'' сумму массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ $4d$. Въ такомъ случаѣ вѣсъ скелета въ разложеніи этого многогранника равенъ:

$$M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + \ldots + M_k\alpha k + 2M'd + 4M''d = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + \ldots + Mk\alpha k + 2\ Md,$$

гдѣ $M = M' + 2M''$. Здѣсь M_1, M_2, $\ldots M_k$ суть цѣлыя положительныя числа. Что касается числа M, то оно можетъ иногда обратиться и въ нуль, такъ какъ звеньевъ съ аргументами $2d$ и $4d$ иногда можетъ и не быть; напримѣръ, если мы разложимъ октаэдръ на 2 четырехугольныя пирамиды, то такихъ звеньевъ не будетъ.

Такимъ же образомъ вѣсъ скелета въ разложеніи второго многогранника выражается черезъ:

$$N_1\beta_1 + N_2\beta_2 + N_3\beta_3 + \ldots + N_l\beta_l + 2Nd,$$

гдѣ коэффиціенты N_1, N_2, ..., N_l, суть цѣлыя положительныя числа, а N есть цѣлое положительное число или нуль. Въ силу нашей основной теоремы отсюда слѣдуетъ, что

$$M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + \ldots + M_\kappa\alpha_\kappa + 2Md = N_1\beta_1 + N_2\beta_2 + \ldots + N_l\beta_l + 2Nd. \quad (9)$$

Это и есть теорема Дена.

Итакъ, если два многогранника съ двугранными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$, могутъ быть составлены изъ однихъ и тѣхъ же многогранниковъ, т. е. могутъ быть преобразованы одинъ въ другой путемъ разрѣзанія и иного расположенія частей, то существуютъ цѣлыя положительныя числа M_1, M_2, ..., M_κ и N_1, N_2, ..., N_l, и цѣлыя неотрицательныя числа M и N, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство (3). Если поэтому мы обнаружимъ, что двугранные углы нѣкоторыхъ двухъ многогранниковъ не могутъ быть связаны соотношеніемъ (9), то они не могутъ быть составлены изъ одинаковыхъ многогранниковъ, хотя бы они и были равновелики.

§ 8. Преобразованіе тетраэдровъ методомъ разложенія.

Воспользуемся теперь доказанной теоремой для рѣшенія слѣдующаго вопроса. Можно ли правильный тетраэдръ и равновеликую ему прямоугольную призму составить изъ одинаковыхъ многогранниковъ? Иначе, можно ли правильный тетраэдръ разрѣзать на такія части, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи получится равновеликая прямоугольная призма? Еще иначе, можно ли правильный тетраэдръ преобразовать въ прямоугольную призму методомъ разложенія?

Въ правильномъ тетраэдрѣ всѣ двугранные углы равны, а въ прямоугольной призмѣ они прямые. Поэтому уравненіе (9), выражающее необходимое условіе преобразованія, приметъ видъ:

$$m\alpha + 2m'd = nd + 2n'd,$$

гдѣ α двугранный уголъ тетраэдра, m и n цѣлыя положительныя числа, m' и n' цѣлыя неотрицательныя числа. Это уравненіе можно привести къ виду:

$$m\alpha = ld \text{ и } \alpha = \frac{l}{m}d. \quad (10)$$

Такъ какъ здѣсь m есть положительное число, то и l есть положительное число. Этотъ результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Если правильный тетраэдръ можно преобразовать въ прямоугольную призму, то двугранный уголъ α правильнаго тетраэдра соизмѣримъ съ d.

Если мы поэтому обнаружимъ, что уголъ α несоизмѣримъ съ прямымъ угломъ, то этимъ будетъ доказано, что правильный тетраэдръ не можетъ быть преобразованъ въ кубъ.

Какъ извѣстно, если α есть двугранный уголъ правильнаго тетраэдра, то

$$\cos\alpha = \frac{1}{3};\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если бы имѣло мѣсто соотношеніе (10), то мы бы получили:

$$\cos\alpha \pm i\sin\alpha = \frac{1 \pm i\,2\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{ld}{m} \pm i\sin\frac{ld}{m}.$$

Возвышая всѣ части этого равенства въ степень $2m$, и примѣняя къ послѣдней части формулу Муавра, получимъ:

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{2m} = \left(\frac{1 \pm i\,2\sqrt{2}}{3}\right)^{2m} = \left(\cos\frac{ld}{m} \pm i\sin\frac{ld}{m}\right)^{2m} = \cos 2ld \pm i\sin 2ld = 1$$

Иными словами, каждое изъ чиселъ

$$\frac{1 + i\,2\sqrt{2}}{3} \text{ и } \frac{1 - i\,2\sqrt{2}}{3}$$

есть корень $2m$-ой степени изъ единицы, т. е. есть корень двучлена $x^{2m}-1$. Но въ такомъ случаѣ двучленъ $x^{2m}-1$ долженъ дѣлиться нацѣло на

$$\left(x - \frac{1 + i\,2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{1 - i\,2\sqrt{2}}{3}\right) = x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \tag{11}$$

Это есть такъ называемый приведенный раціональный дѣлитель двучлена $x^{2m} - 1$, т. е. дѣлитель съ раціональными коэффиціентами, въ которомъ старшій коэффиціентъ равенъ 1. Но хорошо извѣстно, что всякій приведенный дѣлитель двучлена $x^{2m}-1$ имѣетъ исключительно цѣлые коэффиціенты. Поэтому трехчленъ (11) не можетъ быть дѣлителемъ двухчлена $x^{2m}-1$, а двугранный уголъ правильнаго тетраэдра несоизмѣримъ съ прямымъ угломъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказано, что правильный тетраэдръ не можетъ быть преобразованъ въ равновеликую ему прямоугольную призму методомъ разложенія.

Теперь нетрудно обнаружить, что двѣ равновеликія трехгранныя пирамиды не всегда могутъ быть преобразованы одна въ другую методомъ разложенія даже и въ томъ случаѣ, если онѣ имѣютъ равныя высоты и равновеликія основанія. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что всякая трехгранная пирамида можетъ быть преобразована въ любую другую трехгранную пирамиду, имѣющую съ нею равновеликія основанія и равныя высоты. Возьмемъ правильный тетраэдръ $ABCD$ и равновеликую ему прямоугольную призму, имѣющую ту же высоту. Для этого достаточно за основаніе призмы взять третью часть основанія тетраэдра. Теперь изъ вершины A тетраэдра проведемъ его высоту AE. Тогда тетраэдръ разобьется на три равновеликія пирамиды $AEBC$, $AECD$, $AEDB$. Раздѣливъ сторону BC пополамъ въ точкѣ G, мы раздѣлимъ пирамиду $AEBC$ на двѣ трехгранныя пирамиды $AEBG$ и $AECG$. Такимъ же образомъ и каждую изъ двухъ другихъ пирамидъ $AECD$ и $AEDB$ мы также можемъ разбить на двѣ равновеликія пирамиды. Такимъ образомъ правильный тетраэдръ можетъ быть разложенъ на шесть равновеликихъ трехгранныхъ пирамидъ $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$, изъ которыхъ каждая имѣетъ ту же высоту, что и тетраэдръ, а основаніемъ—шестую часть площади основанія тетраэдра.

Съ другой стороны, прямоугольная призма, какъ извѣстно, можетъ быть раздѣлена діагональной плоскостью на двѣ равновеликія трехгранныя призмы, а трехгранная призма можетъ быть разложена на три равновеликія трехгранныя пирамиды, имѣющія ту же высоту и то же основаніе ¹). Такимъ обра-

---

¹) Трехгранная призма разлагается, впрочемъ, на три пирамиды ∇_1, ∇_2, ∇_3, изъ которыхъ только первыя двѣ имѣютъ съ призмой общія основанія и высоту; третья же пирамида ∇_3 лишь равновелика трехгранной пирамидѣ ∇_3', имѣющей съ призмой одинаковыя основанія и высоты. Однако, какъ извѣстно изъ доказательства этой теоремы, пирамиды ∇_3 и ∇_3' также имѣютъ при иномъ выборѣ вершины общую высоту и равновеликія основанія. Согласно дѣланному допущенію пирамида ∇_3 можетъ быть преобразована въ пирамиду ∇_3', и въ предыдущемъ разсужденіи ничто по существу, не мѣняется.

зомъ вся прямоугольная призма разобьется на шесть равновеликихъ между собой трехгранныхъ пирамидъ $\bigtriangledown_1$, $\bigtriangledown_2$, $\bigtriangledown_3$, $\bigtriangledown_4$, $\bigtriangledown_5$, $\bigtriangledown_6$, имѣющихъ съ пирамидами $\bigtriangleup_1, \ldots, \bigtriangleup_6$ одинаковыя высоты и равновеликія основанія. Если бы поэтому каждая пирамида $\bigtriangleup$ могла быть преобразована въ пирамиду $\bigtriangledown$, то правильный тетраэдръ могъ бы быть преобразованъ въ прямоугольную призму. А такъ какъ это невозможно, то не всякая трехгранная пирамида можетъ быть преобразована въ любую другую трехгранную пирамиду, имѣющую съ ней равновеликія основанія и равныя высоты.

§ 9. Методъ дополненія.

Изъ предыдущаго разсужденія вытекаетъ, что равновеликость трехгранныхъ пирамидъ, имѣющихъ равныя высоты и равновеликія основанія, не можетъ быть доказана методомъ разложенія. Но нельзя ли будетъ этого доказать методомъ дополненія?

Замѣтимъ, что невозможность осуществить требуемое доказательство методомъ разложенія имѣетъ своимъ источникомъ то обстоятельство, что двугранные углы двухъ многогранниковъ, которые могутъ быть другъ въ друга преобразованы связаны соотношеніемъ (9). Поэтому, если мы докажемъ, что это соотношеніе остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда два многогранника могутъ быть дополнены до двухъ конгруэнтныхъ многогранниковъ, или до двухъ равносоставленныхъ многогранниковъ, то вопросъ будетъ исчерпанъ. Это доказать нетрудно.

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ системы многогранниковъ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ и $P_1', P_2', P_3', \ldots, P_l'$ и что совокупность первыхъ многогранниковъ можетъ быть составлена изъ такихъ же составляющихъ многогранниковъ, какъ и совокупность вторыхъ, т. е. что существуетъ рядъ малыхъ многогранниковъ $p_1, p_2, \ldots, p_m$, изъ которыхъ въ одномъ расположеніи можно составить всю совокупность многогранниковъ P, а въ другомъ расположеніи—всю совокупность многогранниковъ P'.

Ничего не измѣняя въ разсужденіяхъ §§ 3—6, примѣняя ихъ только не къ двумъ многогранникамъ, а къ двумъ системамъ многогранниковъ, мы докажемъ, что скелетъ разложенія первой системы имѣетъ тотъ же вѣсъ, что и скелетъ разложенія второй системы. Отсюда же вытекаетъ, что равенство (9) остается въ силѣ, если подъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ будемъ разумѣть двугранные углы всѣхъ многогранниковъ P, а подъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_l$ будемъ разумѣть двугранные углы всѣхъ многогранниковъ P'.

Теперь сдѣламъ еще одно дополненіе къ тѣмъ соглашеніямъ, которыми устанавливается масса элементарныхъ отрѣзковъ. Мы подчинили эти массы только тому требованію, чтобы это были цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія уравненіямъ (7) для всякаго отрѣзка разложенія. Это условіе мы теперь усилимъ еще однимъ требованіемъ которое заключается въ слѣдующемъ: если какой-либо многогранникъ P имѣетъ ребро AB равное по длинѣ и по прилежащему къ нему двугранному углу (AB) ребру $A'B'$ нѣкотораго многогранника P', то мы требуемъ, чтобы массы этихъ частей скелета AB и $A'B'$ были равны. Это требованіе сводится только къ усиленію системы уравненій (7) еще рядомъ уравненій того же самаго вида. А такъ какъ этой обогащенной системѣ уравненій также можно удовлетворить, принимая массы равными длинамъ отрѣзковъ, то уравненія системы (7) остаются совмѣстными, и имъ можно удовлетворить цѣлыми положительными значеніями массъ.

Но если ребро AB входитъ какъ въ одно, такъ и въ другое разложеніе съ одинаковымъ двуграннымъ угломъ и съ одинаковой массой, то и вѣсъ этой части скелета будетъ одинъ и тотъ же въ обоихъ разложеніяхъ. А въ такомъ случаѣ въ равенствѣ (9) можно съ одной и съ другой стороны опустить часть суммы, соотвѣтствующую этому ребру.

Этотъ результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если въ двухъ разложеніяхъ разлагаемыхъ многогранниковъ имѣются ребра, равныя какъ по длинѣ, такъ и по двугранному углу, то прилегающія къ нимъ части скелета можно опустить въ обоихъ разложеніяхъ и оставшіяся части все таки будутъ имѣть одинаковый вѣсъ.

Пусть теперь P и P' будутъ два равновеликихъ многогранника съ двугранными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. Допустимъ, что, присоединяя къ этимъ многогранникамъ конгруэнтные многогранники $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$, мы получимъ равно составленные многогранники. Это значитъ, что системы многогранниковъ $(P, Q_1, Q_2, \ldots, Q^h)$ и $(P', Q_1, Q_2, \ldots, Q_h)$ могутъ быть составлены изъ одинаковыхъ частей, и что два скелета разложенія имѣютъ одинаковый вѣсъ. Но при этомъ, какъ мы видѣли, части скелета, прилегающія къ ребрамъ многогранниковъ Q могутъ быть изъ обоихъ разложеній опущены. Равенство вѣсовъ выразится поэтому тѣмъ же уравненіемъ (9).

Какъ уже было выяснено, изъ этого вытекаетъ, что правильный тетраэдръ и равновеликая ему прямоугольная призма не могутъ быть дополнены до равносоставленныхъ фигуръ, а потому равновеликость трехгранныхъ пирамидъ не можетъ быть доказана также методомъ дополненія.

Теперь ясно, почему для доказательства равновеликости трехгранныхъ пирамидъ понадобилась чортова лѣстница.

Алфавитный списокъ лицъ, выступавшихъ на Съѣздѣ въ общихъ собраніяхъ.

Белгородск. БИБЛИОТЕКА Пед институт
Инв. № 68163
Береги [illegible]

ОГЛАВЛЕНIЕ.

Замѣченныя опечатки.

		Напечатано:	Слѣдуетъ читать:
Стр.	22	«поэтому»	«по этому»
»	77	«инфантильзности.	«инфантильности»
»	186	«Веронезе отмѣтилъ роль движенія»	«Веронезе отступилъ отъ обычнаго пониманія роли движенія»
»	229	«*ASB* 7 *ASC* 7 *BSC*»	«*ASB* 7 *ASC* и *BSC*»
»	—	«соединимъ *C* съ *A* и *D*»	«соединимъ *C* съ *A* и *B*»
»	—	«ребро *AB*»	«ребро *CB*»
»	241	«доказательсво»	«доказательство»
»	431	«сорокатѣтняго»	«сорокалѣтняго»
»	436	«Пренія къ докладамъ»	«Пренія по докладамъ»
»	437	«нибудъ»	«нибудь»
»	440	«на учиться»	«научиться»

Принимается подписка (Канцелярія Педагогическаго Музея, СПБ. Фонтанка, 10) на объявленія во II томѣ, позади текста, по цѣнѣ 25 руб. за страницу и 15 руб. за полстраницы.

[illegible]

50

50 - 21190

60

Цѣна I-го тома 3 рубля.

Съ требованіями на оставшіеся въ небольшомъ числѣ экземпляры „Трудовъ“ можно обращаться въ Канцелярію Педагогическаго Музея (Спб., Фонтанка, 10).