СБОРНИКЪ ЗАДАЧЪ,

предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ при поступленіи въ специальныя высшія учебныя заведенія.

Часть II. АЛГЕБРА.

Изданіе V, исправленное и дополненное.

СОСТАВИЛЪ
П. К. Шмулевичъ,
ИНЖЕНЕРЪ ПУТЕЙ СООБЩЕНІЯ.

Цѣна 1 р. 75 к.; съ пер. 2 р.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Складъ изданія у автора: Ивановская ул., д. 6, телеф. 236—85.
1909.

СБОРНИКЪ ЗАДАЧЪ,

предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ при поступленіи въ спеціальныя высшія учебныя заведенія.

Часть II. АЛГЕБРА.

Изданіе V, исправленное и дополненное.

СОСТАВИЛЪ

П. К. Шмулевичъ,

инженеръ путей сообщенія.

Цѣна 1 р. 75 к.; съ пер. 2 р.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Складъ изданія у автора: Ивановская ул., д. 6, телеф. 236—85.

1909.

Типографія Первой Спб. Трудовой Артели.—Лиговская, 34.

Отъ автора.

Пятое изданіе «Задачника по Алгебрѣ» содержитъ 845 задачъ, предлагавшихся за послѣдніе 5 лѣтъ (1903—1907 г.г.) въ Институтахъ: Инженеровъ Путей Сообщенія, Гражданскихъ Инженеровъ, Горномъ, Технологическомъ, Электротехническомъ (1907 г.) и Лѣсномъ (1907 г.). При большинствѣ задачъ указаны Институты, гдѣ онѣ задавались и годъ, когда онѣ были предложены. Сравнительно съ прежнимъ IV изданіемъ (1906 г.) прибавлено около 350 новыхъ задачъ и выпущено около 260 прежнихъ задачъ, не предлагавшихся на экзаменахъ за послѣдніе 5 лѣтъ. Всѣ ссылки въ этомъ новомъ изданіи сдѣланы на «*Дополненія къ Курсу Алгебры*» изд. III (1907 г.) и на «*Искусственные способы и методы рѣшенія алгебр. уравненій*», изд. 1908 г.

Что касается характера задачъ, предлагаемыхъ на экзаменахъ въ каждомъ изъ Институтовъ въ отдѣльности, то каждый интересующійся можетъ самъ составить себѣ объ этомъ ясное представленіе, если внимательно просмотритъ всѣ условія и обратитъ вниманіе на поставленныя при нихъ буквы *П. С.*; *Т.*; *Г.*; *Гр.*; *Эл.*; *Л.*, означающія Институтъ Инженеровъ Путей Сообщенія; Технологическій Инст.; Горный; Инст. Граждан. Инженеровъ; Электротехническій; Лѣсной. Вкратцѣ же можно дать слѣдующія *общія* указанія.

Въ *Институтѣ Инж. П. С.* г.г. экзаменаторы вообще довольно точно придерживаются указанія программы этого Института: «задачи, предлагающіяся на экзаменахъ, относятся къ нетребующимъ большой изобрѣтательности и задаются исключительно съ цѣлью удостовѣриться въ умѣніи прилагать теорію».

Слѣдуетъ только отмѣтить, что за послѣдніе два года значительно чаще чѣмъ прежде предлагаются задачи, требующія примѣненія логар. таблицъ (См. отдѣлъ VIII *B.*).

Въ *Технологическомъ Институтѣ* по прежнему чаще всего задаются прогрессіи, показательныя и логариѳмическія уравненія, биномъ, упрощенія и вычисленія радикаловъ съ данной степенью точности и задачи, требующія примѣненія логар. таблицъ.

Вообще всѣ эти задачи, хотя и очень легкія, требуютъ знакомства со способами ихъ рѣшенія, что дается очень скоро. Во всякомъ случаѣ, продѣлавъ изъ этой книги всѣ задачи, отмѣченныя буквой *Т.*, можно идти на экзаменъ въ Техн. Инст. навѣрняка.

Въ *Горномъ Институтѣ*, какъ и прежде, даются почти исключительно *уравненія* чаще всего съ двумя, рѣже съ однимъ и тремя неизвѣстными. Въ 1907 г. большинство изъ задаваемыхъ уравненій рѣшалось очень однообразно при помощи приведенія ихъ къ *однороднымъ*. Таковы напр. №№ 216, 229 и др.

Въ *Электротехническомъ Институтѣ* на письменномъ экзаменѣ 1907 г. предлагались задачи смѣшаннаго характера въ родѣ тѣхъ, что помѣщены въ общихъ отдѣлахъ задачниковъ Бычкова, Шапошникова и Вальцова, Никульцева и др. Всѣ эти задачи не требуютъ особой изобрѣтательности, но твердое знаніе всѣхъ отдѣловъ теоріи для рѣшенія ихъ необходимо.

Объ *Институтѣ Гражданскихъ Инженеровъ* распространяться не стоитъ. Чтобы составить ясное представленіе о предлагаемыхъ тамъ задачахъ, проще всего просмотрѣть условія задачъ №№ 802—821.

Въ заключеніе считаю нужнымъ сказать нѣсколько словъ по поводу неоднократно получаемыхъ мной заявленій слѣдующаго рода. Нѣкоторые изъ учащихся и даже изъ преподавателей обращаются ко мнѣ съ претензіями по поводу того, что каждое изданіе моихъ задачниковъ рѣзко отличается отъ предыдущаго, что затрудняетъ пользованіе книгой. Эти лица упускаютъ изъ виду, что мои задачники нельзя въ этомъ отношеніи сравнивать съ такими книгами, какъ, напр., общепринятый сборникъ Бычкова, предназначенный исключительно для пользованія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ; въ такихъ книгахъ двадцатое изданіе можетъ ничѣмъ не отличаться отъ перваго. Мои же задачники носятъ совершенно другой характеръ, такъ какъ помѣщаемый въ нихъ матеріалъ меньше всего зависитъ отъ меня: я только собираю всѣ или почти всѣ задачи, предлагаемыя на конкурсныхъ экзаменахъ, и поэтому вполнѣ понятно, что съ измѣненіемъ характера экзаменовъ должно мѣняться и содержаніе моихъ книгъ. Для меня самого было бы много проще переиздавать книги безъ измѣненій, чѣмъ передѣлывать почти все съ начала до конца, но тогда мои задачники не удовлетворяли бы своему назначенію и названію. Въ настоящее же время я ручаюсь, что напримѣръ настоящее пятое изданіе «Задачника по Алгебрѣ» содержитъ *почти всѣ* задачи, предлагавшіяся на конкурсныхъ зказаменахъ по Алгебрѣ въ Петербургскихъ Институтахъ за 1903—1907 годъ.

Инженеръ ***П. Шмулевичъ.***

СПБ., Іюнь, 1908 года.

P. S. Обращаюсь ко всѣмъ учащимся съ покорнѣйшей просьбой: сообщать мнѣ задачи, предложенныя имъ на вступительныхъ экзаменахъ въ спец. уч. зав. съ указаніемъ, въ какомъ Институтѣ и въ какомъ году данная задача была предложена. Сдѣлать это можно открытымъ письмомъ, адресуя СПБ., Ивановская, 6, или же лично. Всѣ сообщаемыя мнѣ задачи будутъ помѣщены въ послѣдующихъ изданіяхъ моихъ „*Сборниковъ задачъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ*“. Охотно также покупаю списки такихъ задачъ, дѣлаемые нѣкоторыми изъ экзаменующихся непосредственно съ досокъ.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ I.

Алгебраическія вычисленія и упрощенія.

1. Сдѣлать раціональными знаменатели слѣдующихъ дробей *):

$a)\ \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ *Т.* 5. $b)\ \dfrac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ *Т.* 7.

$c)\ \dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ *П. С.* 5. $d)\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+2+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ *П. С.* 5.

$e)\ \dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}$ *П. С.* 6.

$f)\ \dfrac{9}{\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{24}-\sqrt{3}-\sqrt{48}}$ *П. С.* 7.

2. Уничтожить ирраціональность въ знаменателяхъ слѣдующихъ дробей **):

$a)\ \dfrac{6}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}$ *П. С.* 3. $b)\ \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}}$ *Т.* 6.

$c)\ \dfrac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$ *П. С.* 5. $d)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$ *П. С.* 5.

---

*) См. „Дополненія къ курсу Алгебры“, сост. П. Шмулевичъ §§ 58—60.

**) См. тамъ же §§ 61 и 62.

$e)\ \dfrac{1}{2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}}$ *Т.* 4. $f)\ \dfrac{59}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{3}}$ *П. С.* 3.

$g)\ \dfrac{3}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{8}}$ *Гр.* 5. $h)\ \dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}$ *П. С.* 6.

3. Вычислить квадратные корни съ данной степенью точности изъ слѣдующихъ чиселъ *):

$a)\ \left(\sqrt{17{,}53}\right)_{0,01}$ $b)\ \left(\sqrt{43\frac{5}{7}}\right)_{\frac{1}{8}}$ $c)\ \left(\sqrt{7\frac{3}{11}}\right)_{\frac{2}{9}}$ $d)\ \left(\sqrt{22{,}13}\right)_{\frac{3}{7}}$

$e)\ \left(\sqrt{\frac{6}{11}}\right)_{\frac{5}{13}}$ $f)\ \left(\sqrt{0{,}55}\right)_{\frac{3}{11}}$ $g)\ \left(2\sqrt{17\frac{5}{8}}\right)_{\frac{3}{11}}$ $h)\ \left(3\sqrt{0{,}07}\right)_{1}$.

4. Произвести вычисленія слѣдующихъ корней съ указанной степенью точности **):

$a)\ \left(\sqrt[3]{5\frac{2}{9}}\right)_{0,1}$ $b)\ \left(\sqrt[4]{2\frac{21}{31}}\right)_{\frac{2}{5}}$ $c)\ \left(\sqrt[5]{3{,}2}\right)_{\frac{2}{3}}$ $d)\ \left(\sqrt[7]{1\frac{3}{5}}\right)_{\frac{1}{3}}$

$e)\ \left(\sqrt[9]{\frac{2}{7}}\right)_{\frac{1}{2}}$ $f)\ \left(\sqrt[5]{17{,}1}\right)_{\frac{2}{5}}$ $g)\ \left(\frac{3}{7}\sqrt[3]{81\frac{5}{6}}\right)_{\frac{1}{7}}$ $h)\ \left(\sqrt[5]{23\frac{7}{11}}\right)_{\frac{3}{8}}$

$i)\ \left(\sqrt[31]{1721465}\right)_{1}$ $k)\ \left(\sqrt[50]{745624176}\right)_{1}$ $l)\ \left(\sqrt[100]{72}\right)_{1}$ $m)\ \left(\sqrt[307]{0{,}2754}\right)_{1}$.

5. Вычислить *съ точностью до единицы* слѣдующія выраженія:

$a)\ 4\sqrt{1{,}32}$ *Т* 7. $b)\ \sqrt{\frac{1375}{7}}$ *Т* 3.

$c)\ \dfrac{\sqrt{5723}}{\sqrt{3}}$ *Т.* 5. $d)\ \sqrt[6]{\dfrac{6050}{10000}}$ *П. С.* 3.

$e)\ \sqrt{100101\frac{1}{2}}$ *П. С.* 7. $f)\ \sqrt[3]{426589777}$ *Гр.* 3.

---

*) См. „Дополненія къ курсу Алгебры", сост. П. Шмулевичъ §§ 23—25.

**) См. тамъ же §§ 26—30.

6. Вычислить *съ точностью до единицы* слѣдующія выраженія:

a) $(0{,}012)^{-\frac{1}{2}}$ *Т.* 6. *b*) $(0{,}005)^{-\frac{1}{2}}$ *Т.* 7.

c) $(0{,}004)^{-\frac{1}{2}}$ *Т.* 5. *d*) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}02}}$ *Т.* 6.

e) $(0{,}0002)^{-\frac{1}{2}}$ *Т.* 4.

7. Вычислить *съ точностью до одной десятой* слѣдующія выраженія:

a) $\sqrt[4]{13}$ *Т.* 6. *b*) $\sqrt[4]{27}$ *Т.* 6.

c) $\frac{1}{3}\sqrt{63}$ *Т.* 3. *d*) $\frac{1}{4}\sqrt{297{,}3}$ *Т.* 5.

8. Произвести вычисленія слѣдующихъ корней съ указанной степенью точности:

a) $\left(\sqrt[3]{16}\right)_{\frac{1}{2}}$ *П. С.* 6. *b*) $\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right)_{\frac{1}{12}}$ *Т.* 5.

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)_{\frac{1}{12}}$ *Т.* 6. *d*) $\left(\sqrt[3]{0{,}5}\right)_{0{,}1}$ *П. С.* 5.

e) $\left(\sqrt[3]{0{,}05}\right)_{0{,}1}$ *П. С.* 5.

9. Вычислить *съ точностью до одной сотой* корни квадратные изъ чиселъ 2,6 и 0,26. *П. С.* 6.

10. Вычислить корень пятой степени изъ двухъ *съ точностью до одной десятой* и корень пятой степени изъ трехъ *съ точностью до половины. П. С.* 7.

11. Вычислить *съ точностью до 0,01* слѣдующія выраженія:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}$ *Т.* 3. *b*) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}$ *Т.* 4.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ *Т.* 7. *d*) $\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}$ *Т.* 7.

12. Найти *первую значущую цыфру* слѣдующихъ корней:

a) $\sqrt{0{,}4}$ *П. С.* 6. *b*) $\sqrt{0{,}9}$ *П. С.* 6.

c) $\sqrt{0{,}025}$ *П. С.* 6. *d*) $\sqrt[3]{0{,}08}$ *П. С.* 6.

13. Вычислить $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$ съ точностью до 0,1, послѣ чего, не производя извлеченія корня, найти съ точностью 0,3 значеніе корня кубичнаго изъ пятнадцати. *П. С.* 3.

14. Упростить слѣдующія выраженія: *Т. П.*

a) $(1{,}5)^3 \,.\, (2{,}25)^{1{,}5} \,.\, (0{,}75)^{-3}$

b) $(2{,}2)^{-2} \,.\, (7{,}5)^{-2} \,.\, \left(\frac{11}{20}\right)^2 \,.\, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \,.\, \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - (2^{-1})^{-1} + (2^{-2})^{-1} - (2{,}32)^0$

d) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} - \frac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}} + \frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{11}}$

e) $2\sqrt{5\sqrt{48}} + 3\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}$

f) $\sqrt{176} - 2\sqrt{275} - \sqrt{891} + \sqrt{1584}$

g) $6\sqrt{1{,}25} - \frac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180} + \sqrt{80}$

h) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^{\frac{2}{3}} - (0{,}5)^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 12^{\frac{1}{3}} \,.\, 18^{\frac{1}{3}}$

i) $\sqrt[4]{\sqrt{23} - \sqrt{7}} \,.\, \sqrt[4]{\sqrt{23} + \sqrt{7}} + \sqrt[6]{5\sqrt{2} - 7} \,.\, \sqrt[6]{5\sqrt{2} + 7}$

k) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a}}} \,.\, \sqrt{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}} \,.\, \sqrt{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}} \,.\, \sqrt{\sqrt{a^{-1}}}$

l) $\sqrt{\sqrt[14]{a^5}} \,.\, \sqrt[3]{\sqrt{a}} \,.\, \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} \;\; \sqrt[6]{\sqrt{a^4}}$

m) $\sqrt[3]{(a^2 - b^2)(a^2 - 2ab + b^2)} - \sqrt[3]{(a+b)^4} + \sqrt[3]{a^4 + a^3 b}$

15. Упростить слѣдующія выраженія:

a) $(2{,}2)^2 \,.\, (1{,}5)^{-2} \,.\, (0{,}55)^{-2}$ *T.* 3.

b) $49^{\frac{1}{12}} \,.\, 49^{\frac{1}{6}} \,.\, 49^{\frac{1}{4}}$ *T.* 3.

c) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{48}{1000}}$ *T.* 3.

d) $(a^3b^5c^{-1})^{\frac{1}{4}} \,.\, (a^1b^{-1}c^1)^{-\frac{1}{4}}$ *T.* 7.

e) $(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{5}}a^{\frac{3}{8}} + b^{\frac{3}{4}}) \,.\, (a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{5}}a^{\frac{3}{8}} + b^{\frac{3}{4}})$ *T.* 5.

f) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$ *T.* 7.

g) $\left[\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}+\frac{\sqrt{3}}{9}}\right] . \sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}$ *T.* 7.

16. Упростить слѣдующія выраженія:

a) $\sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{12}} + \sqrt{75} + \sqrt{\frac{1}{75}}$.

b) $\sqrt{40} + \sqrt{\frac{1}{40}} + \sqrt{90} + \sqrt{\frac{1}{90}}$.

c) $(6{,}75)^{\frac{3}{4}} \,.\, (4{,}5)^{\frac{3}{4}} \,.\, (0{,}444\ldots\ldots)^{-\frac{3}{4}} \,.\, (6)^{\frac{3}{4}}$.

d) $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + 3\,\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144}$.

T. И.

17. Представить въ видѣ суммы или разности двухъ квадратныхъ корней слѣдующія выраженія *):

a) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ *T.* 6.   *b*) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ *П. С.* 4.

c) $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$ *П. С.* 7.   *d*) $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$ *П. С.* 4.

e) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ *П. С.* 3.

f) $\sqrt{a+b-c-2\sqrt{b(a-c)}}$ *П. С.* 7.

*) См. „Дополненія къ курсу Алгебры", сост. П. Шмулевичъ §§ 164—170.

18. Перемножить выраженія:

a) $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$. *П. С.* 7.

b) $(x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\ldots+x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+$ $+\ldots-x+1)$ *П. С.* 4.

c) $(x^8+x^6+x^4+x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$. *П. С.* 6.

d) $\left(\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\right)$ *Т.* 4.

e) $\left[(5-10x+x^4)+i(x^5-10x^2+x)\right]\cdot\left[(5-10x+x^4)-\right.$ $\left.-i(x^5-10x^2+x)\right]$ *П. С.* 7.

19. Найти частное отъ дѣленій:

a) $(x^8+x^6+x^4+x^2+1):(x^4+x^3+x^2+x+1)$ *П. С.* 4.

b) $(x^{6m}-y^{6n}):(x^m+y^n)$ *Т.* 3. *c)* $(x^6+1):(x^2+1)$ *Гр.* 6.

d) $\dfrac{13}{2+3i}$ *П. С.* 4. *e)* $\dfrac{2-3i}{1+2i}$ *П. С.* 3.

f) $\dfrac{1+i}{1-i}$ *П. С.* 6. *g)* $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ *П. С.* 6.

20. Найти численную величину выраженій:

a) $i^{1124}-i^{3514}+i^{4911}-i^{2615}$.

b) $(\sqrt{-1})^{13}+(\sqrt{-1})^2-(\sqrt{-1})^{39}+(\sqrt{-1})^{44}+$ $+(\sqrt{-1})^{35}+(\sqrt{-1})^{113}$. *Т.* 3.

c) $\sqrt[3]{1+2\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{7}}+\sqrt[3]{\sqrt{2}+5i}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-5i}$.

ОТДѢЛЪ II.

Уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

21. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$ *Т.* 3. **22.** $\sqrt[3]{x}-2=\sqrt[6]{x}$ *Гр.* 7.

23. $\sqrt[3]{x}+6=2\sqrt[3]{x^2}$ *Т.* 5. **24.** $5\sqrt[4]{x}+2=3\sqrt{x}$ *Т* 6.

25. $x^5-33x^2\sqrt{x}+32=0$. *Т.* 7. **26.** $2\sqrt[3]{x}+5=63\sqrt[3]{x^{-1}}$.

27. $2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20.$

28. $x^{\frac{7}{3}} + \frac{41\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{97}{\sqrt[3]{x^2}} + x^{\frac{5}{6}}.$ *П. С.* 3.

29. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{6-x}.$

30. $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4} = \sqrt{2x-6}$ *Т.* 6.

31. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = 4$ *Т.* 5.

32. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = \sqrt{2x-6}$ *Т.* 5.

33. $\sqrt{x} + \sqrt{32+x} = 4$ *Т.* 7. *)

34. $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+10} = 1$ *Т.* 6.

35. $\sqrt{4+x} + \sqrt{20+x} = 8$ *Т.* 3.

36. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+11} = \sqrt{2x+39}$

37. $\sqrt{93-x} = 3 + \sqrt{48-x}$ *П. С.* 3

38. $\sqrt{93-x} = 3 - \sqrt{48-x}$ *П. С.* 3

39. $x^2 - \sqrt{x^2-9} = 21$ *Т.* 6.

40. $x^2 + \sqrt{x^2+5} = 15$ *Т.* 7.

41. $x^2 + 11 + \sqrt{x^2+11} = 42.$

42. $(x+2)(x-2) = (x-1)(x-2)$ *П. С.* 4.

43. $\frac{24}{x^2-2x} = \frac{12}{x^2-x} + x^2 - x$ *Т.* 4.

44. $6x\sqrt{x} - 11x + 6\sqrt{x} - 1 = 0.$

45. $x^2 + \frac{4}{x^2} + 6\left(x + \frac{2}{x}\right) = 23.$

46. $\left(x + \frac{8}{x}\right)^2 + x = 42 - \frac{8}{x}.$

47. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1.$ *Т.* 4.

---

*) Во всѣхъ случаяхъ, когда для рѣшенія уравненія приходится возвышать обѣ части его въ квадратъ, необходимо *провѣрять подстановкой* полученные результаты, такъ какъ могутъ получиться посторонніе корни. См. „Дополненіе къ курсу Алгебры", §§ 133 и 134.

48. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0.$

49. $x^2+1-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1).$

50. $x^2+5=8x+2\sqrt{x^2-8x+40}.$

51. $3x^2+15x-2\sqrt{x^2+5x+1}=2.$

52. $x^2+3=2\sqrt{x^2-2x+2}+2x.$

53. $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$

54. $\frac{25x^2-16}{10x-8}=\frac{3(x^2-4)x}{2x-4}.$

55. $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}+\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\frac{34}{15}.$

56. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}.$

57. $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}.$

58. $\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}=\frac{x}{2a}.$

59. $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}.$

60. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34.$

61. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$ *Г.* 4.

62. $x=\sqrt{4+x\sqrt{22+x^2}}.$

63. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x.$ *Г.* 3.

64. $x^2-8(x+1)\sqrt{x}+18x+1=0.$

65. $(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x}-3\sqrt{x}=46+2x.$ *Г.* 4.

66. $\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1.$

67. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=n(n-1).$ *Г.* 5.

68. $(x-2)^2 - 6x^{1/2}(x-2) = 24 - 14x + 15x^{1/2}$.

69. $\frac{x^2}{5} + \frac{45}{x^2} = 12\frac{1}{14}\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{x}\right)$. *П. С.* 3.

70. $\frac{a^2 + ax + x^2}{a^2 - ax + x^2} = \frac{a^2}{x^2}$. *П. С.* 4.

71. $\frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = m$.

72. $\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} + 6}{2\sqrt{x}}$.

73. $\frac{x - \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$.

74. $x^3 - 3x - 2 = 0$.

75. $2x^3 - x^2 - 1 = 0$.

76. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$. *Т.* 5.

77. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

78. $nx^3 + x + n + 1 = 0$. *П. С.* 4.

79. $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$. *Т.* 5. *Эл.* 7.

80. $x^3 + (m-1)x + m = 0$.

81. $x^3 + (1 - b^2)x + b = 0$.

82. $(ax+b)^3 + (nx+m)^3 = (a+n)^3x^3 + (b+m)^3$.

83. $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$.

84. $7x^3 - 5x^2 - 4x + 2 = 0$.

85. $x^3 - 6x^2 + 10x = 5$.

86. $(x-3)^3 - 3(x-2)^3 + 3(x-1)^3 - x^3 = 9 - x$.

87. $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{4}{x}\right)\left(x - \frac{9}{x}\right) = (x-1)(x-2)(x-3)$. *Г.* 6.

88. $\sqrt[3]{5 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{5}$.

89. $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$.

90. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$

91. $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4.$ *Г.* 7.

92. $x - \dfrac{4}{\sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9}.$ *Т.* 6.

93. $\sqrt{x+1+2\sqrt{x}} = \sqrt{x}+1.$ *П. С.* 6.

94. $\sqrt[3]{(x^2+1)(x-1) - x\sqrt{x^2-1}} = x-1.$ *Г.* 7.

95. $\sqrt[3]{(8+x)^2} - \sqrt[3]{(8+x)(8-x)} + \sqrt[3]{(8-x)^2} = 4.$ *Г.* 7.

96. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}} = \dfrac{x}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$ *Г.* 7.

97. $\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1-\sqrt{x(x-1)}} = x-1.$ *Г.* 5.

98. $\sqrt[3]{x^2-7x+10} + \sqrt[3]{x^2-9x-36} = \sqrt[3]{2x^2-16x-26}.$

99. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \dfrac{c^2}{a^2} = 0.$

100. $x^4 - ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0.$

101. $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0.$ *П. С.* 3.

102. $2x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + 18 = 0.$ *П. С.* 3.

103. $x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81 = 0.$

104. $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 8 = 0.$ *П. С.* 7.

105. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0.$

106. $x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x - 16 = 0.$

107. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0.$

108. $4x^4 + 6x^3 + 3x^2 + \dfrac{9}{16}x - 14\tfrac{1}{2} = 0.$

109. $8x^4 + 8x^3 - x = 190.$

110. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0.$ *П. С.* 6.

111. $\dfrac{[x^4+13x^2+36]^2}{x^2(x^4+36)} - 52 = 0.$ *Г.* 3.

112. $x^4+(x-1)^4=97.$

113. $x^4+(x-a)^4=b.$

114. $x^2-\frac{2}{3x}=1\frac{4}{9}.$

115. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

116. $\sqrt{2x^2+3x+11}+\sqrt{2x^2+3x+2}=9.$

117. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{34}+4.$

118. $\sqrt{7x^2-4x+15}-\sqrt{3x^2-4x+31}=x+2.$

119. $\frac{(x+1)(x^3+1)}{(x-1)(x^3-1)}=\frac{37}{7}.$

120. $\frac{30}{x\sqrt[3]{35-x^3}}=x+\sqrt[3]{35-x^3}.$

121. $x=\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-x.}}}$ *T.* 3.

122. $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x.}}}$ *T.* 3.

123. $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x.}}}=\frac{15}{11}$ *T.* 7.

124. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x.}}}=\frac{17}{10}$ *T.* 3.

125. $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x.}}}}=\frac{30}{11}$ *T* 7.

126. $\dfrac{x^4+9}{x-\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{14x^2}{x-\sqrt{2}+\sqrt{5}}$. *П. С.* 3.

127. $\dfrac{x^4-36}{x+1+\sqrt{7}}=\dfrac{16x^2}{x+1+\sqrt{7}}$ *П. С.* 7.

128. $12x^5+18x^4-45x^3-45x^2+18x+12=0$. *П. С.* 7.

129. $6x^5-41x^4+97x^3-97x^2+41x-6=0$. *П. С.* 5.

130. $x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0$.

131. $x^5+px^4+qx^3-qx^2-px-1=0$.

132. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1=0$.

133. $6x^6-23x^5+10x^4+14x^3+10x^2-23x+6=0$.

134. $4x^6-24x^5+57x^4-73x^3+57x^2-24x+4=0$.

ОТДѢЛЪ III.

Уравненія съ двумя неизвѣстными.

135. $x^2-y^2=16$; $x+y=8$. *Гр.* 6.

136. $x+y=10$; $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}$ *Т.* 4.

137. $x^2+y^2=m$; $xy=2(x+y)$ *Т.* 7.

138. $\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{2y-1}=2$; $\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{2y-1}=3$ *Т.* 4.

139. $(2x-5)^2+(3y-2)^2=17$; $(2x-5)(3y-2)=4$.

140. $(3x+4y)(7x-2y)+3x+4y=44$; $(3x+4y)(7x-2y)-7x+2y=30$.

141. $\dfrac{8}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+3}}=1$; $\dfrac{4}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{9}{\sqrt{y+3}}=4$. *Т.* 5.

142. $2\sqrt{4x}+5\sqrt{9y}=36$; $2\sqrt{9x}+5\sqrt{y}=16$ *Т.* 7

143. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$; $xy=4$ *Т.* 5.

144. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=13$; $\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{y}{7}=6$ *Т.* 5.

145. $2(x+4)-5(y-7)=75;\ 4(x+4)^2-25(y-7)^2=10.$

146. $(x+2y)^2-(y-2x)^2=168;\ (x+2y)+(y-2x)=12.$ *T.* 3.

147. $\left(\frac{9}{x}\right)^2-\left(\frac{25}{y}\right)^2=m;\ \frac{9}{x}=\frac{25}{y}+k.$ *T.* 4.

148. $\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3y-5}=3;\ \frac{3}{2x-1}-\frac{2}{3y-5}=4.$ *T.* 4.

149. $x^2+xy+y^2=13;\ x+y=4$ *T.* 6.

150. $xy+x+y=11;\ x^2y+y^2x=30.$ *П. С.* 6.

151. $xy+x+y=b;\ x^2y+y^2x=a.$ *П. С.* 7.

152. $x+x^2+y^2+y=a;\ x^3+x^2y+xy^2+y^3=b.$ *П. С.* 5.

153. $11x+7y=25;\ x^2+y^2=5$ *Гр.* 5.

154. $\frac{ax}{y+a}+\frac{by}{x+b}=\frac{a+b}{2};\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2.$ *Г.* 6.

155. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3};\ x^2-y^2=8.$ *T.* 4.

156. $\sqrt{x}=\sqrt{3a-x}-\sqrt{y-x};\ \sqrt{x}=\sqrt{a-x}+\sqrt{y-x}.$ *Г.* 6.

157. $\sqrt{\frac{x+y}{5x}}+\sqrt{\frac{5x}{x+y}}=\frac{34}{15};\ x+y+xy=29.$

158. $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2;\ x^2-18=2y(4y-9).$

159. $x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2,\ \ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8.$

160. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18;\ x+y=12.$ *T.* 5.

161. $x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y},\ x^2+y^2=34.$

162. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}};\ \frac{8y}{3}-12=\frac{x^2}{16}.$

163. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{7}{3};\ x+y=\frac{3}{2}xy.$ *П. С.* 4.

164. $\frac{x+y}{1+xy}=\frac{1}{2};\ \frac{x^2+xy+y^2}{1+xy+x^2y^2}=\frac{49}{241}.$

165. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{12}=\frac{7}{x+y+5}$.

166. $x\sqrt{\frac{x}{y}}+y\sqrt{\frac{y}{x}}=34;\ x-y=12.$ *Г.* 6.

167. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=x-y;\ \frac{x(xy+1)}{y(xy-1)}=5.$ *Г.* 7.

168. $y^2+xy=231;\ x^2+xy=210.$ *Т.* 4.

169. $x^2+2x+y^2+y=14;\ x^2-y^2+2x-3y+2=0.$

170. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=0;\ x^4+y^4=b.$ *Г.* 3.

171. $x+y=\sqrt{x^2-y+2y^2};\ \sqrt{xy}=6.$ *Т.* 3.

172. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1;\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78.$

173. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{61}{\sqrt{xy}}+1;\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{y^3x}=78.$ *Г.* 3.

174. $x^2+y^2+4x-6y=13;\ xy-3x+2y=11.$

175. $(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185;\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65.$

176. $5xy+3x^2=57;\ 15xy-x^2=81.$ *Т.* 6.

177. $6x^2-xy-12y^2=0;\ x^2+2y^2=\frac{17}{16}.$

178. $x^2-xy+y^2=21;\ y^2-2xy+15=0.$

179. $2y^2-4xy+3x^2=17;\ y^2-x^2=16.$

180. $(x^2+y^2)\frac{x}{y}=6;\ (x^2-y^2)\frac{y}{x}=1.$ *Г.* 7.

181. $(x-y)(x^2-y^2)=16;\ (x+y)(x^2+y^2)=40.$

182. $(x^2+y^2)(x+y)=65;\ xy(x+y)=30.$ *Г.* 3.

183. $x^2+x^2y^2+y^2=49;\ x^4-x^2+y^4-y^2=84.$

184. $x^2+xy+y^2=13;\ x^2-xy+y^2=7.$ *Т* 7.

185. $x-y+x^2-y^2=150;\ x+y+x^2-y^2=330.$

186. $x+y+\sqrt{xy}=14;\ x^2+y^2+xy=84.$ *Лѣсн.* 7.

187. $x^2-x^2y^2+y^2=19;\ x-xy+y=4.$

188. $x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17;\ x + xy + y = 0.$

189. $x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17;\ x + xy + y = 5.$ *Г.* 4.

190. $(x+y)^4 + 4(x+y)^2 - 117 = 0;\ x - y = 25.$

191. $x^2 + 3xy = 7;\ xy + 3y^2 = 14.$

192. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 9;\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5.$

193. $x^2 - xy + y^2 = 7;\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133.$ *Лѣсн.* 7.

194. $x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 13;\ x^4y^2 + x^2y^4 = 468.$

195. $x^2 + xy + y^2 = 49;\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931.$

196. $(x+y)(xy+1) = 18xy;\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1) = 208x^2y^2.$

197. $2x^3y^2 - y^3x^2 = 36;\ 2x^2y - y^2x = 6.$ *Т.* 7.

198. $x^2 + 2xy - 3y^2 = 13;\ x^2 + 5xy - 2y^2 = 58.$

199. $9x^3 + 15x^2y + 9y^2x + 2y^3 = 0;\ x^3 + 9x^2y + 30y^2x + 36y^3 = 0.$

200. $(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) = 3;\ (x+1)(y+1) = 6.$

201. $(x^2 - y + 1)(y^2 - x + 1) = 16;\ x + y = 5.$ *П. С.* 7.

202. $x - y = 2;\ x^3 - y^3 = 8.$ *Т.* 3.

203. $x + y = 5;\ x^3 + y^3 = 65.$ *Т.* 5.

204. $x^3 + y^3 = a;\ xy = b.$ *Т.* 6; *П. С.* 7.

205. $x^3 + y^3 = a^3;\ x^2 + xy + y^2 = a^2.$ *Г.* 3.

206. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a;\ xy = b.$ *Т.* 6; *П. С.* 6.

207. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3;\ xy = 8.$ *Т.* 6.

208. $x + y = 72;\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6.$

209. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4;\ xy = 27.$ *Т.* 3.

210. $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{y^3} = 35;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y} = 5.$

211. $xy(x+y) = 30;\ x^3 + y^3 = 35.$ *Т.* 4. *П. С.* 7.

212. $(x+y)(x^3+y^3) = 76;\ (x+y)^3 = 64(x-y).$

213. $x^3 - 3xy^2 = 1;\ 3x^2y - y^3 = 1.$ *П. С.* 7.

214. $x^2y = (a-x)^3;\ xy^2 = (b-y)^3.$ *Г.* 7.

215. $(x+y)(x^3+y^3)=175;\ (x-y)(x^3-y^3)=19.$ *Г.* 3.

216. $x^2+xy+y^2=19(x-y)^2;\ x^2-xy+y^2=7(x-y)$ *Г.* 7.

217. $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\dfrac{175(x-y)}{19(x+y)};\ x^2+y^2=13.$ *Г.* 7.

218. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\dfrac{7}{3};\ \dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{5}{3}$ *Г.* 7.

219. $\dfrac{x^2-y^2}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{5}{12};\ \dfrac{x^2-y^2}{(x-1)(y-1)}=\dfrac{5}{2}$ *Г.* 7.

220. $\dfrac{x^3}{y}-\dfrac{y^3}{x}=\dfrac{15}{2};\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}.$

221. $x^2+y^2=7+xy;\ x^3+y^3=6xy-1.$

222. $xy+xy^3=6;\ x+xy^2+xy^4=9.$

223. $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=280;\ x+y=4.$

224. $x^3+y^3=ny;\ x^2y=n(x+y).$

225. $x^2+xy+y^2=a;\ x^3y+xy^3=b$ *П. С.* 6.

226. $x^3+xy=a;\ x+x^2+y=b$ *П. С.* 6.

227. $x^4+6x^2y^2+y^4=\dfrac{a}{2};\ x^2-y^2=b$ *П. С.* 7.

228. $x^3y+xy^3=a;\ x^2-y^2=b$ *Т.* 4.

229. $x^8+y^8=(a+b)(x-y);\ (x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=a-b$ *Г.* 7.

230. $x^3+y^3=3(x+y);\ x^4+y^4=\dfrac{17}{9}(x+y)^2.$

231. $x+y=4;\ x^4+y^4=82.$

232. $x^4+y^4=\dfrac{97}{4};\ xy=3.$

233. $x^6+y^6=65;\ x^4+y^4=17.$

234. $x+y=19;\ (x-8)^4+(y-5)^4=272.$

235. $x(y+1)+x^2(y+1)^2=12;\ y(x+1)+y^2(x+1)^2=20.$

236. $(x^2+y^2)xy=78;\ x^4+y^4=97.$

237. $x^5-y^5=3093;\ x-y=3.$

238. $x+y=2;\ (x+1)^5+(y-2)^5=211.$ *Г.* 7.

239. $\dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{121}{13}$; $x + y = 2$.

240. $\dfrac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4} = \dfrac{122}{41}$; $x + y = 4$. *Г.* 7.

241. $2(x^4 + 2x^2y + 2y^2)(y^4 + 2xy^2 + 2x^2) = 13^2x^2y^2$; $x^3 + y^3 = 4{,}5xy$ *Г.* 7.

242. $x^4 = mx + ny$; $y^4 = nx + my$.

243. $x^5 = mx + ny$; $y^5 = nx + my$.

244. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y = b$; $x + y = a$.

ОТДѢЛЪ IV.

Уравненія со многими неизвѣстными.

245. $x + y + z + u = a$, $y + z + u + t = b$; $z + u + t + x = c$; $u + t + x + y = d$; $t + x + y + z = e$.

246. $x + y + z = 100$; $x - y - z = 50$; $x + y - z = 75$. *Г.* 6.

247. $4y - 3z = 6$; $3x - 2z = 8$; $6x - 3 = 7y$. *Г.* 7.

248. $xyzt = a$; $xyzu = b$; $xytu = c$; $xztu = d$; $yztu = e$.

249. $\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{a}{x}$; $\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} = \dfrac{b}{y}$; $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{c}{z}$.

250. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$; $\dfrac{y}{z} = \dfrac{c}{d}$; $\dfrac{z}{t} = \dfrac{l}{f}$; $x + y + z + t = s$.

251. $\dfrac{x}{y} = 2$; $\dfrac{x}{z} = 3$; $\dfrac{y}{u} = 3$; $\dfrac{y^2 - z^2}{x - u} = 1$.

252. $x : y : z : u = 1 : 2 : 3 : 4$; $9x + 7y + 3z + 2u = 200$. *П. С.* 3.

253. $x : y : z : t = 3 : 5 : 7 : 9$; $7x - 4y + 2z - t = 66$.

254. $x : y : z = 1 : 2 : -3$; $x + y + z = 0$. *П. С.* 6.

255. $x : y : z = 5 : 3 : 2$; $x + 2y - z = 45$. *Т.* 6.

256. $x : y : z : u = 1 : 2 : 3 : 4;\ x - y + z - u = 2.$ *П. С.* 7.

257. $x : y : z : v = 0{,}1(6) : 0{,}(3) : 0{,}(5) : 0{,}(6);\ x + y + z + v = 5.$ *П. С* 6.

258. $x : y : z = 1 : 27 : 64;\ x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 24$ *П. С.* 7.

259. $(2x+y) : (3x+z) : (y+z) = 1 : 2 : 3;\ 21x + 31y + 42z = 15.$

260. $\frac{3xy}{x+y} = 5;\ \frac{2xz}{x+z} = 3;\ \frac{yz}{y+z} = 4.$

261. $xy = x + y;\ xz = 2(x + z);\ yz = 3(y + z).$

262. $\frac{xyz}{x+y} = a;\ \frac{xyz}{x+z} = b;\ \frac{xyz}{y+z} = c.$ *Г.* 5.

263. $y + z = 2axyz;\ x + z = 2bxyz;\ x + y = 2cxyz.$

264. $\frac{yz}{y+z} = \frac{xyz}{b+c} - x;\ \frac{zx}{z+x} = \frac{xyz}{c+a} - y;\ \frac{xy}{x+y} = \frac{xyz}{a+b} - z.$

265. $x + y = \frac{axy}{1+xy};\ x + z = \frac{bxz}{1+xz};\ y + z = \frac{cyz}{1+yz}.$

266. $\frac{a^3x}{y^2z^2} = \frac{b^3y}{z^2x^2} = \frac{c^3z}{x^2y^2} = 1.$

267. $ax = by = cz = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$ *Г.* 4.

268. $a^2(x + y) = b^2(y + z) = c^2(x + z) = xyz.$

269. $xy + yz + xz = 27;\ x - y = 6;\ z - y = -3.$

270. $(x + y)(x + z) = a;\ (x + y)(y + z) = b;\ (x + z)(y + z) = c.$

271. $(x^2 + y^2)(x^2 + z^2) = a;\ (x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = b;\ (x^2 + z^2)(y^2 + z^2) = c.$

272. $(x + y)(x + y + z) = 72;\ (x + z)(x + y + z) = 96;\ (y + z)(x + y + z) = 120.$

273. $x(x + y + z) = a^2;\ y(x + y + z) = b^2;\ z(x + y + z) = c^2.$

274. $x = a^2(x + y + z)yz;\ y = b^2(x + y + z)xz;\ z = c^2(x + y + z)xy.$

275. $x^2yz = a;\ xy^2z = b;\ xyz^2 = c.$

276. $x + z = \frac{1}{x};\ x + y = \frac{1}{z};\ z + x = \frac{1}{y}.$

277. $x(y+z)=2p;\ y(z+x)=2q;\ z(x+y)=2s.$

278. $x+y=a;\ x+z=b;\ x^2+y^2=z^2.$

279. $x_1+x_2+x_3=0;\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-2;$
$x_1x_2x_3=-3.$ *П. С.* 5.

280. $x_1+x_2+x_3=0;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3;$
$x_1x_2x_3=-2.$ *П. С.* 7.

281. $x_1+x_2+x_3=1;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{1}{3};$
$x_1x_2x_3=\frac{1}{27}\cdot$ *П. С.* 7.

282. $x+y+z=6;\ xy+xz+yz=11;\ xyz=6.$ *Г.* 6.

283. $x^2+y^2+z^2=1;\ xy+xz+yz=4;\ x+y-z=5.$ *П. С.* 7.

284. $x+y+z=13;\ x^2+y^2+z^2=91;\ y^2=xz.$

285. $x+y+z=13;\ x^2+y^2+z^2=61;\ 2yz=x(y+z).$

286. $y^2=x-z;\ x^2-z^2=3y^4;\ y^3+3y+x+z=26.$

287. $xy+xz+yz=6;\ x^2yz+xy^2z+xyz^2=11;\ z^2xy+6xy=12.$

288. $x+y+z=15;\ xy^2=150;\ x+z=2y.$

289. $2(x+y)=xy;\ xy+yz+xz=108;\ xyz=180.$ *Г.* 4.

290. $x+2y+z=19;\ x^2+4y^2+z^2=133;\ xz=4y^2.$

291. $x+y+z=4;\ x+2y+3z=5;\ x^2+y^2+z^2=14.$

292. $x^2-2y=y^4-2xy^2;\ xy+z=5;\ xyz=4.$

293. $x^2+y^2+z^2=1100;\ x+y+z=54;\ x-2y+z=0.$

294. $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1.$ *Г.* 4.

295. $x+y+z=a;\ x^2+y^2+z^2=a^2;\ x^3+y^3+z^3=a^3.$

296. $x+y+z=7;\ xy+xz-yz+2=0;\ x^2+y^2+z^2=21.$

297. $x^3+y^3+z^3=y+x;\ 3(x+z)=1;\ y+z+1=0.$

298. $y+z+yz=a;\ z+x+zx=b;\ x+y+xy=c.$

299. $x^2+xy+y^2=37;\ x^2+xz+z^2=28;\ y^2+yz+z^2=19.$ *Г.* 3.

300. $x^2+xy+y^2=a^2;\ x^2+xz+z^2=b^2;\ y^2+yz+z^2=c^2.$

301. $y^2+z^2-x(y+z)=a;\ x^2+z^2-y(x+z)=b;$
$x^2+y^2-z(x+y)=c.$

302. $y^2+z^2=2m^2+\frac{x^2}{2}$; $z^2+x^2=2n^2+\frac{y^2}{2}$; $x^2+y^2=$
$=2p^2+\frac{z^2}{2}$.

303. $x^2-(y-z)^2=a$; $y^2-(z-x)^2=b$; $z^2-(x-y)^2=c$.

304. $\frac{x^3+y^3+z^3}{x+y-z}=-122$; $\frac{x^3+y^3+z^3}{x+z-y}=61$; $\frac{x^3+y^3+z^3}{y+z-x}=30\frac{1}{2}$.

305. $\frac{x^3+y^3+t^3}{y+t-x}=m$; $\frac{x^3+y^3+t^3}{x+y-t}=-4m$; $\frac{x^3+y^3+t^3}{x+t-y}=2m$. *Г.* 7.

306. $\frac{yz}{(y+z)^2}=1-\frac{a^2}{(y+z)^2}$; $\frac{xy}{(x+y)^2}=1-\frac{b^2}{(x+y)^2}$;
$\frac{xz}{(x+z)^2}=1-\frac{c^2}{(x+z)^2}$. *Г.* 4.

ОТДѢЛЪ V.

Показательныя и логариѳмическія уравненія, рѣшаемыя безъ помощи логар. таблицъ.

307. $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$.

308. $(0,11)^{x^3-5}=0,001331$.

309. $(0,13)^{x-204}=0,002197$.

310. $4^{2\sqrt{x}}=2^{2x-6}$.

311. $3^{\sqrt{x}}=\sqrt[x]{6561}$.

312. $2^{3x}=\sqrt[3x]{512}$.

313. $\left(\frac{1}{64^2}\right)^{-x}=\sqrt{\frac{1}{8}}$.

314. $5^{\sqrt[x]{2}}=625$.

315. $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\sqrt[3]{(1,5)^{11}}$.

316. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

317. $\frac{2}{3}\sqrt[x]{\left(\frac{8}{27}\right)^5}=\left(\frac{9}{4}\right)^{-4}$.

318. $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}\right]^2=\left(\frac{25}{9}\right)^{x-3}$.

319. $2^{x^2-2,8(3)x}=\sqrt{2}$.

320. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$.

321. $(0,4)^{x-1}=(6,25)^{6x-5}$.

322. $0{,}25 \cdot 2^x = 25 \cdot (0{,}04)^{\frac{x}{2}}$. *Т.* 5.

323. $8^{2x+1} = 0{,}125^{4-3x}$. *Т.* 6.

324. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$. *П. С.* 3.

325. $(0{,}4)^{x+1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{2-3x}$ *Т.* 4.

326. $1000\sqrt[x]{0{,}1} = 100^x$. *Т.* 3.

327. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^x}$. *Гр.* 6.

328. $[(4)^{3-x}]^{(2-x)} = 1$.

329. $(5^{x^2+x-2})^{3-x} = 1$.

330. $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.

331. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt[4]{x})^x$. *Т.* 6.

332. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{x})^x$. *Т.* 7.

333. $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$. *Т.* 7.

334. $(0{,}4)^3 = \left(\frac{125}{8}\right)^{x-1}$. *Т.* 7.

335. $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$ *Т.* 7.

336. $\frac{3}{2}\sqrt[x]{\left(\frac{9}{4}\right)^7} = \left(\frac{27}{8}\right)^3$. *Т.* 7.

337. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$. *Т.* 7.

338. $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \sqrt[5]{(1{,}5)^{11}}$. *Т.* 3.

339. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$. *Т.* 3.

340. $2^x \cdot 5^x = 0{,}1(10^{x-1})^5$. *Т.* 4.

341. $6^{x^2} \cdot (2^3)^5 = (6^{x-1})^{12} \cdot (3^{-5})^3$. *Т.* 3.

342. $6^{x+2} = 2^{x^2} \cdot 3^{x+2}$. *Гр.* 3.

343. $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

344. $15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{x+8}$. *П. С.* 4.

345. $5^{x^2-x} \cdot 2^{x^2+x} = 64 \cdot 10^{2x}$.

346. $2^x - 2^{x-2} = 3.$ **347.** $3^x - 3^{x-2} = 8.$ *T.* 5.

348. $5^x - 5^{x-1} = 100.$ **349.** $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0.$

350. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81.$ **351.** $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0.$ *T.* 6.

352. $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0.$ *T.* 7. **353.** $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30.$

354. $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0.$

355. $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$

356. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} 9^{x+1}.$

357. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$

358. $\sqrt[x]{x+y} = 5;\ x + y = 2^x.$

359. $\sqrt[x]{x+y} = 5;\ (x+y) \cdot 2^x = 100.$ *T.* 4.

360. $\sqrt[x]{y+x} = 2;\ (x+y) \cdot 3^x = 279936.$

361. $\sqrt[x]{x+y} = 9;\ (x+y) \cdot 2^x = 18.$ *T.* 3.

362. $x^y = 32;\ \sqrt[y]{1024} = 2x.$ *T.* 6.

363. $x^y = 16;\ \sqrt[y]{1024} = 2x^2.$ *T.* 5.

364. $\sqrt[x]{x+y} = 2;\ (x+y) \cdot 4^x = 64.$ *T.* 6.

365. $(3x+y)^{\frac{4}{x}} = 7;\ (3x+y) \cdot 3^{\frac{x}{4}} = 441.$

366. $x^y = 243;\ \sqrt[y]{1024} = \frac{4}{3}x.$

367. $x^y = 9;\ \sqrt[y]{324} = 2x^2.$ *T.* 4.

368. $2^x \cdot 3^y = 12;\ 2^y \cdot 3^x = 18.$

369. $\sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3};\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3.$ *T* 5.

370. $\sqrt[x+1]{a^3} \cdot a^{y+2} = \sqrt[4]{a^{27}};\ \sqrt[x+1]{a^7} : a^{y+5} = a^2\sqrt[4]{a^3}.$ *T.* 3.

371. $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x}).$

372. $a \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot a^7 \ \ldots\ldots\ a^{2x-1} = n.$

373. $lg_2 lg_2 lg_2 x = 0$. *Гр.* 4. **374.** $lg_m lg_m lg_m x = 0$.

375. $lg_\pi lg_e lg_7 x = 0$.

376. $\dfrac{1}{5 - logx} + \dfrac{1}{1 + logx} = 1$. **377.** $xlog_2 x = 0$.

378. $log(3x - 11) + log(x - 27) = 3$. *Гр.* 4.

379. $\dfrac{lg2x}{log(4x - 15)} = 2$. **380.** $lg(x^2+3) - lg(x+1) = 2$.

381. $logx(3lgx - 2) = 8$. *Т.* 5.

382. $log(7x - 9)^2 + log(3x - 4)^2 = 2$.

383. $log\sqrt{x + 21} + \frac{1}{2}log(x - 21) = 1 + log2$. *Т.* 3.

384. $log(x^3 - 8) - \frac{1}{2}log(x - 2)^2 = \frac{1}{2}log4$. *Т.* 3.

385. $log(x - 2) - \frac{1}{2}log(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{3}log27$. *Т.* 3.

386. $\dfrac{log(x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x - 6)}{log(x^2 + 2x + 1)} = 2$. *Т.* 3.

387. $lg(5 - x) + 2log\sqrt{3 - x} = 0$.

388. $1 + \frac{1}{3}log\left[271 + 3^{\sqrt{3x}}\right] = 2$. *П. С.* 3.

389. $\frac{1}{2}log2 + log\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \frac{1}{2}log(x^2 - 4x + 5) = \frac{1}{2}$.

390. $\frac{1}{2}log(x^2 - 10x + 25) + 2log(x + 3) = 2log(x - 5)$. *Т.* 5.

391. $log(x^3 + 27) - \frac{1}{2}log(x^2 + 6x + 9) = 3log\sqrt[3]{7}$. *Т.* 4.

392. $log(x^3 - 8) - \frac{1}{2}log(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{3}log27$.

393. $\frac{1}{2}log(x^2 - 10x + 25) + log(x^2 - 6x + 3) = 2log(x - 5) +$
$+ \frac{1}{2}log25$.

394. $logx + logy = 1{,}5;\ 4x^2 - 9y^2 = 3590$.

395. $logx + logy = 4;\ logx - logy = 3$.

396. $log_y x - log_x y = \frac{8}{3}$, $xy = 16$.

397. $x^{1+lgx} = 100$. *Т.* 5.

398. $x^{lgx} = 100x$.

399. $x^{lgx} = 0{,}1$.

400. $x^{lgx} = 10000$.

401. $x^{lgx} = 10$. *Т.* 4.

402. $x^{lgx-1} = 100$.

403. $x^{2+lgx} = 1000$. *Т.* 6.

404. $\sqrt{x^{log\sqrt{x}}} = 10$.

405. $0{,}1x^{logx-2} = 10^2$.

406. $x^{2log^2x-1{,}5logx} = \sqrt{10}$. *Т.* 4.

407. $x^{log_4 x} = 4$.

408. $x^{log_3 x} = 3$.

409. $x^{log_5 x} = 625$. *Т.* 7.

ОТДѢЛЪ VI.

Зависимость между коэффиціентами и корнями въ квадр. уравненіяхъ.

410. Не рѣшая, опредѣлить, какіе корни имѣютъ уравненія:

$$3x^2 - 12x + 15 = 0;$$
$$2x^2 - 6x - 3 = 0;$$
$$5x^2 + 40x + 3 = 0;$$

и почему? *Гр.* 5.

411. Въ квадр. уравненіи

$$(\sqrt{17} - 4)x^2 - x\sqrt{17} + 4 = 0$$

одинъ изъ корней равенъ 1; не рѣшая уравненія, вычислить другой корень съ точностью до 0,1. *Т.* 3.

412. Въ квадр. уравненіи

$$x^2(\sqrt{2} - 1) - x(\sqrt{2} + 1) + 2 = 0$$

одинъ изъ корней равенъ 1; не рѣшая уравненія, вычислить другой корень съ точностью до 1. *Т.* 6.

413. Въ квадр. уравненіи

$$x^2(\sqrt{5}-2)-x\sqrt{5}+2=0$$

одинъ изъ корней равенъ 1; не рѣшая уравненія, вычислить другой корень съ точностью до 1. *Т*. 6.

414. Найти всѣ значенія, обращающія выраженіе

$$x^2-x+1+i$$

въ нуль. *П. С*. 7.

415. Найти числа, обращающія въ нуль выраженіе

$$x^2+(4-3i)x+5+i. \quad П. \; С. \; 7.$$

416. Въ уравненіи $x^2-7x+k=0$ найти k такимъ образомъ, чтобы одинъ корень былъ $\alpha=-2$.

417. Въ уравненіи $3x^2-kx+18=0$ найти k такимъ образомъ, чтобы одинъ корень былъ $\alpha=1$.

418. Въ квадр. уравненіи

$$2x^2-11x+m=0$$

опредѣлить m такъ, чтобы $2x_1-x_2=2$. *Т*. 4.

419. Въ квадр. уравненіи

$$3x^2-5x+m=0$$

опредѣлить m такъ, чтобы $6x_1+x_2=0$. *Т*. 7.

420. Не рѣшая квадр. ур. $ax^2+bx+c=0$, найти сумму квадратовъ, сумму кубовъ, сумму четвертыхъ, сумму пятыхъ и сумму шестыхъ степеней его корней, т. е. вычислить

$$\alpha^2+\beta^2; \; \alpha^3+\beta^3; \; \alpha^4+\beta^4; \; \alpha^5+\beta^5; \; \alpha^6+\beta^6,$$

гдѣ буквами α и β обозначены корни даннаго уравненія.

421. Въ квадр. уравненіи

$$x^2-x+a=0$$

вычислить a такъ, чтобы ${x_1}^2+{x_2}^2=1\frac{4}{9}$. *П. С*. 5.

422. Въ квадр. уравненіи

$$7x^2+2x+a=0$$

вычислить a такъ, чтобы ${x_1}^2+{x_2}^2=16{,}25$. *Т*. 7.

423. Не рѣшая квадр. уравненія

$$x^2-2x-1=0,$$

вычислить $\alpha^3+\beta^3$ и $\alpha-\beta$. *) *П. С.* 5.

424. Не рѣшая квадр. уравненія

$$x^2+px+q=0$$

вычислить $\alpha^3\beta-\beta^3\alpha$ и $\alpha^4\beta^7+\alpha^7\beta^4$. *) *Г.* 6.

425. Дано квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$; корни его назовемъ α и β; найти величину выраженія $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$.

426. Дано квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$; корни его назовемъ α и β; найти величину выраженія $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$.

427. Не рѣшая квадратнаго ур-ія $3x^2+17x-14=0$, найти величину выраженія

$$\frac{3\alpha^2+5\alpha\beta+3\beta^2}{4\alpha\beta^2+4\alpha^2\beta}, \quad П.\ С.\ 4.$$

гдѣ буквами α и β обозначены корни даннаго уравненія.

428. Не рѣшая квадратнаго ур-ія $2x^2+6x+9=0$, найти величину выраженія

$$\frac{3\alpha^2+5\alpha\beta+3\beta^2}{\alpha^2\beta+\beta^2\alpha}, \quad П.\ С.\ 4.$$

гдѣ буквами α и β обозначены корни даннаго ур-ія.

429. Не рѣшая квадр. уравненія

$$7x^2+4x+5=0,$$

вычислить выраженіе $4x_1^3-6x_1x_2^2+4x_2^3-6x_1^2x_2$. *П. С.* 7.

430. Если α и β суть корни квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, то доказать, что выраженія:

1) $\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4$,

2) $\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4$

суть выраженія раціональныя. *П. С.* 5.

431. Не рѣшая квадр. уравненія $ax^2+bx+c=0$, доказать, что

$$x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3$$

есть выраженіе раціональное, если всѣ коэф. a, b, c суть числа раціональныя. *П. С.* 7.

---

*) Буквами α и β обозначены корни даннаго уравненія.

432. Дано квадр. уравненіе $ax^2+bx+c=0$; корни его равны α и β. Составить новое квадр. ур-іе, котораго корни были бы:

$$\frac{1}{\alpha} \text{ и } \frac{1}{\beta} \quad \textit{П. С 7.}$$

$$-\frac{1}{\alpha} \text{ и } -\frac{1}{\beta} \quad \textit{П. С. 6.}$$

433. Корни квадр. уравненія $x^2+bx+c=0$ суть x_1 и x_2. Составить новое квадр. ур-іе, котораго корни были бы x_1+2x_2 и $2x_1+x_2$. *П. С.* 7.

434. Дано квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$; корни его назовемъ буквами α и β; составить новое квадратное уравненіе, корни котораго были бы $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$.

435. Дано квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$; корни его назовемъ буквами α и β; составить новое квадратное уравненіе, корни котораго были бы $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ и $\beta+\frac{1}{\beta}$. *П. С.* 4.

436. Дано квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$; корни его назовемъ буквами α и β; составить новое квадратное уравненіе, корни котораго были бы $\frac{1}{\alpha^2}$ и $\frac{1}{\beta^2}$. *Г.* 6.

437. Дано квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$; корни его назовемъ буквами α и β; составить новое квадратное уравненіе, корни котораго были бы $(\alpha+\beta)^2$ и $(\alpha-\beta)^2$.

438. Въ уравненіи $x^2-5x+k=0$ опредѣлить k такимъ образомъ, чтобы 1) $\alpha=3{,}5$; 2) $5\alpha-3\beta=3$; 3) $\alpha^2+\beta^2=17$; 4) $\alpha^2-\beta^2=15$ *).

439. Въ уравненіи $2x^2-5x+k=0$ найти k такимъ образомъ, чтобы $\alpha^2+\beta^2=2$ *).

440. При какомъ значеніи k уравненіе

$$(k-1)x^2+2(k+1)x+(k-2)=0$$

имѣетъ дѣйствительные и равные корни.

---

*) Буквами α и β обозначены корни уравненія.

441. Въ уравненіи $(k^2-5k+3)x^2+(3k-1)x+2=0$ опредѣлить k такимъ образомъ, чтобы одинъ корень былъ вдвое больше другого.

442. Написать въ общемъ видѣ квадратное уравненіе съ завѣдомо вещественными корнями. *Т*. 4.

443. Въ какихъ квадратныхъ уравненіяхъ только одинъ корень мнимый, а другой вещественный. *П. С.* 4.

444. Вывести формулу для рѣшенія квадратнаго ур-ія $ax^2+bx+c=0$, не дѣля на a. *Т*. 3

445. Показать, что если квадратное уравненіе удовлетворяется болѣе чѣмъ двумя значеніями неизвѣстнаго, то оно тождественно равно нулю. *Т*. 5.

446. Доказать, что корни уравненія

$$\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=1$$

всегда вещественны. *П. С.* 7.

447. Если m и n суть 2 числа одинаковаго знака, а a, b, c какія угодно вещественныя числа, то доказать, что уравненіе

$$\frac{m}{x-a}+\frac{n}{x-b}+c=0$$

имѣетъ вещественные корни.

448. Показать, что корни уравненія

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

всегда дѣйствительны.

449. Если коэффиціенты p_1, p_2, q_1, q_2 двухъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2+p_1x+q_1=0;\quad x^2+p_2x+q_2=0$$

удовлетворяютъ условію: $p_1p_2=2(q_1+q_2)$, то доказать, что по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ ур-ій непремѣнно имѣетъ дѣйствительные корни. *П. С.* 4.

450. Изслѣдовать корни ур-ія

$$(a+2)x^2+2(a+1)x-(a-1)=0$$

при измѣненіи a отъ $-\infty$ до $+\infty$. *П. С.* 3.

451. Изслѣдовать корни ур-ія

$$x^2+(2a+3)x+a^2+4a+3=0$$

при измѣненіи a отъ $-\infty$ до $+\infty$. *П. С.* 3.

452. Прослѣдить измѣненія корней квадр. уравненія

$$(3\lambda-1)x^2-(2\lambda-1)x+2\lambda-1=0$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$. *П. С.* 5.

453. Изслѣдовать. какія значенія могутъ принимать корни квадр. уравненія

$$x^2+(2\lambda+3)x+\lambda^2+3\lambda+4=0$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$. *П. С.* 7.

454. Изслѣдовать корни квадр. уравненія

$$x^2-(\lambda-1)x+\lambda-2=0$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$. *П. С.* 6.

455. Изслѣдовать корни квадр. уравненія

$$x^2-2(\lambda-3)x+\lambda^2-1=0$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$. *П. С.* 5.

ОТДѢЛЪ VII.

Прогрессіи.

Примѣчаніе. Во всѣхъ этихъ задачахъ каждый членъ прогрессіи обозначенъ буквой u съ подстрочнымъ указателемъ, показывающимъ *номеръ* этого члена, т. е. мѣсто, занимаемое имъ въ прогрессіи, такъ напр., u_7 означаетъ 7-ой членъ. Первый членъ прогрессіи обозначенъ безразлично u_1 и просто u; S_n означаетъ сумму n членовъ прогрессіи, такъ что S_{15} есть сумма 15 членовъ; d — разность ариѳм. прогрессіи, q — знаменатель геометрической.

456. Найти S_{10} ариѳм. прогрессіи, въ которой $u_3=6$; $u_7=15$.

457. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $u_1+u_3+u_5=21$; $u_2+u_4+u_6=42$.

458. Найти S_8 ариѳм. прогрессіи, въ которой $u_3+u_6=29$; $u_3 \,.\, u_6=190$.

459. Вычислить S_5 возрастающей ариѳм. прогрессіи, въ которой $u_{10}+u_5=30$; $u_{11} \,.\, u_4=189$. *Т.* 5.

460. Найти возрастающую ариѳм. прогрессію, въ которой $u_1+u_5=14$; $u_2 \,.\, u_4=40$. *Т.* 3.

461. Найти возрастающую ариѳм. прогрессію, въ которой $u_5 \,.\, u_1=-17$; $u_3=9$. *Т.* 6.

462. Найти сумму 12 членовъ (S_{12}) возрастающей ариѳм. прогрессіи съ положительными членами, въ которой $u_4 \,.\, u_2=40$; $u_1+u_5=14$. *Т.* 7.

463. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой u_2+u_3+ $+u_4+u_5=34$; $u_2 \,.\, u_5=52$. *Т.* 5.

464. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой u_1+u_2+ $+u_3+u_4+u_5=25$; $u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5=1820$.

465. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $u_1\ u_5=13$; $u_2\ u_4=40$.

466. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $u_1^2+u_4^2=50$; $u_2+u_3=8$.

467. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой u_1+u_2+ $+u_3=27$; $u^2{}_1+u^2{}_2+u^2{}_3=275$.

468. Въ ариѳм. прогрессіи $u_7=15$; $u_{15}=7$; сколько нужно взять членовъ, чтобы сумма ихъ $=231$.

469. Въ ариѳм. прогрессіи $2u_3+3u_5=27$; $3u_7-2u_4=23$; сколько надо взять членовъ, чтобы сумма ихъ равнялась 48.

470. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $S_4=9$; $S_6=22\frac{1}{2}$.

471. Въ ариѳм. прогрессіи $S_2=4$; $S_3=7$. Найти S_6?

472. Въ ариѳм. прогрессіи $S_2=4$; $S_4=16$; $S_n=121$. Найти n? *Т.* 3.

473. Въ ариѳм. прогрессіи $S_3=18$; $S_4=38$; $S_n=305$. Найти n? *Т.* 4.

474. Въ ариѳм. прогрессіи $S_3=15$; $S_5=35$; $S_n=48$. Найти n? *Т.* 3.

475. Въ ариѳм. прогрессіи. $u_1=1$; $S_n=8$; $S_{2n}=40$. Найти n? *Т.* 3.

476. Въ ариѳм. прогрессіи $u_1=1$; $S_n=16$; $S_{2n}=64$. Найти n? T. 4.

477. Въ ариѳм. прогрессіи $S_n-u_1=48$; $S_n-u_n=36$. $S_n-u_1-u_2-u_{n-1}-u_n=21$. Найти прогрессію. T. 3.

478. Въ ариѳм. прогрессіи $S_n-u_1-u_n=9$; S_n-u_1- $-u_2-u_{n-1}-u_n=3$. Найти n и S_n. T. 3.

479. Въ ариѳм. прогрессіи $S_n-u_1-u_n=21$; S_n-u_2- $-u_n-u_1-u_{n-1}=7$. Найти S_n и n? T. 4.

480. Въ ариѳм. прогрессіи $S_n-u_1-u_n=9$; S_n-u_1- $-u_2-u_{n-1}-u_n=3$. Найти S_n и n? T. 5.

481. Въ ариѳм. прогрессіи $S_n-u_1-u_n=33$; S_n-u_1- $-u_2-u_{n-1}-u_n=11$. Найти S_n и n? T. 4.

482. Въ ариѳм. прогрессіи $S_n=7$; $S_{2n}=34$; $u_1+u_{2n}=17$. Найти S_{30}. T. 5.

483. Въ ариѳм. прогрессіи $u_1+u_3+u_5\ldots+u_{2n+1}=25$; $u_1+u_{2n+1}=10$. Найти n? T. 6.

484. Въ ариѳм. прогрессіи $u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n-1}=12$; $u_1+u_{2n-1}=8$. Найти n? T. 3.

485. Въ ариѳм. прогрессіи $u_2+u_4+\ldots+u_{2n+6}=30$; $u_2+u_{2n+6}=12$. Найти n? T. 5.

486. Найти сумму пяти членовъ (S_5) ариѳм. прогрессіи, въ которой

$$u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}=55,$$
$$u_2+u_5+u_8+u_{11}+u_{14}=65.\quad T.\ 5.$$

487. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $S_3-u_1=35$; $S_3-u_2=25$.

488. Въ ариѳм. прогрессіи $u_p=\frac{1}{q}$; $u_q=\frac{1}{p}$; найти $S_{p.q}$?

489. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $u_1=2$, а сумма первыхъ десяти членовъ$=\frac{1}{3}$ суммы слѣдующихъ 10 членовъ.

490. Вычислить разность ариѳм. прогрессіи, въ которой $u_1=100$, зная, что сумма первыхъ шести членовъ ея въ 5 разъ больше суммы слѣдующихъ шести членовъ. T. 5.

491. Вычислить первый членъ ариѳм. прогрессіи съ разностью 4, зная, что сумма первыхъ пяти членовъ въ 3 раза меньше суммы слѣдующихъ пяти членовъ. T. 5.

492. Найти сумму 8 членовъ ариѳм. прогрессіи (S_8), въ которой первый членъ равенъ 1, зная, что сумма первыхъ четырехъ членовъ въ 3 раза меньше суммы слѣдующихъ четырехъ членовъ. *Т.* 6.

493. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$1+4+7+\ldots\ldots+x=117. \quad T.\ 6.$$

494. Опредѣлить x изъ уравненія

$$(x+1)+(x+4)+(x+7)+\ldots+(x+28)=155. \quad T.\ 5.$$

495. Найти сумму первыхъ ста чиселъ, которыя при дѣленіи на 3 даютъ въ остаткѣ единицу. *Т.* 4.

496. Найти сумму первыхъ тридцати нечетныхъ чиселъ, которые при дѣленіи на 5 даютъ въ остаткѣ единицу. *Т.* 4.

497. Найти квадратъ суммы всѣхъ чиселъ, кратныхъ трехъ, и меньше ста. *Т.* 7.

498. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $S_n=n^2$ для всякаго числа членовъ n.

499. Найти S_n ариѳм. прогрессіи, любой членъ которой $u_m=2m-1$.

500. Найти S_n ариѳм. прогрессіи, въ которой $u_n=\frac{3n-1}{6}$.

501. Найти ариѳм. прогрессію, въ которой $S_n=3n^2+4n$. Въ этой же прогрессіи найти u_{10}, не находя ни перваго члена, ни разности.

502. Найти u_m ариѳм. прогрессіи, въ которой $S_n=pn+qn^2$.

503. Найти всѣ ариѳм. прогрессіи съ цѣлыми и положительными членами, въ которыхъ $S_5=35$. *Т.* 6.

504. Найти всѣ ариѳм. прогрессіи съ цѣлыми и положительными членами, въ которыхъ $S_7=49$. *Т.* 6.

505. Найти всѣ ариѳм. прогрессіи съ цѣлыми и положительными членами, въ которыхъ $S_9=90$. *Т.* 7.

* *
*

506. Найти геометр. прогрессію, въ которой $u_1 + u_2 + u_3 = 28$; $u_4 + u_5 + u_6 = 3\frac{1}{2}$.

507. Найти геометр. прогрессію, въ которой $u_3 - u_1 = 9$; $u_5 - u_3 = 36$.

508. Въ геометр. прогрессіи $u_3 - u_1 = 16$; $u_5 - u_3 = 144$. Найти S_4? *Т.* 6.

509. Въ геометр. прогрессіи

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_5 = 31;\ u_2 + u_3 + \ldots + u_6 = 62.$$

Найти восьмой членъ (u_8)? *Т.* 6.

510. Найти сумму четырехъ членовъ геом. прогрессіи съ положительными членами, зная, что

$$u_3 - u_1 = 9;\quad u_5 - u_3 = 36.\quad T.\ 3.$$

511. Найти S_5 геометр. прогрессіи съ положительными членами, зная, что $u_5 - u_1 = 15$; $u_7 - u_3 = 60$. *Т.* 6.

512. Найти S_5 геометр. прогрессіи съ положительными членами, зная, что $S_2 = 4$ и $S_3 = 13$. *Т.* 5.

513. Найти S_4 геометр. прогрессіи съ положительными членами, зная, что $S_3 = 7$ и $S_6 = 63$. *Т.* 7.

514. Найти S_6 геометр. прогрессіи съ положительными членами, зная, что $S_2 = 3$ и $S_3 = 7$. *Т.* 6.

515. Найти S_6 геометр. прогрессіи съ положительными членами, зная, что $S_4 = 15$ и $S_8 = 255$. *Т.* 4.

516. Въ геометр. прогрессіи $u_1 + u_5 = 17$; $u_2 + u_6 = 34$. Сумма сколькихъ членовъ $= 31$?

517. Въ геометр. прогрессіи $u_1 + u_4 = 9$; $u_2 + u_5 = 18$; $S_n = 15$. Найти n? *Т.* 5.

518. Въ геометр. прогрессіи дано:

$$u_3 = 4,\ u_4 = 8 \text{ и } S_n = 15. \text{ Найти } n?\quad T.\ 7.$$

519. Въ геометр. прогрессіи съ положительнымъ знаменателемъ дано: $u_6 = 32$, $u_4 = 8$ и $S_n = 15$. Найти n? *Т.* 6.

520. Въ геометр. прогрессіи дано:

$$u_2 + u_6 = 34;\ u_3 + u_7 = 68;\ S_n = 63. \text{ Найти } n?\quad T.\ 7.$$

521. Въ геометр. прогрессіи дано:

$u_1 + u_5 = 17$; $u_2 + u_6 = 34$; $S_n = 31$. Найти n? *Т.* 7.

522. Въ геометр. прогрессіи дано:

$u_1 + u_4 = 28$; $u_2 + u_5 = 84$; $S_n = 121$. Найти n? *Т.* 6.

523. Найти геометр. прогрессію, въ которой сумма первыхъ семи членовъ (S_7) равна $444^1/_2$ и относится къ суммѣ членовъ отъ 2-го до 8-го вкл. какъ 1 : 2.

524. Сумма первыхъ трехъ членовъ геометр. прогрессіи $= 21$; а сумма первыхъ четырехъ $= 45$; найти эту прогрессію.

525. Найти 4 числа, составляющихъ геометрическую прогрессію, зная, что сумма перваго и второго $= 15$; сумма третьяго и четвертаго $= 60$.

526. Найти 4 числа, составляющія геометр. прогрессію, зная, что сумма крайнихъ $=$ большему, а сумма среднихъ $=$ меньшему корню уравненія

$$2^{x^2 - 65x + 1050,5} = \sqrt{2}. \quad \textit{Эл.}\ 7.$$

527. Чему равно произведеніе

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[8]{5} \cdot \ldots \ldots \sqrt[2n]{5}? \quad \textit{Т.}\ 5.$$

528. Найти предѣлъ суммы

$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots$ до ∞ при $q < 1$ и при $q > 1$. *Т.* 7.

529. Найти сумму n членовъ ряда

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots,$$

не пользуясь формулой геометр. прогрессіи. *Т.* 7.

530. Суммировать безконечный рядъ

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \ldots$$

531. Суммировать безконечный рядъ $x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \ldots \infty$, при $x < 1$.

532. Опредѣлить сумму n членовъ ряда:

$$r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \ldots \quad \textit{П. С.}\ 3.$$

533. Найти предѣлъ суммы безконечнаго ряда

$$1 + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots\ldots, \text{ при } q < 1. \quad \textit{П. С.}\ 5.$$

534. Суммировать безконечный рядъ
$1+3q+5q^2+7q^3+9q^4+\ldots$, при $q<1$. *П. С.* 7.

535. Суммировать безконечный рядъ
$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots\ldots$ *П. С.* 7.

536. Доказать, что $\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}\ldots\ldots\infty=2$.

537. Доказать, что $2^{\frac{1}{4}}\cdot4^{\frac{1}{8}}\cdot8^{\frac{1}{16}}\cdot16^{\frac{1}{32}}\ldots\ldots\infty=2$.

538. Суммировать безконечный рядъ:
$1-x+2x^2-3x^3+4x^4\ldots\ldots$ при $x<1$.

ОТДѢЛЪ VIII.

Логариѳмы.

А. Задачи, рѣшаемыя безъ таблицъ.

539. Найти величину выраженій:

a) $lg_{\frac{1}{8}}\sqrt{2}$; b) $lg_{0,32}\left(\frac{2}{5}\sqrt{2}\right)$; c) $lg_{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)$; d) $lg_4\left(\frac{1}{4}\right)$.

540. Чему равенъ $log_{0,01}0,1$. *Т.* 3.

541. Найти x, если $x=lg_5\frac{1}{25}$. *Эл.* 7.

542. Вычислить x, зная, что $x=log_{125}\sqrt[3]{5}$. *П. С.* 7.

543. Рѣшить уравненіе: $x=log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{4}$. *Т.* 7.

544. Чему равенъ $log_{81}\sqrt[5]{9}$? *Т.* 7.

545. Опредѣлить x изъ уравненія: $x=log_{\frac{1}{8}}32$. *Т.* 6.

546. Вычислить логариѳмъ *двухъ* при основаніи $\frac{1}{8}$. *Т.* 5.

547. Чему равенъ $log_{32}\sqrt[3]{2}$? *Т.* 5.

548. Чему равенъ $log_8 0{,}25$? *Т.* 5.

549. Вычислить величину выраженія $log_4 0{,}125$. *Т.* 7.

550. Вычислить величину дроби $\frac{log_7 32}{log_7 4}$. *П. С.* 5.

551. Найти x, если $log_x 42025 = 2$. *Т.* 3.

552. Рѣшить уравненіе : $log_x 225 = \frac{2}{3}$. *Т.* 3.

553. Чему равенъ x, если $log_x 2401 = 4$. *Т.* 5.

554. Опредѣлить x, если $log_x 0{,}125 = \overline{1}{,}25$. *Т.* 7.

555. При какомъ значеніи x вѣрно равенство: $log_x 5 = -\frac{2}{3}$. *Т.* 6.

556. Вычислить x, зная, что $log_x 0{,}37571 = 3$. *Т.* 6.

557. При какомъ x будетъ вѣрно: $log_x 93025 = 2$? *Т.* 7.

558. Найти число, log котораго $= -\frac{1}{5}$.

559. Вычислить x, если $log_{16} x = -\frac{3}{4}$. *Т.* 3.

560. Чему равенъ x, если $log_{27} x = \frac{2}{3}$. *Т.* 7.

561. Дано: $log_{\frac{16}{81}} x = -\frac{3}{4}$. Вычислить x. *Гр.* 6.

562. Опредѣлить x, если $log_{\frac{1}{64}} x = \frac{3}{2}$. *Т.* 7.

563. Чему равенъ x, еели $log_{\frac{1}{81}} x = \overline{1}{,}25$. *Т.* 7.

564. Найти число, котораго логариѳмъ при основаніи $\frac{27}{8}$ равенъ $\left(-\frac{2}{3}\right)$. *Т.* 7.

565. Найти характеристики слѣдующихъ логариѳмовъ: *a*) $lg_2 7$; *b*) $lg_5 4215$; *c*) $lg_{11} 10342$; *d*) $lg_{\frac{3}{5}} 5$; *e*) $lg_{\frac{1}{7}} 513$; *f*) $lg_3 \frac{2}{13}$; *g*) $lg_5 0{,}001$.

566. Найти величину выраженій:

$$a)\ 3^{\log_3 2};\quad b)\ 7^{\log_7 0{,}3};\quad c)\ a^{\log_a b}.$$

567. Чему равно $10^{\log 2}$. *Т.* 7.

568. Вычислить величину выраженія: $x = 10^{1-\log\frac{5}{2}}$. *Т.* 7.

569. Чему равно $6^{1+\log_6 5}$? *Т.* 6.

570. Чему равно выраженіе $10^{3\log 2}$? *Т.* 7.

571. Чему равно $5^{2\log_5 3}$? *Т.* 5.

572. Вычислить $3^{\log_{27} 8}$. *Т.* 7.

573. Вычислить выраженіе $64^{\frac{2}{3}\log_{64} 27}$. *Т.* 7.

574. Чему равно $125^{\log_{25} 16}$? *П. С.* 7.

575. Чему равно $81^{\log_{243} 32}$? *П. С.* 7.

576. Вычислить x, если $2^{\frac{3}{\lg_2 x}} = \frac{1}{8}$. *Т.* 4.

577. Вычислить x, если $10^{\frac{3}{\log x}} = 0{,}001$. *Т.* 5.

578. Вычислить x, если $4^{\frac{1}{\log_2 x}} = 2$. *Т.* 6.

579. Зная, что $\log 64 = a$, найти $\log 32$. *Т.* 5.

580. Зная, что $\log 2 = a$ найти слѣдующіе логариѳмы:

$$a)\ \lg 125;\quad b)\ \lg\sqrt{1{,}25};\quad c)\ \lg 0{,}025;\quad d)\ \lg\sqrt[3]{0{,}0125}.$$

581. Зная, что $\lg 54 = a$; $\lg 6{,}125 = b$ и $\lg 31{,}5 = c$, найти логариѳмы первыхъ девяти чиселъ: 1, 2, 3 . . . . . 9.

582. Зная, что $\log 64 = a$, вычислить $\log\sqrt[3]{25}$. *Т.* 4

583. Зная, что $\log_{ab} a = k$, найти $\log_{ab} b^2$. *Т.* 3.

584. Дано: $\log_6 2 = a$; вычислить $\log_6 9$.

585. Дано: $\log_{36} 8 = a$; вычислить $\log_{36} 9$.

586. Дано: $\log 2 = 0{,}3010300$; $\log 7 = 0{,}8450980$; вычислить $\log\sqrt[3]{\frac{25}{98}}$. *П. С.* 6.

587. Зная, что $log 7 = 0,8450980$, вычислить $log_{0,1} 0,7$. *П. С.* 6.

588. Зная, что $log 7 = 0,8450980$, вычислить $log_{0,01} 0,7$. *П. С.* 6.

589. Даны: $log 648 = 2,81157501$ и $log 864 = 2,93651374$. Вычислить $log 3$ и $log 5$. *П. С.* 6.

590. Даны: $log 2 = 0,3010300$ и $log 5,743491 = 0,7591760$. Вычислить корень пятой степени изъ числа 0,0625. *П. С.* 7.

591. Чему равенъ логариѳмъ кубичнаго корня изъ числа 0,01? *П. С.* 5.

592. Опредѣлить x изъ уравненія

$$(log_2 x)^2 - 2 log_2 (x^2) + 3 = 0. \quad T. \ 6.$$

593. Опредѣлить x изъ уравненія

$$\frac{log(x^3 - 4x^2 + x + 1)}{log(x + 1)} = 3. \quad П. \ С. \ 6.$$

594. Чему равно произведеніе $log_b a \,.\, log_a b$? *П. С.* 6.

595. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$log_{10} 3 \,.\, log_3 10^{\sqrt{x+2}} = x - 4. \quad П. \ С. \ 5.$$

596. Дано: $log_{12} 27 = a$; найти $log_6 16$.

597. Дано: $log_{14} 2 = a$; найти $log_{49} 16$.

598. Дано: $log_4 125 = a$; найти $log_{10} 64$. *Т.* 3.

599. Вычислить $log_6 16$, зная, что $log_{12} 27 = a$. *Т.* 7.

600. Вычислить $log_{25} 50$, зная, что $log_{10} 64 = a$. *Т.* 7.

601. Дано: $log_{30} 8 = a$; $log_{30} 27 = b$; найти $log_{54} 125$.

602. Дано: $log_5 4 = a$; $log_5 3 = b$; найти $log_{25} 12$.

603. Дано: $log_{30} 3 = a$; $log_{30} 5 = b$; найти $log_{30} 8$.

604. Дано: $log_{24} 3 = a$; $log_{24} 5 = b$; найти $log_{30} 12$.

605. Дано: $log_{14} 7 = a$; $log_{14} 5 = b$; найти $log_{35} 28$.

606. Вычислить $log_9 20$, зная, что $log 2 = a$ и $log 3 = b$. *Т.* 3.

607. Вычислить $log_{25} 12$, зная, что $log_5 4 = a$ и $log_5 3 = b$. *Т.* 7.

608. Вычислить $log_4 1,2$, зная, что $log 2 = a$ и $log 3 = b$. *Т.* 7.

609. Вычислить $log_5 6$, зная, что $log 2 = a$ и $log 3 = b$. *Т.* 7.

* * *

В. Задачи, требующія примѣненія логариѳмическихъ таблицъ *).

610. При помощи логариѳм. таблицъ вычислить $x = \sqrt[5]{-0{,}375}$.

611. При помощи логариѳм. табл. вычисл. $\sqrt[11]{-\frac{0{,}345087}{0{,}523}}$.

612. При помощи логариѳм. табл. вычисл. $\sqrt[3]{\frac{1{,}37}{0{,}03}}$. *Т.* 5.

613. По логариѳм. таблицамъ вычислить $\sqrt[3]{\frac{0{,}003}{372}}$. *Т.* 4.

614. По логариѳм. таблицамъ вычислить $\sqrt[3]{(-0{,}02)^5}$ *П. С.* 5.

615. При помощи логариѳм. таблицъ вычислить $x = \sqrt[5]{-0{,}02}$. *П. С.* 7.

616. По логариѳм. таблицамъ найти $\sqrt[5]{-\frac{13}{16}}$. *П. С.* 6.

617. Пользуясь таблицами логариѳмовъ, вычислить $\sqrt[5]{-0{,}25789}$. *П. С.* 7.

618. По логариѳм. таблицамъ вычислить $\sqrt[7]{-0{,}001}$. *П. С.* 5.

619. Вычислить, пользуясь логариѳм. таблицами $\sqrt[7]{-0{,}004}$. *П. С.* 7.

---

*) Всѣ отвѣты на эти задачи вычислены при помощи пятизначныхъ таблицъ Пржевальскаго; при этомъ во всѣхъ случаяхъ, гдѣ приходилось отбрасывать $\frac{1}{2}$, предыдущая цыфра увеличена на 1. Такъ напр., если $2 log x = 0{,}21473$, то $log x = 0{,}10737$.

620. Вычислить корень десятой степени изъ 0,001, пользуясь таблицами логариѳмовъ. *П. С.* 6.

621. По логариѳм. таблицамъ вычислить $\sqrt[10]{0,01}$. *П. С.* 7.

622. Пользуясь логариѳм. таблицами, вычислить

$$\sqrt{-\frac{2}{7}}.\ \textit{П. С. } 7.$$

623. Вычислить по логариѳм. таблицамъ $\sqrt[3]{-5}$. *П. С.* 5.

624. Чему равенъ $log\sqrt[3]{-5}$. *П. С.* 5.

625. Вычислить $x=\left(\sqrt[3]{0,13}\right)^2$ по логариѳм. таблиц. *Т.* 3.

626. При помощи логариѳм. таблицъ вычислить

$$x=243\sqrt[5]{-0,0035}.\ \textit{П. С. } 7.$$

627. Пользуясь логариѳм. таблицами, вычислить

$$x=0,01\sqrt[5]{-0,0010001}.\ \textit{П. С. } 7.$$

628. При помощи логариѳм. вычислить

$$\sqrt[5]{1-7,00021\sqrt[3]{0,01}}.$$

629. При помощи логариѳм. вычислить

$$\sqrt[3]{1-4,20131\sqrt[3]{0,1}}$$

630. При помощи логариѳм. вычислить выраженіе:

$$x=\sqrt[7]{0,034^5-\sqrt[13]{0,0059^7}}.\ \textit{Т. } 6.$$

631. По логариѳм. таблиц. вычислить $\sqrt[3]{log\frac{1}{3}}$. *Т.* 7.

632. Пользуясь таблицами логариѳм., найти $\sqrt[3]{log0,37}$. *Т.* 7.

633. Найти x, если $logx=-0,497$. *П. С.* 4.

634. Вычислить выраженіе $log \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{(32)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{55}}}$. *Гр.* 7.

635. Опредѣлить, чему равно выраженіе $(log 0,03)^3$ *Т.* 4.

636. По таблицамъ вычислить $(0,273)^{1,573}$. *Т.* 5.

637. По таблицамъ найти величину выраженія $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,2073}$ *Т.* 7.

638. Вычислить x, если $3 log x = 2,30174 - \overline{1},71056$. *Т.* 7.

639. Вычислить величину выраженія $x = log\left[0,0173^{0,17624}\right]$. *Т.* 7.

640. По таблицамъ вычислить $(\overline{2}, 06789)^6$. *Т.* 3.

641. При помощи таблицъ произвести умноженіе $(0,17593) \cdot (\overline{2}, 93416)$ *Т.* 3.

642. При помощи таблицъ найти частное отъ дѣленія $(0,17024) : (\overline{2}, 97045)$. *Т.* 4.

643. Найти x, если $log x = -\frac{1}{3}$.

644. Найти x, если $log x = -0,7$.

645. Найти x, если $log x = 3 \cdot \overline{2}, 7345$. *Т.* 5.

646. Вычислить при помощи логар. величину произведенія $(0, 17325) \cdot (\overline{2}, 53471)$. *Т.* 4.

647. При помощи логар. вычислить $(\overline{2}, 06789)^{\frac{1}{3}}$. *Т.* 5.

648. Найти x, если $log x = \overline{2}, 72681 - \overline{3}, 42711$. *Т.* 3.

649. Найти x, если $log_2 x = \overline{1}, 14596$.

650. Найти x, если $log_5 x = \overline{1}, 12356$.

651. Найти x, если $log_7 x = \overline{1}, 5634$.

652. Найти x, если $log_3 x = \overline{1}, 30251$.

653. Найти x, если $log_{100} x = \overline{1},04923$.

654. Вычислить x, если $log_{0,1} x = \overline{1}, 05348$. *Т.* 7.

655. Вычислить x, зная, что $log_{0,1} x = 2, 67$. *Т.* 3.

656. Чему равенъ x, если $log_3 x = \bar{1}, 237$. *T.* 5.

657. Дано: $log_2 x = \bar{1}, 14596$. Найти x. *T.* 7.

658. Вычислить x, если $log_{0,1} x = \bar{3}, 17028$. *T.* 7.

659. Найти x, если $log_3 x = 0, 0057$. *T.* 7.

660. Вычислить x, если $log_{100} x = 0, 18$. *T.* 6.

661. Вычислить x, если $log_{100} x = 2, 19418$. *T.* 5.

662. Найти x, если $x = log_3 0{,}937$.

663. При помощи логариѳмическихъ таблицъ найти величины слѣдующихъ выраженій:

a) $log_2 2{,}7168$; *b*) $log_4 0{,}015$; *c*) $log_{\frac{1}{2}} 1000$; *d*) $log_6 0{,}018$; *e*) $log_3 0{,}017$; *f*) $log_{\frac{1}{2}} 0{,}3$; *g*) $log_{\frac{1}{2}} 0{,}001$.

664. Вычислить величину $log_{0,5} 1{,}3217$. *T.* 7.

665. Чему равенъ $log_{12} 100$. *Гр.* 5.

666. Чему равенъ $log_{2,7} 0{,}0527$. *T.* 6.

667. Найти логариѳмъ числа 0,05793 при основаніи 2,7. *T.* 6.

668. Вычислить $log_{0,002} 0{,}02$. *П. С.* 6.

669. Найти $log_5 12$. *T.* 4.

670. Вычислить $log_{3,2} 0{,}01528$. *Гр.* 7.

671. Вычислить величину выраженія $log_{1,3} 0{,}00005673$. *T.* 3.

672. Чему равенъ $log_3 0{,}017242$? *T.* 4.

673. Найти $log_{100} 0{,}17375$. *T.* 3.

674. Вычислить по таблицамъ логариѳмъ 8 при основаніи 12. *Гр.* 6.

675. Опредѣлить по таблицамъ x, если $log_x 5 = -\frac{2}{3}$. *T.* 3.

676. При помощи логар. таблицъ найти x, если $log_x 2 = 0{,}6$. *T.* 5.

677. При какомъ основаніи логариѳмъ восьми равенъ 0,6? *T.* 6.

678. По таблиц. найти x, зная, что $log_x 2 = \bar{1}, 47917$. *T.* 6.

ОТДѢЛЪ IX.

Биномъ Ньютона. Непрерывныя дроби.

679. Разложить по биному $(1-\sqrt{3})^4$. *Гр.* 5.

680. Разложить по биному $(a+b)^7$. *Гр.* 6.

681. Написать разложеніе $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$. *Т.* 7.

682. Написать разложеніе $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$. *Т.* 7.

683. Разложить по биному $\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$. *Т.* 5.

684. Написать разложеніе $\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^6$. *Т.* 7.

685. Разложить по биному $(a+bi)^6+(a-bi)^6$.

686. Написать средній членъ разложенія $(x-y)^{14}$. *Т.* 7.

687. Въ разложеніи $\left(\frac{10x}{y}-\frac{y}{10x}\right)^9$ написать пятый и шестой члены.

688. Написать коэффиціентъ при x^1 въ разложеніи:

$$\left[x^2+\frac{a^3}{x}\right]^5. \ T.\ 7.$$

689. Написать коэффиціентъ при x^3 въ разложеніи:

$$\left[\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^{16}.$$

690. Въ разложеніи $\left[\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}}\right]^{15}$ найти членъ, независящій отъ a.

691. Въ разложеніи $\left[x+\frac{1}{x}\right]^6$ найти членъ, не содержащій x.

692. Въ разложеніи $\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^{12}$ найти членъ, содержащій x^6. *Т.* 5.

693. Въ разложенiи $\left[\sqrt[3]{a^2}+a^{-0,(8)}\right]^7$ найти членъ, независящiй отъ a.

694. Въ разложенiи $\left[\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[5]{a^3}\right]^{12}$ найти членъ, содержащiй $a^{\frac{22}{3}}$.

695. Вычислить коэффицiентъ того члена разложенiя $\left(\frac{a^3}{b}-\frac{b^3}{a}\right)^7$, который содержитъ a^5b^9. *Т.* 3.

696. Въ разложенiи $\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right)^{11}$ вычислить членъ, содержащiй ab^{11}. *Т.* 3.

697. Вычислить коэффицiентъ при a^6b^{-6} въ разложенiи $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{14}$. *Т.* 5.

698. Въ разложенiи $\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right)^{12}$ вычислить членъ содержащiй b^{12}. *Т.* 7.

699. Въ разложенiи $\left(\frac{a^3}{b}-\frac{b^3}{a}\right)^9$ найти членъ, содержащiй a^3b^{15}. *Т.* 6.

700. Въ разложенiи $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{11}$ найти коэффицiентъ при членѣ, содержащемъ a^3b^{-3}. *Т.* 6.

701. Коэффицiентъ при x въ третьемъ членѣ разложенiя $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^n$ равенъ 31. Найти восьмой членъ этого разложенiя. *Т.* 7.

702. Найти всѣ рацiональные члены въ разложенiи бинома $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{12}$.

703. Найти всѣ рацiональные члены разложенiя

$$\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[7]{x}\right)^{13}.$$

704. Найти всѣ раціональные члены разложенія

$$\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{21}.\ \textit{П. С. 5.}$$

705. Выписать всѣ раціональные члены разложенія

$$\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{5}}\right)^{19}.\ \textit{П. С. 4.}$$

706. Въ разложеніи $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}\right)^{19}$ выписать средній членъ и найти всѣ раціональные члены. *П. С.* 6.

707. Выписать всѣ раціональные члены разложенія

$$\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)^{63}.\ \textit{П. С. 5.}$$

708. Въ разложеніи $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{63}$ выписать всѣ раціональные члены. *П. С.* 3.

709. Найти всѣ раціональные члены разложенія

$$\left(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[10]{x^3}\right)^{100}\quad \textit{П. С. 7.}$$

710. Показать, что если A означаетъ сумму нечетныхъ членовъ въ разложеніи $(x+a)^n$, а B — сумму четныхъ членовъ въ томъ же разложеніи, то $A^2-B^2=(x^2-a^2)^n$. *П. С.* 6.

* *
*

711. Разложить $\frac{377}{144}$ въ непрерывную дробь и найти третью подходящую. *Т.* 4.

712. При помощи непрерывныхъ дробей рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненія: *Т. И.*

a) $7x-12y=15$; *b*) $62x+27y=5$; *c*) $85x-37y=2$;
d) $8x-13y=1$; *e*) $29x+17y=12$; *f*) $4x-14y=7$;
g) $37x-15y=22$.

713. Найти значеніе безконечной непрерывной дроби

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\ldots\ldots\infty.$$

714. Найти значенie безконечной непрерывной дроби $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\infty$.

715. Найти величину произведенiя

$$\left[a+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\ldots\ldots\infty\right]\left[\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\ldots\ldots\infty\right].$$

716. Показать, что разность между первой и n-ою подходящей дробью численно равна $\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\frac{1}{q_4q_5}\ldots+$ $+\ldots\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$.

ОТДѢЛЪ X.

Смѣшанныя задачи.

717. Составить уравненie, имѣющее слѣдующie 4 корня: $1, -1, 2, -2$.

718. Составить квадратное ур-ie съ рацiональными коэффицiентами, имѣющее одинъ корень $(5-\sqrt{2})$. *Т* 3.

719. Составить квадратное ур-ie съ вещественными коэффицiентами, имѣющее одинъ корень $(2+3i)$. *Т.* 4.

720. Составить ур-ie наименьшей степени съ рацiональными коэффицiентами, въ числѣ корней котораго былъ бы $(1-\sqrt{2})$ *П. С.* 3.

721. Составить ур-ie наименьшей степени съ вещественными коэффицiентами, въ числѣ корней котораго были бы: 1 и $(1+i)$.

722. Составить ур-ie наименьшей степени съ рацiональными и вещественными коэффицiентами, въ числѣ корней котораго были бы $(1+i\sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{3})$.

723. Составить ур-іе наименьшей степени съ раціональными и вещественными коэффиціентами, въ числѣ корней котораго были бы $(1+i)$ и $(3+i\sqrt{2})$.

724. Составить ур-іе наименьшей степени съ раціональными коэффиціентами, въ числѣ корней котораго были бы 1 и $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. *П. С.* 4.

725. Составить возвратное ур-іе, въ числѣ корней котораго были бы 3, 2 и $\frac{1}{2}$. *П. С.* 4.

726. Составить возвратное ур-іе, въ числѣ корней котораго были бы 2, (—3) и $\frac{1}{2}$. *П. С.* 3.

727. Составить возвратное ур-іе второго рода, въ числѣ корней котораго были бы 5 и (—1).

728. Составить биквадратное ур-іе имѣющее въ числѣ своихъ корней $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

729. Составить уравненіе наименьщей степени съ раціональными коэффиціентами, имѣющее корни $(1+\sqrt{2})$ и $(2+\sqrt{2})$. *П. С.* 7.

730. Составить биквадратное уравненіе съ раціональными коэф., зная, что одинъ изъ его корней равенъ $(\sqrt{2}+\sqrt{5})$. *П. С.* 6.

731. Составить биквадратное уравненіе съ вещественными и раціональными коэффиціентами, имѣющее однимъ корнемъ $\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)$ *П. С.* 7.

732. Написать уравненіе наименьшей степени съ вещественными коэффиціентами, имѣющее въ числѣ корней $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. *П. С.* 4.

733. Составить биквадратное уравненіе съ раціональными коэффиціентами такъ, чтобы одинъ корень его былъ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. *П. С.* 7.

734. Всегда ли возможно рѣшить *въ цѣлыхъ числахъ* неопредѣленное уравненіе $ax + by = ab$? *Т.* 5.

735. Найти наименьшее число, кратное 5, которое при дѣленіи на 13 даетъ въ остаткѣ 7. *Т.* 5.

736. Найти число, кратное 13 и меньше 300, которое при дѣленіи на 21 даетъ въ остаткѣ 8. *Т.* 5.

737. Найти наименьшее изъ чиселъ, кратныхъ 13, и дающихъ при дѣленіи на 21 въ остаткѣ 8. *Т* 6.

738. Найти наименьшее число, кратное 5, которое при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ единицу. *Т.* 7.

739. Найти наименьшее число, кратное 7, которое при дѣленіи на 5 даетъ въ остаткѣ 3. *Т.* 7.

740. Найти наибольшее трехзначное число, которое при дѣленіи на 21 даетъ въ остаткѣ 17, а при дѣленіи на 12 даетъ остатокъ, равный

$$\sqrt{2}\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right]\left[\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}\right].$$ *Эл.* 7.

741. При какихъ значеніяхъ x дробь

$$\frac{10 - 7x}{9}$$

представляетъ собой отрицательное нечетное число. *Т.* 4.

742. При какихъ значеніяхъ x дробь

$$\frac{3 - 7x}{11}$$

обращается въ цѣлое и положительное число, дающее при дѣленіи на 6 въ остаткѣ 5. *Т.* 4.

743. При какихъ значеніяхъ x дробь

$$\frac{11 - x}{7}$$

обращается въ цѣлое и положительное число, дающее при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 3. *Т.* 6.

744. При какихъ значеніяхъ x выраженіе

$$\frac{4 - 9x}{10}$$

обращается въ цѣлое и положительное число, дающее при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 1. *Т.* 7.

745. При какихъ значеніяхъ x выраженіе

$$\frac{10-7x}{9}$$

обращается въ четное отрицательное число? *Т.* 7.

746. При какихъ значеніяхъ x выраженіе

$$\frac{1-7x}{9}$$

представляетъ собой нечетное положительное число? *Т.* 7.

747. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ $11x-2y=200$. *Гр.* 6.

748. Рѣшить неопред. уравненіе $30y+23x=86$ въ цѣлыхъ и *отрицательныхъ* числахъ. *Т.* 5.

749. Рѣшить неопред. уравненіе $23x+30y=81$ *въ цѣлыхъ и отрицательныхъ* числахъ. *Т.* 4.

750. При помощи непрерывныхъ дробей рѣшить неопред. уравненіе $89x+144y=12$ въ цѣлыхъ и отрицательныхъ числахъ. *Т.* 5.

751. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ія:

$2x+3y-z=5$; $3x-4y+z=-2$. *П. С.* 4.

752. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ ур-ія:

$2x+3y+8z=500$; $8x+8y+8z=100$. *П. С.* 3.

753. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненія:

$2x+5y-3z-2=0$; $2x-5y+3z-8=0$. *П. С.* 6.

754. Сократить дробь $\dfrac{x^2+x-6}{5x^4-13x^3+6x^2+12x-24}$.

755. Сократить дробь $\dfrac{x^3-19x^2+119x-245}{3x^2-38x+119}$.

756. Сократить дробь $\dfrac{5x^3+2x^2-15x-6}{7x^3-4x^2-21x+12}$. *П. С.* 3.

757. Сократить дробь $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3+3x^2-2x-2}$. *П. С.* 3.

758. Сократить дробь $\dfrac{5x^3+7x^2+15x+21}{6x^3-4x^2+18x-12}$. *П. С.* 7.

759. Найти истинную величину дроби

$$\frac{x^4-4x^3-4x^2+24x-9}{x^3-x^2-21x+45}, \text{ при } x=3.$$

760. Рѣшить квадр. неравенство $4x^2+4x<3$. *T.* 5.

761. Рѣшить квадр. неравенство $6-5x-6x^2<0$. *T.* 5.

762. Рѣшить квадр. неравенство $2x^2-3x-2<0$. *T.* 6.

763. Рѣшить квадр. неравенство $5x^2-48x-20>0$. *П. С.* 6.

764. Рѣшить квадр. неравенство $4x^2-9x+11>0$. *П. С.* 6.

765. Рѣшить квадр. неравенство $8x^2+3x+7>0$. *П. С.* 6.

766. Рѣшить квадр. неравенство $x^2-4x+4<0$. *П. С.* 7.

767. Рѣшить квадр. неравенство $6x-2x^2+4>0$. *П. С.* 7.

768. Рѣшить квадр. неравенство $6x^2-5x+1<0$. *П. С.* 7.

769. Рѣшить квадр. неравенство $x^2-5x+9<0$. *T.* 7.

770. Рѣшить квадр. неравенство $3x-8x^2-7>0$. *П. С.* 7.

771. Рѣшить квадр. неравенство $4x-x^2+7>0$. *П. С.* 7.

772. Найти всѣ цѣлыя и *отрицательныя* значенія x, удовлетворяющія неравенству $8x-5-3x^2>0$. *T.* 5.

773. При какихъ значеніяхъ коэффиціента b квадр. неравенство $2x^2+3<bx$ можетъ существовать при всякихъ значеніяхъ x? *Эл.* 7.

774. Найти предѣлы для a такъ, чтобы одинъ изъ корней квадратнаго ур-ія $ax^2+2x+4=0$ былъ бы >1000. *П. С.* 3.

775. Въ какихъ предѣлахъ должно лежать a, чтобы одинъ изъ корней квадратнаго ур-ія $ax^2-2x-2=0$ былъ бы больше 100. *П. С.* 4.

776. Въ выраженіи $(1{,}001)^x$ выбрать x такимъ образомъ, чтобы все выраженіе было завѣдомо больше 1000. *П. С.* 3.

777. Въ выраженіи $(0{,}8)^x$ выбрать x такъ, чтобы величина этого выраженія была $<0{,}0001$. *П. С.* 5.

778. Выбрать x такимъ образомъ, чтобы можно было ручаться, что величина выраженія $(1{,}02)^x<0{,}23$. *П. С.* 3.

779. Подобрать значенія для x, при которыхъ будетъ удовлетворено неравенство

$$3^3(3^x-1)<0{,}1. \quad \textit{П. С. } 5.$$

780. Подобрать для x значенія, при которыхъ будетъ удовлетворено неравенство $(0{,}5^{7+x} - 0{,}5^{x}) < 0{,}001$. *Т.* 4.

781. Чему равна величина выраженія

$$\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a}}}} \;\ldots\ldots \text{до } \infty.$$ *Г.* 5.

782. Найти первые 7 членовъ квадрата
$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots)^2$. *П. С.* 7.

783. Найти первые 7 членовъ произведенія
$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 \ldots)$. *П. С.* 7.

784. Найти зависимость связывающую p и q, если кубичное уравненіе $x^3 + px + q = 0$ имѣетъ два равные корня. *Г.* 6.

785. Доказать, что при цѣломъ $h \geqslant 1$ выраженіе $2^{4h+2} + 1$ не можетъ быть абсолютно простымъ числомъ *П. С.* 7.

786. При какихъ основаніяхъ x будетъ вѣрно неравенство: $log_x 20 < log_x 19$? *П. С.* 3.

787. При помощи непрерывныхъ дробей показать, какъ можно вычислить $log_{10} 2$. *Гр.* 5.

788. Рѣшить уравненіе $\frac{1}{x-2} = 0$. *П. С.* 6.

789. Найти два числа, среднее ариѳметическое которыхъ равно A, а среднее геометрическое равно q. *П. С.* 7.

790. Рѣшить уравненіе $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$, зная, что оно имѣетъ два численно равные цѣлые корня противоположныхъ знаковъ. *П. С.* 6.

791. Рѣшить уравненіе $x^5 - 1 = 0$. *Гр.* 6.

792. Найти всѣ 8 корней уравн. $x^8 - 1 = 0$. *П. С.* 6.

793. Найти всѣ значенія x изъ уравн. $x^3 - 8 = 0$. *П. С.* 6.

794. Найти всѣ значенія кубичнаго корня изъ 8. *Гр.* 7.

795. Найти всѣ значенія корня пятой степени изъ (-1024). *П. С.* 3.

796. Опредѣлить всѣ алгебраическія выраженія, кубы которыхъ равны 0,125. *П. С.* 6.

797. Разложить на дѣйствительные множители двучлены x^4+1; x^6+1; x^8+1.

798. Разложить на раціональныхъ множителей

$$64x^6 - 729. \quad \textit{П. С. } 5.$$

799. Разложить на множители $2b^2+5a^2b+2a^4$. *Т.* 7.

800. Извлечь квадр. корень изъ многочлена

$$4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 6x + 9. \quad \textit{П. С. } 7.$$

801. Извлечь квадр. корень изъ многочлена

$$4a - 12a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 16a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}} + 9b^{\frac{2}{3}} - 24b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}} + 16c^{\frac{1}{2}}. \quad \textit{П. С. } 7.$$

802. Разложить 1728 на простыхъ множителей. *Гр.* 6.

803. Раздѣлить 1 на 2,0057 съ точностью до 0,0001. *Гр.* 6.

804. Разложить 343 на двѣ части, которыя относились бы между собой, какъ $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$. *Гр.* 6.

805. Число 2570 раздѣлить на 4 части, пропорціональныя числамъ 1 : 2 : 3 : 4. *Гр.* 6.

806. Раздѣлить 100 на такія 3 части, чтобы первая относилась ко второй, какъ $\frac{3}{4} : 1$, а вторая къ третьей, какъ $5 : \frac{1}{2}$. *Гр.* 7.

807. Раздѣлить 630 на такія 3 части, чтобы первая относилась ко второй, какъ $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$, а вторая къ третьей, какъ $\frac{7}{9} : \frac{3}{5}$. *Гр.* 6.

808. Какая дробь получится при обращеніи $\frac{11}{27}$ въ десятичную, и почему? То-же $\frac{1}{60}$? *Гр.* 5.

809. На основанiи извѣстныхъ признаковъ неполныхъ квадратовъ опредѣлить, могутъ ли извлечься квадр. корни изъ чиселъ 1920 ; 8757 ; 2133. *Т.* 6.

810. Извлечь съ точностью до 1 кубичный корень изъ 513724. *Гр.* 6.

811. Опредѣлить температуру смѣси изъ 1 стакана воды при 80° и 3 стакановъ при 50°. *Гр.* 5.

812. Смѣшано 2 сорта серебра: 5 фун. 82 пробы и 3 фун. 90 пробы. Опредѣлить пробу сплава. *Гр.* 6.

813. Для сплава взято 3 вещества въ количествѣ a, b, c gr.; удѣльный вѣсъ ихъ соотвѣтственно равенъ p, q, d. Опредѣлить удѣльный вѣсъ сплава. *Гр.* 7.

814. Если a фунт. b золотн. золота стоятъ p руб., и c фунт. d зол. серебра — q руб, то опредѣлить, во сколько разъ золото дороже серебра. *Гр.* 6.

815. Одно колесо дѣлаетъ въ минуту 600 оборотовъ, а другое въ 3 минуты 300 оборотовъ. Во сколько разъ одно колесо вращается быстрѣе другого. *Гр.* 6.

816. Если 0,004 свѣчи сгораетъ въ одну минуту, то во сколько часовъ, минутъ и секундъ сгоритъ вся свѣча. *Гр.* 5.

817. Зная, что 1 kgr. равенъ 2,4419 фунта, выразить вѣсъ a kgr. въ фунтахъ, золотникахъ и доляхъ. *Гр.* 6.

818. Если 100 верстъ составляютъ $\frac{4}{5}$ разстоянiя отъ Петербурга до Новгорода, то чему равно все это разстоянiе? *Гр.* 5.

819. Какимъ капиталомъ надо обладать, чтобъ получать ежегодно 2000 руб. процентовъ, если банкъ платитъ по $4\frac{1}{2}$%? *Гр.* 6.

820. Черезъ сколько лѣтъ удвоится капиталъ, отданный въ ростъ по p сложныхъ процентовъ. *Гр.* 7.

821. Нѣкто разсчиталъ, что если онъ дастъ каждому нищему по 15 коп., то у него не хватитъ 10 коп ; если же онъ будетъ давать по 12 коп., то у него останется 14 кон. Сколько было нищихъ и денегъ? *Гр.* 7.

822. Сколькими способами можно разсадить 5 человѣкъ за круглымъ столомъ? *П. С.* 5.

823. Сколькими способами можно сдать 52 карты четыремъ игрокамъ по 13 картъ каждому? *П. С.* 5.

824. Если квадратный корень изъ произведенія двухъ количествъ есть количество раціональное, то доказать, что квадратный корень изъ частнаго этихъ количествъ есть тоже величина раціональная.

825. Если квадратное ур-іе $ax^2+bx+c=0$ имѣетъ 2 равные корня, то доказать, что лѣвая часть его представляетъ собой точный квадратъ.

826. Прослѣдить измѣненія, которымъ подвергаются корни системы уравненій

$$ax+y=1;\quad x+ay=1$$

при измѣненіи a отъ $-\infty$ до $+\infty$. *П. С.* 7.

827. При какомъ основаніи логариѳмовъ будетъ вѣрно слѣдующее равенство

$$lg_x 5\sqrt{5}-1{,}25=(lg_x\sqrt{5})^2.$$

828. Данъ $lg_{10}2=0{,}30103$; найти съ точностью до 0,00001 $lg_{25}50$. *П. С.* 4.

829. Даны $lg2=0{,}3010300$ и $lg3=0{,}4771213$; найти цѣлыя значенія, между которыми должно содержаться x, чтобы цѣлая часть выраженія $(1{,}08)^x$ могла содержать 4 цыфры.

830. Опредѣлить x изъ уравненія

$$a^{x^2+2x-6,8}=a\sqrt[z]{a},$$

гдѣ z есть положительный корень ур-ія:

$$\sqrt{z^3-4z^2+2z+308}-2=z. \quad \textit{Эл. } 7.$$

831. Рѣшить уравненіе:

$$(1+x^2)^2=2ax(1-x^2),$$

гдѣ a=предѣлу суммы членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи, у которой $u_1=1\frac{1}{4}$, $u_2=0{,}4(9)$. *Эл.* 7.

832. Въ разложенiи $(a+b)^{2m}$, гдѣ m нечетное число, дано, что сумма коэффицiентовъ $C_1+C_3+C_5+\ldots\ldots+C_m=S$. Вычислить m? *Г.* 4.

833. Заяцъ находится отъ собаки на разстоянiи 80 своихъ прыжковъ. Въ то время, какъ онъ дѣлаетъ 3 своихъ прыжка, собака успѣваетъ сдѣлать только 2, но собака подвигается однимъ своимъ прыжкомъ столько же, сколько заяцъ двумя. Сколько прыжковъ сдѣлаетъ заяцъ, пока собака его догонитъ? *П. С.* 6.

834. A, идя со скоростью 5 верстъ въ часъ, догоняетъ B, идущаго со скоростью 4 версты. Когда разстоянiе между A и B было 450 саж., муха, сидѣвшая на шляпѣ A, полетѣла къ B и обратно, и такъ летала до встрѣчи A съ B. Сколько верстъ она пролетѣла за это время, если ея скорость 10 верстъ въ часъ.

835. Первый членъ ариѳм. прогрессiи равенъ числу, логариѳмъ котораго при основанiи $\sqrt[3]{9}$ равенъ 1,5. Если произведенiе первыхъ трехъ членовъ этой прогрессiи раздѣлить въ отдѣльности на каждый изъ нихъ, то сумма полученныхъ частныхъ равняется 167. Найти сумму десяти членовъ этой прогрессiи. (S_{10})? *Эл.* 7.

836. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненiе $ax+by=c$, въ которомъ a и b связаны условiемъ:

$$log\left[1+\frac{2b}{a-b}\right]=3log\,2-log\,3;\ log\,(a+b)=4log\,2,$$

и c равно $\sqrt{6241}$.

837. Рѣшить систему уравненiй

$$4^{0,25x^2-2x-8}=\sqrt{2};\ x-y=10^{\frac{1}{3}+log(0,5\sqrt[3]{100})}.\quad \text{Эл. } 7.$$

838. Найти два числа, если сумма ихъ равна 12, а сумма ихъ кубовъ $=468$. *Эл.* 7.

839. Число N, удовлетворяющее уравненiю $(0,13)^{N-204}=$ $=0,002197$ разложить на такiя двѣ цѣлыя части, чтобы одна часть была кратной 7, а другая при дѣленiи на 17 давала въ остаткѣ 9. *Эл.* 7.

840. Рѣшить уравненіе

$$10x^4+81x^3-182x^2+81x+10=0. \quad \text{Эл. 7.}$$

841. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопред. уравненіе $ax+by=c$, гдѣ $a=10^{\log_{10}5}$; $b=$ среднему геометрическому чиселъ 7 и 28, а c равно значенію квадратнаго корня изъ 7226 съ точностью до единицы. *Эл.* 7.

842. Сумма первыхъ двухъ членовъ безконечно убывающей геом. прогрессіи равна 39, а сумма кубовъ тѣхъ же членовъ $=17199$. Найти при основаніи $2\sqrt{2}$ логариѳмъ предѣла суммы членовъ этой прогрессіи. *Эл.* 7.

843. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопр. уравненіе $3x+5y=A$, гдѣ A равно числу сотенъ, заключающихся въ третьемъ членѣ разложенія $(\sqrt{10}-\sqrt{0,1})^8$.

844. Рѣшить уравненіе

$$\left\{\left(\sqrt[5]{27}\right)^{0.25x-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right\}^{0,25x+\sqrt{\frac{x}{3}}}=3^{1,75}. \quad \text{Эл. 7.}$$

845. Третій членъ ариѳм. прогрессіи равенъ большему значенію x, а двѣнадцатый большему значенію y, опредѣляемымъ изъ уравненій: $x^y=y^x$; $y:x=3:2$.

Сумма n членовъ этой прогрессіи, начиная отъ перваго, равна числу, $4\frac{1}{6}$ % котораго составляетъ второй членъ той же прогрессіи. Опредѣлить число членовъ n въ этой прогрессіи. *Эл.* 7.

Отвѣты и рѣшенія.

1. Какъ показано въ «Дополн. къ Алг.» (§ 58), посредствомъ умноженія числителя и знаменателя дроби на сопряженную величину знаменателя можно уничтожить сколько угодно квадратныхъ радикаловъ. Примѣняя этотъ способъ, получаемъ:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$; *b*) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})$;

c) Знаменатель разлагается на множители:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3});$$

слѣд., данная дробь $=-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

d) Знаменатель разлагается на множители:

$$(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3});$$

слѣд., дробь $=(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

e) Знаменатель разлагается на множители:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7});$$

слѣд. дробь $=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{7})$.

f) Знаменатель $=\sqrt{6}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-\sqrt{3}-4\sqrt{3}=$ $=3\sqrt{6}-3\sqrt{3}$; слѣд., дробь $=\sqrt{6}+\sqrt{3}$.

2. Уничтоженіе въ знаменат. ирраціональности выше второй степени производится, какъ показано въ § 61 «Дополн. къ Алг.», на основаніи теоремъ о дѣлимости

суммы или разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ на сумму или разность первыхъ степеней тѣхъ же количествъ. (См. тамъ же § 11). Примѣняя этотъ методъ получаемъ:

$a)$ $\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25}$;

$b)$ $\frac{1}{97}\left(4\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{6}+9\sqrt[3]{9}\right)$;

$c)$ $\frac{1}{5}\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)$;

$d)$ $\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4\right)$;

$e)$ $-\frac{1}{30}\left(4\sqrt[3]{9}+6\sqrt[3]{6}+9\sqrt[3]{4}\right)$;

$f)$ $\sqrt[15]{32^{14}}-\sqrt[15]{32^{13}\,.\,27}+\sqrt[15]{32^{12}\,.\,27^2}-\ldots.+$

$\ldots.-\sqrt[15]{32\,.\,27^{13}}+\sqrt[15]{27^{14}}$.

$g)$ $\left(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{8}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{8}\right)$;

$h)$ $\left(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

3. Вычисленіе квадратныхъ корней съ заданной степенью точности производится на основаніи правилъ, подробно изложенныхъ въ «Дополн. къ курсу Алгебры», (§§ 23—25).

Правило это заключается въ слѣдующемъ:

Для того, чтобы извлечь квадратный корень изъ числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$, надо извлечь съ точностью до единицы, квадратный корень изъ числа $A\,.\,n^2$ и полученный результатъ умножить на степень точности $\left(т.\ е.\ на\ \frac{1}{n}\right)$.

Вычисляя заданные корни согласно этому правилу, получаемъ слѣдующіе отвѣты:

a) $\left(\sqrt{17{,}53}\right)_{0,01}=4{,}18$ съ недост. и $=4{,}19$ съ избыткомъ.

b) $\left(\sqrt{43\frac{5}{7}}\right)_{\frac{1}{8}}=\frac{52}{8}$ „ „ и $=\frac{53}{8}$ „ „

c) $\left(\sqrt{7\frac{3}{11}}\right)_{\frac{2}{9}}=\frac{24}{9}$ „ „ и $=\frac{26}{9}$ „ „

d) $\left(\sqrt{22{,}13}\right)_{\frac{3}{7}}=\frac{30}{7}$ „ „ и $=\frac{33}{7}$ „ „

e) $\left(\sqrt{\frac{6}{11}}\right)_{\frac{5}{13}}=\frac{5}{13}$ „ „ и $=\frac{10}{13}$ „ „

f) $\left(\sqrt{0{,}55}\right)_{\frac{3}{11}}=\frac{6}{11}$ „ „ и $=\frac{9}{11}$ „ „

g) $\left(2\sqrt{17\frac{5}{8}}\right)_{\frac{3}{11}}=\frac{90}{11}$ „ „ и $=\frac{93}{11}$ „ „

h) $\left(3\sqrt{0{,}07}\right)_1=0$ „ „ и $=1$ „ „

4. Поступая согласно правиламъ, изложеннымъ въ §§ 26—30 «Дополн. къ курсу Алгебры», находимъ слѣдующіе отвѣты:

a) $\left(\sqrt[3]{5\frac{2}{9}}\right)_{0,1}=1{,}7$ съ недост. и $=1{,}8$ съ избыткомъ.

b) $\left(\sqrt[4]{2\frac{21}{31}}\right)_{\frac{2}{5}}=\frac{6}{5}$ „ „ и $=\frac{8}{5}$ „ „

c) $\left(\sqrt[5]{3{,}2}\right)_{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$ „ „ и $=\frac{4}{3}$ „ „

d) $\left(\sqrt[7]{1\frac{3}{5}}\right)_{\frac{1}{3}}=\frac{3}{3}$ „ „ и $=\frac{4}{3}$ „ „

e) $\left(\sqrt[9]{\frac{2}{7}}\right)_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ „ „ и $=\frac{2}{2}$ „ „

$f)$ $\left(\sqrt[5]{17{,}1}\right)_{\frac{2}{5}} = \frac{8}{5}$ съ недост. и $= \frac{10}{5}$ съ избыткомъ.

$g)$ $\left(\frac{3}{7}\sqrt[3]{81\frac{5}{6}}\right)_{\frac{1}{7}} = \frac{13}{7}$ „ „ и $= \frac{14}{7}$ „ „

$h)$ $\left(\sqrt[5]{23\frac{7}{11}}\right)_{\frac{3}{8}} = \frac{15}{8}$ „ „ и $= \frac{18}{8}$ „ „

$i)$ $\left(\sqrt[31]{1721465}\right)_1 = 1$ съ недост. и $= 2$ съ избыткомъ.

$k)$ $\left(\sqrt[50]{745624176}\right)_1 = 1$ „ „ и $= 2$ „ „

$l)$ $\left(\sqrt[100]{0{,}72}\right)_1 = 0$ „ „ и $= 1$ „ „

$m)$ $\left(\sqrt[307]{0{,}2754}\right)_1 = 0$ „ „ и $= 1$ „ „

5. $a)$ $\sqrt{21{,}12} = 4$ съ недост. и 5 съ избыткомъ; $b)$ 14 и 15; $c)$ $4\sqrt{1907\frac{2}{3}} = 43$ съ нед. и 44 съ изб.; $d)$ 0 и 1; $e)$ 316 и 317; $f)$ 752 и 753.

6. Преобразовывая данныя выраженія и извлекая корни съ точн. до 1, получаемъ:

$a)$ $\sqrt{83\frac{1}{2}} = 9$ и 10; $b)$ $\sqrt{200} = 14$ и 15; $c)$ $\sqrt{250} = 15$ и 16; $d)$ $\sqrt{50} = 7$ и 8; $e)$ $\sqrt{5000} = 70$ и 71.

7. $a)$ 1,8 и 1,9; $b)$ 2,2 и 2,3; $c)$ 2,6 и 2,7; $d)$ 4,3 и 4,4.

8. $a)$ $\frac{5}{2}$ и $\frac{6}{2}$; $b)$ $\frac{3}{12}$ и $\frac{4}{12}$; $c)$ $\frac{8}{12}$ и $\frac{9}{12}$; $d)$ 0,7 и 0,8; $e)$ 0,3 и 0,4.

9. $(\sqrt{2{,}6})_{0{,}01} = 1{,}61$ и 1,62; $(\sqrt{0{,}26})_{0{,}01} = 0{,}50$ и 0,51.

10. $\left(\sqrt[5]{2}\right)_{0{,}1} = 1{,}1$ и 1,2; $\left(\sqrt[5]{3}\right)_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2}$ и $\frac{3}{2}$.

11. Для вычисленія заданныхъ выраженій съ точностью до 0,01, необходимо сперва уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ дроби и потомъ произвести извлеченіе корня съ указанной точностью. Поступая такъ, получимъ:

a) $\sqrt{10}+3=6{,}16$ и $6{,}17$; *b*) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}-2}\right)_{0{,}01}=\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)_{0{,}01}=$
$=\left(\sqrt{\frac{6}{4}}\right)_{0{,}01}+1=1{,}22+1$ или $1{,}23+1=2{,}22$ или $2{,}23$; *c*) 4,23 или 4,24; *d*) 8,12 или 8,13.

12. Имѣемъ: *a*) $\sqrt{0{,}4}=\sqrt{0{,}40}\ldots\ldots=0{,}6\ldots\ldots$; слѣд., первая значущая цыфра этого корня равна 6; *b*) $\sqrt{0{,}9}=$ $=\sqrt{0{,}90}\ldots\ldots=0{,}9\ldots\ldots$, т. е. первая значущая цыфра равна 9; *c*) $\sqrt{0{,}025}=\sqrt{0{,}0250}\ldots\ldots=0{,}1\ldots\ldots$, т. е. первая значущая цыфра $=1$; *d*) $\sqrt[3]{0{,}08}=\sqrt[3]{0{,}080}\ldots=0{,}4\ldots$, т. е. первая значущая цыфра равна 4.

13. Имѣемъ: $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{9}}\right)_{0{,}1}=0{,}1\left(\sqrt[3]{\frac{5}{9}\cdot 10^3}\right)_1=$
$=0{,}1\left(\sqrt[3]{555\frac{5}{9}}\right)_1=0{,}1\left(\sqrt[3]{555}\right)_1=0{,}1\,.\,8$ или $0{,}1\,.\,9=0{,}8$ или $0{,}9$.

Также $\left(\sqrt[3]{15}\right)_{0{,}3}=0{,}3\left(\sqrt[3]{15\cdot\frac{10^3}{3^3}}\right)_1=0{,}3\left(\sqrt[3]{\frac{15000}{27}}\right)_1=$
$=0{,}3\left(\sqrt[3]{555\frac{5}{9}}\right)_1$; но $\left(\sqrt[3]{555\frac{5}{9}}\right)_1$, какъ мы только что имѣли, равенъ 8 и 9; слѣд., $(\sqrt[3]{15})_{0{,}3}=0{,}3\,.\,8$ или $=0{,}3\,.\,9=$ $=2{,}4$ или $2{,}7$.

14. *a*) 27; *b*) 0,01; *c*) 3; *d*) 12; *e*) $10\sqrt{5\sqrt{3}}$; *f*) -3; $\sqrt{11}$; *g*) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; *h*) 6; *i*) 3; *k*) $\sqrt[12]{a^7}$; *l*) $\sqrt[84]{a^{71}}$; *m*) $(a-2b)\sqrt[3]{a+b}$.

15. *a)* $\frac{64}{9}$; *b)* 7; *c)* $\frac{49}{150}\sqrt[3]{6}$; *d)* $\sqrt{\frac{ab^3}{c}}$; *e)* $a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}}$.

f) Имѣемъ: $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-$

$$-\frac{a^{\frac{2}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=\frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

g) Переписавъ первое слагаемое (изъ большихъ скобокъ) подъ видомъ: $\sqrt[3]{\sqrt{28+6\sqrt{3}}}$, замѣчаемъ, что $\sqrt{28+6\sqrt{3}}$ можно представить въ видѣ суммы двухъ квадратныхъ радикаловъ, такъ какъ $28^2-(6\sqrt{3})^2=676=26^2$, т. е. представляетъ точный квадратъ *). Выполнивъ это преобразованіе по извѣстнымъ правиламъ (§ 167), получаемъ:

$$\sqrt{28+6\sqrt{3}}=1+\sqrt{27}=1+3\sqrt{3}.$$

Послѣ этого данное для преобразованія выраженіе перепишется такъ:

$$\left[\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{27}+\frac{\sqrt{3}}{9}}\right]\cdot\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{1-27}=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{26}.$$

16. *a)* $\frac{217}{30}\sqrt{3}$; *b)* $\frac{61}{12}\sqrt{10}$; *c)* $\frac{729}{8}$; *d)* $\frac{97}{6}\sqrt[3]{18}$.

17. Всѣ подобныя преобразованія дѣлаются на основаніи слѣдующаго: изъ § 167 «Дополн. къ Алг.» извѣстно, что если разность (A^2-B) представляетъ собой квадратъ

---

*) См. „Дополн. къ Алг.“ § 167.

нѣкотораго раціональнаго числа C, то выраженія вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ преобразуются въ сумму, или разность двухъ квадратныхъ корней изъ раціональныхъ чиселъ:

$$\frac{1}{2}(A+C) \text{ и } \frac{1}{2}(A-C).$$

a) здѣсь $A^2-B=25-21=2^2$, а потому данныя выраженія $= \pm\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

b) $A^2-B=49-48=1^2$; слѣд., данн. выр. $=\pm(2-\sqrt{3})$

c) $A^2-B=5625-3024=51^2$; слѣд., данное выраж. $=$ $=\pm(3\sqrt{7}-2\sqrt{3})$.

d) Имѣемъ: $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\sqrt{7+\sqrt{48}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=$ $=\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

e) Переписываемъ данное выраженіе такъ:

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\left(\sqrt{13+\sqrt{48}}\right)}}$$

Такъ какъ $13^2-48=121=(11)^2$, то $\sqrt{13+\sqrt{48}}$ преобразуется въ $\sqrt{12}+1$, слѣд., данное выраженіе принимаетъ видъ:

$$2\sqrt{3+\left(\sqrt{4-\sqrt{12}}\right)}.$$

Также

$$\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{3}-1, \text{ а слѣд.,}$$

$$2\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Примѣняя подобное же преобразованіе къ выраженію $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, получаемъ отвѣтъ: $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

f) здѣсь $A = a + b - c$; $B = 4b(a - c)$; слѣд., $A^2 - B = (a + b - c)^2 - 4b(a - c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = (a - b - c)^2$, а потому данное выраженіе преобразовывается (§ 167) въ $\pm(\sqrt{a-c} - \sqrt{b})$.

18. Данныя выраженія могутъ быть представлены такъ:

a) $\dfrac{x^5-1}{x-1} \cdot \dfrac{x^5+1}{x+1} = \dfrac{x^{10}-1}{x^2-1} = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$. (§ 11).

b) Данныя выраженія могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1} \cdot \frac{x^{2n+1}+1}{x+1} = \frac{x^{4n+2}-1}{x^2-1} = x^{4n} + x^{4n-2} + x^{4n-4} + \ldots + x^4 + x^2 + 1. \ (\S\ 11).$$

c) Данныя выраженія могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{x^{10}-1}{x^2-1} \cdot \frac{x^{10}+1}{x^2+1} = \frac{x^{20}-1}{x^4-1} = x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1. \ (\S\ 11).$$

d) $\sqrt[4]{23-7} = \sqrt[4]{16} = 2$.

e) Произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексовъ равно квадрату ихъ общаго модуля («Дополн. § 151), а потому данн. выр. $= (5 - 10x + x^4)^2 + (x^5 - 10x^2 + x)^2 = x^{10} + x^8 - 20x^7 + 2x^6 - 20x^5 + 110x^4 - 20x^3 + 101x^2 - 100x + 25$.

19. *a*) Данныя выраженія могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{x^{10}-1}{x^2-1} : \frac{x^5-1}{x-1} = \frac{x^5+1}{x+1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1. \ (\S\ 11).$$

b) Пусть $x^m = a$; $y^n = b$. На основаніи § 11 имѣемъ:

$$\frac{a^6 - b^6}{a+b} = a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5;$$

а потому

$$\frac{x^{6m} - y^{6n}}{x^m + y^n} = x^{5m} - x^{4m}y^n + x^{3m}y^{2n} - x^{2m}y^{3n} + x^my^{4n} - y^{5n}.$$

c) $x^4 - x^2 + 1$. См. «Дополн.» § 12, примѣръ 2.

$d)$ $2-3i$ (См. § 152); $e)$ $-\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i$ (§ 152).

$f)$ i (§ 152); $g)$ $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$ (§ 152).

20. На основаніи правила о различныхъ степеняхъ мнимой единицы i. (См. «Дополн.» § 145), имѣемъ: $a)$ 2; $b)$ $2i$; $c)$ 0.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 21—28.

Всѣ эти уравненія при помощи самыхъ простыхъ преобразованій приводятся къ *трехчленнымъ* уравненіямъ (типъ I), о рѣшеніи которыхъ сказано въ §§ 2 и 3 книги «Искусственные способы и методы рѣшенія алгебраическихъ уравненій» сост. П. Шмулевичъ.

21. Пусть $\sqrt[6]{x}=y$, тогда $\sqrt[3]{x}=y^2$ и $y^2+y-2=0$, откуда $y=-2$ или 1; слѣд., $x=64$ или 1. Корень 64 ур-iю не удовлетворяетъ («Дополн.» § 133).

22. Имѣемъ: $y^2-y-2=0$, откуда $y=-1$ или 2 слѣд., $x=y^6=1$ или 64. Значеніе $x=1$ по подстановкѣ въ данное ур-іе ему не удовлетворяетъ («Дополн.» § 133).

23. Имѣемъ: $2y^2-y-6=0$, откуда $y=-\frac{3}{2}$ или 2; слѣд., $x=y^3=-\frac{27}{8}$ или 8. Оба корня по подстановкѣ удовлетворяютъ уравненію.

24. Имѣемъ: $3y^2-5y-2=0$, откуда $y=-\frac{1}{3}$ и 2; слѣд., $x=y^4=\frac{1}{81}$ или 16. Значеніе $x=\frac{1}{81}$ уравн. не удовлетворяетъ («Дополн.» § 133).

25. Переписываемъ данное трехчленное уравненіе такъ: $x^5 - 33\sqrt{x^5} + 32 = 0$, или $y^2 - 33y + 32 = 0$, откуда $y = 1$ или 32; слѣд., $x = y^{\frac{2}{5}} = 1$ или 4. Оба корня удовлетворяютъ уравненію.

26. Имѣемъ: $2y^2 + 5y - 63 = 0$, откуда $y = -7$ или $\frac{9}{2}$. Слѣд., $x = y^3 = -343$ или $\frac{729}{8}$. Оба корня по подстановкѣ удовлетворяютъ уравненію.

27. Данное ур-іе легко преобразуется въ слѣдующее: $2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} - 20 = 0$, откуда $\sqrt[3]{x^2} = 4$ или $= -\frac{5}{2}$; слѣд., $x_1 = \pm 8$; $x_2 = \pm\frac{5}{2}i\sqrt{\frac{5}{2}}$. Оба корня удовл. уравненію.

28. Имѣемъ: $x^{\frac{7}{3}} - \frac{56}{x^{\frac{2}{3}}} - x^{\frac{5}{6}} = 0$, откуда $x^3 - x^{\frac{3}{2}} - 56 = 0$, это ур-іе даетъ рѣшенія: $x^{\frac{3}{2}} = 8$ или $= -7$; слѣд., $x_1 = \sqrt[3]{64} = 4$*), и $x_2 = \sqrt[3]{49}$. Значеніе x_2 ур-ію не удовлетворяетъ («Дополн.» § 133).

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 29—38.

Всѣ эти уравненія рѣшаются безъ всякихъ искусственныхъ пріемовъ посредствомъ возвышенія обѣихъ частей ур-ія въ квадратъ. Въ Технологическомъ Институтѣ, гдѣ они главнымъ образомъ предлагаются, обращается большое вниманіе на *провѣрку подстановкой* получаемыхъ результатовъ, что необходимо дѣлать на основаніи §§ 133 и 134 „Дополн. къ Алгебрѣ". За рѣшеніе уравн. безъ провѣрки полученныхъ значеній для x сбавляется полъ балла.

29. Возвысивъ въ квадратъ, получимъ:

$$2\sqrt{6x - 8 - x^2} = 4 - x.$$

---

*) **Если отбросить мнимыя значенія кубическаго корня. („Дополн." § 186).**

Возвысивъ еще разъ: $5x^2-32x+48=0$, откуда $x=4$ или $\frac{12}{5}$. Оба корня по подстановкѣ въ данное ур-iе ему удовлетворяютъ.

30. Возвысивъ въ квадратъ, получаемъ: $\sqrt{x^2-16}=3$, откуда $x^2=25$; $x=\pm 5$. Оба корня ур. не удовлетворяютъ.

31. По возвышенiи въ квадратъ получаемъ:

$$\sqrt{x^2+4x-12}=x-6.$$

Возвысивъ въ квадр. еще разъ, получимъ $x=3$, корень не удовлетворяющiй уравненiю.

32. Возвысивъ въ квадратъ, имѣемъ: $\sqrt{x^2-16}=-3$, откуда $x=\pm 5$. Значенiе $x=5$ уравн. не удовлетворяетъ.

33. По возвышенiи въ квадратъ получаемъ: $\sqrt{32x+x^2}=$ $=-8-x$, возвысивъ въ квадратъ еще разъ, находимъ $x=4$; корень этотъ не удовл. уравненiю.

34. Возвышаемъ въ квадратъ: $\sqrt{x^2+9x-10}=4+x$. Возвысивъ еще разъ, находимъ корень $x=26$, не удовлетворяющiй уравненiю.

35. Послѣ возвышенiя въ квадратъ получается: $\sqrt{x^2+24x+80}=20-x$. Возвысивъ въ квадратъ еще разъ, находимъ $x=5$. Корень этотъ удовлетворяетъ уравненiю.

36. Возведя въ квадратъ, получаемъ: $-\sqrt{x^2+15x+44}=12$; возведя въ квадратъ еще разъ:

$$x^2+15x-100=0,$$

откуда $x_1=5$ и $x_2=-20$; послѣднiй корень по подстановкѣ въ данное ур-iе ему удовлетворяетъ, хотя даетъ мнимыя значенiя; корень же $x=5$ не годится.

37. Возведя въ квадратъ, получаемъ: $6=\sqrt{48-x}$, послѣ чего возвышая въ квадратъ вторично, находимъ $x=12$; подставляя этотъ корень въ данное ур-iе видимъ, что онъ ему удовлетворяетъ.

38. Возведя въ квадратъ, получаемъ: $6 = -\sqrt{48-x}$; откуда $x = 12$. Этотъ корень по подстановкѣ въ данное ур-іе ему не удовлетворяетъ, чего, впрочемъ, и слѣдовало ожидать, ибо изъ предыдущей задачи видно, что корень $x = 12$ удовлетворяетъ ур-ію $\sqrt{93-x} = 3 + \sqrt{48-x}$, а не данному.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 39—41, 45—53.

Всѣ эти уравненія при помощи очень несложныхъ преобразованій приводятся къ типу II, разобранному въ книгѣ „Искусственные способы и методы рѣшенія алгебраическихъ уравненій“ въ §§ 4—6.

39. Вычитая изъ обѣихъ частей по 9, получаемъ:

$$x^2 - 9 - \sqrt{x^2 - 9} = 12, \text{ или } y^2 - y - 12 = 0,$$

откуда $y = -3$ или 4. Изъ уравненія $x^2 - 9 = y^2$, находимъ $x = \pm 5$ и $x = \pm 3\sqrt{2}$. Послѣднее значеніе данному ур-ію не удовлетворяетъ.

40. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ по 5 и обозначивъ $\sqrt{x^2+5} = y$, получаемъ: $y^2 + y - 20 = 0$, откуда $y = -5$ или 4. Слѣд., $x = \pm\sqrt{11}$ или $x = \pm 2\sqrt{5}$. Послѣднее значеніе уравн. не удовлетворяетъ.

41. Имѣемъ: $y^2 + y - 42 = 0$, откуда $y = \sqrt{x^2+11} = -7$ и 6; слѣд., $x = \pm 5$ или $x = \pm\sqrt{38}$. Послѣднее значеніе не удовлетворяетъ уравненію.

42. Имѣемъ:
$(x+2)(x-2) - (x-1)(x-2) = 0$, или $(x-2)(x+2-x+1) = 0$, откуда ясно, что единственный корень даннаго уравненія есть $x = 2$. На этомъ примѣрѣ наглядно видно, что нельзя сократить на величину, содержащую неизвѣстныя. Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ данномъ ур. мы сократили $x-2$, то получили бы абсурдъ: $x+2 = x-1$, т. е. $2 = -1$.

43. Приводя къ одному знаменателю, получаемъ ур-іе четвертой степени:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 12 = 0,$$

которое при помощи пріема, указаннаго въ „Искусс. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій“ (§ 14) преобразуется въ слѣдующее:

$$(x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x) - 12 = 0;$$

обозначая $x^2 - 2x = y$, имѣемъ квадр. ур-іе

$$y^2 + y - 12 = 0, \text{ корни котораго } y_1 = -4,\ y_2 = 3.$$

Если $x^2 - 2x = 3$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; если же $x^2 - 2x = -4$ то $x = 1 \pm i\sqrt{3}$.

44. Пусть $\sqrt{x} = y$; тогда имѣемъ:

$$6y^3 - 11y^2 + 6y - 1 = 0.$$

Такъ какъ сумма всѣхъ коэфф. этого ур-ія равна нулю, то очевидно *) однимъ изъ корней будетъ $y = 1$; поэтому, дѣля все ур-іе на $(y - 1)$, получаемъ:

$$6y^3 - 11y^2 + 6y - 1 = (y - 1)(6y^2 - 5y + 1) = 0,$$

откуда или $y = 1$, что мы уже имѣли, или $6y^2 - 5y + 1 = 0$, которое даѣтъ $y = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{3}$, но $x = y^2$, т. е. $x_1 = 1^2 = 1$; $x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

45. Пусть $x + \frac{2}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$ и слѣд., имѣемъ уравненіе:

$$y^2 + 6y - 27 = 0, \text{ откуда } y_1 = -9, \text{ или } y_2 = 3;$$

слѣд., $x + \frac{2}{x} = -9$, или $x + \frac{2}{x} = 3$, откуда $x_1 = 2$; $x_2 = 1$;

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-9 \pm \sqrt{73}\right).$$

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн. § 8.

46.*) Имѣемъ: $\left(x+\frac{8}{x}\right)^2+\left(x+\frac{8}{x}\right)-42=0$, или, обозначая $x+\frac{8}{x}=y$, получаемъ: $y^2+y-42=0$; откуда $y=-7$ или $+6$; слѣд., $x_1=4$, $x_2=2$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}(-7\pm\sqrt{17})$.

47.*) Имѣемъ: $(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6)=1$; или

$$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)+1=1;$$

обозначая $x^2-5x+7=y$, получаемъ: $y^2-y=0$, откуда $y_1=0$, и $y_2=1$; если $x^2-5x+7=0$, то $x=\frac{1}{2}[5\pm i\sqrt{3}]$;

если же $x^2-5x+7=1$, то $x_1=3$, $x_2=2$.

48.*) Имѣемъ: $x^2+3x-10+3\sqrt{x^2+3x}=0$, или, обозначая $\sqrt{x^2+3x}=y$, получаемъ:

$$y^2+3y-10=0, \text{ откуда } y=-5 \text{ или } +2,$$

$$\text{слѣд. } x_1=1;\ x_2=-4;\ x_{3,4}=\frac{1}{2}[-3\pm\sqrt{109}].$$

49. Имѣемъ: $2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3$, или, обозначая $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$, получаемъ:

$$y^2-2y-3=0; \text{ откуда } y_1=3, \text{ или } y_2=-1;$$

$$\text{слѣд. } x_1=1;\ x_2=\frac{1}{2};\ x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{65}}{4}.$$

50. Имѣемъ: $x^2-8x+5-2\sqrt{x^2-8x+40}=0$, или $x^2-8x+40-2\sqrt{x^2-8x+40}=35$; пусть $\sqrt{x^2-8x+40}=y$ тогда $y^2-2y=35$, откуда $y_1=-5$, $y_2=7$; слѣд., $x_1=9$, $x_2=-1$, $x_3=5$, $x_4=3$.

51. Имѣемъ: $3(x^2+5x+1)-2\sqrt{x^2+5x+1}=5$, пусть $\sqrt{x^2+5x+1}=y$; тогда: $3y^2-2y-5=0$, откуда $y_1=\frac{5}{3}$ или $y_2=-1$; слѣд., $x_1=0$; $x_2=-5$; $x_3=-\frac{16}{3}$; $x_4=\frac{1}{3}$.

Значенія 0 и -5 уравн. не удовлетворяютъ.

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн." §§ 4—6.

52. Имѣемъ: $(x^2-2x+2)+1-2\sqrt{x^2-2x+2}=0$; пусть $\sqrt{x^2-2x+2}=y$; тогда $y^2-2y+1=0$; отсюда $y=1$; слѣд., $x^2-2x+2=1$, откуда $x=1$.

53 *). Имѣемъ: $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$, или, взявъ въ лѣвой части 3 за скобки:

$$3\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right);$$

пусть $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$; тогда $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=y^2+\frac{8}{3}$; слѣд.,

$$3\left(y^2+\frac{8}{3}\right)=10y, \text{ откуда } y_1=2 \text{ и } y_2=\frac{4}{3};$$

слѣд., $x_1=6$; $x_2=-2$; $x_{3,4}=3\pm\sqrt{21}$.

54. Имѣемъ $\frac{(5x+4)(5x-4)}{2(5x-4)}=\frac{3(x+2)(x-2)x}{2(x-2)}$, или $5x+4=3(x+2)x$, откуда $x_1=1$, $x_2=-4/3$.

55. Приводя къ одному знаменателю, получаемъ $x^4=16a^4$ откуда $x_{1,2}=\pm 2a$, $x_{3,4}=\pm 2ai$. («Дополн». § 187. III).

56. Приводя къ одному знаменателю, находимъ:

$$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=7.$$

Примѣняя способъ, изложенный въ «Искусств. спос. и методы рѣш. алг. ур.» § 21 получаемъ $x=\pm 5$. Оба значенія удовлетворяютъ уравненію.

57. Пишемъ производную пропорцію: **) сумма членовъ перваго отношенія такъ относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности, т. е.

$$\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt{a-x}};$$

приводимъ къ одному знаменателю:

$$\sqrt{a(a+x)}-\sqrt{a(a-x)}=2\sqrt{a^2-x^2},$$

*) См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.» §§ 4—6.

**) См. тамъ же § 26.

или, возвышая въ квадратъ:

$$a^2 - a\sqrt{a^2 - x^2} = 2(a^2 - x^2);\ \text{пусть}\ \sqrt{a^2 - x^2} = y,$$

тогда $2y^2 + ay - a^2 = 0$, откуда $y_1 = -a$ или $y_2 = \frac{a}{2}$; слѣд., $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$ Значенiе $x = 0$ уравн. не удовлетворяетъ.

58. Пишемъ производную пропорцiю: *) сумма относится къ разности . . . . и т. д. (см. № 57), получаемъ:

$$\frac{\sqrt{x+2a}}{\sqrt{x-2a}} = \frac{x+2a}{2a-x};\ \text{или}\ \sqrt{x+2a}\left[\frac{1}{\sqrt{x-2a}} - \frac{\sqrt{x+2a}}{2a-x}\right] = 0,$$

откуда или $x = -2a$, или

$$\frac{1}{\sqrt{x-2a}} - \frac{\sqrt{x+2a}}{2a-x} = 0;\ 2a - x = \sqrt{x^2 - 4a^2},\ \text{т. е.}\ x = 2a.$$

59. Уничтожаемъ ирраціональность**) въ знаменателяхъ дробей, стоящихъ въ лѣвой части:

$$\frac{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})^2}{(x^2+1)-(x^2-1)} + \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})^2}{(x^2+1)-(x^2-1)} = 4\sqrt{x^2-1},$$

откуда $x^2 = 2\sqrt{x^2-1}$; возвышая въ квадратъ, находимъ: $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$, т. е. $x^2 = 2$, слѣд., $x = \pm\sqrt{2}$.

60. Уничтожаемъ ирраціональность**) въ знаменателяхъ:

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(x^2-1)} + \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(x^2-1)} = 34,$$

откуда $4x^2 - 36 = 0$, т. е. $x = \pm 3$.

61. Имѣемъ: $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{x}$, или, возвышая въ квадратъ:

$$\sqrt{1-x} = 2\sqrt{x} - 1;$$

возвышая въ квадратъ еще разъ, получаемъ:

$$5x - 4\sqrt{x} = 0,\ \text{откуда}\ x = 0,\ \text{или}\ x = \frac{16}{25}\cdot$$

---

*) См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.» § 26.

**) См. тамъ же § 24.

Значеніе $x = 0$ уравн. не удовлетворяетъ.

62. Возвышая 2 раза въ квадратъ, находимъ $x = \pm \frac{2}{15}\sqrt{30}$.

63. Уравненіе это рѣшено въ видѣ примѣра въ книгѣ «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій», въ § 23.

64. Примѣняемъ способъ, изложенный въ § 23 книги «Искусств. способы и методы рѣшенія алгебр. уравненій», т. е. переписываемъ уравненіе въ видѣ:

$$x^2 - 8x\sqrt{x} + 18x - 8\sqrt{x} + 1 = 0,$$

и, разсматривая первые два члена ($x^2 - 8x\sqrt{x}$), какъ начало квадрата двучлена, выдѣляемъ этотъ двучленъ:

$$(x^2 - 2 . x . 4\sqrt{x} + 16x) - 16x + 18x - 8\sqrt{x} + 1 = 0, \text{ или}$$

$$(x - 4\sqrt{x})^2 + 2(x - 4\sqrt{x}) + 1 = 0.$$

Теперь лѣвая часть уравненія представляетъ полный квадратъ:

$$\left(x - 4\sqrt{x} + 1\right)^2 = 0,$$

и слѣд., уравненіе привелось къ трехчленному (см. «Искусс. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій» §§ 2 и 3). Обозначивъ $\sqrt{x} = y$, имѣемъ: $y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y = 2 \pm \sqrt{3}$, а слѣд., $x = y^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

65. Примѣняя методъ, изложенный въ § 23 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.», преобразуемъ данное уравненіе въ такое:

$$\left[x + 2 + \sqrt{x}\right]^2 - 3\left[x + 2 + \sqrt{x}\right] - 40 = 0;$$

обозначая $x + 2 + \sqrt{x} = y$, получаемъ:

$$y^2 - 3y - 40 = 0, \text{ откуда } y_1 = 8 \text{ или } y_2 = -5;$$

$$\text{слѣд., } x_1 = 9;\ x_2 = 4;\ x_{3,4} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-27}}{2}\right)^2.$$

66. Примѣняя методъ, изложенный въ § 24 книги «Искусств. способы и методы рѣшенія алгебр. уравненій» имѣемъ:

$$\frac{x+\sqrt{2-x^2}}{x^2-(2-x^2)}-\frac{x-\sqrt{2-x^2}}{x^2-(2-x^2)}=1, \text{ или } \sqrt{2-x^2}=x^2-1;$$

возвышаемъ въ квадратъ:

$$x^4-x^2-1=0, \text{ а слѣд., } x=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}.$$

67. Дополняемъ лѣвую часть до квадрата, т. е. прибавляемъ и вычитаемъ удвоенное произведеніе $\frac{2x^2}{x^2-1}$.

Получается:

$$\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}=n(n-1), \text{ или}$$

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}=n(n-1),$$

т. е. уравненіе привелось къ типу II, разсмотрѣнному въ §§ 4—6 книги «Искусс. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій».

Обозначивъ $\frac{2x^2}{x^2-1}=y$, имѣемъ: $y^2-y=n(n-1)$, откуда $y=n$ или $1-n$, а слѣд.,

$$x=\pm\sqrt{\frac{n}{n-2}} \text{ или } x=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

68. Имѣемъ уравненіе:

$$(x-2)^2-6\sqrt{x}\,(x-2)-24+14x-15\sqrt{x}=0.$$

Поступая согласно методу, изложенному въ § 23 книги «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.» разсматриваемъ членъ $\left[-6\sqrt{x}\,(x-2)\right]$ какъ удвоенное произведеніе:

$$-2\,.\,(x-2)\,.\,3\sqrt{x},$$

и выдѣляемъ въ данномъ ур-іи квадратъ двучлена, удвоенное произведеніе членовъ котораго было бы $\left[-2(x-2)3\sqrt{x}\right]$.

Уравненіе принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\left[(x-2)-3\sqrt{x}\right]^2+5\left[(x-2)-3\sqrt{x}\right]-14=0,$$

послѣ чего, обозначая: $x-2-3\sqrt{x}=y$, получаемъ:

$$y^2+5y-14=0, \text{ откуда } y_1=-7 \text{ и } y_2=2;$$

слѣд., или $x-3\sqrt{x}+5=0$, или $x-3\sqrt{x}-4=0$, откуда

$$x_1=16;\ x_2=1;\ \text{или } x=\left(\frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}\right)^2.$$

69. Эта задача рѣшается совершенно такъ же, какъ № **53**, и приводится къ трехчленному типу. (См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій», §§ 4—6).

Имѣемъ:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{45}{x^2}=\frac{169}{14}\left(\frac{x}{5}-\frac{3}{x}\right),$$

или, вынося въ лѣвой части 5 за скобки:

$$5\left(\frac{x^2}{25}+\frac{9}{x^2}\right)=\frac{169}{14}\left(\frac{x}{5}-\frac{3}{x}\right).$$

Пусть $\frac{x}{5}-\frac{3}{x}=y$; тогда $\frac{x^2}{25}+\frac{9}{x^2}=y^2+\frac{6}{5}$,

и слѣд., данное уравненіе преобразуется:

$$5\left(y^2+\frac{6}{5}\right)=\frac{169}{14}y, \text{ откуда } y=\frac{12}{7} \text{ или } \frac{7}{10},$$

а слѣд., $\frac{x}{5}-\frac{3}{x}=\frac{12}{7}$ или $=\frac{7}{10}$ откуда $x_1=6$, $x_2=-2\frac{1}{2}$,

$$x_{3,4}=\frac{30\pm\sqrt{1635}}{7}.$$

70. Пишемъ производную пропорцію: *) сумма относится къ разности . . . . и т. д.

$$\frac{a^2+x^2}{ax}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2};\ \text{или } (a^2+x^2)\left[\frac{1}{ax}-\frac{1}{a^2-x^2}\right]=0;$$

отсюда или $a^2+x^2=0$, т. е. $x=\pm ai$, или же

$$\frac{1}{ax}-\frac{1}{a^2-x^2}=0, \text{ т. е. } x=\frac{a}{2}\left[-1\pm\sqrt{5}\right].$$

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій“, § 26.

71. Имѣемъ пропорцію: $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\frac{m}{1}$;

пишемъ производную пропорцію: *)

$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{m+1}{1-m}, \text{ или } \frac{a+x}{a-x}=\frac{(m+1)^2}{(1-m)^2};$$

Написавъ производную пропорцію еще разъ, получаемъ:

$$\frac{x}{a}=\frac{(m+1)^2-(1-m)^2}{(m+1)^2+(1-m)^2}, \text{ откуда } x=\frac{2am}{1+m^2}.$$

72. Имѣемъ: $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{3\sqrt{x}+6}{2\sqrt{x}}$; или, приводя къ одному знаменателю, получаемъ: $x+\sqrt{x}=6$, откуда $\sqrt{x}=2$ или -3, т. е. $x=4$ или 9. Послѣдній корень уравненію не удовлетворяетъ.

73. Пишемъ производную пропорцію:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=3; \text{ откуда } x=\frac{9\pm\sqrt{117}}{2}.$$

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 74—85.

Всѣ эти кубичныя уравненія рѣшаются очень легко *подборомъ корней*, какъ показано въ §§ 7—10, книги «Искусственные способы и методы рѣш. алгебр. уравненій». Кромѣ того, многія изъ нихъ могутъ быть рѣшены еще и разложеніемъ на множители (См. тамъ же § 12), какъ это и сдѣлано во многихъ послѣдующихъ рѣшеніяхъ.

74. Имѣемъ:

$$(x^3-x)-2(x+1)=0, \text{ или } (x+1)[x(x-1)-2]=0,$$

откуда или $x=-1$, или $x^2-x-2=0$, т. е. $x=-1$ или $=2$.

75. Имѣемъ: $(x^3-x^2)+(x^3-1)=0$; или

$$x^2(x-1)+(x-1)[x^2+x+1]=0, \text{ или}$$

$$(x-1)(2x^2+x+1)=0, \text{ откуда } x_1=1;\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{4}.$$

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій“ § 26.

76. Имѣемъ: $a(x^3+1)+bx(x+1)=0$, или

$$(x+1)\left[a(x^2-x+1)+bx\right]=0,$$

откуда $x_1=-1$, $x_{2,3}=\dfrac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}$.

77. Имѣемъ: $x^2(x+1)-4(x+1)=0$, или $(x+1)(x^2-4)=0$, откуда $x_1=-1$, $x_{2,3}=\pm 2$.

78. Имѣемъ:

$n(x^3+1)+x+1=0$; или $(x+1)\left[n(x^2-x+1)+1\right]=0$;

откуда $x_1=-1$, $x_{2,3}=\dfrac{n\pm\sqrt{-(3n^2+4n)}}{2n}$.

79. Имѣемъ: $4(x^3+1)-13x(x+1)=0$, или

$(x+1)\left[4(x^2-x+1)-13x\right]=0$, откуда $x_1=-1$; $x_2=4$; $x_3=\dfrac{1}{4}$.

80. Имѣемъ: $x^3+mx-x+m=0$, или $x(x^2-1)+m(x+1)=0$, или $(x+1)\left[x(x-1)+m\right]=0$; слѣд., $x=-1$; $x_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$.

81. Имѣемъ: $x^3+x-b^2x+b=0$, или $x(x^2-b^2)+(x+b)=0$, или $(x+b)[x(x-b)+1]=0$, откуда $x_1=-b$; $x_{2,3}=\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$.

82. Имѣемъ: $(ax+b)^3+(nx+m)^3=(a+n)^3x^3+(b+m)^3$: какъ первая, такъ и вторая часть этого уравненія представляютъ собой сумму кубовъ и, слѣдовательно, должны дѣлиться на сумму первыхъ степеней; сумма первыхъ степеней въ лѣвой части равна $(ax+b+nx+m)$; въ правой части сумма эта равна $(ax+nx+b+m)$, т. е. та-же; слѣд., и правая и лѣвая часть должны дѣлиться на одну и ту же сумму $(ax+nx+b+m)$; поэтому имѣемъ:

$$(ax+b+nx+m)\Big[(ax+b)^2-(ax+b)(nx+m)+(nx+m)^2-$$
$$-(a+n)^2x^2+(a+n)x(b+m)-(b+m)^2\Big]=0;$$

слѣд., или первый множитель равенъ нулю, откуда $x_1 = -\frac{b+m}{a+n}$ или второй множитель равенъ нулю, т. е. $x_2 = \frac{m}{a}$ и $x_3 = \frac{b}{n}$.

83. Эта задача совершенно аналогична съ предыдущей и рѣшается точно также. Имѣемъ: $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = (3x)^3 + (2)^3$; въ первой и во второй части находятся суммы кубовъ, и слѣд., какъ первая, такъ и вторая часть дѣлятся на суммы первыхъ степеней; поэтому имѣемъ:

$$(x-1+2x+3)\Big[(x-1)^2-(x-1)(2x+3)+(2x+3)^2-9x^2+6x-4\Big]=0;$$

слѣд., или $3x+2=0$, т. е. $x_1 = -\frac{2}{3}$, или выраженіе, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ $=0$, откуда $x_2 = 3$ или $x_3 = -\frac{1}{2}$.

84. Замѣчаемъ что сумма всѣхъ коэффиціентовъ даннаго уравненія:

$$7+(-5)+(-4)+2$$

равна нулю, а это всегда является точнымъ признакомъ, того, что одинъ изъ корней уравненія равняется единицѣ*); слѣд., данное уравненіе, удовлетворяясь при $x=1$, на основаніи теоремы Безу **) дѣлится на $(x-1)$; выполнивъ дѣленіе, находимъ частное $7x^2+2x-2$; итакъ,

$$7x^3-5x^2-4x+2=(x-1)(7x^2+2x-2)=0,$$

откуда или $x-1=0$, т. е. $x=1$, что мы уже имѣли, или $7x^2+2x-2=0$, откуда $x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{7}$.

85. Имѣемъ: $x^3-6x^2+10x-5=0$. Замѣчаемъ, что сумма всѣхъ коэффиціентовъ этого уравненія

$$1+(-6)+10+(-5)$$

равна нулю, а это служитъ признакомъ *), что одинъ изъ корней $=+1$. Поэтому на основаніи теоремы Безу **), лѣвая часть уравненія дѣлится на $(x-1)$. Выполнивъ дѣленіе, находимъ:

$$x^3-6x^2+10x-5=(x-1)(x^2-5x+5)=0,$$

---

*) „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій“, § 8.

**) См. „Дополн. къ Алгебрѣ“, § 4.

откуда или $x-1=0$, т. е. $x=1$, что мы уже имѣли, или $x^2-5x+5=0$, откуда $x_{2,3}=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{5})$.

86. Открывъ всѣ скобки, получимъ уравненіе, изъ котораго $x=15$.

87. Имѣемъ.

$$\left[\frac{x^2-1}{x}\right]\left[\frac{x^2-4}{x}\right]\left[\frac{x^2-9}{x}\right]-(x-1)(x-2)(x-3)=0, \text{ или}$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)\left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3}-1\right]=0; \text{ откуда}$$

$x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; или $(x+1)(x+2)(x+3)-x^3=0$, что даетъ квадратное уравненіе $6x^2+11x+6=0$, откуда $x=\frac{-11\pm i\sqrt{23}}{12}$.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 88—90.

Всѣ эти уравненія рѣшаются возведеніемъ въ кубъ по формулѣ: $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$. См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій» § 25.

88. Возводимъ въ кубъ *):

$$5+\sqrt{x}+5-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{25-x}\,.\left(\sqrt[3]{5}\right)=5, \text{ или}$$

$10+3\sqrt[3]{25-x}\,.\,\sqrt[3]{5}=5$, или $3\sqrt[3]{125-5x}=-5$; возведя еще разъ въ кубъ, находимъ $x=\frac{700}{27}$.

89. Рѣшается точно такъ же, какъ предыдущая. Возвышаемъ въ кубъ *)

$$(a+\sqrt{x})+(a-\sqrt{x})+3\sqrt[3]{(a^2-x)b}=b,$$

или $3\sqrt{a^2b-bx}=b-2a$; возвышая въ кубъ, найдемъ:

$$x=\frac{(2a-b)^3}{27b}+27a^2b.$$

---

*) „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій" § 25.

90. Это уравненіе рѣшено въ видѣ примѣра въ § 25 книги «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій». Рѣшается такъ же, какъ предыдущая возведеніемъ въ кубъ.

Отвѣты: $x = -109$ или 80.

91. Это довольно интересное уравненіе приводится къ типу II, разобранному въ книгѣ «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій» (§§ 4—6). Возвышая обѣ части въ квадратъ, получаемъ:

$$\sqrt{97-x}+\sqrt{x-15}=16-2\sqrt[4]{(97-x)(x-15)}.$$

Возвышаемъ въ квадратъ еще разъ:

$$82+2\sqrt{(97-x)(x-15)}=$$

$$=256+4\sqrt{(97-x)(x-15)}-64\sqrt[4]{(97-x)(x-15)},\text{ или}$$

$$\sqrt{(97-x)(x-15)}-32\sqrt[4]{(97-x)(x-15)}+87=0.$$

Обозначивъ $\sqrt[4]{(97-x)(x-15)}=y$, имѣемъ: y^2-32y+ $+87=0$, откуда $y=3$ или 29.

Изъ уравненія $(97-x)(x-15)=3^4=81$, получаемъ $x=16$ и 96, причемъ оба эти значенія удовлетворяютъ уравненію.

Если же взять $(97-x)(x-15)=29^4=707281$, то оба корня получаются мнимые.

92. Приведя къ одному знаменателю и возвысивъ въ квадратъ, получаемъ: $x^2=25$, т. е. $x=\pm 5$. Значеніе $x=-5$ уравненію не удовлетворяетъ. (См. «Дополн.» § 133).

93. Подкоренная величина въ лѣвой части уравненія представляетъ собой точный квадратъ двучлена $\sqrt{x}+1$. Слѣдовательно, данное равенство есть не уравненіе, а *тождество*, а потому удовлетворяется произвольнымъ значеніемъ x.

94. Возвысивши въ кубъ, получаемъ:

$(x^2+1)(x-1)-x\sqrt{x^2-1}=x^3-3x^2+3x-1$, откуда или $x=0$, или же послѣ приведенія: $\sqrt{x^2-1}=2x-2$.

Возвышая въ квадратъ, получаемъ квадр. уравненіе $3x^2-8x+5=0$, корни котораго $x_1=1$ и $x_2=\frac{5}{3}$.

Всѣ 3 корня удовлетворяютъ уравненію.

95. Это уравненіе рѣшено въ видѣ примѣра въ § 25 книги «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій». Отвѣтъ: $x=0$.

96. Приводимъ къ общему знаменателю:

$$(a-x)\sqrt{x-b}+(x-b)\sqrt{a-x}=x\sqrt{a-x}-x\sqrt{x-b}$$

или послѣ приведенія:

$$a\sqrt{x-b}=b\sqrt{a-x}.$$

Возведя обѣ части въ квадратъ, получимъ $x=\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.

97. Возвысивъ въ кубъ и сдѣлавъ приведеніе, получимъ

$$\sqrt{x(x-1)}=2x^2-2x, \text{ или } 2x(x-1)-\sqrt{x(x-1)}=0.$$

Уравненіе это относится къ типу II, разобранному въ §§ 4—6 книги «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій». Обозначая $\sqrt{x(x-1)}=y$, имѣемъ:

$$2y^2-y=0, \text{ откуда } y_1=0,\ y_2=\frac{1}{2}.$$

Если $x^2-x=0$, то $x=0$ или 1, если же $x^2-x=\frac{1}{4}$, то $x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

98. Уравненіе это очень красиво рѣшается посредствомъ возвышенія обѣихъ частей его въ кубъ, какъ показано въ § 25 книги «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій».

Возвышая въ кубъ по формулѣ $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, получаемъ послѣ приведенія подобныхъ членовъ уравненіе:

$$\sqrt[3]{(x^2-7x+10)(x^2-9x-36)(2x^2-16x-26)}=0,$$

которое распадается на три отдѣльныхъ уравненія:

$$x^2-7x+10=0;\quad x^2-9x-36=0;\quad 2x^2-16x-26=0.$$

Слѣд., получается 6 корней: $x_1=5$; $x_2=2$; $x_3=12$; $x_4=-3$; $x_{5,6}=4\pm\sqrt{29}$.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ 99 — 103.

Уравненіе 4-й степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

можетъ быть рѣшено, какъ возвратное уравненіе 4-й степени, если коэффиціенты его удовлетворяютъ условію:

$$a:e=b^2:d^2.$$

См. «Искусств. способы и методы рѣшенія алгебр. уравненій», § 13.

99. Уравненіе это принадлежитъ къ категоріи уравненій четвертой степени, рѣшающихся, какъ возвратныя (см. «Искусств. способы и методы рѣшенія алгебр. уравненій» § 13), такъ какъ коэффиціенты его удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ:

$$1:\left(\frac{c^2}{a^2}\right)=a^2:c^2$$

Дѣлимъ на x^2 и группируемъ члены:

$$x^2+ax+b+\frac{c}{x}+\frac{c^2}{a^2x^2}=0;$$

$$\left(x^2+\frac{c^2}{a^2x^2}\right)+a\left(x+\frac{c}{ax}\right)+b=0;\text{ пусть }x+\frac{c}{ax}=y;$$

$$\text{тогда }\left(y^2-\frac{2c}{a}\right)+ay+b=0;\text{ отсюда}$$

$$y=x+\frac{c}{ax}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2-4ab+8c}{4a}},$$

послѣ чего найдется x.

100. Рѣшается, какъ возвратное ур-іе четвертой степени *). Дѣлимъ на x^2.

---

*) „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.“ § 13.

$$\left(x^2+\frac{d^2}{x^2}\right)-a\left(x-\frac{d}{x}\right)+b=0; \text{ пусть } x-\frac{d}{x}=y;$$

тогда $x^2+\frac{d^2}{x^2}=y^2+2d$, и слѣд., данное ур-іе приметъ видъ $(y^2+2d)-ay+b=0$; отсюда найдется y, а потомъ изъ ур-iя $x-\frac{d}{x}=y$ опредѣлимъ x.

101. Ур-іе это рѣшено въ видѣ примѣра въ § 13 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.» Отвѣты: $x_1=1,\ x_2=2;\ x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

102. Рѣшается, какъ возвратное ур-іе четвертой степени *). Дѣлимъ на x^2.

$$2\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-15\left(x+\frac{3}{x}\right)+40=0; \text{ пусть } x+\frac{3}{x}=y;$$

тогда: $2(y^2-6)-15y+40=0$, откуда $y=4$ или $=\frac{7}{2}$;

если $x+\frac{3}{x}=4$, то $x_1=1;\ x_2=3$; если же $x+\frac{3}{x}=\frac{7}{2}$, то

$x_3=2;\ x_4=\frac{3}{2}$.

103. Рѣшается, какъ возвратное ур-іе четвертой степени *) Дѣлимъ на x^2, а потомъ рѣшаемъ это ур-іе какъ возвратное:

$$\left(x^2+\frac{81}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{9}{x}\right)+9=0; \text{ если } x+\frac{9}{x}=y, \text{ то}$$

$$(y^2-18)-3y+9=0, \text{ откуда } y=\frac{3\pm\sqrt{45}}{2}.$$

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 104—109.

Всѣ эти уравненія рѣшаются очень просто и изящно при помощи метода, указаннаго въ § 14 книги «Искусственные способы и методы рѣшенія алгебраическихъ ура-

*) „Иск. спос. и методы рѣш. алгебр. уравн.“ § 13.

вненій». Методъ этотъ заключается въ общихъ чертахъ въ слѣдующемъ:

Разсматриваемъ членъ, содержащій x^4, какъ квадратъ перваго члена, а членъ, содержащій x^3, какъ удвоенное произведеніе квадрата нѣкотораго двучлена, и выдѣляемъ въ данномъ уравненіи квадратъ этого двучлена. Если оставшіеся члены образуютъ при этомъ первую степень того же двучлена, то уравненіе приводится къ трехчленному типу.

104. Уравненіе это рѣшено въ видѣ примѣра въ § 14 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравненій».

105. Примѣняя методъ, изложенный въ книгѣ «Иск. спос. и методы рѣш. алгебр. уравн.» (§ 14), представляемъ данное уравненіе въ видѣ:

$$(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0, \text{ или } y^2-2y-8=0,$$

откуда $y=x^2-3x=-2$ или $=4$. Слѣдовательно, $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-1$; $x_4=4$.

106. Данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ *)

$$(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-16=0, \text{ или } y^2-4y-16=0;$$

отсюда $y=2\pm2\sqrt{5}$, послѣ чего изъ уравн.: $x^2-4x=2\pm2\sqrt{5}$ опредѣлится x.

107. Данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ *):

$$(x^2-2x)^2-(x^2-2x)-1=0, \text{ или } y^2-y-1=0;$$

отсюда $y=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$, послѣ чего изъ уравн. $x^2-2x=$ $=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ опредѣлится x.

108. Данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ *)

$$\left(2x^2+\frac{3}{2}x\right)^2+\frac{3}{8}\left(2x^2+\frac{3}{2}x\right)-14\frac{1}{2}=0, \text{ или } y^2+\frac{3}{8}y-\frac{29}{2}=0,$$

---

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. ур.“ § 14.

откуда $y = -4$ или $\frac{29}{8}$. Слѣдов., x опредѣляется изъ уравн.:

$$2x^2 + \frac{3}{2}x = -4 \quad \text{или} \quad 2x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{29}{8}.$$

109. Данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ *):

$$2(2x^2 + x)^2 - (2x^2 + x) - 190 = 0, \text{ или } 2y^2 - y - 190 = 0,$$

откуда $y = -\frac{19}{2}$ или 10. Слѣд., x опредѣляется изъ уравн.:

$$2x^2 + x = -\frac{19}{2} \quad \text{или} \quad 2x^2 + x = 10.$$

110. Уравненіе это можетъ быть рѣшено элементарно только лишь посредствомъ подбора двухъ корней *).

Такъ какъ свободный членъ равенъ 4, то цѣлыми корнями уравненія могутъ быть только числа ± 1, ± 2, ± 4**).

Очевидно ни $(+1)$ ни (-1) уравн. не удовлетворяютъ.

Пробуемъ $x = 2$:

$$2^4 - 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0.$$

Итакъ, $x = 2$ есть корень уравн., и потому лѣвая часть его дѣлится на $x - 2$. (См. «Дополн. къ Алгебрѣ» § 4).

Выполнивъ дѣленіе, находимъ:

$$(x - 2)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 0.$$

Слѣд., $x_1 = 2$, и остается рѣшить кубичное уравненіе

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0,$$

что можно сдѣлать опять таки только подборомъ корней. Такъ какъ $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 0$, то $x = 2$. Слѣдовательно, лѣвая часть этого уравн. разлагается на множители:

$$(x - 2)(x^2 + 1) = 0, \text{ откуда или } x = 2, \text{ или } x = \pm i.$$

Итакъ, четыре корня даннаго уравн. будутъ:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 2;\ x_3 = +i;\ x_4 = -i.$$

---

*) «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.» § 16.

**) См. тамъ же § 10.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 111—113.

Всѣ эти уравненія рѣшаются очень просто и красиво посредствомъ метода введенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ, изложеннаго въ § 27 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

111. Уравненіе это рѣшено въ видѣ примѣра на стр. 24 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебраическ. уравненій». Отвѣты: $x = \pm 2$ или $= \pm 3$.

112. Примѣняя методъ введенія вспомогат. неизвѣстныхъ *), обозначаемъ $x-1=y$. Тогда имѣемъ 2 уравн.:

$$x^4 + y^4 = 97 \text{ и } x - y = 1.$$

Возвышаемъ второе ур. въ квадратъ:

$$x^2 + y^2 = 1 + 2xy.$$

Возвысивъ еще разъ въ квадратъ, получимъ послѣ приведенія подобныхъ членовъ:

$$x^4 + y^4 = 1 + 2x^2y^2 + 4xy = 97,$$

откуда $xy = -8$ или $+6$. Такъ какъ $y = x - 1$, то $x(x-1) = -8$ или $= +6$, откуда находимъ: $x = \frac{1}{2}[1 \pm i\sqrt{31}]$ или же $x = 3$ и -2.

Можно также рѣшить это ур-іе и иначе, переписавъ его такъ:

$$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^4+\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^4=97. \text{ Пусть } x-\frac{1}{2}=y;$$

тогда $\left[y+\frac{1}{2}\right]^4+\left[y-\frac{1}{2}\right]^4=97$; открывая скобки, получаемъ: $2y^4+3y^2-\frac{775}{8}=0$ и т. д.

---

*) См. „Иск. спос. и методы рѣш. алг. уравн.“ § 27.

113. Рѣшается тѣми же двумя способами, что и предыдущая:

$$\text{I.}\ldots\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\right]^4+\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{a}{2}\right]^4=b, \text{ или}$$

$\left(y+\frac{a}{2}\right)^4+\left(y-\frac{a}{2}\right)^4=b$; раскрывая скобки, получаемъ биквадратное ур-іе относительно y; слѣд., найдемъ y, а потомъ $x=y+\frac{a}{2}$.

II. Пусть $x-a=y$; тогда имѣемъ 2 ур-ія съ двумя неизвѣстными: $x^4+y^4=b$; $x-y=a$; отсюда найдемъ x.

114. Уравненіе это рѣшено въ видѣ примѣра на стр. 9 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравнен». Отвѣты: $x=-\frac{2}{3}$ и $x=\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{10})$.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 115—118.

Всѣ эти уравненія рѣшаются очень красиво посредствомъ метода, указаннаго въ §§ 21 и 22 книги «Искусств. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.».

115. Беремъ разность подкоренныхъ величинъ: *)

$$(3x^2+5x+8)-(3x^2+5x+1)=7;$$

дѣля на данное ур-іе получаемъ:

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=7;$$

складывая это ур-іе съ даннымъ, находимъ:

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=4; \text{ откуда } 3x^2+5x-8=0 \text{ т. е.}$$

$$\text{или } x_1=1, \text{ или } x_2=-\frac{8}{3}.$$

Оба корня удовлетворяютъ уравненію. («Доп.» § 133).

*) См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.» § 27.

116. Рѣшая эту задачу точно такъ же, какъ предыдущую, найдемъ: $x_1 = -\frac{7}{2}$, и $x_2 = 2$.

Оба корня удовлетворяютъ уравненію. («Доп.» § 133).

117. Рѣшая эту задачу такъ же, какъ 2 предыдущія, (№№ 115 и 116), пишемъ: *)

$$(x^2+9)-(x^2-9)=18=34-16, \text{ или}$$
$$(x^2+9)-(x^2-9)=(\sqrt{34})^2-(4)^2;$$

дѣля на данное ур-іе, получаемъ:

$$\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}=\sqrt{34}-4;$$

складывая съ даннымъ ур-іемъ, имѣемъ:

$$2\sqrt{x^2+9}=2\sqrt{34}, \text{ откуда } x=\pm 5.$$

Оба корня удовлетворяютъ уравненію. («Доп.» § 133).

118. Взявъ разность подкоренныхъ выраженій *) получаемъ тождество:

$$(7x^2-4x+15)-(3x^2-4x+31)=4(x^2-4);$$

дѣля это тождество на данное ур-іе, имѣемъ:

$$\sqrt{7x^2-4x+15}+\sqrt{3x^2-4x+31}=4(x-2);$$

складывая это ур-іе съ даннымъ, получимъ:

$$2\sqrt{7x^2-4x+15}=5x-6;$$

возвышая въ квадратъ, получаемъ ур-іе:

$$3x^2+44x+24=0, \text{ откуда } x=\frac{-22\pm\sqrt{412}}{3}.$$

119. Открывъ скобки и приведя къ одному знаменателю, получаемъ ур-іе: $15x^4-22x^3-22x+15=0$; рѣшаемъ это ур-іе какъ возвратное, т. е. дѣлимъ на x^2:

$$15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-22\left(x+\frac{1}{x}\right)=0; \text{ пусть } x+\frac{1}{x}=y,$$

тогда $15(y^2-2)-22y=0$, откуда $y=\frac{11\pm\sqrt{571}}{15}$, послѣ чего найдется x.

---

*) См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» §§ 21 и 22..

120. Уравненіе это рѣшено въ видѣ примѣра на стр. 23 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

121. Упростивъ правую часть даннаго уравн. найдемъ:
$x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда $x = 3$, или $= 1$.

122. Имѣемъ: $x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$.

Вторую часть уравненія разсматриваемъ какъ непрерывную дробь и пишемъ подходящія дроби:

$$1)\ 1;\ 2)\ \frac{3}{2};\ 3)\ \frac{4}{3};\ 4)\ \frac{4x+3}{3x+2};\ \text{итакъ,}$$

$$x = \frac{4x+3}{3x+2},\ \text{откуда}\ x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

123. Разсматриваемъ лѣвую часть, какъ непрерывную дробь и пишемъ подходящія:

$$1)\ 1;\ 2)\ \frac{3}{2};\ 3)\ \frac{4}{3};\ 4)\ \frac{4x+3}{3x+2}.$$

Такъ какъ четвертая подходящая дробь, какъ послѣдняя, даетъ точное значеніе непрерывной, т. е. равна $\frac{15}{11}$, правой части уравненія, то имѣемъ:

$$\frac{4x+3}{3x+2} = \frac{15}{11},\ \text{откуда}\ x = 3.$$

124. Поступая совершенно такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, получимъ уравненіе:

$$\frac{5x+2}{3x+1} = \frac{17}{10},\ \text{откуда}\ x = 3.$$

125. Поступая совершенно такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, получимъ уравненіе:

$$\frac{11x+8}{4x+3} = \frac{30}{11},\ \text{откуда}\ x = 2.$$

126. Такъ какъ знаменатель правой и лѣвой части одинъ и тотъ же, то его можно отбросить, что даетъ биквадратное уравненiе:

$$x^4 - 14x^2 + 9 = 0, \text{ откуда } x = \pm\sqrt{7 \pm \sqrt{40}}.$$

Корни эти допускаютъ преобразованiе, такъ какъ $7^2 - 40 = 3^2$ (См. «*Доп. къ Алгебрѣ*» § 167). Этого надо было ожидать и заранѣе по формѣ уравненiя, такъ какъ въ немъ $\frac{c}{a} = 9 = 3^2$, т. е. есть точный квадратъ (см. «*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 169).

Приэтомъ слѣдуетъ замѣтить, что отбросивши общаго знаменателя, мы нс потеряли безконечнаго корня, такъ какъ степень знаменателя ниже степени числителя (см. тамъ же § 130).

127. Такъ какъ знаменатель правой и лѣвой части одинъ и тотъ же, то его можно отбросить, что даетъ биквадратное уравненiе:

$$x^4 - 36 = 16x^2, \text{ откуда } x = \pm i\sqrt{2} \text{ или } x = \pm 3\sqrt{2}.$$

Приэтомъ слѣдуетъ замѣтить, что отбросивши общаго знаменателя мы не потеряли безконечнаго корня, такъ какъ степень знаменателя ниже степени числителя (см. «*Дополн. къ алг.*» § 130).

Общее замѣчанiе,

относящееся къ уравненiямъ №№ 128—131.

Всѣ эти уравненiя—*возвратныя пятой степени*. Каждое изъ возвратныхъ уравненiй 5-ой степени обязательно имѣетъ одинъ корень, равный $+1$ или -1, («Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» § 18), послѣ чего, раздѣливъ лѣвую часть на $(x-1)$ или на $(x+1)$, получимъ непремѣнно *возвратное уравненiе 4-ой степени*, рѣшенiе которыхъ извѣстно (см. «*Дополн. къ Алгебрѣ*» §§ 172—174).

128. Имѣемъ*): $12(x^5+1) + 18x(x^3+1) - 45x^2(x+1) = 0$,

или $(x+1)\left[12(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 18x(x^2 - x + 1) - 45x^2\right] = 0$,

---

*) См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.» § 18.

откуда или $x=-1$, или $12x^4+6x^3-51x^2+6x+12=0$; изъ этого возвратнаго ур-iя получатся для x еще 4 корня.

129. Имѣемъ*):

$$6(x^5-1)-41x(x^3-1)+97x^2(x-1)=0, \text{ или}$$

$$(x-1)\left[6(x^4+x^3+x^2+x+1)-41x(x^2+x+1)+97x^2\right]=0;$$

слѣд., или $x-1=0$, т. е. $x_1=1$, или же

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0, \text{ откуда}$$

$$x_2=2;\ x_3=\frac{1}{2};\ x_4=3;\ x_5=\frac{1}{3}.$$

130. Имѣемъ*):

$$(x^5+1)+px(x^3+1)+qx^2(x+1)=0, \text{ или}$$

$$(x+1)\left[(x^4-x^3+x^2-x+1)+px(x^2-x+1)+qx^2\right]=0, \text{ откуда}$$

или $x+1=0$, т. е. $x=-1$, или же

$$x^4+(p-1)x^3+(1-p+q)x^2+(p-1)x+1=0;$$

это возвратное ур-iе дастъ еще 4 значенiя для x.

131. Имѣемъ*):

$$(x^5-1)+px(x^3-1)+qx^2(x-1)=0, \text{ или}$$

$$(x-1)\left[(x^4+x^3+x^2+x+1)+px(x^2+x+1)+qx^2\right]=0,$$

откуда или $x-1=0$, т. е. $x=1$; или

$$x^4+(1+p)x^3+(1+p+q)x^2+(1+p)x+1=0;$$

это возвратное ур-iе дастъ еще 4 значенiя для x.

Общее замѣчанiе,

относящееся къ уравненiямъ №№ 132—134.

Всѣ эти уравненiя — *возвратныя шестой степени.* О рѣшенiи ихъ сказано въ книгѣ «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.» въ § 19. Такъ какъ подобныя уравненiя приводятся къ кубичнымъ, то полное рѣшенiе ихъ возможно только въ тѣхъ случаяхъ, когда въ кубичн. уравненiи оказывается возможнымъ подобрать корень.

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн. § 18."

132. Рѣшаемъ это ур-іе аналогично съ рѣшеніемъ возвратныхъ ур-ій 4-ой степени *), т. е. дѣлимъ на x^3:

$$x^3+3x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0, \text{ или}$$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7=0; \text{ пусть } x+\frac{1}{x}=y,$$

$$\text{тогда } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;\; x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3, \text{ т. е.}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3y=y^3; \text{ слѣд., } x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,$$

а потому ур-іе принимаетъ видъ:

$$(y^3-3y)+3(y^2-2)+6y+7=0, \text{ или } y^3+3y^2+3y+1=0,$$

$$\text{т. е. } (y+1)^3=0, \text{ откуда } y=-1; \text{ слѣд.,}$$

$$x+\frac{1}{x}=-1, \text{ откуда } x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

133. Рѣшаемъ, подобно возвратному ур-ію четвертой степени **): дѣлимъ на x^3:

$$6\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-23\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+10\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0.$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=y$; тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$; $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$.

Слѣд., имѣемъ:

$$6(y^3-3y)-23(y^2-2)+10y+14=0, \text{ или}$$

$$6y^3-23y^2-8y+60=0.$$

Для рѣшенія этого ур-ія подбираемъ **) одинъ изъ корней $y=2$ и потомъ дѣлимъ на $y-2$:

$$6y^3-23y^2-8y+60=(y-2)(6y^2-11y-30)=0, \text{ слѣд.,}$$

или $y-2=0$, т. е. $y_1=2$, или $6y^2-11y-30=0$, откуда

$$y^2=\frac{10}{3} \text{ или } y_3=-\frac{3}{2}; \text{ слѣд.,}$$

$$1)\; x+\frac{1}{x}=2, \text{ откуда } x=1; \text{ или}$$

---

*) См. тамъ же § 19.

**) „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур." §§ 7—10.

2) $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$, откуда $x=3$, или $\frac{1}{3}$, или же

3) $x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$, откуда $x=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{4}$.

134. Рѣшаемъ такъ же, какъ предыдущую; дѣлимъ на x^3:

$$4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-24\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+57\left(x+\frac{1}{x}\right)-73=0;$$

пусть $x+\frac{1}{x}=y$; тогда

$$4(y^3-3y)-24(y^2-2)+57y-73=0, \text{ или}$$
$$4y^3-24y^2+45y-25=0.$$

Въ этомъ уравненіи сумма всѣхъ коэффиціентовъ:

$$4+(-24)+45+(-25)$$

равна нулю, а слѣд., *) одинъ изъ корней будетъ $y=1$; поэтому дѣлимъ уравненіе на $y-1$:

$$4y^3-24y^2+45y-25=(y-1)(4y^2-20y+25)=0;$$

слѣд., или $y-1=0$, т. е. $y_1=1$, что мы уже имѣли

или $4y^2-20y+25=0$, т. е. $y_2=\frac{5}{2}$.

зная же y, найдемъ слѣдующія значенія для x; $x=2$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

135. Дѣленіемъ находимъ $x-y=2$, слѣд., $x=5$; $y=3$.

136. Возвышаемъ второе уравненіе въ квадратъ: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{17}{4}$ или $x^2+y^2=\frac{17}{4}xy$; но изъ перваго уравненія $x^2+y^2=100-2xy$, слѣд., $100-2xy=\frac{17}{4}xy$, откуда $xy=16$, и система привелась къ элементарной. (См. «*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 192). Можно рѣшить это уравненіе и при помощи пріема указаннаго въ § 40 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.“ § 8.

137. Система эта очень легко приводится къ элементарной *). Имѣемъ $x^2y^2 = 4(m + 2xy)$, откуда найдется произведенiе xy.

138. Пусть $\frac{1}{2x-1} = z$; $\frac{1}{2y-1} = u$. Тогда данныя уравненiя перепишутся такъ:

$z + u = 2$; $2z - 3u = 3$. Рѣшивъ ихъ, найдемъ $z = \frac{9}{5}$; $u = \frac{1}{5}$,

а слѣд., $x = \frac{7}{9}$ и $y = 3$.

139. Если обозначить $2x - 5 = z$ и $3y - 2 = t$, то уравн. принимаютъ видъ: $z^2 + t^2 = 17$; $zt = 4$; умножая второе уравненiе на 2, складывая и вычитая съ первымъ, находимъ $z + t = \pm 5$, $z - t = \pm 3$, откуда слѣдуютъ 4 пары рѣшенiй 1) $z = 4$, $t = 1$; 2) $z = -4$, $t = -1$; 3) $z = -1$, $t = -4$; 4) $z = 1$, $t = 4$. Соотвѣтственно съ этимъ находимъ 4 пары значенiй для x и y 1) $x = \frac{9}{2}$, $y = 1$; 2) $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$;

3) $x = 3$, $y = 2$; 4) $x = 2$, $y = -\frac{2}{3}$.

140. Пусть $3x + 4y = z$; $7x - 2y = t$; тогда уравненiя принимаютъ видъ: $zt + z = 44$; $zt - t = 30$. Вычитая ихъ, находимъ $z + t = 14$; отсюда $t = 14 - z$; подставляя это значенiе въ уравненiе $z(t + 1) = 44$, получаемъ 1) $z = 11$, $t = 3$, 2) $z = 4$, $t = 10$, соотвѣтственно съ чѣмъ 1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = \frac{24}{17}$, $y = -\frac{1}{17}$.

141. Пусть $\sqrt{x - 3} = z$; $\sqrt{y + 3} = t$, тогда уравненiя принимаютъ видъ:

$$\frac{8}{z} - \frac{3}{t} = 1; \quad \frac{4}{z} + \frac{9}{t} = 4;$$

умножая первое уравненiе на 3 и складывая со вторымъ, получаемъ $\frac{28}{z} = 7$; откуда $z = 4$, а слѣд., $t = 3$; поэтому $x - 3 = 16$, откуда $x = 19$, а $y + 3 = 9$, откуда $y = 6$.

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.“ §§ 31.

142. Имѣемъ: $4\sqrt{x}+15\sqrt{y}=36$; $6\sqrt{x}+5\sqrt{y}=16$; изъ этихъ двухъ уравненій, первой степени относительно $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, находимъ

$$\sqrt{x}=\frac{6}{7} \text{ и } \sqrt{y}=\frac{76}{35}; \text{ слѣд., } x=\frac{36}{49};\ y=\frac{5776}{1225}.$$

143. Имѣемъ элементарную систему: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ и $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\pm 2$. (См. «*Дополн. къ Алг.*» § 192).

144. Умножая второе уравненіе на 2, складывая и вычитая съ первымъ, получаемъ: $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=\pm 5$, $\frac{x}{5}-\frac{y}{7}=$ $=\pm 1$; соотвѣтственно съ этимъ, находимъ 1) $x=15$, $y=14$; 2) $x=-15$, $y=-14$, 3) $x=10$, $y=21$, 4) $x=-10$, $y=-21$.

145. Раздѣливъ второе уравненіе на первое, получаемъ,

$$2(x+4)+5(y-7)=\frac{2}{15}.$$

а складывая это съ первымъ уравненіемъ и вычитая изъ него, найдемъ:

$$4(x+4)=75+\frac{2}{15};\ 10(y-7)=\frac{2}{15}-75,$$

откуда найдутся x и y.

146. Раздѣливъ первое ур-іе на второе получаемъ:

$$(x+2y)-(y-2x)=14;$$

сложивъ это ур-іе со вторымъ изъ данныхъ, находимъ:

$$2(x+2y)=26, \text{ откуда } x+2y=13,$$

а вычитая его изъ даннаго, находимъ: $y-2x=-1$; послѣ чего опредѣляется x и y.

147. Дѣля первое уравненіе на второе, получаемъ:

$$\frac{9}{x}+\frac{25}{y}=\frac{m}{k};$$

складывая и вычитая со вторымъ изъ данныхъ уравненій, найдемъ x и y.

148. Пусть $\frac{1}{2x-1}=z$; $\frac{1}{3y-5}=t$; тогда имѣемъ:

$$z+t=3;\ 3z-2t=4;\ \text{отсюда}\ z=2,\ t=1;$$

$$\text{а слѣд., } x=\frac{3}{4},\quad y=2.$$

149. Изъ перваго уравненія $x^2+y^2=13-xy$ изъ второго: $x^2+y^2=16-2xy$, и слѣд., $13-xy=16-2xy$, откуда $xy=3$. Слѣд., 1) $x=3$, $y=1$; 2) $x=1$, $y=3$. (См. § 192).

150. Эта система непосредственно приводится къ элементарной (см. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» § 30). Пусть $x+y=t$, $xy=z$. Имѣемъ: $z+t=11$ и $zt=30$. Слѣд., 1) $z=5$, $t=6$ и 2) $z=6$, $t=5$. Если $x+y=6$, $xy=5$, то $x=5$ и $y=1$, или наоборотъ; если же $x+y=5$, $xy=6$, то $x=2$, $y=3$, или наоборотъ.

151. Рѣшается совершенно такъ же, какъ предыдущая. См. также «Искусств. спос. и методы рѣш. алгебр. уравн.» § 30, прим. 2.

152. См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.» § 30 прим. 3.

153. Предложенную систему приходится рѣшать при помощи простой подстановки: изъ перваго уравненія $y=\frac{25-11x}{7}$, подставляемъ во второе, получаемъ квадр. уравненіе относительно x и т. д.

Отвѣты: 1) $x=1$, $y=2$; 2) $x=\frac{38}{17}$, $y=\frac{1}{17}$.

154. Приведя первое уравн. къ общему знаменателю и подставивъ вмѣсто y его значеніе $\frac{2ab-bx}{a}$ изъ второго ур., получимъ квадратное ур., изъ котораго опредѣлится x.

155. Система эта рѣшается при помощи пріема, указаннаго въ § 40 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

Пусть $\frac{x}{y}=z$. Тогда имѣемъ: $z+\frac{1}{z}=\frac{10}{3}$; слѣдоват., или $x=3y$, или $x=\frac{1}{3}y$. Подставляя эти значенія во второе уравненіе, находимъ 1) $y=\pm 1$, $x=\pm 3$ и 2) $y=\pm 3i$, $y=\pm i$.

156. Складывая заданныя уравненія, получаемъ:

$$2\sqrt{x}=\sqrt{3a-x}+\sqrt{a-x}.$$

Возвышаемъ въ квадратъ: $3x-2a=\sqrt{3a^2-4ax+x^2}$.

Возвысивъ въ квадратъ еще разъ, опредѣлимъ x, послѣ чего, подставивши найденное значеніе x въ любое изъ данныхъ уравненій, получимъ y.

157. Данная система рѣшается при помощи пріема, указаннаго въ § 40 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.».

Пусть $\sqrt{\frac{x+y}{5x}}=z$; тогда первое ур-іе принимаетъ видъ:

$z+\frac{1}{z}=\frac{34}{15}$, откуда $z_1=\frac{5}{3}$; или $z_2=\frac{3}{5}$ слѣд., $\frac{x+y}{5x}=z^2=$ $=\frac{25}{9}$ или $=\frac{9}{25}$, если $\frac{x+y}{5x}=\frac{25}{9}$, то $y=\frac{116}{9}x$; если же

$$\frac{x+y}{5x}=\frac{9}{25}, \text{ то } y=\frac{4}{5}x.$$

Подставляя эти значенія y во второе ур-іе находимъ, системы рѣшеній.

158. Данная система рѣшается при помощи пріема, указаннаго въ § 40 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.».

Пусть $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}=z$; тогда первое ур-іе принимаетъ видъ: $z+\frac{1}{z}=2$, откуда $z=1$; слѣд., $3x-2y=2x$, т. е. $x=2y$; подставляя это значеніе вмѣсто x во второе ур-іе, находимъ 1) $x=6$, $y=3$; 2) $x=3$, $y=\frac{3}{2}$.

159. Первое ур-іе переписываемъ такъ:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{y})-2=0;$$

или обозначая $\sqrt{x}-\sqrt{y}=z$:

$$z^2-z-2=0, \text{ откуда } z=2, \text{ или } z=-1;$$

если $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2$, то $x=25$, $y=9$; если же $\sqrt{x}-\sqrt{y}=-1$,

то $x=\frac{49}{4}$, $y=\frac{81}{4}$.

160. Приводя первое ур-іе къ одному знаменателю, получаемъ:

$$x^3+y^3=18xy;$$

возводя второе ур-іе въ кубъ, имѣемъ:

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=1728, \text{ или } 18xy+3xy\,.\,12=1728,$$

откуда $xy=32$; если $x+y=12$, а $xy=32$, то

1) $x=4$, $y=8$; 2) $x=8$, $y=4$.

161. Приводимъ первое ур-іе къ одному знаменателю, т. е. умножаемъ на $x+y$:

$$(x^2-y^2)+\sqrt{x^2-y^2}=20, \text{ или } z^2+z-20=0,$$

откуда $z=\sqrt{x^2-y^2}=-5$ или $=4$, слѣд., $x^2-y^2=25$ или $=16$, а потому 1) $x=\pm 5$, $y=\pm 3$; 2) $x=\pm\sqrt{\frac{59}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}$.

162. Беремъ первое ур-іе и пишемъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности . . . (См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.» § 41).

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{5}{\sqrt{7}}, \text{ или } \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{25}{7},$$

отсюда находимъ, что $x=\pm\frac{4}{3}y$; подставляя это значеніе x во второе ур-іе находимъ:

1) $x=\pm 24$, $y=18$; 2) $x=\pm 8$, $y=6$.

163. Пишемъ производную пропорцію отъ перваго ур-ія. (См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.» § 41).

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2}, \text{ откуда } x^2+y^2=\frac{5}{2}xy;$$

возводя второе ур-іе въ квадратъ, получаемъ:

$$x^2+y^2=\frac{9}{4}x^2y^2-2xy, \text{ а слѣд., } \frac{9}{4}x^2y^2-2xy=\frac{5}{2}xy,$$

откуда $xy=2$; слѣд., изъ второго ур-ія $x+y=3$, а потому

$$1)\ x=1,\ y=2;\ 2)\ x=2,\ y=1.$$

164. Приводя къ одному знаменателю, получаемъ:

$$(1)\ \ldots\ 2(x+y)=1+xy$$

$$(2)\ \ldots\ 241(x^2+xy+y^2)=49(1+xy+x^2y^2).$$

Возвышая (1) въ квадратъ, находимъ:

$$x^2+xy+y^2=\frac{1+x^2y^2-2xy}{4},$$

а подставляя это значеніе въ (2), получаемъ квадр. ур-іе относительно xy:

$$x^2y^2-\frac{226}{15}xy+1=0, \text{ откуда } xy=15, \text{ или } xy=\frac{1}{15}.$$

Если $xy=15$, то $x+y=8$, а слѣд., 1) $x=3$, $y=5$; 2) $x=5$, $y=3$;

если же $xy=\frac{1}{15}$, то $x+y=\frac{8}{15}$, а слѣд.,

$$3)\ x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{5};\ 4)\ x=\frac{1}{5},\ y=\frac{1}{3}.$$

165. Имѣемъ:

$\frac{x+y}{12}=\frac{7}{x+y+5}$ или $\frac{z}{12}=\frac{7}{z+5}$, откуда $z=x+y=7$ или $=-12$.

Беремъ теперь первое ур-іе:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{12}, \text{ или } 12(x+y)=(x+y)xy,$$

но $x+y=-12$ или $=7$, слѣд., $xy=12$; отсюда найдутся x и y.

166. Приводимъ первое ур-іе къ одному знаменателю, т. е. множимъ на $\sqrt{xy}$; получаемъ: $x^2+y^2=34\sqrt{xy}$; возводимъ второе ур-іе въ квадратъ: $x^2+y^2=144+2xy$; итакъ, $34\sqrt{xy}=144+2xy$, откуда $\sqrt{xy}=9$ или $=8$, слѣд., $xy=81$ или $xy=64$; поэтому:

1) $x=16, y=4$; 2) $x=-4, y=-16$; 3) $x=6\pm3\sqrt{13}$; $y=-6\pm3\sqrt{13}$.

167. Приводимъ первое уравненіе къ одному знаменателю, т. е. умножаемъ на $\sqrt{xy}$:

$$x+y=(x-y)\sqrt{xy}, \text{ откуда } xy=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}.$$

Переписываемъ послѣднее уравненіе подъ видомъ пропорціи:

$$\frac{xy}{1}=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$$

и пишемъ производную пропорцію:

$$\frac{xy+1}{xy-1}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Слѣдов., второе изъ данныхъ уравненій можетъ быть переписано такъ:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2}{2xy}=5, \text{ или } \frac{x^2+y^2}{y^2}=10, \text{ или } \left(\frac{x}{y}\right)^2+1=10,$$

откуда $x=\pm 3y$. Взявши $x=3y$, подставляемъ это значеніе во второе уравненіе:

$$\frac{3(3y^2+1)}{3y^2-1}=5, \text{ откуда } y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ а слѣд., } x=3y=\pm 2\sqrt{3}.$$

Значеніе же $x=-3y$ даетъ мнимые корни.

168. Складывая данныя ур-ія, находимъ $x+y=\pm 21$; но $y(x+y)=231$, слѣд., $\pm 21y=231$, т. е. $y=\pm 11$, а потому $x=\pm 10$.

169. Вычитая второе ур-іе изъ перваго, получаемъ:

$y^2+2y-8=0$, откуда $y=-4$ или $=2$; если $y=-4$, то $x=-1\pm\sqrt{3}$; если же $y=2$, то $x=-4$ или $=2$.

170. Первое изъ данныхъ уравненій *однородно* *) относительно x и y, а потому изъ него можетъ быть найдено отношеніе неизвѣстныхъ. Дѣлимъ на y^4:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{x}{y}\right)^3+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)+1=0, \text{ или } z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.“ §§ 42—48.

Найдя изъ этого возвратнаго уравненія значенія для z, подставляемъ во второе уравненіе yz вмѣсто x. Получится

$y^4z^4 + y^4 = b$, откуда $y = \sqrt[4]{\frac{b}{1+z^4}}$, а слѣд., $x = y \cdot z = z\sqrt[4]{\frac{b}{1+z^4}}$.

171. Возвышаемъ оба уравненія въ квадратъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + 2y^2 - y;\ xy = 36,$$

откуда получаемъ: $y^2 - y - 72 = 0$, т. е. $y = -8$ или 9, а слѣд., $x = -4^1/_2$ или $= 4$.

172. Приводимъ первое ур-іе къ одному знаменателю, т. е. умножаемъ на $\sqrt{xy}$:

$$x + y = 7 + \sqrt{xy};$$

во второмъ ур-іи беремъ $\sqrt{xy}$ за скобки:

$$(x + y)\sqrt{xy} = 78,$$

или, на основаніи перваго ур-ія

$$(7 + \sqrt{xy})\sqrt{xy} = 78,\ \text{откуда}\ \sqrt{xy} = -13\ \text{или}\ = 6.$$

слѣд., $xy = 169$, или $= 36$; тогда $x + y = -6$, или $= 13$; и система привелась къ элементарной («Доп. къ алг.» § 192).

173. Первое ур-іе приводимъ къ одному знаменателю, т. е. умножаемъ на $\sqrt{xy}$:

$$(1)\ .\ .\ .\ .\ x + y = 61 + \sqrt{xy};$$

во второмъ ур-іи беремъ за скобки $\sqrt[4]{xy}$:

$$(2)\ .\ .\ .\ .\ \sqrt[4]{xy}\left[\sqrt{x} + \sqrt{y}\right] = 78;$$

возводимъ (2) въ квадратъ:

$$\sqrt{xy}\left[x + y + 2\sqrt{xy}\right] = 6084,$$

или, принимая во вниманіе ур-іе (1), получаемъ:

$$\sqrt{xy}\left[61 + 3\sqrt{xy}\right] = 6084,$$

$$\text{откуда}\ \sqrt{xy} = 36,\ \text{или}\ \sqrt{xy} = 58\tfrac{1}{3},$$

$$\text{слѣд., 1)}\ x = 81,\ y = 16;\ \text{2)}\ x = 16,\ y = 81.$$

Остальные корни ирраціональны.

174. Умножая второе ур-іе на 2 и складывая съ первымъ, получаемъ:

$$(x+y)^2-2(x+y)=35, \text{ или } z^2-2z-35=0,$$

откуда $z=x+y=7$ или $=-5$; $x=7-y$, или $x=-5-y$; подставляя эти значенія во второе изъ данныхъ ур-ій, находимъ:

$$1)\ x=-7,\ y=2;\ 2)\ y=8,\ x=-1;\ 3)\ x=3,\ y=4,$$
$$4)\ y=-2,\ x=-3.$$

175. Складывая, получаемъ $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=125$, откуда $x^2+y^2=25$. Подставляя въ данное ур., получаемъ $xy=12$ и система привелась къ элементарной («Доп. къ алг.» § 196).

176. Вычитаемъ второе ур-іе изъ утроеннаго перваго: $10x^2=90$, т. е. $x=\pm3$ и т. д.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 177—180.

Всѣ эти системы рѣшаются при помощи приведенія къ однороднымъ уравненіямъ. См. объ этомъ «Искусственные способы и методы рѣшенія алгебраическихъ уравненій» §§ 42—48.

177. Система эта рѣшена въ § 43 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.». Изъ перваго ур., дѣля на y^2, находимъ $x=\frac{3}{2}y$ или $x=-\frac{4}{3}y$. Подставляя эти значенія во второе уравненіе, получаемъ системы рѣшеній: 1) $y=\pm\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{3}{4}$ и 2) $y=\pm\frac{3}{8}\sqrt{2}$, $x=\mp\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

178. Оба уравненія однородны *) относительно неизвѣстныхъ, а потому умножаемъ первое на 5, второе на 7 и складываемъ:

$$12y^2+5x^2-19xy=0;$$

---

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.“ §§ 42—48.

пусть теперь $\frac{x}{y}=t$, т. е. $x=ty$; тогда получаемъ:

$$12y^2+5t^2y^2-19ty^2=0,$$

или, сокращая ур-іе на y^2, (что мы имѣемъ право сдѣлать, ибо y не можетъ равняться нулю), получаемъ:

$5t^2-19t+12=0$, откуда $t=3$, или $=\frac{4}{5}$; слѣд., $x=3y$, или $x=\frac{4}{5}y$; подставляя эти значенія во второе изъ данныхъ ур-ій найдемъ:

$$1)\ x=\pm 4,\ y=\pm 5;\ 2)\ x=\pm 3\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}.$$

179. Оба уравненія однородны относительно неизвѣстныхъ, а потому умножая первое ур-іе на 16, второе на 17 и вычитая одно изъ другого, получаемъ:

$$15y^2+65x^2-64xy=0;$$

пусть $\frac{x}{y}=t$, тогда $x=t\,.\,y$ и слѣд., $15y^2+65t^2y^2-64ty^2=0$, или, сокращая на y^2, (что мы имѣемъ право сдѣлать, ибо y не можетъ равняться нулю), получаемъ:

$$65t^2-64t+15=0,$$

откуда $t=\frac{3}{5}$, или $t=\frac{5}{13}$; слѣд., $x=\frac{3}{5}y$, или $x=\frac{5}{13}y$; подставляя эти значенія во второе ур-іе, находимъ:

$$1)\ x=\pm 3,\ y=\pm 5;\ 2)\ x=\pm\frac{5}{3},\ y=\pm\frac{13}{3}.$$

180. Система эта рѣшена въ видѣ примѣра въ § 46 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.». Перемноживъ данныя уравненія, получаемъ $x^4-5x^2y^2+6y^4=0$, откуда, дѣля на y^4 находимъ $x=\pm\sqrt{2}\,.\,y$ и $x=\pm\sqrt{3}\,.\,y$. Подставляя эти значенія, получимъ рѣшенія:

$$1)\ y=\sqrt[4]{2},\ x=\sqrt[4]{8};\ 2)\ y=\sqrt[4]{\frac{3}{4}};\ x=\sqrt[4]{\frac{27}{4}}.$$

181. Открывая скобки, складывая и вычитая, находимъ:

1) . . . $x^3+y^3=28$; 2) . . . $xy(x+y)=12$; умножая (2) на 3 и

складывая съ (1), получаемъ:

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=64,\ \text{откуда}\ x+y=4;\ \text{слѣд.},\ xy=3,$$

а потому 1) $x=3$, $y=1$; 2) $x=1$, $y=3$.

182. Открывая скобки въ первомъ ур-іи, получаемъ:

$$(1)\ .\ .\ .\ x^3+y^3+x^2y+y^2x=65$$

или $x^3+y^3+30=65$, откуда $x^3+y^3=35$;

умножая второе изъ данныхъ уравненій на 3 и складывая съ ур-іемъ $x^3+y^3=35$, находимъ $(x+y)^3=125$, т. е. $(x+y)=5$; если $x+y=5$, то изъ ур-ія $xy(x+y)=30$ слѣдуетъ, что $xy=6$, а потому 1) $x=2$, $y=3$, или 2) $x=3$, $y=2$.

183. Второе уравненіе представляемъ такъ:

(1) . . . $(x^4+y^4)-(x^2+y^2)=84$; но изъ перваго ур-ія

$$x^2+y^2=49-x^2y^2\ \text{слѣд.},$$

$$x^4+y^4=-2x^2y^2+2401+x^4y^4-98x^2y^2,$$

а потому уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$(x^4y^4-100x^2y^2+2401)-(49-x^2y^2)=84,\ \text{откуда}\ xy=\pm 6;$$

или $=\pm\sqrt{63}$ и т. д.

184. Складывая и вычитая, получаемъ элементарную систему: $x^2+y^2=10$; $2xy=6$; складывая и вычитая вторично находимъ: $x+y=\pm 4$; $x-y=\pm 2$ и т. д.

185. Вычитая первое уравненіе изъ второго, находимъ $y=90$; складывая же эти ур-ія, получаемъ:

$$x^2+x=240,\ \text{а потому}\ x=-16,\ \text{или}\ =15.$$

186. Изъ перваго уравненія имѣемъ:

$x+y=14-\sqrt{xy}$, слѣд., $x^2+y^2+2xy=196-28\sqrt{xy}+xy$, а потому второе уравненіе принимаетъ видъ:

$$196-28\sqrt{xy}=84,\ \text{откуда}\ xy=16;\ x+y=14-\sqrt{xy}=10;$$

слѣд., 1) $x=8$, $y=2$; 2) $y=8$, $x=2$.

187. Второе уравненіе $x+y=4+xy$ по возвышеніи въ квадр. даетъ $x^2+y^2+2xy=16+8xy+x^2y^2$, слѣд., первое уравненіе принимаетъ видъ:

$$16+6xy=19,\ \text{откуда}\ xy=\frac{1}{2};\ \text{слѣд.},\ x+y=\frac{9}{2},\ \text{и т. д.}$$

188. Второе ур-іе: $x+y=-xy$ возвышаемъ въ кубъ:

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=-x^3y^3, \text{ или } x^3+y^3+3xy(-xy)=-x^3y^3,$$

или наконецъ $x^3+y^3+x^3y^3-3x^2y^2=0$; но $x^3+y^3+x^3y^3=17$,

$$\text{слѣд., } 17-3x^2y^2=0, \text{ откуда } xy=\pm\sqrt{\frac{17}{3}},$$

$$\text{слѣд., } x+y=\mp\sqrt{\frac{17}{3}} \text{ и т. д.}$$

189. Второе ур-іе $x+y=5-xy$ возвышаемъ въ кубъ:

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=125-x^3y^3-75xy+15x^2y^2, \text{ или}$$

$x^3+y^3+3xy(5-xy)+x^3y^3=125-75xy+15x^2y^2$, или наконецъ $17+3xy(5-xy)=125-75xy+15x^2y^2$, откуда $xy=2$ или $xy=3$; и т. д.

190. Имѣемъ: $z^4+4z-117=0$, откуда $z=\pm i\sqrt{3}$ или $z=\pm 3$, гдѣ буквой z обозначена сумма $x+y$. Послѣ этого извѣстна сумма неизвѣстныхъ и ихъ разность $=25$ и т. д.

191. Раздѣливъ второе уравненіе на первое, получаемъ $y=2x$; подставляя это значеніе въ первое уравненіе, находимъ $x=\pm 1$, а слѣд., $y=\pm 2$.

192. Умножая первое уравненіе на 5, а второе на 9 и вычитая результаты, получаемъ однородное *) уравненіе

$$2x^2-13xy+15y^2=0, \text{ или } 2z^2-13z+15=0,$$

откуда $z=\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ или 5. Подставляя эти значенія, найдемъ 1) $x=\pm 3$, $y=\pm 2$ и 2) $x=\pm 5\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

193. Первое уравненіе даетъ:

$$x^2+y^2=7+xy, \text{ или } x^4+y^4+2x^2y^2=49+14xy+x^2y^2;$$

теперь второе уравненіе принимаетъ видъ: $49+14xy=133$, откуда $xy=6$; слѣд., $x^2+y^2=13$, а потому

$$1)\ x=3,\ y=2;\ 2)\ x=-3,\ y=-2;\ 3)\ x=2,\ y=3;$$

$$4)\ x=-2,\ y=-3.$$

---

*) „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненій" §§ 42—48.

194. Первое уравненіе преобразовываемъ такъ:

$$x^2(x+y)+y^2(x+y)=13, \text{ или}$$

$$(1)\ .\ .\ .\ (x+y)(x^2+y^2)=13; \text{ второе уравненіе:}$$

$$(2)\ .\ .\ .\ .\ x^2y^2(x^2+y^2)=468;$$

раздѣливъ (2) на (1) получаемъ:

$$x^2y^2=36(x+y), \text{ откуда } x+y=\frac{x^2y^2}{36};$$

$$\text{и слѣд., } x^2+y^2=\frac{x^4y^4}{1296}-2xy;$$

подставля это значеніе въ уравненіе (2), получимъ:

$$x^2y^2\left[\frac{x^4y^4}{1296}-2xy\right]=468;$$

открывъ скобки и обозначивъ $x^3y^3=z$, получимъ квадратное уравненіе относительно z и т. д.

195. Первое уравненіе $x^2+y^2=49-xy$ по возвышеніи въ квадратъ даетъ:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=2401+x^2y^2-98xy,$$

или, принимая во вниманіе второе уравненіе:

$$931+x^2y^2=2401+x^2y^2-98xy$$

откуда $xy=15$; слѣд. $x^2+y^2=34$, а потому

1) $x=\pm 5$, $y=\pm 3$; 2) $x=\pm 3$, $y=\pm 5$.

196. Дѣля первое уравненіе на xy, а второе на x^2y^2, получаемъ:

$$1)\ .\ .\ .\ .\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(xy+1)=18,$$

$$2)\ .\ .\ .\ .\ \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x^2y^2+1)=208,$$

или, открывая скобки:

$$1)\ .\ .\ .\ .\ x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=18,$$

$$2)\ .\ .\ .\ .\ x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=208.$$

Если $x+\frac{1}{x}$ обозначимъ буквой z, а $y+\frac{1}{y}=t$, то уравненія перепишутся такъ:

$$1) \ldots z+t=18$$

$$2) \ldots (z^2-2)+(t^2-2)=208,$$

откуда 1) $z=4$, $t=14$, или 2) $z=14$, $t=4$, а слѣд.,
1) $x=2\pm\sqrt{3}$, $y=7\pm\sqrt{48}$, 2) $x=7\pm\sqrt{48}$, $y=2\pm\sqrt{3}$.

197. Данныя уравненія переписываемъ такъ:

$$x^2y^2(2x-y)=36 \text{ и } xy(2x-y)=6$$

и дѣлимъ первое на второе: $xy=6$; подставляя получаемъ $2x-y=1$, откуда $y=2x-1$, а слѣд., $(2x-1)x=6$, откуда $x_1=2$ и $x_2=-\frac{3}{2}$; соотвѣтств. значенія для y будутъ: $y_1=3$; $y_2=-4$.

198. Умножая первое уравненіе на 58, второе на 13 и вычитая, получимъ однородное *) уравненіе

$$45x^2+51xy-148y^2=0, \text{ или } 45z^2+51z-148=0,$$

Откуда $z=\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$ или $=-\frac{37}{15}$ и т. д.

199. Каждое изъ данныхъ уравненій *однородно* *), а потому система рѣшается очень просто. Переписываемъ второе уравненіе такъ:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+9\left(\frac{x}{y}\right)^2+30\left(\frac{x}{y}\right)+36=0, \text{ или } z^3+9z^2+30z+36=0.$$

Для рѣшенія этого кубичнаго уравненія подбираемъ корень $z=-3$. (См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» § 10) и разлагаемъ лѣвую часть ур. на множители: $(z+3)(z^2+6z+12)=0$, откуда $z_1=-3$, $z_{2,3}=-3\pm i\sqrt{3}$ и т. д.

200. Перемножая оба ур-ія, получаемъ:

$$(x^3+1)(y^3+1)=18, \text{ или } x^3y^3+x^3+y^3=17;$$

второе ур-іе по открытіи скобокъ принимаетъ видъ:

$$xy+x+y=5;$$

---

*) См. „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн“ §§ 42—48.

итакъ, данныя 2 ур-iя привелись къ виду:

1) . . . $x^3+y^3+x^3y^3=17$; 2) . . . $x+y+xy=5$,

т. е. къ № 189, рѣшенному выше, а потому

1) $x=2$, $y=1$; 2) $x=1$, $y=2$.

201. Открывая скобки въ первомъ ур-iи, получаемъ:

$$x^2y^2+xy-(x+y)+(x^2+y^2)-(x^3+y^3)=15 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

Но $x+y=5$; $x^2+y^2=25-2xy$; $x^3+y^3+3xy(x+y)=125$, т. е. $x^3+y^3=125-15xy$. Подставляя всѣ эти значенiя въ уравненiе (a), получимъ послѣ приведенiя подобныхъ членовъ:

$x^2y^2+14xy-120=0$, откуда $xy=6$ или $=-20$.

Теперь извѣстны сумма неизвѣстныхъ $x+y=5$ и ихъ произведенiе xy, а потому заданная система привелась къ элементарной (*«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 192).

202. Данная система можетъ быть рѣшена нѣсколькими различными способами, какъ показано въ § 34 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.». Простѣйшiй прiемъ состоитъ въ слѣдующемъ: возвышаемъ первое уравненiе въ кубъ:

$x^3-y^3-3xy(x-y)=8$, или $8-3xy.\,2=8$, откуда $xy=0$.

Слѣд., 1) $x=0$, $y=-2$ или 2) $y=0$, $x=2$.

203. Рѣшается такъ же, какъ предыдущая: возвышаемъ первое уравненiе въ кубъ: $x^3+y^3+3xy(x+y)=125$, или $65+3xy.\,5=125$, откуда $xy=8$, и слѣд., данная система привелась къ элементарной.

204. Заданная система непосредственно приводится къ элементарной *) такъ какъ даны: сумма $x^3+y^3=a$ и произведенiе $x^3y^3=b^3$, а слѣд., x^3 и y^3 найдутся, какъ корни квадр. уравненiя $z^2-az+b^3=0$. (См. *«Дополн. къ Алг.»* § 192).

205. Уравненiя эти рѣшены въ видѣ примѣра въ § 38 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.». Если обозначить $x+y=z$ и $xy=v$, то можно переписать эти уравненiя такъ: $z(z^2-3v)=a^3$ и $z^2-v=a^2$

*) „Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравненiй", § 30.

Опредѣливъ изъ второго уравненія, $v = z^2 - a^2$ и подставивъ въ первое, получимъ кубичное уравненіе $2z^3 - 3a^2z + a^3 = 0$, которое можно представить подъ видомъ: $(z - a)(2z^2 + 2az - a^2) = 0$, слѣд., $z_1 = a$; $z_{2,3} = \frac{a}{2}\left[-1 \pm \sqrt{3}\right]$. Если $z = a$, то имѣетъ систему: $x + y = a$, $xy = v = z^2 - a^2 = 0$, слѣд., 1) $x = 0$, $y = a$; 2) $x = a$, $y = 0$.

206. Заданная система непосредственно приводится къ элементарной *), такъ какъ даны: сумма $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$ и произведеніе $\sqrt[3]{x} \, . \, \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{b}$. Слѣд., $\sqrt[3]{x}$ и $\sqrt[3]{y}$ найдутся, какъ корни квадр. уравненія $z^2 - az + \sqrt[3]{b} = 0$. (См. «*Дополн. къ Алг.*» § 192).

207. См. предыдущую. Изъ уравненія $z^2 - 3z + 2 = 0$ имѣемъ $z_1 = 2$ и $z_2 = 1$; слѣд., 1) $x = 8$, $y = 1$ и 2) $x = 1$, $y = 8$.

208. См. № 202 и § 34 «Искусств. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравненій».

Возвышаемъ второе уравненіе въ кубъ:

$$x + y + 3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) = 216, \text{ или } 72 + 3\sqrt[3]{xy} \, . \, 6 = 216.$$

откуда $\sqrt[3]{xy} = 8$, т. е. $xy = 512$; итакъ, $x + y = 72$, $xy = 512$,

слѣд., 1) $x = 8$, $y = 64$; 2) $x = 64$, $y = 8$.

209. См. № 206. Изъ уравненія $z^2 - 4z + 3 = 0$ имѣемъ $z_1 = 3$ и $z_2 = 1$, слѣд. 1) $x = 27$, $y = 1$ и 2) $x = 1$, $y = 27$.

210. Обозначаемъ $\sqrt[4]{x} = z$; $\sqrt[5]{y} = t$.

Тогда уравненія принимаютъ видъ:

1) . . . . $z^3 + t^3 = 35$; 2) . . . . $z + t = 5$;

См. № 203 и «Иск. спос. и методы» § 34.

---

*) „Искусств. спос. и методы рѣш. алгебр. уравненій“. § 30.

211. Складывая утроенное первое уравненіе со вторымъ, получаемъ:

$$(x+y)^3=125, \text{ т. е. } x+y=5;$$

поэтому изъ перваго ур-ія слѣдуетъ, что $xy=6$, а потому

$$1)\ x=3,\ y=2;\ 2)\ x=2,\ y=3.$$

212. Пусть $x+y=z$; $x-y=t$; тогда

$$x^2+y^2+2xy=z^2;\ \ x^2+y^2-2xy=t^2;$$

вычитая, получаемъ:

$$xy=\frac{z^2-t^2}{4}.$$

Данныя намъ уравненія преобразовываемъ такъ:

$$1)\ \ldots\ (x+y)^2(x^2+y^2-xy)=76, \text{ или}$$

$$z^2\left[z^2-3\frac{(z^2-t^2)}{4}\right]=76\ \ldots\ (a)$$

$$2)\ \ldots\ z^3=64t;$$

изъ (2) ур-ія $t=\frac{z^3}{64}$; подставляя это значеніе въ ур-іе (a) получаемъ:

$$3z^6-(64)^2z^4=304\ .\ 64^2,$$

откуда единственное дѣйствительное рѣшеніе:

$$z=\pm 4; \text{ слѣд., } t=\frac{z^3}{64}=\pm 1 \text{ и т. д.}$$

213. Вычитая второе ур. изъ перваго, получаемъ однородное *) уравненіе:

$$x^3-3xy^2-3x^2y+y^3=0, \text{ или } z^3-3z^2-3z+1=0, \text{ гдѣ } z=\frac{x}{y}.$$

Послѣднее уравненіе имѣетъ одинъ корень, равный отрицательной единицѣ, такъ какъ сумма коэф. при четныхъ степеняхъ неизвѣстнаго = суммѣ коэф. при нечетныхъ степеняхъ **). Слѣд., имѣемъ:

$$(z+1)(z^2-4z+1)=0, \text{ откуда } z_1=-1,\ z_{2,3}=2\pm\sqrt{3}.$$

---

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.". §§ 42—48.

**) См. тамъ же § 9.

Если $z = -1$, то $x = -y$ и слѣд., изъ перваго уравн. имѣемъ:

$$-y^3 + 3y^3 = 1, \text{ откуда } y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ и т. д.}$$

214. Перемножая данныя уравненія и извлекая кубичный корень, получаемъ: $xy = (a-x)(b-y)$, или, открывая скобки: $bx + ay = ab$, откуда $y = \frac{b}{a}(a-x)$. Подставляя это значеніе y въ первое ур., имѣемъ:

$$x^2b(a-x) = a(a-x)^3, \text{ или } (a-x)[bx^2 - a(a-x)^2] = 0.$$

Но $(a-x)$ нулю равняться не можетъ, въ чемъ можно убѣдиться непосредственной подстановкой значенія $x = a$ въ оба уравненія; слѣдовательно, $bx^2 - a(a-x)^2 = 0$, или $bx^2 = a(a-x)^2$, или $\frac{b}{a} = \frac{(a-x)^2}{x^2}$; отсюда получаемъ: $\frac{a-x}{x} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, или написавъ производную пропорцію: $\frac{a}{x} = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, откуда $x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Подставляя это значеніе въ полученное выше равенство $y = \frac{b}{a}(a-x)$, найдемъ $y = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

215. Открываемъ скобки, складываемъ и вычитаемъ данныя уравненія; получается:

1) . . . . $x^4 + y^4 = 97$; 2) . . . . $xy(x^2+y^2) = 78$.

Возводя (2) уравненіе въ квадратъ, имѣемъ:

$$x^2y^2[x^4+y^4+2x^2y^2] = 6084, \text{ или } x^2y^2[97+2x^2y^2] = 6084,$$

$$\text{откуда } xy = \pm 6, \text{ или } xy = \pm 13i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Единственные дѣйствительные корни будутъ:

1) $x = \pm 3$, $y = \pm 2$; 2) $x = \pm 2$, $y = \pm 3$.

216. Система эта рѣшена въ § 48 «Иск. мет. и спос. рѣш. алг. уравн.». Первое уравненіе по открытіи скобокъ принимаетъ однородный видъ $6x^2+6y^2-13xy=0$, или $6z^2-13z+6=0$, гдѣ $z=\frac{x}{y}\cdot$ Найдя $z=\frac{3}{2}$ или $\frac{2}{3}$, подставляемъ во второе уравненiе вмѣсто x его значенiе $\frac{3}{2}y$ или $\frac{2}{3}y$ и получаемъ $y_1=0$, $y_2=2$, $y_3=-3$; соотв. значенiя x будутъ $x_1=0$, $x_2=3$; $x_3=-2$.

217. Приведя первое уравненiе къ одному знаменателю, получимъ:

$$78(x^4+y^4)-97xy(x^2+y^2)=0,$$

или, принимая во вниманiе второе данное уравненiе: $78[169-2x^2y^2]-97xy[13]=0$, откуда $xy=13\frac{11}{12}$, или же $xy=6$.

Слѣд., 1) $x=\pm 2$, $y=\pm 3$; 2) $x=\pm 3$, $y=\pm 2$. Остальные корни ирращональны.

218. Сокращаемъ лѣвую часть перваго ур-iя на $(x-y)$

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=\frac{7}{3}$$

и дѣлимъ на второе уравненiе:

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}=\frac{7}{5}.$$

Приведя къ одному знаменателю получаемъ однородное*) уравненiе $2x^2-5xy+2y^2=0$, или $2z^2-5z+2=0$, откуда $z=\frac{x}{y}=2$ или $=\frac{1}{2}\cdot$ Подставляя вмѣсто x его значенiя $2y$ или $\frac{1}{2}y$ во второе уравненiе, находимъ: 1) $x=2$, $y=1$ и 2) $x=1$, $y=2$.

219. Переворачиваемъ данныя уравненiя и открываемъ въ нихъ скобки:

$$\frac{x+y+xy+1}{x^2-y^2}=\frac{12}{5};\quad \frac{xy-x-y+1}{x^2-y^2}=\frac{2}{5}.$$

---

*) См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.» §§ 42—48.

Складываемъ и вычитаемъ:

$$a \ldots\ldots \frac{xy+1}{x^2-y^2}=\frac{7}{5};\quad b \ldots\ldots \frac{x+y}{x^2-y^2}=1.$$

Изъ (b) находимъ $x-y=1$, а замѣняя въ (a) x черезъ $1+y$, получаемъ квадратное уравненіе $5y^2-9y-2=0$, изъ котораго $y_1=2$ и $y_2=-\frac{1}{5}$; соотв. значенія для x будутъ: $x_1=3$ и $x_2=\frac{4}{5}$.

220. Второе уравненіе подходитъ къ типу разобранному въ § 40 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

Поэтому поступаемъ такъ:

Пусть $\frac{x}{y}=z$; тогда второе уравненіе принимаетъ видъ:

$$z-\frac{1}{z}=\frac{3}{2},\ \text{откуда}\ z=2\ \text{или}=-\frac{1}{2};$$

$$\text{итакъ, } x=2y, \text{ или } x=-\frac{1}{2}\,y;$$

подставляя эти значенія въ первое уравненіе, найдемъ:

$$1)\ x=\pm 2,\ y=\pm 1;\quad 2)\ x=\pm 1,\ y=\pm 2.$$

221. Лѣвую часть второго уравненія разлагаемъ на множителей:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=6xy-1,\ \text{или}\ (x+y)\,.\,7=6xy-1;$$

возводя въ квадратъ, получаемъ:

$$49(x^2+y^2+2xy)=36x^2y^2-12xy+1,\ \text{или}$$
$$49(7+3xy)=36x^2y^2-12xy+1,$$

откуда $xy=6$, или $xy=-\frac{19}{12}$; слѣд., 1) $x=2$, $y=3$; 2) $x=3$, $y=2$, 3) $x=-2$, $y=-3$; 4) $x=-3$, $y=-2$. Остальные корни ирраціональны.

222. Взявъ въ обоихъ уравненіяхъ x за скобки и раздѣливъ одно на другое, получимъ возвратное уравненіе 4-ой степени относительно y:

$2y^4-3y^3+2y^2-3y+2=0$, изъ котораго $y_{1,2}=1$, $y_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$;

если $y=1$, то подставляя въ первое уравненіе, находимъ $x=3$; если же y мнимое, то и x мнимое.

223. Первое ур-іе представляемъ такъ: $(x^2+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)=280$, или $(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)=70$, или, наконецъ:

$$[16-2xy][16-3xy]=70, \text{ откуда } xy=3 \text{ или } xy=\frac{31}{3},$$

$$\text{слѣд., 1) } x=3,\ y=1;\ \text{2) } x=1,\ y=3.$$

Остальные корни ирраціональны.

224. Раздѣливъ первое ур-іе на второе, получаемъ: $x^2-xy+y^2=\frac{n^2}{x^2}$; второе ур-іе даетъ: $x^2+y^2+2xy=\frac{x^4y^2}{n^2}$,

$$\text{а слѣд., } \frac{x^4y^2}{n^2}-3xy=\frac{n^2}{x^2}, \text{ или } z^2-3n^2z=n^4,$$

гдѣ буквой z обозначено x^3y. Можно рѣшить эту задачу и иначе: переписываемъ первое ур-іе такъ:

$$(x+y)^3=3xy(x+y)+ny$$

и дѣлимъ на второе; получаемъ квадратное ур-іе

$$t^2-3nt-n^2=0, \text{ гдѣ } t=(x+y)x.$$

225. Данная система легко приводится къ элементарной *). Обозначаемъ $x^2+y^2=z$ и $xy=v$; тогда уравн. перепишутся такъ:

$$z+v=a \text{ и } z\,.\,v=b.$$

Рѣшивъ эту систему (*«Дополн. къ алгебрѣ»* § 192), получаемъ опять элементарную систему (*«Дополн. къ алгебрѣ»* § 196).

226. Данная система легко приводится къ элементарной *).

Переписываемъ уравненіе такъ:

$$x(x^2+y)=a \text{ и } x+(x^2+y)=b.$$

Пусть $x^2+y=z$; тогда имѣемъ: $xz=a$ и $x+z=b$, и неизвѣстные найдутся, какъ корни уравненія $v^2-bv+a=0$.

*) См. „Искусств. спос. и методы рѣш. алг. уравн." §§ 30, 31.

227. Возведя второе уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ перваго, найдемъ $x^2y^2 = \frac{a - 2b^2}{16}$; подставляя это знач. въ первое уравненіе опредѣлимъ $x^4 + y^4$ и система приведется къ элементарной (*«Дополн. къ алгебрѣ»* § 196).

228. Въ первомъ уравненіи беремъ xy за скобки и возвышаемъ оба уравненія въ квадратъ:

$$x^2y^2(x^4+y^4+2x^2y^2)=a^2;\ x^4+y^4=b^2+2x^2y^2.$$

Слѣд., получаемъ биквадратное уравненіе

$$x^2y^2(b^2+4x^2y^2)=a^2,$$

изъ котораго опредѣлится произведеніе xy и т. д.

229. Система эта рѣшена въ видѣ примѣра на стр. 40 «Иск. спос и мет. рѣш. алг. уравн.».

Умножая обѣ части второго уравненія на $x-y$, будемъ имѣть по раскрытіи скобокъ: $x^8-y^8=(a-b)(x-y)$. Раздѣливъ на полученное уравненіе первое изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}=\frac{a+b}{a-b},\ \text{или}\ \frac{z^8+1}{z^8-1}=\frac{a+b}{a-b},\ \text{гдѣ}\ z=\frac{x}{y}.$$

Отсюда опредѣлимъ $z=\sqrt[8]{\frac{a}{b}}$, а потомъ, подставивши въ любое изъ данныхъ уравненіи вмѣсто x его значеніе $y\sqrt[8]{\frac{a}{b}}$, получимъ рѣшенія.

230. Первое ур-іе представляемъ въ такомъ видѣ:

$$(x+y)[x^2-xy+y^2-3]=0;$$

откуда или $x+y=0$, т. е. $x=y=0$, или же

$$x^2-xy+y^2-3=0,\ \text{откуда}\ x^2+y^2=3+xy.$$

Теперь второе ур-іе принимаетъ видъ:

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\frac{17}{9}[x^2+y^2+2xy],\ \text{или}$$

$$[3+xy]^2-2x^2y^2=\frac{17}{9}[3+3xy];$$

$$\text{отсюда}\ xy=2\ \text{или}\ =-\frac{5}{2}\ \text{и т. д.}$$

231. См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» § 35.

Возведя первое ур-іе въ квадратъ имѣемъ:

$$x^2+y^2=16-2xy;$$

возведя въ квадратъ еще разъ и замѣчая, что $x^4+y^4=97$, получаемъ:

$$97+2x^2y^2=256+4x^2y^2-64xy, \text{ откуда } xy=3, \text{ или } =29;$$

$$\text{слѣд., } 1)\ x=3,\ y=1;\ 2)\ x=1,\ y=3.$$

Остальные корни мнимые.

232. Заданная система непосредственно приводится къ элементарному типу („Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн." § 30), если возвести второе ур-іе въ четвертую степень: $x^4+y^4=\frac{97}{4}$ и $x^4y^4=81$, а слѣд., x^4 и y^4 найдутся, какъ корни квадр. уравненія $z^2-\frac{97}{4}z+81=0$. („Дополнен. къ Алгебрѣ § 192).

233. Если $x^2=z$, $y^2=t$, то данныя ур-ія перепишутся такъ: $z^3+t^3=65$; $z^2+t^2=17$. Пусть $z+t=u$; $zt=v$. Тогда $u(u^2-3v)=65$; $u^2-2v=17$ или

$$(1)\ \ldots\ u(17-v)=65;\ (2)\ \ldots\ u^2-2v=17.$$

Опредѣляя изъ (2) $v=\frac{u^2-17}{2}$ и подставляя въ первое, получаемъ кубичное ур-іе

$$u^3-51u+130=0,$$

которое на основаніи соображеній, приведенныхъ въ „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур." § 10 разлагается на множители: $(u-5)(u^2+5u-26)=0$. Дальнѣйшее рѣшеніе не представляетъ затрудненій.

234. Если $x-8=z$, $y-5=t$, то данная система ур-ій замѣняется такой:

$$z+t=x+y-13=6;\ z^4+t^4=272.$$

Система эта рѣшается такъ же, какъ № 231.

235. Данныя ур-ія могутъ быть переписаны такъ:

$$1) \ldots z^2+z-12=0; \quad 2) \ldots t^2+t-20=0.$$

гдѣ $z=x(y+1)$; $t=y(1+x)$ и т. д.

236. Возвышая первое ур-іе въ квадратъ, получаемъ:

$$(97+2x^2y^2)x^2y^2=6084, \text{ откуда}$$

$$x^2y^2=36, \text{ или же } x^2y^2=-\frac{169}{2};$$

принимая только дѣйствительныя значенія, беремъ:

$$x^2y^2=36, \text{ т. е. } xy=\pm 6; \text{ слѣд.,}$$

$$1)\ x=\pm 2,\ y=\pm 3;\ 2)\ x=\pm 3,\ y=\pm 2,$$

и еще 4 мнимыхъ корня.

237. Система эта рѣшена тремя способами въ § 36 „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.".

Дѣлимъ первое ур-іе на второе:

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=1031, \text{ или}$$

$$(a) \ldots (x^4+x^2y^2+y^4)+xy(x^2+y^2)=1031;$$

но изъ второго ур-ія слѣдуетъ:

$$x^2+y^2=9+2xy;\ x^4+y^4+2x^2y^2=81+36xy+4x^2y^2,$$

а потому ур-іе (a) принимаетъ видъ:

$$(81+36xy+3x^2y^2)+xy(9+2xy)=1031,$$

откуда $xy=-19$, или $xy=10$ и т. д.

238. Обозначимъ $x+1=z$, $y-2=v$. Тогда данныя уравн. перепишутся такъ:

$$z+v=1 \text{ и } z^5+v^5=211,$$

т. е. система привелась къ такому же типу, какъ № 237 и рѣшается также дѣленіемъ или другими двумя способами, указанными въ § 36 „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.".

239. Сокращая дробь, находящуюся въ лѣвой части перваго ур-ія, получимъ:

$$\frac{(x^4+x^2y^2+y^4)-xy(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2}=\frac{121}{13},$$

но $x^2+y^2=4-2xy$, слѣд., имѣемъ:

$$\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2-xy(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2}=\frac{(4-2xy)^2-x^2y^2-xy(4-2xy)}{4-3xy}=\frac{121}{13};$$

отсюда найдемъ $xy=-3$, слѣд.,

$$1)\ x=3,\ y=-1;\ x=-1,\ y=3.$$

240. Система эта рѣшена въ видѣ примѣра въ § 48 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.». Выдѣляя въ числителѣ лѣвой части перваго уравн. множитель $x+y$ и подставляя его значенiе 2, получимъ:

$$\frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^4+y^4}=\frac{61}{82}.$$

Приведя къ одному знаменателю, получаемъ однородное *) уравненiе четвертой степени

$$21x^4-82x^3y+82x^2y^2-82xy^3+21y^4=0,$$

или

$$21z^4-82z^3+82z^2-82z+21=0,\ \text{гдѣ}\ z=\frac{x}{y}.$$

Рѣшая это ур. находимъ $z_1=3$, $z_2=\frac{1}{3}$; $z_{3,4}=\frac{2\pm i\sqrt{45}}{7}$.

Подставляя во второе ур. вмѣсто x его значенiя zy, получимъ:

$$1)\ y=1,\ x=3;\ 2)\ y=3,\ x=1\ \text{и т. д.}$$

241. Раздѣливъ обѣ части на x^2y^2, получаемъ:

$$2\left(x^2+2y+\frac{2y^2}{x^2}\right)\left(y^2+2x+\frac{2x^2}{y^2}\right)=13^2,$$

или, открывши скобки и сгруппировавъ члены:

$$2\left[x^2y^2+13xy+4+\frac{2(x^6+y^6)}{x^2y^2}+\frac{4(x^3+y^3)}{xy}\right]=13^2.$$

Замѣняемъ здѣсь на основанiи второго уравненiя x^3+y^3 черезъ $4{,}5xy$, а x^6+y^6 черезъ $20{,}25x^2y^2-2x^3y^3$; послѣ сокращенiй и приведенiя подобныхъ членовъ получится квадр. уравненiе $x^2y^2+9xy-22=0$, откуда $xy=-11$

*) См. „Искусств. спос. и методы рѣш. алгебр. уравненiй", §§ 42—48.

или $= + 2$. Возьмемъ, напр., $xy = 2$; тогда $x^3 + y^3 = 4{,}5xy = = 9$ и слѣд., имѣемъ элементарную систему: *)

$$x^3 + y^3 = 9 \text{ и } x^3y^3 = 8.$$

Рѣшая квадр. уравненія $v^2 - 9v + 8 = 0$, находимъ $v = 1$ или $= 8$.

Итакъ, системы рѣшеній будутъ: 1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = 2$ $y = 1$ и т. д.

242. Перемножаемъ заданныя уравненія (лѣвую часть перваго на правую часть второго и наоборотъ):

$$mxy^4 + ny^5 = myx^4 + nx^5, \text{ или}$$

$n(x^5 - y^5) + mxy(x^3 - y^3) = 0$; отсюда или $x - y = 0$, что даетъ

$$\text{отвѣтъ } x = y = \sqrt[3]{m + n}, \text{ или же}$$

$$n(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + mxy(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

Взявъ за скобки x^4, получаемъ или 1) $x = y = 0$, или

$$nz^4 + (n + m)z^3 + (m + n)z^2 + (m + n)z + n = 0,$$

гдѣ буквой z обозначено отношеніе $\frac{y}{x}$. Дальнѣйшее рѣшеніе не представляетъ затрудненій.

243. Складывая и вычитая заданныя уравненія, получаемъ:

$$(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = (x + y)(m + n)$$

$$(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = (x - y)(m - n).$$

Отсюда или 1) $x = -y = \sqrt[4]{m - n}$, или 2) $x = y = \sqrt[4]{m + n}$;

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = m + n$$

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = m - n.$$

Складывая и вычитая 2 послѣднія уравненія, имѣемъ:

1) . . . . . $x^4 + x^2y^2 + y^4 = m$; 2) . . . . . $xy(x^2 + y^2) = -n$.

Возводя уравненіе (2) въ квадратъ, имѣемъ:

$$x^2y^2(m + x^2y^2) = n,$$

откуда найдется xy и т. д.

---

*) См. „Искусств. спос. и методы рѣш. алгебр. уравненій“, §§ 42—48.

244. Первое уравненіе преобразовываемъ такъ:

$$(x^5+y^5)+(x^4+y^4)+(x^3+y^3)+(x^2+y^2)+(x+y)=b, \text{ или}$$

$$a(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)+\left[(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\right]+a(x^2-xy+$$
$$+y^2)+a^2-2xy+a=b,$$

$$\text{или: } a\left[(x^2+y^2)^2-x^2y^2-xy(x^2+y^2)\right]+\left[(a^2-2xy)^2-2x^2y^2\right]+$$
$$+a(a^2-3xy)+a^2-2xy+a=b; \text{ или наконецъ:}$$

$$a\left[(a^2-2xy)^2-x^2y^2-xy(a^2-2xy)\right]+(a^2-2xy)^2-2x^2y^2+$$
$$+a(a^2-3xy)+a^2-2xy+a=b;$$

отсюда найдется произведеніе неизвѣстныхъ xy, а сумма ихъ извѣстна и система привелась къ элементарной. («*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 192).

245. Данная система подходитъ подъ типъ, разобранный въ § 50 «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.». Складывая всѣ уравненія, обозначая $a+b+c+d+e=s$ и вычитая изъ найденной суммы поочередно каждое изъ данныхъ уравненій, получимъ: $t=\frac{s}{4}-a$; $x=\frac{s}{4}-b$ и т. д.

246. Сложивъ первое уравненіе со вторымъ, находимъ $x=75$; сложивъ второе съ третьимъ находимъ $z=12\frac{1}{2}$ и вычтя ихъ получаемъ $y=12\frac{1}{2}$.

247. Умножая второе уравненіе на 2 и вычитая изъ него третье получаемъ: $7y-4z=13$; умножаемъ это ур-іе на 3 и вычитаемъ изъ него учетверенное первое уравненіе; тогда находимъ $5y=15$, т. е. $y=3$; подставляя это значеніе, получаемъ $z=2$ и $x=4$,

248. Данная система подходитъ подъ типъ, разобранный въ § 51 «Искусс. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

Перемножая всѣ данныя ур-ія и обозначая $abcde=k$; имѣемъ:

$$xyztu=\sqrt[4]{k};$$

дѣля это ур-іе поочередно на каждое изъ данныхъ, получаемъ:

$$u=\frac{\sqrt[4]{k}}{a};\; t=\frac{\sqrt[4]{k}}{b};\; z=\frac{\sqrt[4]{k}}{c} \text{ и т. д.}$$

249. Умноживъ обѣ части перваго ур-iя на x^2, второго на y^2, третьяго на z^2 и сложивъ полученныя ур-iя, имѣемъ:

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=\frac{xyz(a+b+c)}{2}.$$

Вычитая отсюда поочередно каждое изъ уравненiй, получаемъ:

$$1) \; . \; . \; . \; y^2z^2=\frac{xyz(b+c-a)}{2}; \quad 2) \; . \; . \; . \; . \; x^2z^2=\frac{xyz(a+c-b)}{2};$$

$$3) \; . \; . \; . \; . \; x^2y^2=\frac{xyz(b+a-c)}{2}.$$

Перемножая эти ур-iя, получаемъ:

$$xyz=\frac{(b+c-a)(b+a-c)(a+c-b)}{8};$$

дѣля это выраженiе поочередно на каждое изъ ур-iй (1), (2) и (3), находимъ:

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \text{ и т. д.}$$

250. Имѣемъ:

$$x=\frac{a}{b}\cdot y; \; y=\frac{c}{d}\cdot z; \; z=\frac{e}{f}\cdot t;$$

или, выражая всѣ неизвѣстныя въ функцiи отъ t:

$$y=t\frac{ec}{fd}; \; x=t\frac{eca}{fdb}.$$

Итакъ, 4-ое изъ данныхъ ур-iй принимаетъ видъ:

$$\frac{teca}{fdb}+\frac{tec}{fd}+\frac{te}{f}+t=s,$$

откуда опредѣлится t.

251. Выражая всѣ неизвѣстныя въ функцiи отъ x, имѣемъ:

$$y=\frac{x}{2}; \quad z=\frac{x}{3}; \quad u=\frac{y}{3}=\frac{x}{6};$$

поэтому четвертое ур-iе принимаетъ видъ:

$$\frac{\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{9}}{x-\frac{x}{6}}=1, \text{ откуда } x=6; \text{ слѣд., } y=3, \; z=2, \; u=1.$$

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 252—259.

Всѣ эти системы рѣшаются на основаніи извѣстнаго изъ теоріи «Свойства равныхъ отношеній». Подробности объ этомъ типѣ см. въ книгѣ «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.». §§ 52, 53.

252. Данное намъ отношеніе преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ:

$$9x : 7y : 3z : 2u = 9 : 14 : 9 : 8,$$

или, пользуясь свойствомъ равныхъ отношеній:

$$\frac{9x+7y+3z+2u}{9+14+9+8}=\frac{9x}{9}, \text{ или } =\frac{7y}{14}, \text{ или } =\frac{3z}{9}, \text{ или } =\frac{2u}{8};$$

$$\text{слѣд.}, \frac{200}{40}=5=\frac{9x}{9}, \text{ откуда } x=5; \text{ также } \frac{7y}{14}=5;$$

$$\text{т. е. } y=10; \frac{3z}{9}=5; z=15; \frac{2u}{8}=5; u=20.$$

253. Такъ же какъ въ предыдущей задачѣ имѣемъ:

$$7x : 4y : 2z : t = 21 : 20 : 14 : 9,$$

или на основаніи свойства равныхъ отношеній *):

$$\frac{7x-4y+2z-t}{21-20+14-9}=\frac{66}{6}=11=\frac{7x}{21}=\frac{4y}{20}=\frac{2z}{14}=\frac{t}{9};$$

$$\text{откуда } x=33, \ y=55, \ z=77, \ t=99.$$

254. Подобно предыдущимъ задачамъ (№№ 252 и 253) имѣемъ *):

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}=\frac{x+y+z}{1+2-3}=\frac{0}{0}.$$

Отсюда видно, что предложенная система приводитъ къ неопредѣленности, и что неизвѣстныя x, y и z могутъ имѣть произвольныя значенія, лишь бы они находились

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.“ §§ 52, 53.

въ отношенiи $1:2:(-3)$. Такъ, напр., $x=5$, $y=10$, $z=-15$ будетъ одна изъ системъ рѣшенiй; $x=-\frac{7}{9}$; $y=-\frac{14}{9}$; $z=+\frac{21}{9}$ будетъ другая система и т. д.

255. Подобно № 252 имѣемъ *):

$$\frac{x}{5}=\frac{2y}{6}=\frac{-z}{-2}=\frac{x+2y-z}{5+6-2}=\frac{45}{9}=5,$$

откуда $x=25$; $y=15$; $z=10$.

256. Подобно предыдущимъ задачамъ на основанiи свойства равныхъ отношенiй *) имѣемъ:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{u}{4}=\frac{x-y+z-u}{1-2+3-4}=\frac{2}{-2}=-1,$$

откуда $x=-1$, $y=-2$; $z=-3$, $u=-4$.

257. Подобно предыдущимъ задачамъ, на основанiи свойства равныхъ отношенiй *) имѣемъ:

$$\frac{x}{\frac{1}{6}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{5}{9}}=\frac{v}{\frac{2}{3}}=\frac{x+y+z+v}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{5}{9}+\frac{2}{3}}=\frac{5}{\frac{31}{18}}=\frac{90}{31},$$

откуда $x=\frac{15}{31}$; $y=\frac{30}{31}$; $z=\frac{50}{31}$; $v=\frac{60}{31}$.

258. Система эта рѣшена въ видѣ примѣра въ § 53 «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.». Имѣемъ:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{27}=\frac{z}{64} \text{ или } \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1}=\frac{y^{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{z^{\frac{1}{3}}}{4},$$

или на основанiи свойства равныхъ отношенiй:

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1}=\frac{y^{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{z^{\frac{1}{3}}}{4}=\frac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}}{1+3+4}=\frac{24}{8}=3,$$

откуда $x^{\frac{1}{3}}=3$, т. е. $x=27$; $y^{\frac{1}{3}}=9$, $y=729$ и $z^{\frac{1}{3}}=12$, $z=1728$.

*) См. „Искусств. спос. и мет. рѣш. алг. уравн." §§ 52, 53.

259. Беремъ данное намъ отношеніе и пишемъ 2 производныя пропорціи:

$$1) \ldots \frac{(2x+y)+(3x+z)+(y+z)}{y+z}=\frac{1+2+3}{3}, \text{ или } \frac{5x+2y+2z}{y+z}=2,$$

$$\text{или } 5x+2y+2z=2y+2z, \text{ откуда очевидно } x=0,$$

$$2) \ldots \frac{5x+2y+2z}{2x+y}=6, \text{ или } 5x+2y+2z=12x+6y,$$

$$\text{но } x=0, \text{ слѣд., } 2z=4y, \text{ т. е. } z=2y,$$

послѣ этого ур-іе $21x+31y+42z=15$ принимаетъ видъ:

$$21 \,.\, 0+31 \,.\, y+42 \,.\, 2y=15,$$

$$\text{откуда } y=\frac{3}{23}, \text{ слѣд., } z=\frac{6}{23}.$$

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 260—264.

Всѣ эти уравненія рѣшаются очень просто и красиво при помощи пріема, указаннаго въ § 57 «Искусст. спос. и методы рѣш. алгебр. уравн.».

260. Изъ данныхъ уравненій легко получаемъ:

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{5};\quad \frac{x+z}{xz}=\frac{2}{3};\quad \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{4}, \text{ или, дѣля почленно:}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{5};\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3};\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$

Складывая послѣднія уравненія и вычитая изъ полученной суммы поочередно каждое изъ нихъ, находимъ:

$$\frac{1}{z}=\frac{19}{120}, \text{ т. е. } z=\frac{120}{19};\quad \frac{1}{y}=\frac{11}{120}, \text{ т. е. } y=\frac{120}{11};$$

$$\frac{1}{x}=\frac{61}{120}, \text{ т. е. } x=\frac{120}{61}.$$

261. Подобно предыдущей задачѣ имѣемъ:

$$\frac{x+y}{xy}=1;\quad \frac{x+z}{xz}=\frac{1}{2};\quad \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{3}, \text{ или}$$

$$(a) \ldots \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1;\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3};$$

или, складывая эти три уравненія:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12};$$

вычитая отсюда поочередно каждое изъ полученныхъ 3-хъ уравненій (a), получаемъ:

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{12};\ z=-12;\ \frac{1}{y}=\frac{5}{12},\ y=\frac{12}{5};\ \frac{1}{x}=\frac{7}{12};\ x=\frac{12}{7}.$$

262. Подобно №№ 260, 261 имѣемъ:

$$\frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{a};\ \frac{x+z}{xyz}=\frac{1}{b};\ \frac{y+z}{xyz}=\frac{1}{c},\ \text{или}$$

$$1)\ \ldots\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{a};\ 2)\ \ldots\frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{b};\ 3)\ \ldots\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{c}.$$

Складывая эти уравненія (1), (2), (3) и обозначая

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k,\ \text{имѣемъ:}$$

$$(a)\ \ldots\ldots\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=\frac{k}{2},$$

и вычитая изъ уравненія (a) поочередно (1), (2) и (3), найдемъ xy, xz и yz, послѣ чего опредѣлимъ x, y и z.

263. Рѣшается такъ же, какъ предыдущая.

264. Приводя каждое уравненіе къ одному знаменателю и раздѣливъ обѣ части на произведеніе xyz получаемъ: 1) $\ldots\ y+z=(b+c)s$; 2) $\ldots\ x+z=(a+c)s$; 3) $\ldots\ x+y=(a+b)s$,

гдѣ буквой s обозначена сумма $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Складывая всѣ полученныя уравненія и вычитая изъ общей суммы каждое изъ нихъ, находимъ:

$$x=a\,.\,s;\ y=b\,.\,s;\ z=c\,.\,s.$$

$$\text{Слѣд.,}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=s=\frac{1}{as}+\frac{1}{bs}+\frac{1}{cs},\ \text{откуда}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.\ \text{Итакъ,}\ x=a\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\ \text{и т. д.}$$

265. Приводя каждое уравненіе къ одному знаменателю, и дѣля первое на xy, второе на xz и третье на yz, замѣняемъ данную систему такой:

$$1) \ldots x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=a;$$

$$2) \ldots x+\frac{1}{x}+z+\frac{1}{z}=b;$$

$$3) \ldots y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}=c;$$

Складывая уравненія (1), (2) и (3) и вычитая изъ общей суммы каждое изъ нихъ, получаемъ уравненія:

$$z+\frac{1}{z}=\frac{b+c-a}{2};\ y+\frac{1}{y}=\frac{a+c-b}{2};\ x+\frac{1}{x}=\frac{a+b-c}{2},$$

изъ которыхъ опредѣляются x, y и z.

266. Переписавъ данныя ур-ія въ такомъ видѣ:

$$a^3x=y^2z^2;\ b^3y=x^2z^2;\ c^3z=x^2y^2,$$

перемножимъ ихъ. Получается $xyz=abc$. Слѣд., изъ перваго ур-ія $x=\sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{a}}$; изъ второго $y=\sqrt[3]{\frac{a^2c^2}{b}}$ и изъ третьяго:

$$z=\sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{c}}.$$

267. Обозначивъ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=s$, переписываемъ данныя ур-ія такъ:

$$x=\frac{s}{a};\ y=\frac{s}{b};\ z=\frac{s}{c}.\ \text{Слѣд.,}\ \frac{1}{x}=\frac{a}{s};\ \frac{1}{y}=\frac{b}{s};\ \frac{1}{z}=\frac{c}{s}.$$

а потому для опредѣленія s имѣемъ ур-іе:

$$s=\frac{1}{s}(a+b+c),\ \text{откуда}\ s=\sqrt{a+b+c}.$$

268. Имѣемъ уравненія:

$$a^2(x+y)=xyz;\ b^2(y+z)=xyz;\ c^2(x+z)=xyz;$$

эти ур-ія рѣшаются, какъ въ № 262:

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{a^2};\ \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{b^2};\ \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{c^2};$$

складываемъ ихъ и т. д.

269. Имѣемъ:

$$x=6+y;\ z=y-3$$

и слѣд., первое ур-іе принимаетъ видъ:

$$(6+y)y+y(y-3)+(6+y)(y-3)=27,$$

откуда $y_1=-5$, или $y_2=3$;

слѣд., $x_1=1$, или $x_2=9$;

соотвѣтственно съ этимъ $z_1=-8$; $z_2=0$;

270. Перемноживъ данныя ур-ія, находимъ:

$$(x+y)(x+z)(y+z)=\sqrt{abc}.$$

Дѣлимъ полученное ур-іе на каждое изъ данныхъ:

$$x+y=\sqrt{\frac{bc}{a}};\ x+z=\sqrt{\frac{ac}{b}};\ y+z=\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Сложивъ полученныя ур-ія и вычитая изъ суммы каждое изъ нихъ, найдемъ x, y, z.

271. Рѣшается совершенно такъ же, какъ предыдущая.

272. Складывая данныя ур-ія, имѣемъ:

$(x+y+z)^2=144$, т. е. $x+y+z=\pm 12$;

вслѣдствіе этого данныя ур-ія принимаютъ видъ:

1 . . . $\pm 12(x+y)=72$; 2 . . . $\pm 12(x+z)=96$;

3 . . . $\pm 12(y+z)=120$,

слѣд., имѣемъ слѣдующія 2 системы ур-ій:

I.		II.	
	$x+y=6$		$x+y=-6$
	$x+z=8$		$x+z=-8$
	$y+z=10$		$y+z=-10.$

Въ первомъ случаѣ $x+y+z=12$;

во второмъ $x+y+z=-12$;

а слѣд., вычитая отсюда поочередно каждое изъ этихъ уравненій, имѣемъ:

$$z_{\mathrm{I}}=6;\ z_{\mathrm{II}}=-6;\ y_{\mathrm{I}}=4;\ y_{\mathrm{II}}=-4;\ x_{\mathrm{I}}=2;\ x_{\mathrm{II}}=-2.$$

273. Складывая данныя уравненія находимъ:

$$x+y+z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

а потому, дѣля каждое изъ данныхъ намъ уравненій на это уравненіе, находимъ:

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

$$z=\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

274. Умноживъ первое уравненіе на x, второе на y, третье на z найдемъ:

$$x=a\sqrt{s};\ y=b\sqrt{s};\ z=c\sqrt{s},$$

гдѣ буквой s обозначено произведеніе: $(x+y+z)xyz$. Слѣд., для опредѣленія s имѣемъ уравненіе:

$$\sqrt{s(a+b+c)}\ .\ abc\sqrt{s^3}=s,$$

$$\text{откуда }\ s=\frac{1}{(a+b+c)abc}.$$

275. Перемноживъ данныя ур-ія, найдемъ $xyz=\sqrt[4]{abc}$; дѣля на каждое изъ данныхъ, получимъ x, y, z.

276. Приводя данныя уравненія къ одному знаменателю, складываемъ ихъ и изъ полученной суммы вычитаемъ порознь каждое уравненіе. Находимъ:

$$xy=\frac{1}{2};\ xz=\frac{1}{2};\ yz=\frac{1}{2}.$$

Перемноживъ эти уравненія, и дѣля произведеніе на каждое изъ нихъ, найдемъ $x=y=z=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

277. Складывая данныя уравненія и вычитая изъ полученной суммы поочередно каждое изъ данныхъ найдемъ:

$$xy=p+q-s;\ xz=p+s-q;\ yz=q+s-p;$$

перемножая эти 3 уравненія, найдемъ величину произведенія xyz, а дѣля поочередно на каждое изъ нихъ, найдемъ x, y и z.

278. Имѣемъ:

$$y = a - x;\ z = b - x;$$

$$x^2 + (a - x)^2 = (b - x)^2,$$ откуда найдется x и т. д.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 279 — 282.

Всѣ эти системы рѣшаются очень просто и красиво посредствомъ составленія кубическаго уравненія по извѣстнымъ зависимостямъ между его корнями. См. объ этомъ «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравненій» §§ 55, 56.

279. Въ условіе этой задачи вкралась досадная опечатка: правая часть второго уравненія должна быть (-3), а третьяго уравненія ($+2$).

Въ «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» показано, что если даны: сумма трехъ чиселъ (S_1) сумма ихъ произведеній по 2 (S_2) и произведеніе всѣхъ трехъ (S_3), то числа эти являются корнями кубичнаго уравненія

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0.$$

Въ данной системѣ имѣемъ: $S_1 = 0$; $S_2 = -3$ и $S_3 = 2$, а потому имѣемъ кубичное уравненіе

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Рѣшая это уравненіе по способу, изложенному въ § 59 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.», находимъ одинъ корень, равный (-1) и слѣд.,

$$(x+1)(x^2 - x - 2) = 0.$$

откуда $x = -1$, или $= +2$, или $= -1$. Итакъ, предложенная система имѣетъ 3 группы рѣшеній:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{array}\right. \qquad \mathrm{II}\left\{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{array}\right. \qquad \mathrm{III}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -1. \end{array}\right.$$

280. Рѣшается совершенно такъ же, какъ предыдущая. Неизвѣстныя найдутся, какъ корни кубичнаго уравненія:

$$x^3 - 3x + 2 = 0, \text{ или } (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $= -2$, или $= 1$.

Итакъ, предложенная система имѣетъ 3 группы рѣшеній:

$$\text{I.}\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{II.}\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{III.}\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

281. Рѣшается такъ же, какъ № 279. Неизвѣстныя найдутся, какъ корни кубичн. уравн. *).

$$x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = 0,$$

которое разлагается на множители:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 0.$$

Итакъ, кубичное уравненіе имѣетъ три равные корни $x = \frac{1}{3}$ и слѣд., предложенная система имѣетъ всего одну группу рѣшеній: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$.

282. Рѣшается такъ же, какъ № 279. Неизвѣстныя найдутся, какъ корни кубичн. уравн. *).

$$v^3 - 6v^2 + 11v - 6 = 0, \text{ или } (v-1)(v^2 - 5v + 6) = 0,$$

откуда $v_1 = 1$; $v_2 = 2$; $v_3 = 3$. Слѣд., предложенная система имѣетъ 6 группъ рѣшеній:

$$\text{I.}\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{II.}\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{III.}\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

283. Имѣемъ: $x^2 + y^2 = 1 - z^2$; $xy + z(x+y) = 4$; но $x + y = 5 + z$, слѣд., $xy + z(5+z) = 4$, откуда $xy = 4 - 5z - z^2$.

Далѣе пишемъ:

$x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 10z + z^2$, или, замѣняя $x^2 + y^2$ черезъ $1 - z^2$ и подставляя вмѣсто $2xy$ его значеніе $(8 - 10z - 2z^2)$, полу-

---

*) См. «Искусств. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравнен.» § 56.

чаемъ квадр. уравненіе $z^2+5z+4=0$, откуда $z_1=-1$ и $z_2=-4$. Подставляя это значеніе, получаемъ двѣ системы:

$$1 \ldots\ldots x+y=1;\ x^2+y^2=-15.$$
$$2 \ldots\ldots x+y=4;\ x^2+y^2=0.$$

Въ обоихъ случаяхъ для x и y получаются только мнимые корни.

284. Первое уравненіе: $x+z=13-y$ по возвышеніи въ квадратъ даетъ:

$$(a) \ldots\ldots x^2+z^2+2xz=169-26y+y^2;$$

но изъ второго уравненія $x^2+z^2=91-y^2$,

а изъ третьяго: $2xz=2y^2$,

слѣд., уравненіе (a) принимаетъ видъ:

$$91-y^2+2y^2=169-26y+y^2, \text{ откуда } y=3;$$

слѣд., $x+z=10$, а $xz=9$.

откуда $x=9$, $z=1$, или $x=1$, $z=9$.

285. Первое уравненіе: $y+z=13-x$ по возвышеніи въ квадратъ даетъ:

$$(a) \ldots\ldots y^2+z^2+2yz=169-26x+x^2;$$

но изъ (2) уравненія: $y^2+z^2=61-x^2$,

а изъ (3) $2yz=x(z+y)=x(13-x)$,

а потому уравненіе (a) принимаетъ видъ:

$$61-x^2+x(13-x)=169-26x+x^2,$$

откуда $x=4$, или $x=9$; если $x=4$, то $y=3$, $z=6$ или наоборотъ; если же $x=9$, то y и z мнимые.

286. Раздѣливъ второе уравненіе на первое, получаемъ:

$$x+z=3y^2.$$

Теперь третье уравненіе перепишется такъ:

$$y^3+3y^2+3y=26,$$

откуда прибавивъ по единицѣ къ обѣимъ частямъ и извлекая кубичный корень, найдемъ: $y+1=3$, т. е. $y=2$.

287. Вычитая третье уравненіе изъ второго, получаемъ: $xy(xz+yz-6)=-1$; но изъ уравненія (1) $xz+yz=6-xy$.

Слѣд., $xy(6-xy-6)=-1$, т. е. $xy=\pm 1$ и т. д.

288. Подставляя въ первое уравненіе вмѣсто суммы $x+z$ значеніе ея изъ третьяго уравненія, т. е. $2y$, находимъ, что $y=5$, слѣд., изъ (2) уравненія $x=6$, а подставляя эти значенія, найдемъ $z=4$.

289. Въ третье уравненіе подставляемъ вмѣсто произведенія xy равную величину изъ уравненія (1);

$$2(x+y)z=180, \text{ т. е. } xz+yz=90;$$

вычитая это изъ второго уравненія, находимъ: $xy=18$,

а слѣд., изъ уравненія (3) $z=10$;

далѣе найдемъ $x=6$, $y=3$, или $x=3$, $y=6$.

290. Первое уравненіе $x+z=19-2y$ возвышаемъ въ квадратъ:

$$x^2+z^2+2xz=361+4y^2-76y;$$

но изъ уравненія (2): $x^2+z^2=133-4y^2$,

а изъ уравненія (3): $2xz=8y^2$;

слѣд., имѣемъ:

$$133-4y^2+8y^2=361+4y^2-76y, \text{ откуда } y=3;$$

слѣд., $x=9$, $z=4$, или $x=4$, $z=9$.

291. Вычитая первое ур-іе изъ второго, находимъ:

$$y=1-2z;$$

подставляемъ это значеніе въ первое ур-іе, получаемъ:

$$x=3+z;$$

слѣд., третье ур-іе принимаетъ видъ:

$(3+z)^2+(1-2z)^2+z^2=14$, откуда $z_1=1$, $z_2=-\frac{2}{3}$ и т. д.

292. Изъ третьяго ур-ія $xy=\frac{4}{z}$, поэтому уравненіе (2) принимаетъ видъ:

$$\frac{4}{z}+z=5, \text{ откуда } z_1=1,\ z_2=4;$$

слѣд., $(xy)_1=4$; $(xy)_2=1$ и т. д.

293. Вычитая третье ур-іе изъ второго, находимъ:

$y=18$, слѣд., $x+z=36$, а $x^2+z^2=776$,

откуда $x=26$, $z=10$, или $x=10$, $z=26$.

294. Имѣемъ три ур-ія:

$$1 \quad . \quad . \quad . \quad . \; x+y=1-z, \quad 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \; x^2+y^2=1-z^2,$$
$$3 \quad . \quad . \quad . \quad . \; x^3+y^3+z^3=1.$$

Возводимъ (1) въ кубъ:

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=1-z^3-3z+3z^2, \text{ или}$$
$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \; xy(1-z)=z^2-z.$$

Для того, чтобы опредѣлить произведеніе xy, возводимъ (1) въ квадратъ:

$$x^2+y^2+2xy=1+z^2-2z, \text{ или:}$$
$$1-z^2+2xy=1+z^2-2z, \text{ откуда } xy=z(z-1).$$

Теперь ур-іе (a) принимаетъ видъ:

$$z(z-1)(1-z)=z(z-1), \text{ откуда } z=0, \text{ или } z=1;$$
$$\text{если } z=0, \text{ то } x+y=1, \; x^2+y^2=1;$$
$$\text{слѣд., или } x=1, \; y=0, \text{ или } x=0, \; y=1;$$

если же $z=1$, то $x+y=0$, $x^2+y^2=0$, слѣд., $x=0$, $y=0$.

Итакъ, изъ трехъ неизвѣстныхъ x, y, z любыя 2 должны $=0$, а третья $=1$.

295. Рѣшая совершенно такъ же, какъ предыдущую, найдемъ, что изъ трехъ величинъ x, y, z любыя 2 должны равняться нулю, а третья $=a$.

296. Имѣемъ три ур-ія:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \; y+z=7-x; \quad (2) \quad . \quad . \quad . \quad . \; x(y+z)=yz-2;$$
$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \; y^2+z^2=21-x^2;$$

второе ур-іе преобразуется такъ:

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \; x(7-x)=yz-2;$$

чтобы опредѣлить произведеніе yz въ зависимости отъ x, возводимъ (1) въ квадратъ:

$$y^2+z^2+2yz=49-14x+x^2, \text{ или } 21-x^2+2yz=49-14x+x^2,$$
$$\text{откуда } yz=14-7x+x^2;$$

теперь ур-іе (a) принимаетъ видъ:

$$x(7-x)=14-7x+x^2-2,$$

откуда $x=1$, или $=6$; если $x=1$, то $y=4$, $z=2$ или наоборотъ; если же $x=6$, то y и z — мнимыя.

297. Изъ ур-ій (2) и (3) находимъ, что $x = \frac{1}{3} - z$; $y = -(1+z)$. Подставляя эти значенія въ ур-іе (1), получаемъ кубичное уравненіе:

$$z^3 + 2z^2 + \frac{4}{3}z + \frac{8}{27} = 0, \text{ или } \left(z + \frac{2}{3}\right)^3 = 0,$$

$$\text{откуда } z = -\frac{2}{3} \text{ и т. д.}$$

298. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ каждаго изъ ур-ій по единицѣ, представимъ ур-ія въ такомъ видѣ:

(1) . . . . $(1+z)(1+y) = 1+a$
(2) . . . . $(1+x)(1+z) = 1+b$;
(3) . . . . $(1+x)(1+y) = 1+c$;

Перемноживъ эти ур-ія найдемъ велич. произвед. $(1+x)(1+y)(1+z)$,

а дѣля это произведеніе на каждое изъ ур-ій (1), (2), (3), найдемъ искомыя неизвѣстныя.

299. Вычтя второе ур-іе изъ перваго и третье изъ второго получимъ:

(a) . . . . $(y-z)(x+y+z) = 9$
(b) . . . . $(x-y)(x+y+z) = 9$

раздѣливъ одно на другое, находимъ $x+z = 2y$,

теперь уравненіе (b) принимаетъ видъ:

$$(x-y)(2y+y) = 9, \text{ или } x = \frac{3}{y} + y;$$

подставляя это значеніе въ первое изъ данныхъ уравненій, получаемъ биквадратное уравненіе:

$$3y^4 - 28y^2 + 9 = 0, \text{ и т. д.}$$

300. См. предыдущую.

301. Складывая данныя 3 уравненія и вычитая изъ ихъ суммы каждое уравненіе порознь, получимъ:

$$x^2 - yz = \frac{b+c-a}{2}; \quad y^2 - xz = \frac{a+c-b}{2}; \quad z^2 - xy = \frac{a+b-c}{2}.$$

Рѣшеніе этихъ уравненій см. № 299.

302. Складывая всѣ данныя уравненія, находимъ:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}(m^2+n^2+p^2).$$

Вычитая отсюда поочередно каждое изъ данныхъ уравненій, найдемъ:

$$x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{8\left(n^2+p^2-\frac{m^2}{2}\right)} \text{ и т. д.*).}$$

303. Раскладываемъ лѣвыя части данныхъ уравненій на множителей:

$$(x+y-z)(x-y+z)=a$$
$$(y+z-x)(y-z+x)=b$$
$$(z+x-y)(z-x+y)=c$$

Перемножаемъ всѣ уравненія и дѣлимъ полученное произведеніе порознь на каждое изъ нихъ и т. д.

304. Дѣлимъ первое ур-іе на второе и на третье:

$$\frac{x+z-y}{x+y-z}=-2;\quad \frac{y+z-x}{x+y-z}=-4;$$

или, приводя къ одному знаменателю:

$$1\ .\ .\ .\ .\ 3x+y-z=0,\quad 2\ .\ .\ .\ .\ 5y-3z+3x=0.$$

Вычитая (1) изъ (2), получаемъ: $z=2y$, а подставляя это значеніе въ ур-іе (1), получаемъ: $y=3x$; слѣд., $z=2y=6x$.

Теперь первое изъ данныхъ ур-ій преобразуется такъ:

$$\frac{x^3+27x^3+216x^3}{x+3x-6x}=-122, \text{ откуда } x^2=1, \text{ т. е. } x=\pm 1.$$

305. Рѣшается совершенно такъ же, какъ предыдущая.

306. Приведя данныя уравненія къ одному знаменателю, получаемъ:

$$y^2+z^2+yz=a^2;\quad x^2+y^2+xy=b^2;\quad x^2+z^2+xz=c^2,$$

т. е. задача сводится къ № 299.

---

*) Къ рѣшенію заданной системы ур-ій приводитъ геометрическая задача: по даннымъ тремъ медіанамъ тре-ка m, n, p, найти его стороны x, y, z.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ задачамъ №№ 307—345.

Всѣ эти уравненія рѣшаются, какъ показано въ §§ 61—72 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.», на основаніи приравниванія показателей степеней двухъ равныхъ величинъ съ одинаковыми основаніями.

307. Имѣемъ: $2^{x^2-6x-2,5}=\sqrt{2^9}=2^{\frac{9}{2}}$,

откуда $x^2-6x-2,5=4,5$ т. е. $x=7$, или $x=-1$.

308. Имѣемъ:

$(0,11)^{x^3-5}=(0,11)^3$, откуда $x^3-5=3$, т. е. $x^3=8$, а $x=2$.

309. Имѣемъ:

$(0,13)^{x-204}=(0,13)^3$, откуда $x-204=3$, т. е. $x=207$.

310. Имѣемъ:

$$2^{4\sqrt{x}}=2^{2x-6}, \text{ откуда } 4\sqrt{x}=2x-6.$$

слѣд., $x=9$, или $=1$.

311. Имѣемъ: $3^{\sqrt{x}}=\sqrt[x]{3^8}$, слѣд., $3^{\sqrt{x}}=3^{\frac{8}{x}}$,

$$\text{откуда } \sqrt{x}=\frac{8}{x}, \text{ т. е. } x=4$$

312. Имѣемъ $2^{3x}=\sqrt[3x]{2^9}$, слѣд., $2^{3x}=2^{\frac{3}{x}}$; $x=\pm 1$.

313. Имѣемъ: $2^{12x}=2^{-\frac{3}{2}}$, откуда $x=-\frac{1}{8}$.

314. Имѣемъ:

$$5^{\sqrt[x]{2}}=5^4, \text{слѣд.,} \sqrt[x]{2}=4,\ 2^{\frac{1}{x}}=2^2, \text{ т. е. } x=\frac{1}{2}.$$

315. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{5}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{11}{3}}$; $x=-\frac{55}{3}$.

316. Имѣемъ: $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{3-7x}$; $x=1$.

317. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{15}{x}+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$; $x=\frac{15}{7}$.

318. Имѣемъ: $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{6-2x}$; $x=2$.

319. Имѣемъ: $x^2-\frac{17}{6}x=\frac{1}{2}$, откуда $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{6}$

320. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3-3x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1}$; $x=2$.

321. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x}$; $x=\frac{11}{13}$.

322. Имѣемъ: $2^{x-2}=5^{2-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$, откуда слѣдуетъ *), что $x-2=0$, т. е. $x=2$.

323. Имѣемъ: $8^{2x+1}=8^{3x-4}$; $x=5$.

324. Имѣемъ: $2^{\frac{5x+25}{x-7}}=2^{\frac{7x+119}{x-3}-2}=2^{\frac{5x+125}{x-3}}$, откуда

$$\frac{5x+25}{x-7}=\frac{5x+125}{x-3},\text{ т. е. } x=10.$$

325. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{9x-6}$; $x=\frac{7}{8}$.

326. Имѣемъ: $10^{3-\frac{1}{x}}=10^{2x}$, откуда $3-\frac{1}{x}=2x$; $x_1=1$; $x_2=\frac{1}{2}$.

327. Имѣемъ: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{3}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{x}{3}}$; $x=0$.

---

*) „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравненій“ §§ 70, 71.

328. Имѣемъ: $4^{(3-x)(2-x)}=4^0$; слѣд., $(3-x)(2-x)=0$; $x_1=3$, $x_2=2$.

329. Имѣемъ: $5^{(x^2+x-2)(3-x)}=5^0$; слѣд., (x^2+x-2) $(3-x)=0$;

$$x_1=-2;\ x_2=1;\ x_3=3.$$

330. $x^{\frac{x}{2}}=x^{\sqrt{x}}$; здѣсь мы не можемъ заключить, что показатели степеней $\left(\frac{x}{2} \text{ и } \sqrt{x}\right)$ непремѣнно равны между собой, такъ какъ можетъ быть основанія (x) равны единицѣ *). Поэтому поступаемъ такъ:

Логариѳмируемъ обѣ части уравненія:

$\frac{x}{2}\log x=\sqrt{x}\log x$, или $\log x\left(\frac{x}{2}-\sqrt{x}\right)=0$; слѣдовательно, или $\log x=0$, т. е. $x=1$, или же $\frac{x}{2}=\sqrt{x}$, $\frac{x^2}{4}=x$, т. е. $x=0$ или $=4$. Итакъ, данное уравненіе имѣетъ 3 рѣшенія: $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=4$.

331. $x^{\sqrt{x}}=x^{\frac{x}{4}}$. Здѣсь, подобно предыдущей задачѣ (№ 330), приходится логариѳмировать обѣ части, такъ какъ неизвѣстно, чему равно основаніе.

Поэтому имѣемъ: $\sqrt{x}\log x=\frac{x}{4}\log x$, или

$\log x\left(\sqrt{x}-\frac{x}{4}\right)=0$.

Слѣд., для x получаются 3 значенія: $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=16$.

332. Имѣемъ: $x^{\sqrt{x}}=x^{\frac{x}{3}}$. Здѣсь, подобно № 330, приходится логариѳмировать обѣ части: $\sqrt{x}\log x=\frac{x}{3}\log x$, или $\log x\left(\sqrt{x}-\frac{x}{3}\right)=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=9$.

---

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн." § 69.

333. Имѣемъ: $x^{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{x}{2}}$. Здѣсь, подобно № 330, приходится логариѳмировать обѣ части: $x^{\frac{2}{3}} \log x = \frac{x}{2} \log x$, или $\log x\left(x^{\frac{2}{3}} - \frac{x}{2}\right) = 0$; слѣд., или $\log x = 0$, т. е. $x = 1$, или же $x^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{2}$; $x^2 = \frac{x^3}{8}$; $x^2\left(1 - \frac{x}{8}\right) = 0$, т. е. $x = 0$ или $= 8$.

334. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3-3x}$; $x = 0$.

335. Имѣемъ: $3^{x+3-x} = 3^{-3x}$; $x = -1$.

336. Имѣемъ: $\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{14}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^9$; $x = \frac{7}{4}$.

337. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3-3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$; $x = 2$.

338. Имѣемъ: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{11}{5}}$; $x = -\frac{33}{5}$.

339. Имѣемъ: $2^{\frac{x}{2}} \,.\, 3^{\frac{x}{2}} = 36$; $6^{\frac{x}{2}} = 6^2$; $x = 4$.

340. Имѣемъ: $10^x = 10^{5x-6}$; $x = \frac{3}{2}$.

341. Умноживъ обѣ части на 3^{15}, получаемъ: $6^{x^2+15} = 6^{12x-12}$, откуда $x^2 - 12x + 27 = 0$, т. е. $x_1 = 3$ и $x_2 = 9$.

342. $2^{x+2} \,.\, 3^{x+2} = 2^{x^2} \,.\, 3^{x+2}$, откуда, раздѣливъ на 3^{x+2}, получаемъ: $2^{x+2} = 2^{x^2}$, слѣд., $x + 2 = x^2$; $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

343. Имѣемъ: $3^{2x+4} \,.\, 2^{2x+4} = 3^{3x} \,.\, 2^{x+8}$, или, дѣля на лѣвую часть: $1 = 3^{x-4} \,.\, 2^{4-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-4}$; слѣд., $x - 4 = 0$, т. е. $x = 4$.

344. Дѣля на лѣвую часть, получаемъ: $1 = 3^{x-4} \,.\, 5^{4-x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-4}$; слѣд., $x - 4 = 0$, т. е. $x = 4$.

345. Имѣемъ: $5^{x^2-x} \cdot 2^{x^2+x} = 2^{2x+6} \cdot 5^{2x}$, или, дѣля на $2^{2x+6} \cdot 5^{2x}$, (что мы имѣемъ право сдѣлать, ибо дѣлитель этотъ не $=0$), получаемъ:

$$5^{x^2-3x} \cdot 2^{x^2-x-6} = 1, \text{ или } 5^{x(x-3)} \cdot 2^{(x+2)(x-3)} = 1.$$

Логариѳмируя, получаемъ:

$$(x-3)\Big[x lg5 + (x+2) lg2\Big] = 0,$$

$$\text{слѣд., или } x = 3, \text{ или } x lg5 + x lg2 + 2 lg2 = 0,$$

откуда имѣемъ:

$$x(lg5 + lg2) + 2lg2 = x lg10 + 2lg2 = 0, \text{ слѣд., } x = -2lg2 = -lg4.$$

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 346—357.

Всѣ эти уравненія рѣшаются, какъ показано въ §§ 73—77 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.»

346. Имѣемъ $2^x - \frac{2^x}{2^2} = 3$, или $4 \cdot 2^x - 2^x = 12$,

$$\text{или } 3 \cdot 2^x = 3 \cdot 4, \text{ откуда } 2^x = 2^2, \text{ т. е. } x = 2.$$

347. Имѣемъ: $3^x - \frac{3^x}{3^2} = 8$, или $9 \cdot 3^x - 3^x = 72$,

$$\text{или } 8 \cdot 3^x = 72, \text{ откуда } 3^x = 3^2, \text{ т. е. } x = 2.$$

348. Имѣемъ: $5^x - \frac{5^x}{5} = 100$, откуда $4 \cdot 5^x = 500$,

$$\text{слѣд., } 5^x = 125 = 5^3, \text{ т. е. } x = 3.$$

349. Имѣемъ: $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$, пусть $7^x = y$, тогда $7^{2x} = y^2$ и уравненіе принимаетъ видъ: $y^2 - 6y + 5 = 0$, слѣд., $y = 1$, или $y = 5$; слѣд. $7^x = 1$, т. е. $x = 0$, или $7^x = 5$, т. е. $x = \frac{log5}{log7}$.

350. Имѣемъ:

$$2 \cdot 3 \cdot 3^x - 5 \cdot \frac{9^x}{9^2} = 81, \text{ или } 5y^2 - 486y + 6561 = 0,$$

гдѣ $y = 3^x$, а потому $y^2 = 9^x$; отсюда $y = 81$, или $y = \frac{81}{5}$;

слѣд., 1) $3^x = 81 = 3^4$, т. е. $x = 4$, или 2) $3^x = \frac{81}{5}$, откуда

$$5 \,.\, 3^x = 3^4, \text{ т. е. } x = 4 - \frac{lg5}{lg3}.$$

351. Имѣемъ: $2^{2x} - 9 \,.\, 2^x + 8 = 0$, или $y^2 - 9y + 8 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = 8$. Если $2^x = 1$, то $x = 0$; если $2^x = 8$, то $x = 3$.

352. Имѣемъ: $2^{2x} - 5 \,.\, 2^x + 6 = 0$, или $y^2 - 5y + 6 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Если $2^x = 2$, то $x = 1$; если же $2^x = 3$, то $x = \frac{log3}{log2}$.

353. Имѣемъ: $8 \,.\, 8^x - \frac{8^{2x}}{8} = 30$, или $y^2 - 64y + 240 = 0$, откуда $y = 8^x = 4$ или $= 60$. Если $8^x = 4$, т. е. $2^{3x} = 2^2$, то $x = \frac{2}{3}$; если же $8^x = 60$, то $x = \frac{lg60}{lg8}$.

354. Имѣемъ: $34 \,.\, 7^x = 34 \,.\, 5^{2x}$, или $7^x = 5^{2x}$; логариѳмируя, получаемъ $x \,.\, log\frac{25}{7} = 0$, т. е. $x = 0$,

355. Если представимъ наше уравненіе подъ видомъ:

$$(2^x)^3 - \left(\frac{2}{2^x}\right)^3 - 3 \,.\, 2^x \,.\, \frac{2}{2^x}\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1,$$

то замѣчаемъ, что первая часть этого ур-ія представляетъ точный кубъ; поэтому извлекая изъ обѣихъ частей кубичный корень, получаемъ:

$$2^x - \frac{2}{2^x} = 1, \text{ или } 2^{2x} - 2^x - 2 = 0;$$

откуда $2^x = 2$, т. е. $x = 1$, или же $2^x = -1$,

что очевидно невозможно.

356. Имѣемъ: $3 \,.\, 4^x + 27 \,.\, 9^x = 24 \,.\, 4^x - \frac{9}{2} \,.\, 9^x$ или $\frac{63}{2} \,.\, 9^x = 21 \,.\, 4^x$, или $3 \,.\, 9^x = 2 \,.\, 4^x$, или $3^{2x+1} = 2^{2x+1}$; слѣд., *)

$2x + 1 = 0$, т. е. $x = -\frac{1}{2}$.

---

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.“ § 70.

357. Имѣемъ: $2^{2x} - \frac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^x - \frac{2^{2x}}{2}$, или $\frac{3}{2} \cdot 2^{2x} = \frac{4}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot 3^x$, или $2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}$. Логариѳмируя, получаемъ:

$$\left(2x - 3\right)\left(log2 - \frac{1}{2} log3\right) = 0, \text{ откуда } x = \frac{3}{2}.$$

Общее замѣчаніе,

относящееся къ уравненіямъ №№ 358—370.

Всѣ эти показательныя уравненія съ двумя неизвѣстными рѣшаются при помощи способа, указаннаго въ § 78 «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

358. Изъ перваго уравненія $x + y = 5^x$; подставляя во второе, получаемъ: $5^x = 2^x$, т. е. $x = 0$; слѣд., $y = 5^x - x = 1$.

359. Изъ перваго уравненія $x + y = 5^x$; подставляемъ во второе: $5^x \cdot 2^x = 100$, т. е. $x = 2$; слѣд., $y = 5^x - x = 23$.

360. Изъ перваго уравненія $x + y = 2^x$; подставляемъ во второе: $2^x \cdot 3^x = 279936$, или $6^x = 6^7$, т. е. $x = 7$; слѣдовательно, $y = 2^7 - 7 = 121$.

361. Изъ перваго уравненія $x + y = 9^x$; подставляемъ во второе: $9^x \cdot 2^x = 18$, т. е. $x = 1$; слѣд., $y = 9 - 1 = 8$.

362. Возведя второе уравненіе въ степень y, получаемъ: $1024 = 2^y \cdot x^y = 2^y \cdot 32$; слѣд., $2^y = 32$, $y = 5$; подставляемъ въ первое уравненіе: $x^5 = 32$, $x = 2$.

363. Возводимъ второе уравненіе въ степень y; $1024 = 2^y \cdot x^{2y} = 2^y \cdot 16^2$; слѣд., $2^y = 4$, $y = 2$. Подставляемъ въ первое уравненіе: $x^2 = 16$; $x = \pm 4$.

364. Изъ перваго уравненія $x + y = 2^x$; подставляемъ во второе: $2^x \cdot 4^x = 64$; $x = 2$; слѣд., $y = 2^2 - 2 = 2$.

365. Изъ перваго уравненія $3x + y = 7^{\frac{x}{4}}$; подставляемъ во второе: $7^{\frac{x}{4}} \cdot 3^{\frac{x}{4}} = 441$, т. е. $x = 8$; слѣд., $y = 7^2 - 24 = 25$.

366. Изъ второго уравненія: $1024 = \left(\frac{4}{3}\right)^y . x^y = \left(\frac{4}{3}\right)^y . 243$; слѣдоват., $\left(\frac{4}{3}\right)^y = \frac{1024}{243} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$; изъ перваго уравненія $x^5 = = 343$, т. е. $x = 3$.

367. Изъ второго уравненія: $324 = 2^y . x^{2y} = 2^y . 81$; слѣдовательно, $2^y = 4$, $y = 2$. Подставляемъ въ первое уравненіе: $x^2 = 9$; $x = \pm 3$.

368. Перемножаемъ данныя уравненія: $6^{y+x} = 216 = 6^3$, т. е. $x + y = 3$; дѣля одно на другое, находимъ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = = \frac{2}{3}$, т. е. $x - y = 1$; слѣд., $x = 2$, $y = 1$.

369. Изъ перваго уравненія $x + y = 2^{x-y} . 3^{\frac{x-y}{2}}$. Подставляемъ во второе: $2^{x-y} . 3^{\frac{x-y}{2}} . 2^{y-x} = 3$, или $3^{\frac{x-y}{2}} = 3^1$, т. е. $x - y = 2$; слѣд., $x + y = 2^2 . 3 = 12$, а потому $x = 7$, $y = 5$.

370. Перемноживъ данныя ур-ія, получаемъ:

$\sqrt[x+1]{a^{10}} . a^{-3} = \sqrt[4]{a^{38}}$, откуда $\frac{10}{x+1} - 3 = \frac{19}{2}$; $x = -\frac{1}{5}$; $y = 1$.

371. Обозначивъ $x^x = y$, т. е. $x^{-x} = \frac{1}{y}$, получимъ:

$$y - \frac{1}{y} = 3\left(1 + \frac{1}{y}\right),$$

откуда $y = 4$, или $= -1$, слѣд., $x = 2$, или $x = -1$.

372. Имѣемъ:

$$a^{1+3+5+\ldots+(2x-1)} = n, \text{ или } a^{x^2} = n, \; x^2 lga = lgn;$$

$$x = \sqrt{\frac{lgn}{lga}}.$$

373*. Обозначая $log_2 log_2 x = y$, имѣемъ $log_2 y = 0$, т. е. $y = 1$, или $log_2 log_2 x = 1$; обозначаемъ $log_2 x = z$, тогда $log_2 z = 1$, т. е. $z = 2$, слѣд., $log_2 x = 2$, а потому $x = 2^2 = 4$.

---

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн." §§ 79—81.

374*. Поступая, какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ: $log_m y = 0$, т. е. $y = 1$, гдѣ $y = log_m log_m x$; итакъ, $log_m log_m x = 1$, т. е. $log_m x = m$, слѣд., $x = m^m$.

Имѣемъ:

375*. Пусть $log_e \, log_7 \, x = y$, тогда $log_\pi y = 0$, т. е. $y = 1$, или $log_e \, log_7 \, x = 1$; пусть $log_7 \, x = z$; тогда $log_e \, z = 1$, т. е. $z = e$ или $log_7 \, x = e$, откуда $x = 7^e$.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ №№ 376—393.

Всѣ эти уравненія рѣшаются при помощи потенцированія, какъ показано въ §§ 71—82. „Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.“.

377. Произведеніе двухъ множителей: x и $lg_3 x$ равно нулю; но x не можетъ $= 0$, ибо тогда было бы: $0 \, . \, lg 0 = 0 \, . \, \infty$ т. е. неопредѣленность: поэтому $lg_3 x = 0$; т. е. $x = 1$.

378. Послѣ потенцированія имѣемъ *): $(3x - 11)(x - - 27) = 1000$, откуда $x_1 = 37$ и $x_2 = -\frac{19}{3}$.

379. Послѣ потенцированія получаемъ *): $2x = (4x - 15)^2$, откуда $x = \frac{9}{2}$ или $\frac{25}{8}$.

380. Послѣ потенцированія получаемъ *): $x^2 + 3 = = 100(x + 1)$, откуда $x = 50 \pm \sqrt{2597}$.

381. Имѣемъ: $3log^2 x - 2log x - 8 = 0$, откуда 1) $log x = 2$, т. е. $x = 100$ или 2) $log x = -\frac{4}{3}$, т. е. $x = \sqrt[3]{0{,}0001}$.

382. Послѣ потенцированія имѣемъ *): $(7x - 9)(3x - - 4) = +10$, откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{13}{21}$.

---

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.“. §§ 79—81.

383. Послѣ потенцированія получаемъ *):

$$(\sqrt{x+21})\cdot(\sqrt{x-21})=20, \text{ откуда } x=+29.$$

384. Послѣ потенцированія получаемъ: $\frac{x^3-8}{x-2}=2$, или $x^2+2x+4=2$. Корни этого уравненія мнимые и слѣдов., уравненію удовлетворить не могутъ. (Мнимыя величины не имѣютъ логариѳмовъ).

385. Послѣ потенцированія получаемъ абсурдъ: $\frac{x-2}{x-2}=3$. Слѣдовательно, данное уравненіе не имѣетъ рѣшеній.

386. Послѣ потенцированія получаемъ *):

$$x^4+4x^3+8x^2-7x-6=(x^2+2x+1)^2,$$

что приводитъ къ квадр. уравненію $2x^2-11x-7=0$, корни котораго ирраціональны.

387. Послѣ потенцированія получаемъ: *) $(5-x)(3-x)=1$, откуда $x=4\pm\sqrt{2}$.

388. Послѣ потенцированія получаемъ*): $271+3^{\sqrt{3x}}=$ $=1000$, откуда $3^{\sqrt{3x}}=729=3^6$, т. е, $x=12$.

389. Послѣ потенцированія получаемъ *):

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+4x+5}}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\sqrt{10},$$

что приводитъ къ квадратному уравнен. $x^2-6x+5=0$; $x_1=5$ и $x_2=1$.

390. Послѣ потенцированія получаемъ: *)

$$(x-5)(x+3)^2=(x-5)^2, \text{ откуда } x_1=5,\ x_2=2,\ x_3=-7.$$

---

*) См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.» §§ 79—81.

391. Послѣ потенцированія получаемъ: *)

$$\frac{x^3+27}{x+3}=7,\ \text{или}\ x^2-3x+2=0;\ x_1=2,\ x_2=1.$$

392. Послѣ потенцированія получаемъ: *)

$$\frac{x^3-8}{x-2}=3,\ \text{или}\ x^2+2x+1=0;\ x=-1.$$

393. Послѣ потенцированія получаемъ: *)

$(x-5)(x^2-6x+3)=5\,(x-5)^2;\ x_1=5;\ x_2=4;\ x_3=7.$

394. Имѣемъ систему: $xy=\sqrt{1000}$ и $4x^2-9y^2=3590$, замѣняемъ $x^2=\frac{1000}{y^2}$, получаемъ биквадратное уравненіе $9y^4+3590y^2-4000=0$ и т. д.

395. Складывая и вычитая, находимъ: $\log x=\frac{7}{2}$, $\log y=\frac{1}{2}$, слѣд., $x=\sqrt{10^7}$; $y=\sqrt{10}$.

396. Пользуясь модулемъ для перехода одной системы логариѳмовъ на другой **), имѣемъ:

$$\log_x y=\log_y y\cdot\frac{1}{\log_y x}=\frac{1}{\log_y x}.$$

Подставляя это значеніе въ первое уравненіе и приведя къ общему знаменателю, получаемъ квадр. уравненіе:

$$\log^2{}_y x-\frac{8}{3}\log_y x-1=0,$$

откуда $\log_y x=3$ или $=-\frac{1}{3}$. Если $\log_y x=3$, то $x=y^3$, подставляя это значеніе во второе уравненіе находимъ: $y^4=16$, т. е. $y=2$, а $x=2^3=8$. Если же $\log_y x=-\frac{1}{3}$, то $x=y^{-\frac{1}{3}}$ и подстановка даетъ: $y^{\frac{2}{3}}=16$; $y=64$, а $x=64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$.

*) См. „Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн." §§ 79—82.

**) См. Алгебру Киселева § 279.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ №№ 397—409.

Всѣ уравненія, въ которыя логариѳмъ неизвѣстнаго входитъ въ показатель степени, рѣшаются логариѳмированіемъ обѣихъ частей, какъ показано въ §§ 83—85 «Искусс. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.».

397. Логариѳмируя, *) получаемъ: $log^2x + logx - 2 = 0$, откуда 1) $logx = -2$, $x = 0{,}01$ и 2) $logx = 1$, $x = 10$.

398. Логариѳмируя, *) получаемъ:

$log^2x = 2 + logx$, откуда 1) $logx = 2$, т. е. $x = 100$, или же $logx = -1$, т. е. $x = 0{,}1$,

399. Логариѳмируя, *) имѣемъ: $log^2x = -1$, что невозможно, ибо $logx$ есть величина непремѣнно дѣйствительная.

400. Логариѳмируя, *) имѣемъ: $log^2x = 4$, т. е. $logx = \pm 2$, откуда $x_1 = 100$, $x_2 = 0{,}01$.

401. Логариѳмируя, имѣемъ:

$log^2x = 1$; $logx = \pm 1$, т. е. $x = 10$ или $0{,}1$.

402. Логариѳмируя, получаемъ:

$log^2x - logx = 2$; $logx = 2$, или $= -1$, $x_1 = 100$; $x_2 = 0{,}1$.

403. Логариѳмируя, имѣемъ:

$log^2x + 2logx = 3$, откуда $logx = -3$, или $logx = 1$, слѣд., $x_1 = 0{,}001$, $x_2 = 10$.

404. Возведя въ квадратъ и затѣмъ логариѳмируя, имѣемъ:

$$log\left(\sqrt{x}\right) \cdot logx = 2, \text{ или } \frac{log^2x}{2} = 2,$$

откуда $logx = \pm 2$, слѣд., $x_1 = 100$, $x_2 = 0{,}01$.

*) См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» §§ 83—85.

405. Логариѳмируя имѣемъ: $log^2x - 2logx - 3 = 0$; слѣд., 1) $logx = 3$, $x = 1000$ или 2) $logx = -1$, $x = 0{,}1$.

406. Логариѳмируя, получаемъ: $2log^4x - \frac{3}{2}log^2x = \frac{1}{2}$; это биквадр. уравн. имѣетъ 2 вещественные корня и два мнимые («Дополн. къ Алг.» § 161). Вещественные корни даютъ 2 рѣшенія: $x_1 = 100$ и $x_2 = 0{,}01$.

407. Логариѳмируя обѣ части при основаніи 4, получаемъ: $log^2{}_4x = log_4 4 = 1$; слѣд. $log_4 x = \pm 1$, а потому $x = 4$ или $= \frac{1}{4}$.

408. Логариѳмируя обѣ части при основаніи 3, получаемъ: $log^2{}_3x = 1$, слѣд., $log_3 x = \pm 1$, а потому $x = 3$ или $= \frac{1}{3}$.

409. Логариѳмируя обѣ части при основаніи 5, получаемъ: $log^2{}_5x = log_5 5^4 = 4$; слѣд., $log_5 x = \pm 2$, а потому $x = 25$ или $= \frac{1}{25}$.

410. Первое уравненіе имѣетъ оба корня мнимые; второе—оба вещественные: большій корень положителенъ, меньшій — отрицателенъ; корни третьяго уравненія оба вещественны и отрицательны. (См. Алгебру Киселева § 197 сл. 2-е).

411. Такъ какъ въ квадр. уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$ произведеніе корней $= \frac{c}{a}$, то назвавъ другой корень буквой y, имѣемъ: $y \,.\, 1 = \frac{4}{\sqrt{17} - 4}$, откуда $y = 4(\sqrt{17} + 4) = \sqrt{136} + 16$; но квадр., корень изъ 136 съ точн., до 0,1 равенъ 11,6 по недостатку или 11,7 по избытку. Итакъ, $y = 27{,}6$ или $27{,}7$.

412. 4 съ недост. и 5 съ избытк. См. № 411.

413. 8 съ недост. и 9 съ избытк. См. № 411.

414. Такими значеніями будутъ корни квадр. уравненія

$$x^2 - x + (1 + i) = 0, \text{ откуда } x = \frac{1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4-4i}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+(2i)^2-4i}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1-2i)^2}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm (1-2i)}{2}.$$

Итакъ, $x_1 = 1 - i$ и $x_2 = i$.

415. Рѣшая квадр. уравненіе $x^2 + (4 - 3i)x + 5 + i = 0$,

Получаемъ искомыя значенія: $x = \dfrac{-4+3i \pm \sqrt{-13-28i}}{2}$.

416. Если другой корень нашего уравненія назовемъ буквою β, то сумма корней $\alpha + \beta = 7$, но $\alpha = -2$ слѣд., $\beta = 9$; k, какъ извѣстный членъ кв. ур-ія, $=$ произведенію корней $\alpha\beta$, т. е. $= -2 \,.\, 9 = -18$.

417. Если другой корень β, то $\alpha \,.\, \beta = \dfrac{18}{3} = 6$, но $\alpha = 1$, слѣдов., $\beta = 6$; $\alpha + \beta = 1 + 6 = 7 = \dfrac{k}{3}$, откуда $k = 21$.

418. Кромѣ даннаго условія $2x_1 - x_2 = 2$ корни должны удовлетворять еще условію $x_1 + x_2 = \dfrac{11}{2}$; изъ этихъ двухъ уравненій находимъ $x_1 = \dfrac{5}{2}$ и $x_2 = 3$. Но $x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{15}{2} = \dfrac{m}{2}$, откуда $m = 15$.

419. Кромѣ даннаго условія $6x_1 + x_2 = 0$, имѣемъ еще сумму корней: $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{3}$. Изъ этихъ двухъ уравненій находимъ $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $x_2 = 2$.

Но $x_1 x_2 = -\dfrac{2}{3} = \dfrac{m}{3}$; откуда $m = -2$.

420. Имѣемъ: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}=$ $=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$;

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\,.\,\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2};$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right]^2-\frac{2c^2}{a^2} \text{ и т. д.}$$

$$\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)=$$

$$=-\frac{b}{a}\left[(\alpha^4+\beta^4)-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\frac{c^2}{a^2}\right] \text{ и т. д.}$$

$$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3+\beta^3)^2-2\alpha^3\beta^3=\left[-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}\right]^2-\frac{2c^3}{a^3} \text{ и т. д.}$$

421. Имѣемъ для опредѣленія x_1 и x_2 два уравненія: $x_1+x_2=1$ и $x_1^2+x_2^2=1^4/_9$. Возвысивъ первое въ квадратъ и вычтя изъ второго, найдемъ $2x_1x_2=-\frac{4}{9}$;

Но $a=x_1x_2=-\frac{2}{9}$.

422. Имѣемъ два уравненія, связывающія x_1 и x_2: $x_1^2+x_2^2=\frac{65}{4}$ и $x_1+x_2=-\frac{2}{7}$. Возведя второе уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ результата первое уравненіе, получимъ $2x_1x_2=-\frac{3169}{196}$; но $x_1x_2=\frac{a}{7}$, откуда $a=-\frac{3169\,.\,7}{2\,.\,196}=$ $=-\frac{3169}{56}$.

423. Имѣемъ: $\alpha+\beta=2$ и $\alpha\beta=-1$. Но $\alpha^3+\beta^3=$ $=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3(-1)\,.\,2=14$. Далѣе, $\alpha-\beta=$ $=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

424. Извѣстно, что $\alpha+\beta=-p$ и $\alpha.\beta=q$. Слѣдоват., имѣемъ: $\alpha^3\beta-\beta^3\alpha=\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\beta.(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=q.(-p)$.

$\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=-pq\sqrt{p^2-4q}$. Также $\alpha^4\beta^7+\alpha^7\beta^4=\alpha^4\beta^4(\beta^3+\alpha^3)=$
$=q^4\left[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right]=q^4\left[-p^3+3qp\right].=pq^4\left[3q-p^2\right]$.

425. Если α и β суть корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$; $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}$.

426. $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2=[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2-$
$$-\alpha^2\beta^2=\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right]^2-\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^4}-\frac{4b^2c}{a^3}+\frac{3c^2}{a^2}.$$

427. Переписываемъ данное выраженіе такъ:
$$\frac{3(\alpha^2+\beta^2)+5\alpha\beta}{4\alpha\beta(\alpha+\beta)}=\frac{3[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+5\alpha\beta}{4\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$
но $\alpha+\beta=-\frac{17}{3}$; $\alpha\beta=-\frac{14}{3}$, слѣд., дан. выраж. $=\frac{909}{952}$.

428. Переписываемъ данное выраженіе такъ:
$$\frac{3(\alpha^2+\beta^2)+5\alpha\beta}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}=\frac{3[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+5\alpha\beta}{\alpha\beta(\alpha+\beta)};$$
но $\alpha+\beta=-3$; $\alpha\beta=\frac{9}{2}$; подставляя, получимъ $\left(-\frac{5}{3}\right)$.

429. Извѣстно, что $x_1+x_2=-\frac{4}{7}$ и $x_1x_2=\frac{5}{7}$. Данное выраженіе преобразуется такъ: $4(x_1^3+x_2^3)-6x_1x_2(x_1+x_2)=$
$$=4\left[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\right]-6x_1x_2(x_1+x_2)=$$
$$=4\cdot\left[\left(-\frac{4}{7}\right)^3-3\cdot\frac{5}{7}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)\right]-6\cdot\frac{5}{7}\cdot\left[-\frac{4}{7}\right]=\frac{2776}{343}.$$

430. 1) Данное выраженіе можно представить такъ:
$$(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2).$$
Если α и β суть корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то послѣднее выраженіе перепишется такъ:
$$\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right]^2-\frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{a}\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right].$$

По условію коэффиціенты a, b, c раціональны, слѣд., и данное выраженіе будетъ тоже раціонально.

2) Данное выраженіе можно представить такъ:

$$\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)+\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)\Big[\alpha\beta(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+\alpha^2\beta^2\Big]=$$

$$=-\frac{b}{a}\left[\frac{c}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)+\frac{c^2}{a^2}\right],$$

а это выраженіе очевидно раціонально, такъ какъ числа a, b, c раціональны по условію.

431. Доказывается совершенно такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ.

432. Пусть искомое уравненіе съ корнями $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$ будетъ $x^2+px+q=0$. Тогда $p=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$; $q=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot$ Но $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ и $\alpha\,.\,\beta=\frac{c}{a}$; слѣд., $p=\frac{b}{c}$ и $q=\frac{a}{c}\cdot$ Итакъ, искомое уравн. будетъ $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$, или $cx^2+bx+a=0$.

Разсуждая совершенно аналогично, найдемъ, что уравн. съ корнями $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\beta}\right)$ будетъ: $cx^2-bx+a=0$.

433. Пусть искомое уравненіе съ корнями (x_1+2x_2) и $(2x_1+x_2)$ будетъ $x^2+px+q=0$. Тогда $p=-(x_1+2x_2+$ $+2x_1+x_2)=-3(x_1+x_2)$, но $x_1+x_2=-b$, слѣд., $p=3b$. Также $q=(x_1+2x_2)(2x_1+x_2)=2x_1{}^2+5x_1x_2+2x_2{}^2=2(x_1{}^2+x_2{}^2)+$ $+5x_1x_2=2\Big[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\Big]+5x_1x_2=2\Big[b^2-2c\Big]+5c=2b^2+c$. Итакъ, искомое уравненіе будетъ: $x^2+3bx+2b^2+c=0$.

434. Пусть искомое ур-іе будетъ вида: $x^2+px+q=0$,

тогда $p=-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)=-\left[\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right]=$

$$=-\left[\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}\right]=\frac{2ac-b^2}{ac};\ \text{также}\ q=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1.$$

Искомое уравненіе слѣд., будетъ:

$$x^2+\frac{2ac-b^2}{ac}x+1=0,\ \text{или}\ acx^2+(2ac-b^2)x+ac=0.$$

435. Если искомое уравн. будетъ вида $x^2+px+q=0$, то $p=-\left[\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}\right]=-(\alpha+\beta)-\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{b}{a}+\frac{b}{c}$;

$$q=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+$$

$+\frac{b^2-2ac}{ac}=\frac{a^2+b^2+c^2-2ac}{ac}$; слѣд., искомое ур-іе будетъ:

$$acx^2+(bc+ab)x+(a-c)^2+b^2=0.$$

436. Если искомое ур-іе будетъ вида: $x^2+px+q=0$, то $p=-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right)=-\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{2ac-b^2}{c^2}$;

$q=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{a^2}{c^2}$, и слѣд., искомое уравненіе будетъ:

$$c^2x^2+(2ac-b^2)x+a^2=0.$$

437. Если искомое ур-іе будетъ вида: $x^2+px+q=0$, то $p=-\left[(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2\right]=-2\left[\alpha^2+\beta^2\right]=-2\Big[(\alpha+\beta)^2-$ $-2\alpha\beta\Big]=-2\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right]$, также $q=(\alpha^2-\beta^2)^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=$ $=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)^2-4\frac{c^2}{a^2}$; подставляя эти значенія вмѣсто p и q получимъ уравненіе:

$$a^4x^2-2a^2(b^2-2ac)x+b^2(b^2-4ac)=0.$$

438. 1) Если $\alpha=3{,}5$, то изъ уравненія $\alpha+\beta=5$, находимъ $\beta=1{,}5$, но $k=\alpha\,.\,\beta=3{,}5\times1{,}5=5{,}25$.

2) Дано $5\alpha-3\beta=3$; кромѣ того $\alpha+\beta=5$; рѣшая эти 2 уравненія, находимъ $\alpha=\frac{9}{4}$, $\beta=\frac{11}{4}$; но k, какъ извѣстный членъ, $=$ произведенію корней $\alpha\beta$, т. е. $=\frac{99}{16}$.

3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2k}{a}\right)$; слѣд., для опредѣленія k имѣемъ уравненіе $25-2k=17$, откуда $k=4$.

4) Дано: $\alpha^2-\beta^2$ должно равняться 15, или $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=15$, но $(\alpha+\beta)=-\frac{b}{a}=5$, слѣд., $\alpha-\beta=3$, откуда $\alpha=4$, $\beta=1$; произведеніе корней $\alpha\beta=k=4$.

439. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$; подставляя вмѣсто a и b ихъ значенія 2 и -5, а вмѣсто c подставляя k, получаемъ: $\frac{25}{4}-\frac{2k}{2}=2$, откуда $k=\frac{17}{4}$.

440. Изъ теоріи алгебры извѣстно, что уравненіе $ax^2+bx+c=0$ имѣетъ 2 равные корня, если $b^2=4ac$; замѣняя a, b и c ихъ значеніями изъ даннаго уравненія, получаемъ:

$$4(k+1)^2=4(k-1)(k-2),\ \text{откуда}\ k=\frac{1}{5}.$$

441. Пусть корни даннаго уравненія будутъ α и 2α. Тогда имѣемъ:

$$3\alpha=\frac{3k-1}{k^2-5k+3}\quad\text{и}\quad 2\alpha^2=\frac{2}{k^2-5k+3}.$$

Опредѣляемъ изъ перваго равенства α и подставляемъ во второе:

$$2\left[\frac{3k-1}{3(k^2-5k+3)}\right]^2=\frac{2}{k^2-5k+3},\ \text{или}\ (3k-1)^2=9(k^2-5k+3),$$

откуда $k=\frac{2}{3}$.

442. $a^2x^2+bx-c^2=0$, гдѣ a, b, c — вещественныя числа.

443. Только въ томъ случаѣ, если коэффиціенты его **мнимые**, такъ какъ квадратное уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ или *оба* дѣйствительные, или *оба* мнимые корни.

444. Умножаемъ уравненіе на $4a$, получаемъ $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$; разсматривая первые два члена, какъ начало полнаго квадрата $(2ax+b)^2$, прибавляемъ и вычитаемъ по b^2; получаемъ: $(2ax+b)^2 - b^2 + 4ac = 0$; $(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$; $2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$; откуда $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

445. Пусть квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$ имѣетъ три корня: α, β и γ. Принимая во вниманіе сперва только корни α и β, имѣемъ извѣстное тождество:

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если мы въ обѣ части этого тождества вмѣсто x подставимъ γ, то тождество конечно не нарушится, а потому:

$$a\gamma^2+b\gamma+c = a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Разсмотримъ выраженіе: $a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=0$. Произведеніе можетъ быть равно нулю, только тогда, когда какой-либо множитель равенъ 0; но $(\gamma-\alpha)$ и $(\gamma-\beta)$ нулю равняться не могутъ, ибо тогда вышло бы, что уравненіе имѣетъ не 3, а всего 2 корня, а потому непремѣнно $a=0$; но тогда изъ тождества (1) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, гдѣ $a=0$ видно что ax^2+bx+c всегда, т. е. тождественно, равно нулю, что и треб. доказать.

446. Приведя обѣ части къ общему знаменателю, получимъ квадратное уравненіе:

$$x^2-(p+q+a^2+b^2)x+pq+a^2q+b^2p=0.$$

Если рѣшать его, то подкоренную величину (b^2-4ac) можно представить въ видѣ $(p-q+a^2-b^2)^2+4a^2b^2$, т. е. въ видѣ суммы двухъ квадратовъ. Слѣд., b^2-4ac есть величина непремѣнно *положительная*, а потому корни уравненія вещественны.

447. Приведя обѣ части къ общему знаменателю, получимъ квадратное уравненіе:

$$cx^2-(ac+bc-m-n)x+abc-bm+an=0.$$

При рѣшенiи этого уравненiя подкоренная величина $(B^2 - 4AC)$ можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\Big[(a-b)c-(m-n)\Big]^2+4mn.$$

Такъ какъ по условiю m и n имѣютъ одинаковые знаки, то величина эта *положительна*, а потому корни уравненiя вещественны.

448. Рѣшая квадратное уравненiе, получающееся по приведенiи къ общему знаменателю, увидимъ, что подкоренная величина $(B^2 - 4AC)$ можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\frac{1}{2}\Big[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\Big],$$

т, е. непремѣнно *положительна*, а потому корни уравненiя вещественны.

449. Для доказательства предложеннаго вопроса достаточно показать, что по крайней мѣрѣ одна изъ разностей $(p^2{}_1 - 4q_1)$ и $(p^2{}_2 - 4q_2)$ положительна. Сложимъ эти разности:

$$(p^2{}_1-4q_1)+(p^2{}_2-4q_2)=p^2{}_1+p^2{}_2-4(q_1+q_2)=$$
$$=p^2{}_1+p^2{}_2-2p_1p_2=(p_1-p_2)^2.$$

Итакъ сумма этихъ двухъ разностей есть *положительная* величина $(p_1 - p_2)^2$, и слѣд. *по крайней мѣрѣ* одна изъ нихъ *положительна*, что и треб. доказать.

Общее замѣчанiе.

относящееся къ задачамъ №№ 450—455.

На эти задачи рекомендуется обратить особое вниманiе подготовляющимся въ Институтъ Инженеровъ Путей Сообщенiя, такъ какъ за послѣднiе годы онѣ предлагаются довольно часто. Первыя двѣ изъ нихъ (№№ 450 и 451) рѣшены очень подробно, чтобы учащiеся могли познакомиться съ общимъ методомъ ихъ рѣшенiя. Въ остальныхъ же задачахъ даны только отвѣты, такъ какъ рѣшенiе ихъ очень однообразно, и продѣлавъ внимательно 2 такiя задачи, учащiеся будутъ въ состоянiи свободно рѣшить остальныя самостоятельно.

450. Рѣшенiе подобныхъ задачъ основано на слѣдующихъ соображенiяхъ. Данное намъ уравненiе:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

гдѣ $A = a + 2$; $B = 2(a + 1)$, $C = -(a - 1)$,

будетъ имѣть дѣйствительные корни, если: $B^2 - 4AC \geqslant 0$, т. е., если

$$4(a + 1)^2 + 4(a + 2)(a - 1) \geqslant 0, \text{ или } 2a^2 + 3a - 1 \geqslant 0.$$

Для рѣшенiя послѣдняго неравенства надо, какъ извѣстно *) найти корни трехчлена $2a^2 + 3a - 1$ и взять для a значенiя, лежащiя *внѣ этихъ корней*. Корни трехчлена $2a^2 + 3a - 1$ будутъ:

$$a_1 = -\frac{3 + \sqrt{17}}{4} \text{ и } a_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}.$$

Слѣд., при слѣдующихъ значенiяхъ a: $a_1 < a < a_2$ корни даннаго уравненiя будутъ мнимые. При $a = a_1$ или $a = a_2$, оба корня даннаго уравненiя будутъ равные; наконецъ при $a < a_1$, или $a > a_2$, дѣйствительные и неравные.

Изслѣдуемъ теперь знаки дѣйствительныхъ корней при измѣненiи a отъ $-\infty$ до a_1 и отъ a_2 до $+\infty$; знаки корней уравненiя зависятъ отъ знаковъ коэффицiентовъ, которые измѣняются *при переходѣ черезъ нуль*, а потому опредѣлимъ тѣ значенiя a, которыя обращаютъ въ нуль какой либо изъ коэффицiентовъ. Эти значенiя будутъ:

$$a_3 = -2; \; a_4 = -1; \; a_5 = +1.$$

Составимъ теперь таблицу возрастающихъ значенiй a:

$$-\infty \ldots \underset{a_3}{-2} \ldots \underset{a_1}{-\frac{3+\sqrt{17}}{4}} \ldots \underset{a_4}{-1} \ldots \underset{a_2}{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}} \ldots \underset{a_5}{+1} \ldots +\infty$$

I. При $a = -\infty$ данное намъ уравненiе, если a взять за скобки, принимаетъ видъ:

$$a\left[\left(1 + \frac{2}{a}\right)x^2 + 2\left(1 + \frac{1}{a}\right)x - \left(1 - \frac{1}{a}\right)\right] = 0;$$

сокративъ уравненiе на a и принявъ потомъ $a = -\infty$, получаемъ:

$$x^2 + 2x - 1 = 0, \text{ откуда } x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

*) См. Алгебру Киселева § 246*а*.

II. По мѣрѣ того, какъ a увеличивается отъ $(-\infty)$ до (-2), коэффиціентъ A при x^2 безконечно приближается къ нулю, слѣдовательно, какъ извѣстно изъ теоріи *), одинъ изъ корней уравненія:

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

стремится къ ∞, а другой къ предѣлу:

$$\left(-\frac{C}{B}\right), \text{ т. е. къ } \left[-\frac{-(a-1)}{2(a+1)}\right]=\frac{3}{2}.$$

Пока же a остается меньше (-2), то произведеніе корней, равное $\frac{C}{A}$, т. е. $\left[-\frac{a-1}{a+2}\right]$ имѣетъ отрицательную величину, а потому знаки корней противоположны, при чемъ сумма ихъ:

$$=-\frac{B}{A}=-\frac{2(a+1)}{a+2},$$

отрицательна, т. е. отрицательный корень имѣетъ большую абсолютную величину.

III. Когда a увеличивается

$$\text{отъ } (-2) \text{ до } \left(-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right).$$

Въ этомъ случаѣ: $A=a+2>0$;

произведеніе корней: $=\frac{C}{A}=-\frac{a-1}{a+2}$, положительно (ибо числитель <0, знаменатель >0, а впереди знакъ минусъ), а слѣдовательно, знаки корней одинаковы. Сумма корней: $=-\frac{B}{A}=-\frac{2(a+1)}{a+2}$, положительна, слѣд., оба корня дѣйствительные, неравные и положительные; если же a въ своемъ увеличеніи дойдетъ до значенія $\left(-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$, то въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли раньше $B^2-4AC=0$, а слѣдовательно оба корня равные и дѣйствительные; величина ихъ будетъ: $\left(-\frac{a+1}{a+2}\right)=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

---

*) См. „Дополн. къ Алгебрѣ", § 138, 139.

IV. Когда a заключено въ предѣлахъ:

$$-\frac{3+\sqrt{17}}{4}<a<\frac{-3+\sqrt{17}}{4},$$

то, какъ мы видѣли раньше, уравненіе имѣетъ мнимые и сопряженные корни, ибо $B^2-4AC<0$;

когда же a сдѣлается равнымъ $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$,

то опять оба корня будутъ равные, ибо въ этомъ случаѣ $B^2-4AC=0$, и величина ихъ будетъ: $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

V. При измѣненіи a отъ $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ до $+1$,

$$\text{если } \frac{-3+\sqrt{17}}{4}<a<+1,$$

$$\text{то: } a-1<0;\ a+1>0;\ a+2>0,$$

откуда ясно, что произведеніе корней положительно, сумма же ихъ отрицательна, а потому ур-іе имѣетъ корни дѣйствительные, неравные и оба отрицательные. Когда a достигаетъ значенія $+1$, то коэффиціентъ $C=-(a-1)$ обращается въ нуль, слѣдов., произведеніе корней $=0$, а потому одинъ корень $=0$, а другой удовлетворяетъ ур-ію:

$$(1+2)x^2+2(1+1)x=0, \text{ откуда } x=-\frac{4}{3}.$$

VI. При $a>1$, очевидно, что коэффиціенты A и B положительны, C отрицательно, а потому ур-іе имѣетъ корни дѣйствительные, неравные, съ противоположными знаками, и отрицательный корень имѣетъ большую абсолютную величину, (ибо $\frac{B}{A}$ положительно).

VII. Наконецъ, при $a=+\infty$ уравненіе по раздѣленіи на a принимаетъ тотъ же видъ, что и въ I случаѣ, а потому и корни его будутъ тѣ же: $-1\pm\sqrt{2}$.

451. Подобно тому, какъ въ предыдущей задачѣ, прежде всего найдемъ, при какихъ значеніяхъ a корни даннаго уравненія будутъ дѣйствительны. Для этого $B^2 - 4AC \geqslant 0$, гдѣ: $A = 1$; $B = 2a + 3$; $C = a^2 + 4a + 3$.

Изъ неравенства: $(2a - 3)^2 - 4(a^2 + 4a + 3) \geqslant 0$,

$$\text{находимъ, что: } a \leqslant -\frac{3}{4},$$

т. е. при всѣхъ значеніяхъ a меньшихъ чѣмъ $\left(-\frac{3}{4}\right)$ корни будутъ дѣйствительные неравные, при $a = -\frac{3}{4}$ корни будутъ дѣйствительные и равные, а при всякомъ значеніи $a >$ чѣмъ $\left(-\frac{3}{4}\right)$ корни мнимые. Что касается до знаковъ корней, то они зависятъ отъ знаковъ коэффиціентовъ, а послѣдніе мѣняются при переходѣ черезъ нуль, что имѣетъ мѣсто, если

$$2a + 3 = 0, \text{ или если } a^2 + 4a + 3 = 0,$$

т. е. при трехъ значеніяхъ a: $a_1 = -\frac{3}{2}$; $a_2 = -3$; $a_3 = -1$.

Составимъ таблицу постепенно возрастающихъ значеній a:

$$\underset{}{-\infty} \ldots \underset{a_2}{-3} \ldots \underset{a_1}{-\frac{3}{2}} \ldots \underset{a_3}{-1} \ldots \underset{a_0}{-\frac{3}{4}} \ldots +\infty$$

I. При $a = -\infty$ данное ур-іе:

$$\frac{x^2}{a} + \left(2 + \frac{3}{a}\right)x + a + 4 + \frac{3}{a} = 0,$$

принимаетъ видъ:

$$2x + a + 4 = 0, \text{ откуда } x = \infty.$$

II. При увеличеніи a отъ $(-\infty)$ до (-3) коэффиціенты B и C даннаго ур-ія остаются: первый отрицательнымъ, а второй положительнымъ, а потому знаки корней одинаковы и оба они положительны. Когда a дѣлается равнымъ (-3), коэффиціентъ C обращается въ нуль, а потому:

$$x^2 + (2a + 3)x = 0, \text{ или } x^2 - 3x = 0,$$

$$\text{откуда: } x = 0, \text{ или } x = 3.$$

III. При увеличенiи a отъ (-3) до $\left(-\frac{3}{2}\right)$ коэффицiентъ C становится отрицательнымъ, а B тоже остается отрицательнымъ, слѣд., оба корня имѣютъ разные знаки, и положительный корень имѣетъ большую абсолютную величину. При $a=-\frac{3}{2}$, B обращается въ нуль, а ур-iе принимаетъ видъ: $x^2+\frac{9}{4}-6+3=0$,

$$\text{откуда: } x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

IV. При увеличенiи a отъ $\left(-\frac{3}{2}\right)$ до (-1) коэффицiентъ C отрицателенъ, а B положителенъ, слѣд., знаки корней различны и отрицательный корень имѣетъ большую абсолютную величину; при $a=-1$, коэффицiентъ C обращается въ нуль и ур-iе принимаетъ видъ:

$$x^2+(-2+3)x=0, \text{ откуда } x=0, \text{ или } x=-1.$$

V. При увеличенiи a отъ (-1) до $\left(-\frac{3}{4}\right)$ оба коэффицiента B и C положительны, а потому оба корня отрицательны; при $a=-\frac{3}{4}$ оба корня дѣлаются равными между собой и величина ихъ будетъ $x=-\frac{3}{4}$.

VI. Наконецъ, при дальнѣйшемъ увеличенiи x

$$\text{отъ } x=-\frac{3}{4} \text{ до } x=+\infty$$

оба корня имѣютъ мнимую величину.

452. Рѣшается совершенно такъ же, какъ №№ 450 и 451. Условiе вещественности корней: $-20\lambda^2+16\lambda-3\geqslant 0$, или $-20\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{10}\right)\geqslant 0$, т. е. λ должно находиться между корнями. Коэффицiенты проходятъ черезъ 0 при значеніяхъ: $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Составляемъ таблицу возрастающихъ значеній λ:

$$-\infty \cdots\cdots \frac{3}{10} \cdots\cdots \frac{1}{3} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdots\cdots +\infty.$$

1. При измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $\frac{3}{10}$ корни мнимые.

2. При $\lambda = \frac{3}{10}$ оба корня равны между собой $= 2$.

3. При значеніяхъ λ между $\frac{3}{10}$ и $\frac{1}{3}$ оба корня вещественны и положительны.

4. При безконечномъ приближеніи λ къ $\frac{1}{3}$ одинъ корень стремится *) къ безконечности, а другой къ предѣлу, равному 1.

5. При значеніяхъ λ между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ корни вещественны и имѣютъ различные знаки, причемъ численно большій корень отрицателенъ.

6. При $\lambda = \frac{1}{2}$ оба корни равные и $= 0$.

7. При измѣненіи λ отъ $\frac{1}{2}$ до $+\infty$ оба корня мнимые.

453. Разсуждая совершенно такъ же, какъ при рѣшеніи №№ 450 и 451, заключаемъ, что условіе вещественности корней: $(2\lambda+3)^2-4(\lambda^2+3\lambda+4)\geqslant 0$. Открывъ скобки получаемъ абсурдъ: $-7\geqslant 0$. Изъ этого заключаемъ, что при какихъ бы то ни было значеніяхъ λ корни даннаго уравненія всегда *мнимые* и потому никакому дальнѣйшему изслѣдованію не подлежатъ.

454. Рѣшается совершенно такъ же, какъ №№ 450 и 451. Условіе вещественности корней выражается неравенствомъ: $(\lambda-1)^2-4(\lambda-2)\geqslant 0$ или $(\lambda-3)^2\geqslant 0$. Отсюда видно *) что корни даннаго уравненія остаются *вещественными* при всѣхъ значеніяхъ λ. Коэффиціенты мѣняютъ знаки при $\lambda = 1$ и при $\lambda = 2$. Располагаемъ значенія λ въ возрастающемъ порядкѣ:

$$-\infty \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots +\infty.$$

1. При $\lambda = -\infty$, получаемъ $x = 1$.

2. При значеніяхъ λ между $-\infty$ и 1 корни различныхъ знаковъ, причемъ числ., большій корень отрицателенъ.

3. При $\lambda = 1$, $x = \pm 1$.

4. При значеніяхъ λ между 1 и 2, знаки корней различны, причемъ числ., большій корень положителенъ.

5. При $\lambda = 2$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

6. При значеніяхъ λ между 2 и 3 оба корня положительны.

7. При $\lambda = 3$ оба корня равные $= 1$.

8. При $\lambda > 3$ оба корня положительны.

455. Рѣшается совершенно такъ же, какъ №№ 450 и 451. Условіе вещественности корней выражается неравенствомъ: $4(\lambda - 3)^2 - 4(\lambda^2 - 1) \geqslant 0$, откуда $\lambda \leqslant \frac{5}{3}$. Коэффиціенты мѣняютъ знаки при $\lambda = 3$, при $\lambda = 1$ и при $\lambda = -1$. Располагаемъ значенія λ въ возрастающемъ порядкѣ.

$$-\infty \ldots -1 \ldots 1 \ldots \frac{5}{3} \ldots 3 \ldots +\infty.$$

1. При $\lambda = -\infty$, $x = -\infty$.

2. При $\lambda < -1$ оба корня отрицательны.

3. При $\lambda = -1$, $x_1 = 0$ и $x_2 = -8$.

4. При $-1 < \lambda < 1$, знаки корней различны, причемъ численно большій корень отрицателенъ.

5. При $\lambda = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -4$.

---

*) См. Алгебру Киселева § 246, *а*.

6. $1 < \lambda < \frac{5}{3}$ оба корня отрицательны.

7. При $\lambda = \frac{5}{3}$ оба корня равные и $= -{}^4/_3$.

8. При $\lambda > \frac{5}{8}$ оба корня мнимые.

456. Имѣемъ: $u_1 + 2d = 6$; $u_1 + 6d = 15$; вычитая находимъ $d = \frac{9}{4}$, подставляя, получаемъ $u_1 = \frac{3}{2}$, а потому искомая прогрессія будтъ: $\div \frac{3}{2} . \frac{15}{4} . 6 \ldots\ldots$; $u_{10} = u_1 + 9d = \frac{87}{4}$, а $S_{10} = (u_1 + u_{10})5 = 116\frac{1}{4}$.

457. Имѣемъ:

$u + (u + 2d) + (u + 4d) = 21$; $(u + d) + (u + 3d) + (u + 5d) = 42$; откуда $d = 7$, $u_1 = -7$; искомая прогрессія $\div -7 . 0 . 7 \ldots$

458. Такъ какъ намъ извѣстны: суммы третьяго и шестого членовъ прогрессіи и ихъ произведеніе, то эти члены найдутся, какъ корни квадр. ур-ія: $x^2 - 29x + 190 = 0$, откуда $u_3 = 10$, $u_6 = 19$ (или наоборотъ); слѣд., $u_1 + 2d = 10$, $u_1 + 5d = 19$, откуда $d = 3$, $u_1 = 4$ и искомая прогрессія будетъ $\div 4 . 7 . 10 \ldots$ Намъ надо найти S_8; но $u_8 = u_1 + 7d = 4 + 21 = 25$; слѣд., $S_8 = (u_1 + u_8)4 = 116$.

459. Такъ какъ $u_{11} + u_4 = u_5 + u_{10} = 30$, то u_4 и u_{11} найдутся, какъ корни квадр. уравненія $z^2 - 30z + 189 = 0$, откуда $z_1 = 9$ и $z_2 = 21$.

Такъ какъ прогрессія по условію возрастающая, то имѣемъ одну лишь систему рѣшеній: $u_4 = 9$ и $u_{11} = 21$; откуда $u + 3d = 9$ и $u + 10d = 21$;

слѣд., $d = \frac{12}{7}$ и $u_1 = \frac{27}{7}$; $u_5 = u_1 + 4d = \frac{75}{7}$; итакъ, искомая сумма $S_5 = \left(\frac{27}{7} + \frac{75}{7}\right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{255}{7}$.

460. Такъ какъ $u_2+u_4=u_1+u_5=14$, то u_2 и u_4 найдутся какъ корни квадр. уравненія $z^2-14z+40=0$, откуда $z_1=4$ и $z_2=10$. Такъ какъ прогрессія по условію возрастающая, то имѣемъ всего одну систему рѣшеній: $u_2=4$, и $u_4=10$. Изъ уравненій $u_1+d=4$ и $u_1+3d=10$ находимъ $d=3$, $u_1=1$ и искомая прогрессія будетъ: $\div 1, 4, 7, 10 \ldots$.

461. Такъ какъ $u_1+u_5=2u_3=18$, то u_1 и u_5 найдутся изъ уравненія $z^2-18z+17=0$, откуда $u_1=1$, $u_5=17$; если $u_1+4d=17$, то $d=4$, и искомая прогрессія $\div 1,\ 5,\ 9 \ldots$.

462. См. № 460.

463. Имѣемъ: $2(u_2+u_5)=34$, т. е. $u_2+u_5=17$. Изъ квадр. уравненія $z^2-17z+52=0$ находимъ $u_2=4$ и $u_5=13$ или наоборотъ.

Если $u+d=4$ и $u+4d=13$, то $d=3$, $u=1$ и искомая прогрессія $\div 1,\ 4,\ 7 \ldots\ldots$; другая система рѣшеній даетъ $\div 16,\ 13,\ 10 \ldots$.

464. Изъ перваго равенства получаемъ: $5u_1+10d=25$, или $u+2d=5$, т. е. $u_3=5$. Теперь переписываемъ второе равенство такъ:

$u_1\ u_2\ u_4\ u_5=364$, или $(5-2d)(5-d)(5+d)(5+2d)=364$, что приводитъ къ биквадратному уравненію $4d^4-125d^2+$ $+261=0$, изъ котораго $d_1=\frac{3}{2}$, $d_2=-\frac{3}{2}$, $d_3=+\sqrt{29}$ и $d_4=-\sqrt{29}$. Зная d, находимъ первый членъ изъ равенства $u_1+2d=5$ и т. д.

465. Имѣемъ: $u(u+4d)=13$ и $(u+d)(u+3d)=40$. Открывъ скобки и вычтя, найдемъ $d=\pm 3$, послѣ чего изъ уравненія $u^2\pm 12u=13$ находимъ соотвѣтствующія значенія u_1. Искомыя прогрессіи будутъ:

1) $\div 13,\ 10,\ 7 \ldots$ 2) $\div -1,\ -4,\ -7 \ldots$

3) $\div -13,\ -10,\ -7, \ldots$ 4) $\div 1,\ 4,\ 7 \ldots$

466. Такъ какъ $u_1+u_4=u_2+u_3=8$, то имѣемъ два уравненія: $u_1^2+u_4^2=50$ и $u_1+u_4=8$. Рѣшая ихъ *) найд-

*) См. „*Дополн. къ Алгебрѣ*“ § 194.

демъ 2 системы 1) $u_1 = 1$, $u_4 = 7$ и 2) $u_1 = 7$, $u_4 = 1$. Искомыя прогрессіи будутъ: 1) $\div 1, 3, 5 \ldots$ или 2) $\div 7, 5, 3, \ldots$

467. Изъ перваго условія получаемъ $3u_1 + 3d = 27$, или $u + d = u_2 = 9$. Слѣд., второе условіе даетъ: $u_1^2 + u_3^2 = 275 - 81 = 194$. Имѣя уравненія $u_1 + u_3 = 18$ и $u_1^2 + u_3^2 = 194$, найдемъ *) двѣ системы рѣшеній: 1) $u_1 = 5$, $u_3 = 13$ и 2) $u_1 = 13$, $u_3 = 5$. Соотвѣт. прогрессіи будутъ: 1) $\div 5, 9, 13 \ldots$ и 2) $\div 13, 9, 5 \ldots$

468. Изъ равенствъ $u + 6d = 15$ и $u + 14d = 7$ находимъ $d = -1$ и $u = 21$. Если назовемъ искомое число членовъ буквой x, то $u_x = 21 - (x-1) = 22 - x$; $S_x = (21 + 22 - x)\frac{x}{2} = 231$, откуда $x = 21$ или 22. $\left[\text{Нетрудно убѣдиться что } u_{22} = 0, \text{ такъ что } S_{21} = S_{22}\right]$.

469. Изъ равенствъ $2(u + 2d) + 3(u + 4d) = 27$ и $3(u + 6d) - 2(u + 3d) = 23$ найдемъ $d = 2$ и $u = -1$. Назвавъ x искомое число членовъ, имѣемъ: $u_x = -1 + 2(x-1) = 2x - 3$; $2S_x = (2x - 4)x = 96$, откуда $x = 8$. (Другое рѣшеніе $x = -6$ не годится, какъ отрицательное).

470. Изъ равенствъ $(u + u + 3d)2 = 9$ и $(u + u + 5d)3 = 22\frac{1}{2}$ найдемъ $d = \frac{3}{2}$ и $u_1 = 0$. Искомая прогрессія $\div 0, \frac{3}{2}, 3 \ldots$

471. Изъ равенствъ $u_3 = S_3 - S_2 = 3$ и $u + u + d = 4$ найдемъ $d = \frac{2}{3}$, $u = \frac{5}{3}$; слѣдов., $u_6 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot 5$; $S_6 = \left(\frac{5}{3} + 5\right) \cdot 3 = 20$.

472. Имѣемъ: $u_1 + u_2 = 4$; $u_3 + u_4 = S_4 - S_2 = 12$. Изъ равенствъ $2u + d = 4$ и $2u + 5d = 12$ получаемъ $u = 1$ и $d = 2$. Слѣд., $u_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$; $2S_n = (1 + 2n - 1)n = 242$, откуда $n = 11$.

---

* См. „*Дополн. къ Алгебрѣ*“ § 194.

473. Имѣемъ: $u_1+u_2+u_3=18$; $u_4=S_4-S_3=20$. Изъ равенствъ $3u+3d=18$ и $u+3d=20$ находимъ $d=7$ и $u_1=-1$. Слѣд., $u_n=-1+7(n-1)=7n-8$. Для опредѣленія n имѣемъ уравненіе $S_n=\left[-1+7n-8\right]\frac{n}{2}=305$, откуда $n=10$.

474. Имѣемъ: $u_1+u_2+u_3=15$ и $u_4+u_5=S_5-S_3=20$. Изъ равенствъ $u+d=5$ и $2u+7d=20$ опредѣляемъ $d=2$ и $u_1=3$. Слѣд., $u_n=3+2(n-1)=2n+1$. Для опредѣленія n имѣемъ уравненіе:

$$S_n=\left[3+2n+1\right]\frac{n}{2}=48, \text{ изъ котораго } n=6.$$

475. Имѣемъ:

$$2S_n=[2+(n-1)d]n=16$$
$$S_{2n}=[2+(2n-1)d]n=40, \text{ откуда } n^2d=24.$$

Подставляя вмѣсто d въ первое уравненіе получимъ:

$$n^2+4n-12=0, \text{ откуда } n=2.$$

476. Рѣшается такъ же, какъ предыдущая. Отвѣтъ: $n=4$.

477. Складывая первое и второе ур-ія находимъ:

$$2S_n-(u_1+u_n)=84 \;.\;.\;.\;.\; (a).$$

Третье ур-іе можно переписать такъ: $S_n-2(u_1+u_n)=$ $=21 \;.\;.\;. (b)$.

Изъ ур-ій (a) и (b) находимъ: $u_1+u_n=14$; $S_n=49$; но $S_n=(u_1+u_n)\frac{n}{2}$, или $49=14\,.\,\frac{n}{2}$, откуда $n=7$. Далѣе имѣемъ: $S_n-u_1=49-u_1=48$, откуда $u_1=1$; слѣд., $u_7=14-u_1=13$. Искомая прогрессія будетъ:

$$\div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\;.\;.\;.\;.$$

478. Переписавъ данныя ур-ія такъ:

$$S_n-(u_1+u_n)=9;\; S_n-2(u_1+u_n)=3,$$

находимъ: $u_1+u_n=6$; $S_n=15$; но $S_n=(u_1+u_n)\frac{n}{2}$, слѣд., $16=6\,.\,\frac{n}{2}$, откуда $n=5$.

479. Рѣшается, какъ предыдущая; $S_n = 35$; $n = 5$.

480. Рѣшается, какъ № 478; $S_n = 15$; $n = 5$.

481. Рѣшается, какъ № 478; $S_n = 55$; $n = 5$.

482. Такъ какъ $S_{2n} = (u_1 + u_{2n})n = 17n = 34$ и слѣдов., $n = 2$, то $u_1 = 1$ и $d = 5$, откуда $S_{30} = (2 + 29 \,.\, 5)15 = 2205$.

483. Первое изъ данныхъ уравненій можетъ быть переписано такъ:

$$(u_1 + u_{2n+1})\left(\frac{n+1}{2}\right) = 25, \text{ или } 10 \,.\, \frac{n+1}{2} = 25, \text{ откуда } n = 4.$$

484. Первое изъ данныхъ уравненій можетъ быть переписано такъ:

$$(u_1 + u_{2n-1}) \,.\, n = 24, \text{ или } 8 \,.\, n = 24, \text{ откуда } n = 3.$$

485. Первое изъ данныхъ уравненій можетъ быть переписано такъ:

$$(u_2 + u_{2n+6})\frac{n+3}{2} = 30, \text{ или } 6(n+3) = 30, \text{ откуда } n = 2.$$

486. Вычитая почленно первое уравненіе изъ второго, получаемъ:

$(u_2 - u_1) + (u_5 - u_4) + (u_8 - u_7) + (u_{11} - u_{10}) + (u_{14} - u_{13}) = 10$, или $5d = 10$, откуда $d = 2$. Послѣ этого переписываемъ первое уравненіе такъ:

$$u_1 + u_1 + 3d + u_1 + 6d + u_1 + 9d + u_1 + 12d = 55, \text{ или}$$
$$5u_1 + 30d = 55, \text{ откуда } 5u_1 + 60 = 55; \ u_1 = -1; \text{ далѣе,}$$
$$u_5 = -1 + 2 \,.\, 4 = 7; \ S_5 = 15.$$

487. Имѣемъ: $S_3 - u_1 = 35$; $S_3 - u_2 = 25$; вычитая одно изъ другого, находимъ $u_2 - u_1 = 10$, т. е. $d = 10$. Далѣе:

$$S_3 - u_1 = [u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d)] - u_1 = 35,$$

т. е. $2u_1 + 3d = 35$, но $d = 10$, слѣд., $u_1 = 2^1/_2$. Искомая прогрессія $\div 2^1/_2 \,.\, 12^1/_2 \,.\; .\; .\; .$

488. Имѣемъ 2 уравненія:

$$u_p = \frac{1}{q} = u_1 + d(p-1) \text{ и } u_q = \frac{1}{p} = u_1 + d(q-1);$$

вычитая, находимъ: $d = \frac{1}{pq}$, подставляя это значеніе въ любое уравненіе, находимъ $u_1 = \frac{1}{pq}$. Далѣе $S_{p \cdot q} = \left(u_1 + u_{p \cdot q}\right)\frac{pq}{2}$; но $u_{pq} = u_1 + d(pq-1) = 1$, слѣд., $S_{pq} = \frac{pq+1}{2}$.

489. Пусть S означаетъ сумму первыхъ десяти членовъ, S_1 — сумму слѣдующихъ десяти членовъ. Тогда имѣемъ: $S = (u_1 + u_{10})5 = (2u_1 + 9d)5 = (4 + 9d)5$; также $S_1 = (u_{11} + u_{20})5 = (2u_1 + 29d) = (4 + 29d)$. Согласно условія задачи имѣемъ уравненія: $(4+9d)5 = \frac{1}{3}(4+29d)5$, откуда $d = 4$. Искомая прогрессія $\div 2, 6, 10 \ldots.$

490. Рѣшается совершенно такъ же, какъ предыдущая; $d = -10$.

491. Рѣшается такъ же, какъ № 489; $u = 2$.

492. Рѣшая такъ же, какъ № 489, найдемъ $d = 2$; слѣд., $u_8 = 1 + 2 \,.\, 7 = 15$, а $S_8 = (1+15)4 = 64$.

493. Лѣвая часть уравненія представляетъ ариѳм. прогрессію. Опредѣлимъ число ея членовъ. Если оно равно n, то послѣдній членъ $u_n = u_1 + d(n-1) = x$; подставляя извѣстныя намъ значенія $u_1 = 1$, $d = 3$, находимъ: $1 + 3(n-1) = x$, откуда $n = \frac{x+2}{3}$. Сумма членовъ, находящихся въ лѣвой части уравненія, равна:

$$\frac{1+x}{2} \cdot n = 117; \text{ или } \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+2}{3} = 117, \text{ откуда } x = 28.$$

494. Опредѣлимъ прежде всего число членовъ прогрессіи, находящейся въ лѣвой части. Пусть это число равно n. Тогда имѣемъ: $u_n = u_1 + d(n-1)$; но $u_n = x + 28$;

$u_1 = x + 1$; $d = 3$. Подставляя, получаемъ: $x + 28 = x + 1 + 3(n - 1)$, откуда $n = 10$. Слѣд., сумма членовъ, стоящихъ въ лѣвой части, равна $\left[(x+1)+(x+28)\right]5 = 155$, откуда $x = 1$.

495. Общій видъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 3 даютъ въ остаткѣ единицу $3k + 1$, гдѣ k цѣлое и положительное число; дѣлая $k = 0$ получимъ первое изъ нашихъ чиселъ: $u_1 = 1$; дѣлая $k = 99$, получимъ сотое число: $u_{100} = 298$, искомое $S_{100} = (u_1 + u_{100})\ 50 = 299\ .\ 50 = 14950$.

496. Общій видъ чиселъ, дающихъ при дѣленіи на 5 въ остаткѣ единицу $5k + 1$; дѣлая k равнымъ 0, 1, 2, 3, . . . получимъ эти числа: 1, 6, 11, 16, 21 . . . . По условію задачи намъ надо брать только *нечетныя* числа изъ этого ряда, т. е. ÷1, 11, 21 . . . . Находимъ $u_{30} = u_1 + 29d = 291$; $S_{30} = (1 + 291)15 = 4380$.

497. Числа, кратныя трехъ, суть: ÷3, 6, 9 . . . . . 99. Чтобы найти сумму $3 + 6 + 9 + \ldots\ldots + 99$, вычислимъ сперва, какой членъ по порядку будетъ 99. Имѣемъ $u_n = u_1 + d(n-1)$, или $99 = 3 + 3(n - 1) = 3n$, откуда $n = 33$. Слѣд., $S_{33} = (3 + 99)\frac{33}{2} = 1683$. Квадратъ этой суммы $= 1683^2 = 2832489$.

498. Такъ какъ по условію формула $S_n = n^2$ дѣйствительна для *всякаго* числа членовъ n, то дѣлая $n = 1$, получаемъ: $S_1 = 1$; но S_1 — сумма одного члена = есть первый членъ; слѣд.: $u_1 = 1$. Далѣе, дѣлая $n = 2$, имѣемъ: $S_2 = 4$; слѣд. $u_1 + u_2 = 4$, но u_1, мы уже знаемъ $= 1$, слѣд., $u_2 = 3$, а потому искомая прогрессія будетъ ÷1 . 3 . 5 . . . .

499. Рѣшеніе этой задачи основывается (такъ же какъ и въ предыдущемъ №), на томъ, что формула $u_m = 2m - 1$ по условію, остается вѣрной для всякаго числа членовъ m. Намъ нужно найти S_n; но $S_n = \left(u_1 + u_n\right)\frac{n}{2}$; слѣд., надо знать u_1 и u_n; для этого въ формулѣ: $u_m = 2m - 1$, дѣлаемъ сперва $m=1$, а потомъ $m=n$. Получаемъ: $u_1=2\,.\,1-1=1$; $u_n=2n-1$. ; слѣдов.,

$$S_n=\left[1+(2n-1)\right]\frac{n}{2}=n^2.$$

500. Чтобы найти S_8 надо знать первый и восьмой членъ прогрессіи, которые найдутся, такъ же какъ въ предыдущихъ задачахъ [№№ 498 и 499] слѣдующимъ образомъ: дѣлаемъ $n=1$, находимъ: $u_1=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3}$; дѣлая $n=8$, находимъ $u_8=\frac{3\,.\,8-1}{6}=\frac{23}{6}\cdot$ Искомое $S_8=\left(\frac{1}{3}+\frac{23}{6}\right)4=\frac{50}{3}\cdot$

501. Если $S_n=3n^2+4n$, то (см. №№ 498, 499, 500) $S_1=u_1=3\,.\,1^2+4\,.\,1=7$; $S_2=3\,.\,2^2+4\,.\,2=20$; $S_2-S_1=$ $=u_2=13$; слѣд., искомая прогрессія будетъ $\div 7\,.\,13\,.\,19\,\ldots$ Дѣлая $n=10$, получаемъ: $S_{10}=3\,.\,10^2+4\,.\,10=340$; дѣлая же $n=9$, находимъ $S_9=3\,.\,9^2+4\,.\,9=279$. Очевидно, что разность между суммою десяти членовъ и суммою девяти членовъ, равная $(340-279)$, т. е. 61, представляетъ собой искомый десятый членъ.

502. (См. предыдущую). Дѣлая $n=m$, получимъ: $S_m=$ $=pm+qm^2$; дѣлая же $n=(m-1)$, получимъ $S_{m-1}=p(m-$ $-1)+q(m-1)^2$; очевидно, что разность S_m-S_{m-1}, равная $2qm+p-q$, какъ разъ представляетъ собой искомый m-ый членъ (u_m).

503. Дано: $S_5=\left(\frac{u_1+u_5}{2}\right)\cdot 5=35$, или $u_1+u_5=14$, или $u_1+u_1+4d=14$. Слѣдовательно, имѣемъ неопредѣленное уравненіе $u_1+2d=7$, которое по условію надо рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ. Имѣемъ: $u_1=7-2d$; для того, чтобы u_1 было положительно d должно быть не больше 3. Слѣдовательно, возможны 3 прогрессіи:

1) $d=1$, $u_1=5$; $\div 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ \ldots$

2) $d=2$, $u_1=3$; $\div 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\ \ldots$

3) $d=3$, $u_1=1$; $\div 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\ \ldots$

504. Поступая совершенно также, какъ въ предыдущей задачѣ, придемъ къ рѣшенію неопредѣлен. уравненія $u+3d=7$, $u=7-3d$; для положительности рѣшеній $d\leqslant 2$. Слѣд., получаются всего 2 прогрессіи:

1) $d=1$, $u=4$; $\div 4, 5, 6 \ldots.$

2) $d=2$, $u=1$; $\div 1, 3, 5 \ldots.$

505. Поступая совершенно такъ же какъ въ № 503, получимъ неопредѣленное уравненіе $u+4d=10$, которое имѣетъ всего два цѣлыя и положительныя рѣшенія:

1) $d=1$, $u_1=6$; $\div 6, 7, 8 \ldots.$

2) $d=2$, $u_1=2$; $\div 2, 4, 6 \ldots.$

506. Имѣемъ:

$$u+uq+uq^2=28 \text{ и } uq^3+uq^4+uq^5=\frac{7}{2}.$$

Раздѣливъ одно на другое, находимъ $q=\frac{1}{2}$.

Подставивъ вмѣсто $q=\frac{1}{2}$, найдемъ $u=16$ и искомая прогрессія будетъ $\div 16:8:4:\ldots.$

507. Имѣемъ: $u_1(q^2-1)=9$ и $u_1q^2(q^2-1)=36$, откуда $q=\pm 2$, слѣд., $u_1=3$ и прогрессія будетъ 3, 6, 12 ..... и т. д.

508. Рѣшается такъ же, какъ предыдущая; $u_1=2$, $q=\pm 3$; $S_4=80$ или $=-40$.

509. Имѣемъ: $u_1(1+q+q^2+q^3+q^4)=31$; $u_1q(1+q+q^2+q^3+q^4)=62$. Раздѣливъ, находимъ $q=2$, а слѣдов., $u_1=1$; $u_8=u_1q^7=128$.

510. Дѣленіемъ находимъ $u_1=3$ и $q=2$ (см. № 507); $u_4=3\,.\,2^3=24$; $S_8=45$.

511. Имѣемъ: $u_1(q^4-1)=15$; $u_1q^2(q^4-1)=60$, дѣля, получаемъ: $q=2$, $u=1$; слѣд., $u_5=1\,.\,2^4=16$; $S_5=31$.

512. Дано: $u_3 = S_3 - S_2 = 9$; слѣд., имѣемъ: $u(1+q)=4$ $uq^2=9$; дѣлимъ: $\frac{1+q}{q^2}=\frac{4}{9}$, откуда $q=3$. (Другое рѣшеніе $-\frac{3}{4}$ не годится, такъ какъ по условію въ прогрессіи всѣ члены положительныя). Если $q=3$, то $u_1=1$, $u_5=1\,.\,3^4=81$; $S_5=121$.

513. Дано: $\frac{u_3q-u_1}{q-1}=7$; $\frac{u_6q-u_1}{q-1}=63$. Раздѣливъ, находимъ $q=2$; слѣд., $u_1=1$, $u_4=1\,.\,2^3=8$; $S_4=15$.

514. Дано: $u_3=u_1q^2=S_3-S_2=4$ и $u_1+u_1q=3$. Раздѣливъ, получаемъ $3q^2-4q-4=0$, откуда $q=2$, $u_1=1$; $S_6=63$.

515. Дано:
$\frac{u_1(q^8-1)}{q-1}=255$ и $\frac{u_1(q^4-1)}{q-1}=15$. Дѣлимъ: $q^4+1=17$, $q=2$, $u_1=1$; $S_6=63$.

516. Имѣемъ $u+uq^4=17$; $uq+uq^5=34$; раздѣливъ одно на другое; находимъ $q=2$, слѣд., $u_1=1$.

Далѣе имѣемъ: $S_n=\frac{u_1q^n-u_1}{q-1}$; или $31=2^n-1$; откуда $n=5$.

517. Рѣшается, какъ предыдущая; $n=4$.

518. Изъ равенствъ $u_1q^2=4$ и $u_1q^3=8$ находимъ $q=2$ $u_1=1$. Подставляя эти значенія въ формулу для суммы, получаемъ: $15=\frac{u_1q^n-u_1}{q-1}=2^n-1$, откуда $2^n=16=2^4$; $n=4$.

519. Поступая совершенно такъ же, какъ въ предыдущей, получаемъ: $n=4$.

520. Изъ равенствъ $uq(1+q^4)=34$ и $uq^2(1+q^4)=68$, получаемъ $q=2$ и $u_1=1$. Слѣд., имѣемъ: $63=2^n-1$, откуда $n=6$.

521. Рѣшается, какъ предыдущая; $n=5$.

522. Изъ равенствъ $u(1+q^3)=28$ и $uq(1+q^3)=84$ находимъ $q=3$, $u_1=1$. Слѣд., $121=\frac{3^n-1}{3-1}$, откуда $3^n=243=3^5$; $n=5$.

523. Сумма членовъ отъ второго до 8-го выражается формулой $\frac{uq(q^7-1)}{q-1}$ и по условію эта сумма вдвое больше чѣмъ S_7, т. е. чѣмъ $\frac{u(q^7-1)}{q-1}$; отсюда $q=2$, а подставляя это значеніе q, находимъ $u=3\frac{1}{2}$. Искомая прогрессія: $\div 3\frac{1}{2}:7$ . . . .

524. Имѣемъ 2 ур-ія:

$$u_1+u_1q+u_1q^2=21 \text{ и } u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=45;$$

вычтя одно изъ другого, находимъ $u_1q^3=24$, откуда $u_1=\frac{24}{q^3}$ и слѣд., имѣемъ: $\frac{24}{q^3}+\frac{24}{q^2}+\frac{24}{q}=21$, откуда $7q^3-8q^2-$

$$-8q-8=0; \text{ откуда } q=2;$$

подставляя это значеніе, находимъ $u=3$; искомая прогрессія $\div 3:6:$ . . . .

525. Пусть искомыя числа будутъ: $\div u : uq : uq^2 : uq^3$. Тогда на основаніи условія имѣемъ: $u(1+q)=15$; $uq^2(1+q)=60$, откуда $q=\pm 2$; если взять $q=+2$, то $u=5$, и числа будутъ 5, 10, 20, 40; если же $q=-2$, то $u=-15$, и числа будутъ: -15, 30, -60, 120.

526. Прежде всего рѣшаемъ уравненіе:

$$2^{x^2-65x+1050,5}=2^{\frac{1}{2}}, \text{ откуда } x^2-65x+1050,5=0,5.$$

Большій корень этого уравненія будетъ $x_1=35$, меньшій $x_2=30$. Теперь по условію задачи имѣетъ 2 уравненія:

$$u_1+u_1q^3=35 \text{ и } u_1q+u_1q^2=30;$$

раздѣливъ одно на другое, найдемъ квадратное уравненіе относительно q: $q^2-\frac{13}{6}q+1=0$, откуда $q=\frac{3}{2}$ или $\frac{2}{3}$; соотвѣтственно этому $u=8$ или 27, и искомыя четыре числа будутъ: 8; 12; 18; 27.

527. Имѣемъ: $5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}}$. Сумма членовъ прогрессіи, являющейся показателемъ степени $= \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} =$ $= \dfrac{2^n-1}{2^n}$, слѣд., данное произведеніе равно $5^{\frac{2^n-1}{2^n}}$.

528. При $q < 1$ предѣлъ данной суммы $= \dfrac{1}{1-q}$. (См. *«Дополн.»* § 84), при $q > 1$ рядъ стремится къ ∞. (См. *«Дополн.»* § 82).

529. На основаніи теоремъ о частныхъ случаяхъ дѣленія, имѣемъ: $1 + q^2 + q^3 + \ldots = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

530. Данный рядъ представляетъ собой сумму двухъ безконечно нисходящихъ прогрессій, а именно:

$$\left[\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\ldots\ldots\ldots\right]+\left[\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^6}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

Сумма каждаго изъ этихъ рядовъ найдется по формулѣ $S = \dfrac{u_1}{1-q}$, и будетъ равна для перваго ряда $\dfrac{5}{12}$, для второго $\dfrac{1}{8}$; слѣд., общая сумма будетъ $\dfrac{13}{24}$.

531. Искомый рядъ представляетъ сумму двухъ прогрессій:

$$[x+x^3+x^5+\ldots\ldots\ldots]+3[x^2+x^4+x^6+\ldots\ldots\ldots].$$

Первая сумма равна $\dfrac{x}{1-x^2}$, вторая $= \dfrac{3x^2}{1-x^2}$; слѣд., искомая

$$\text{сумма} = \frac{x(3x+1)}{1-x^2}.$$

Общее замѣчаніе,

относящееся къ задачамъ №№ 532—538.

Всѣ эти ряды суммируются при помощи одного и того же пріема, который слѣдуетъ замѣтить для подготовляющихся въ Институтъ Инженеровъ Путей Сообщенія, гдѣ подобныя задачи задаются довольно часто. Прieмъ этотъ изложенъ подробно въ рѣшенiи №№ 532 и 534. Въ остальныхъ задачахъ даны только лишь отвѣты вслѣдствiе полнаго однообразiя ихъ рѣшенiя.

532. Всѣ задачи, подобныя этой, рѣшаются при помощи слѣдующаго прiема. Замѣчаемъ, что данный рядъ представляетъ собой какъ бы соединенiе прогрессiи ариѳметической и геометрической; въ самомъ дѣлѣ: коэффицiенты 1, 2, 3, ... представляютъ прогрессiю ариѳметическую, а r, r^2, r^3. . . . . прогрессiю геометрическую съ знаменателемъ r. Пусть S будетъ искомая сумма:

$$S = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \ldots\ldots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \ldots\ldots (1)$$

Умножаемъ обѣ части на знаменателя геом. прогр., входящей въ составъ даннаго ряда, т. е. на r:

$$Sr = r^2 + 2r^3 + 3r^4 + \ldots\ldots + (n-1)r^n + nr^{n+1} \ldots\ldots (2)$$

и вычитаемъ рядъ (2) изъ (1); тогда всѣ члены кромѣ r и r^{n+1}, найдутъ подобныя себѣ члены и получится:

$$S(1-r) = -nr^{n+1} + r + r^2 + r^2 + \ldots\ldots + r^n =$$
$$= [r^1 + r^2 + r^3 + \ldots\ldots + r^n] - nr^{n+1}.$$

Стоящая въ скобкахъ сумма представляетъ собой геометр. прогрессiю съ знаменателемъ r, а потому имѣемъ:

$$S(1-r) = \frac{r^{n+1} - r}{r-1} - nr^{n+1}, \text{ откуда } S = \frac{r(1-r^n)}{(1-r)^2} - \frac{nr^{n+1}}{1-r}.$$

533. См. предыдущую. Пусть $S = 1 + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots$ умножаемъ обѣ части на знаменателя геом. прогрессiи, входящей въ составъ ряда, т. е. на q. $Sq = q + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + \ldots$ и вычитаемъ: $S(1-q) = 1 - q + 2q^2 + (q^3 + q^4 + q^5 + \ldots)$. Стоящая въ скобкахъ безконечная сумма стремится къ предѣлу, равному («*Дополн*». § 84) $\frac{q^3}{1-q}$.

$$\text{Слѣд., } S(1-q) = 1 - q + 2q^2 + \frac{q^3}{1-q}, \text{ откуда}$$

$$S = \frac{1 - 2q + 3q^2 - q^3}{(1-q)^2}.$$

534. Поступая, согласно изложенному въ рѣшеніи № 532, обозначаемъ искомую сумму буквою S и умножаемъ обѣ части ряда:

$$S = 1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 9q^4 + \ldots\ldots$$

на знаменателя геом. прогр., входящей въ составъ ряда, т. е. на q:

$$Sq = q + 3q^2 + 5q^3 + 7q^4 + \ldots\ldots$$

и вычитаемъ этотъ рядъ изъ предыдущаго:

$$S(1-q) = 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + \ldots\ldots = 1 + 2\left[q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\right].$$

Предѣлъ стоящей въ скобкахъ суммы членовъ безк., убывающей геом., прогр., равенъ („Дополн. § 84) $\frac{q}{1-q}$.

Слѣдовательно, $S(1-q) = 1 + \frac{2q}{1-q}$, откуда $S = \frac{1+q}{(1-q)^2}$.

535. Поступая согласно указаніямъ №№ 532 и 534, находимъ $S = 2$.

536. См. №№ 532 и 534.

537. Имѣемъ: $2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{8}} \cdot 2^{\frac{3}{16}} \cdot 2^{\frac{4}{32}} \ldots = 2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{4}{32}+\ldots}$

Суммируя рядъ, находящійся въ показателѣ степени, по способу, указанному въ рѣшеніи №№ 532 и 534, находимъ, что предѣлъ суммы членовъ этого ряда равенъ 1; слѣд., данное выраженіе $= 2^1 = 2$.

538. Поступая, какъ показано въ №№ 532 и 534, найдемъ $S = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2}$.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ задачамъ №№ 539—549.

Всѣ эти задачи рѣшаются очень просто и легко и приводятся обыкновенно къ простѣйшимъ показательнымъ уравненіямъ *) на основаніи опредѣленія логариѳмовъ:

---

*) См. «Искусств. способы и методы рѣш. алгебр. уравн.» §§ 61—68.

Логариѳмъ числа N при основанiи a есть показатель степени x, въ какую надо возвести основанiе a, чтобы получить данное число N. Такимъ образомъ равенства:

$$log_a N = x \text{ и } a^x = N$$

равнозначны, т. е. выражаютъ *одну и ту же зависимость* между числами a, x, N.

539. Обозначая искомые логариѳмы черезъ x, получаемъ показательныя уравненiя:

a) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = \sqrt{2}$, или $2^{-3x} = 2^{\frac{1}{2}}$; $-3x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{6}$.

b) $(0,32)^x = \frac{2}{5}\sqrt{2}$, или $\left(\frac{8}{25}\right)^x = \sqrt{\frac{8}{25}} = \left(\frac{8}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$; $x = \frac{1}{2}$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $x = -1$.

d) $4^x = \frac{1}{4} = 4^{-1}$; $x = -1$.

540. Пусть x означ. искомый *log*. Тогда $(0,01)^x = 0,1$, или $(0,1)^{2x} = 0,1$; $x = \frac{1}{2}$.

541. Пусть x означ. искомый *log*. Тогда $5^x = \frac{1}{25} = 5^{-2}$; $x = -2$.

542. Пусть x означ. искомый *log*. Тогда $125^x = 5^{\frac{1}{3}}$; $x = \frac{1}{9}$.

543. Если x означ. искомый *log*, то $\left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{1}{4}$; или $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $x = \frac{2}{3}$.

544. Если x означ. искомый *log*, то $81^x = \sqrt[5]{9}$, или $9^{2x} = 9^{\frac{1}{5}}$; $x = 0,1$.

545. Если x означ. искомый *log*, то $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 32$, или $2^{-3x} = 2^5$; $x = -\frac{5}{3}$.

546. Если x означ. искомый *log*, то $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 2$, или $2^{-3x} = 2$; $x = -\frac{1}{3}$.

547. Если x означ. искомый *log*, то $32^x = \sqrt[3]{2}$, или $2^{5x} = 2^{\frac{1}{3}}$; $x = \frac{1}{15}$.

548. Если x означ. искомый *log*, то $8^x = 0{,}25$, или $2^{3x} = 2^{-2}$; $x = -\frac{2}{3}$.

549. Если x означ. искомый *log*, то $4^x = 0{,}125$, или $2^{2x} = 2^{-3}$; $x = -\frac{3}{2}$.

550. Имѣемъ: $\frac{log_7 2^5}{log_7 2^2} = \frac{5 log_7 2}{2 log_7 2} = \frac{5}{2}$.

Общее замѣчанiе,

относящееся къ задачамъ №№ 551—557.

Рѣшенiе всѣхъ задачъ, въ которыхъ неизвѣстнымъ является основанiе логариѳмовъ, приводится къ простому *извлеченiю корня*, такъ какъ изъ равенства $log_x N = a$ на основанiи опредѣленiя логариѳмовъ непосредственно слѣдуетъ, что $x^a = N$, т. е. $x = \sqrt[a]{N}$. Слѣдуетъ только помнить, что въ статьѣ о логариѳмахъ въ элементарной алгебрѣ разсматриваются только лишь *ариѳметическiя значенiя* радикаловъ.

Такъ, напр., если $log_x 25 = 2$, то $x^2 = 25$, а $x = +\sqrt{25} = +5$.

551. Изъ равенства $x^2 = 42025$ находимъ $x = +\sqrt{42025} = 205$.

552. Изъ равенства $x^{\frac{2}{3}} = 225$ находимъ $x = 225^{\frac{3}{2}} = 3375$.

553. Изъ равенства $x^4 = 2401$ находимъ $x = \sqrt[4]{2401} = 7$.

554. Изъ равенства $x^{\overline{1},25} = 0,125$, или $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$, получаемъ $x = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = 16$.

555. Изъ равенства $x^{-\frac{2}{3}} = 5$, находимъ $x = 5^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{125}}$

556. Изъ равенства $x^3 = 0,37571$ находимъ $x = \sqrt[3]{0,37571}$.

557. Изъ равенства $x^2 = 93025$ находимъ $x = +\sqrt{93025} = 305$.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ задачамъ №№ 558—564.

Всѣ эти задачи рѣшаются очень просто и приводятся къ дѣйствію возвышенія въ степень, такъ какъ изъ равенства $log_a x = b$, на основаніи опредѣленія логариѳмовъ непосредственно слѣдуетъ, что $x = a^b$.

558. Если $log x = -\frac{1}{5}$, то $x = 10^{-\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0,1}$.

559. $x = 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$. **560.** $x = 27^{\frac{2}{3}} = 9$.

561. $x = \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{27}{8}$. **562.** $x = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{512}$.

563. $x = \left(\frac{1}{81}\right)^{\overline{1},25} = \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = (81)^{\frac{3}{4}} = 27$.

564. $x = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$.

565. Такъ какъ $2^3 > 7 > 2^2$, то очевидно, что $log_2 7$ равенъ двумъ + нѣкоторая правильн. дробь, а слѣдовательно, искомая характеристика $= 2$.

b) 5; *c*) 3; *d*) —3; *e*) – 3; *f*) — 1; *g*) — 4.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ задачамъ №№ 566—575

Всѣ эти задачи рѣшаются очень просто и легко на основаніи слѣдующихъ соображеній. Пусть $log_a N = x$; тогда по опредѣленію логариѳмовъ имѣемъ: $a^x = N$, или замѣняя x его значеніемъ:

$$a^{log_a N} = N.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$3^{log_3 7} = 7;\quad 19^{log_{19} 35} = 35 \text{ и т. д.}$$

566. *a*) 2; *b*) 0,3; *c*) *b*. См. выше *общее замѣчаніе*.

567. 2.

568. Имѣемъ: $10^{1-log\frac{5}{2}} = 10^{log 10 - log\frac{5}{2}} = 10^{log(10:\frac{5}{2})} = 10^{log 4} = 4.$

569. Имѣемъ: $6^{log_6 6 + log_6 5} = 6^{log_6(6\,.\,5)} = 6^{log_6 30} = 30.$

570. Имѣемъ: $10^{3 log 2} = 10^{log 2^3} = 10^{log 8} = 8.$

571. Имѣемъ: $5^{2 log_5 3} = 5^{log_5 3^2} = 5^{log_5 9} = 9.$

572. Имѣемъ: $3^{log_{27} 8} = 27^{\frac{1}{3} log_{27} 8} = 27^{log_{27} 8^{\frac{1}{3}}} = 27^{log_{27} 2} = 2.$

573. Имѣемъ: $64^{\frac{2}{3} log_{64} 27} = 64^{log_{64} 27^{\frac{2}{3}}} = 27^{\frac{2}{3}} = 9.$

574. Такъ какъ $125 = 25^{\frac{3}{2}}$, то $125^{log_{25} 16} = 25^{\frac{3}{2} log_{25} 16} = 25^{log_{25} 16^{\frac{3}{2}}} = 16^{\frac{3}{2}} = 64.$

575. Такъ какъ $81 = 243^{\frac{4}{5}}$, то $243^{\frac{4}{5} log_{243} 32} = 243^{log_{243} 32^{\frac{4}{5}}} = 32^{\frac{4}{5}} = 16.$

576. Имѣемъ: $2^{\frac{3}{log_2 x}} = 2^{-3}$, откуда $\frac{3}{log_2 x} = -3$, т. е. $log_2 x = -1$, а слѣд., $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

577. Имѣемъ: $10^{\frac{3}{\log x}} = 10^{-3}$, откуда $\frac{3}{\log x} = -3$, т. е. $\log x = -1$, $x = 0{,}1$.

578. Имѣемъ: $4^{\frac{1}{\log_2 x}} = 4^{\frac{1}{2}}$, откуда $\log_2 x = 2$, т. е. $x = 2^2 = 4$.

579. Такъ какъ $64 = 2^6$, а $32 = 2^5$, то имѣемъ: $6\log 2 = a$, т. е. $\log 2 = \frac{a}{6}$; слѣд., $\log 32 = 5\log 2 = \frac{5a}{6}$.

580. *a*) Имѣемъ: $\log 125 = \log 5^3 = 3\log 5$, но $5 = \frac{10}{2}$, слѣд., $\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - a$, а потому $\log 125 = 3(1 - a)$.

b) $\log \sqrt{1{,}25} = \frac{\log 125 - \log 100}{2} = \frac{3(1-a)-2}{2} = \frac{1-3a}{2}$.

c) $\log 0{,}025 = \log 25 - \log 1000 = 2(1-a) - 3 = -(1+2a)$.

d) $\log \sqrt[3]{0{,}0125} = \frac{\log 125 - \log 10000}{3} = \frac{3(1-a)-4}{3} = -\frac{1+3a}{3}$.

581. Даны: $\log 54$; $\log 6{,}125$ и $\log 31{,}5$;

но $54 = 2 \cdot 3^3$; $6{,}125 = \frac{5^5}{10^3}$; $31{,}5 = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7}{10}$;

слѣд., имѣемъ три ур-iя:

$\log 2 + 3\log 3 = a$; $5\log 5 - 3 = b$; $2\log 3 + \log 5 + \log 7 - 1 = c$;

изъ второго ур-iя опредѣляемъ:

$\log 5 = \frac{b+3}{5}$, слѣд., $\log 2 = 1 - \log 5$ (см. № 580) $= 1 - \frac{b+3}{5}$, послѣ чего опредѣлится изъ перваго ур-iя $\log 3$, а затѣмъ изъ третьяго ур-iя найдемъ $\log 7$; итакъ, мы будемъ знать:

$\log 5$, $\log 2$, $\log 3$, $\log 7$; далѣе $\log 1 = 0$; $\log 4 = 2\log 2$; $\log 6 = \log 2 + \log 3$; $\log 8 = 3\log 2$; $\log 9 = 2\log 3$;

слѣд., логариѳмы первыхъ девяти чиселъ будутъ опредѣлены.

582. Дано: $log 64 = a$, или $6 log 2 = a$, откуда $log 2 = \frac{a}{6}$; слѣд., $log 5 = log\frac{10}{2} = 1 - log 2 = 1 - \frac{a}{6} = \frac{6-a}{6}$. Поэтому имѣемъ: $log\sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}\,log 5 = \frac{6-a}{9}$.

583. Если $log_{ab}a = k$, то $log_{ab}b = log_{ab}\left(\frac{ab}{a}\right) = log_{ab}ab - log_{ab}a = 1 - k$; поэтому $log_{ab}b^2 = 2log_{ab}b = 2(1-k)$.

584. Если $log_6 2 = a$, то $log_6 3 = log_6\left(\frac{6}{2}\right) = log_6 6 - log_6 2 = 1 - a$; поэтому $log_6 9 = 2log_6 3 = 2(1-a)$.

585. Дано: $log_{36}8 = a$, или $3log_{36}2 = a$, откуда $log_{36}2 = \frac{a}{3}$. Такъ какъ $36 = 2^2 \,.\, 9$, то $log_{36}36 = 2log_{36}2 + log_{36}9$, или $1 = \frac{2a}{3} + log_{36}9$, откуда $log_{36}9 = 1 - \frac{2a}{3} = \frac{3-2a}{3}$.

586. Имѣемъ: $log\sqrt[3]{\frac{25}{98}} = \frac{log 25 - log 98}{3} = \frac{2log 5 - log 2 - 2log 7}{3}$; но $5 = \frac{10}{2}$, слѣд., $log 5 = log 10 - log 2 = 1 - 0{,}3010300 = 0{,}6989700$; $log 2$ и $log 7$ извѣстны. Подставляя эти значенія, получаемъ $log\sqrt[3]{\frac{25}{98}} = -0{,}1977620$, или, дѣлая мантиссу положительной $= \bar{1}{,}8022380$.

587. Пользуясь модулемъ для перехода отъ одной системы логариѳмовъ къ другой *), имѣемъ: $log_{0,1}0{,}7 = log_{10}0{,}7 \,.\, \frac{1}{log_{10}0{,}1} = \frac{log_{10}7 - log_{10}10}{-1} = 1 - log 7 = 0{,}1549020$.

588. Пользуясь модулемъ для перехода отъ одной системы логариѳмовъ къ другой, имѣемъ $log_{0,01}0{,}7 = log_{10}0{,}7 \,.\, \frac{1}{log_{10}0{,}01} = \frac{log_{10}7 - log_{10}10}{-2} = \frac{1}{2}(1 - log 7) = 0{,}0774510$.

*) См. Алгебру Киселева § 279.

589. Разложенiемъ на простыхъ множителей находимъ: $648=2^3 \, . \, 3^4$, $864=2^5 \, . \, 3^3$. Поэтому имѣемъ: $3log2+4log3=$ $=2{,}81157501$ и $5log2+3log3=2{,}93651374$. Рѣшая эти два уравненiя съ двумя неизвѣстными, найдемъ $log2=0{,}3010300$ и $log3=0{,}4771213$; $log5=log\frac{10}{2}=log10-log2=0{,}6989700$.

590. Пусть $x=\sqrt[5]{0{,}0625}$; логариѳмируя, имѣемъ:
$$logx=\frac{1}{5}\,log0{,}0625=\frac{log625-log10000}{5}=\frac{4log5-4}{5}=$$
$$=\frac{4}{5}\,(log5-1)=-\frac{4}{5}\,log2=-\frac{4}{5}\,.\,0{,}3010300=-0{,}2408240,$$
или, переходя къ отрицательной характеристикѣ $=\overline{1}{,}7591760$. Итакъ, $logx=log0{,}5743491$, а потому $x=0{,}5743491$.

591. $log\sqrt[3]{0{,}01}=-\frac{2}{3}=-0{,}66667$ или, дѣлая мантиссу положительной $=\overline{1}{,}33333$.

592. Имѣемъ: $(log_2x)^2-4(log_2x)+3=0$; изъ этого квадр. уравн. $log_2x=3$ или 1. Если $log_2x=3$, то $x=2^3=8$; если же $log_2x=1$, то $x=2$.

593. Имѣемъ: $log(x^3-4x^2+x+1)=3log(x+1)=log(x+1)^3$ или $x^3-4x^2+x+1=x^3+3x^2+3x+1$, что приводитъ къ уравненiю $7x^2+2x=0$, или $x(7x+2)=0$, откуда $x_1=0$ и $x_2=-\frac{2}{7}$.

594. Пользуясь модулемъ для перехода отъ одной системы логариѳмовъ къ другой, имѣемъ: $log_ab=log_bb\,.\,\frac{1}{log_ba}$; слѣд., $log_ba\,.\,log_ab=log_ba\,.\,\frac{1}{log_ba}=1$.

595. Имѣемъ: $\sqrt{x+2}\,.\,log_{10}3\,.\,log_310=x-4$. Но произведенiе $log_310\,.\,log_{10}3=1$. (См. № 594). Поэтому $\sqrt{x+2}=$ $=x-4$, или, возвышая въ квадратъ: $x^2-9x+14=0$, откуда $x_1=2$ и $x_2=7$. Значенiе $x=2$ не удовлетворяетъ уравненiю, если разсматривать только положительныя значенiя радикаловъ.

Общее замѣчанiе,

относящееся къ задачамъ №№ 596—609.

При рѣшенiи этихъ задачъ, кромѣ пользованiя модулемъ для перехода отъ одной системы логариѳмовъ къ другой, надо имѣть въ виду еще слѣдующее обстоятельство. Пусть, напр., въ системѣ логариѳмовъ съ основанiемъ 10 данъ $log 2$. Тогда $log 5$ находится очень легко слѣдующимъ образомъ: $10 = 2 \cdot 5$, поэтому $log 10 = log 2 + log 5$; но $log 10 = 1$, какъ логариѳмъ основанiя (*«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 81), а потому $1 = log 2 + log 5$, т. е. $log 5 = 1 - log 2$. Также, если $log_{14} 7 = a$, то $log_{14} 2 = 1 - a$; также, если $log_{30} 2 = a$ и $log_{30} 3 = b$, то $log_{30} 5 = 1 - a - b$, такъ какъ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Вообще, если основанiе логариѳмовъ A можетъ быть разложено на простыя множители $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ и даны логариѳмы *n минусъ одного* изъ этихъ множителей, то логариѳмъ n-аго множителя найдется такъ:

$A = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n$; логариѳмируемъ при основанiи A:

$$log_A A = log_A \alpha_1 + log_A \alpha_2 + \ldots + log_A \alpha_{n-1} + log_A \alpha_n.$$

откуда $$log_A \alpha_n = 1 - \left[log_A \alpha_1 + log_A \alpha_2 + \ldots + log_A \alpha_{n-1} \right].$$

Въ рѣшенiяхъ этихъ задачъ приведено подробное объясненiе въ № 596, для остальныхъ же задачъ даны только сокращенныя рѣшенiя безъ объясненiй, такъ какъ всѣ они очень однообразны.

596. Рѣшимъ эту задачу подробнѣе, такъ какъ она можетъ служить образцомъ цѣлаго ряда подобныхъ же задачъ (№ 596—609). Намъ нужно найти $log_6 16$, зная $log_{12} 27$. Прежде всего, такъ какъ основанiя логариѳмовъ искомаго и даннаго различны, то приводимъ ихъ къ общему основанiю, за которое удобнѣе брать основанiе *даннаго* логариѳма, т. е. 12.

Поэтому пишемъ: $log_6 16 = log_{12} 16 \cdot \frac{1}{log_{12} 6}$, гдѣ дробь $\frac{1}{log_{12} 6}$ представляетъ собой такъ называемый *модуль* для перехода отъ одной системы къ другой, равный, какъ извѣстно, дроби, числитель которой единица, а знаменатель log новаго основанія (6) по старой системѣ (12); итакъ, мы имѣемъ:

$$log_6 16 = log_{12} 16 \cdot \frac{1}{log_{12} 6} = \frac{4 log_{12} 2}{log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)} = \frac{4 log_{12} 2}{log_{12} 12 - log_{12} 2} =$$

$$= \frac{4 log_{12} 2}{1 - log_{12} 2}.$$

Теперь очевидно, наша задача свелась къ нахожденію $log_{12} 2$, для чего мы должны воспользоваться заданнымъ $log_{12} 27$ дѣлается это такъ: разлагаемъ основаніе системы (12) на множители и логариѳмируемъ, не забывая, что $log_{12} 12$, какъ логариѳмъ основанія равенъ единицѣ:

$12 = 2^2 \cdot 3$; $log_{12} 12 = 2 log_{12} 2 + log_{12} 3$, откуда $log_{12} 2 = \frac{1 - log_{12} 3}{2}$

но $log_{12} 3 = \frac{a}{3}$, ибо по условію $log_{12} 27 = a$; итакъ, $log_{12} 2 =$

$$= \frac{1 - \frac{a}{3}}{2} = \frac{3 - a}{6},$$ послѣ чего получаемъ:

$$log_6 16 = \frac{4 \cdot \frac{3-a}{6}}{1 - \frac{3-a}{6}} = \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

597. Рѣшается такъ же, какъ предыдущая. Имѣемъ:

$log_{49} 16 = \frac{4 log_{14} 2}{2 log_{14} 7} = \frac{4a}{2(1-a)} = \frac{2a}{1-a}$, такъ какъ $log_{14} 7 = 1 - log_{14} 2$.

598. Имѣемъ: $log_{10} 64 = \frac{6 log_4 2}{log_4 2 + log_4 5} = \frac{6 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{a}{3}} = \frac{18}{3+2a}$,

такъ какъ $log_4 2 = \frac{1}{2}$, а $log_4 5 = \frac{a}{3}$ по условію задачи.

599. См. № 596.

600. Имѣемъ: $log_{25}50 = log_{25}(25 \, . \, 2) = log_{25}25 + log_{25}2 = 1 +$
$+\dfrac{log_{10}2}{log_{10}25} = 1 + \dfrac{\dfrac{a}{6}}{2\left(1-\dfrac{a}{6}\right)} = \dfrac{12-a}{12-2a}$, такъ какъ $log25 = 2log5$,
а $log5 = 1 - log2$. (См. *общее замѣчаніе* на стр. 185).

601. Имѣемъ: $log_{54}125 = \dfrac{3log_{30}5}{log_{30}2 + 3log_{30}3}$, но по условію $log_{30}2 = \dfrac{a}{3}$; $log_{30}3 = \dfrac{b}{3}$, $log_{30}5 = 1 - log_{30}2 - log_{30}3 = 1 - \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{3}$. (См. *общее замѣчаніе* на стр. 185). Подставляя эти значенія, получимъ $log_{54}125 = \dfrac{3(3-a-b)}{a+3b}$.

602. Имѣемъ $log_{25}12 = \dfrac{log_5 3 + log_5 4}{log_5 25} = \dfrac{a+b}{2}$.

603. Имѣемъ: $log_{30}8 = 3log_{30}2 = 3(1-a-b)$. (См. *общее замѣчаніе* на стр. 185).

604. Имѣемъ: $log_{30}12 = \dfrac{2log_{24}2 + log_{24}3}{log_{24}2 + log_{24}3 + log_{24}5} =$

$$= \frac{2 \, . \, \dfrac{1-a}{2} + a}{\dfrac{1-a}{3} + a + b} = \frac{2+a}{1+2a+3b},$$

такъ какъ $log_{24}2 = \dfrac{1-log_{24}3}{3}$. (См. *общее замѣч.* на стр. 185).

605. Имѣемъ: $log_{35}28 = \dfrac{log_{14}14 + log_{14}2}{log_{14}7 + log_{14}5} = \dfrac{1+1-2}{a+b} = \dfrac{2-a}{a+b}$.
(См. *общее замѣчаніе* на стр.).

606. Имѣемъ: $log_9 20 = \dfrac{log_{10}10 + log_{10}2}{2log_{10}3} = \dfrac{1+a}{2b}$.

607. См. № 602.

608. Имѣемъ $log_4 1,2 = \dfrac{2log_{10}2 + log_{10}3 - log_{10}10}{2log_{10}2} = \dfrac{2a+b-1}{2a}$.

609. Имѣемъ: $log_5 6=\frac{log_{10}2+log_{10}3}{log_{10}5}=\frac{a+b}{1-a}$, такъ какъ $log_{10}5=1-log_{10}2=1-a$. (См. *общее замѣчаніе* на стр. 185).

610. Пусть $x=\sqrt[5]{-0,375}$; тогда $(-x)=\sqrt[5]{0,375}$; логариѳмируемъ: $log(-x)=\frac{\bar{1},57403}{5}=\bar{1},91481$, откуда $(-x)=$

$=0,82188$, а слѣд., $x=-0,82188$.

Несмотря на всю очевидную легкость этой задачи, бывало много примѣровъ, что въ Технологическомъ Институтѣ, гдѣ она предлагалась, ставилось не мало неудовлетворительныхъ отмѣтокъ за нее, и именно вотъ за что: большинство изъ экзаменующихся, которымъ попадалась эта задача, начинали ее дѣлать такъ: пусть $x=\sqrt[5]{-0,375}$;

тогда $logx=\frac{log(-0,375)}{5}$,

послѣ чего они заявляли, что задача эта невозможна, ибо отрицательныя числа, въ данномъ случаѣ $(-0,375)$ не имѣютъ логариѳмовъ. Такимъ образомъ выходило будто нельзя найти $\sqrt[5]{-0,375}$,
что очевидно абсурдъ; въ приведенномъ рѣшеніи этой задачи видно, какъ можно избѣгнуть логариѳмовъ отрицательныхъ чиселъ.

611. Рѣшается совершенно также, какъ предыдущая. Отвѣтъ: $log(-x)=\bar{1},98358$; $x=-0,9629$.

612. Имѣемъ: $x=\sqrt[3]{\frac{137}{3}}=\sqrt[3]{45,6667}$; логариѳмируемъ и т. д. $x=3,5744$.

613. 0,020054. **614**. $log(-x)=\bar{3},16838$; $x=-0,0014736$.

615. $log(-x)=\bar{1},66021$; $x=-0,45731$.

616. $log(-x)=\bar{1},98196$; $x=-0,95932$.

617. $log(-x)=\bar{1},88229$; $x=-0,76258$.

618. Имѣемъ: $log(-x)=-\frac{3}{7}=-0{,}42857=\overline{1}{,}57143$; $x=-0{,}37276$.

619. $log(-x)=\overline{1}{,}65744$; $x=-0{,}4544$.

620. $log x=-0{,}3=\overline{1}{,}70000$; $x=0{,}50119$.

621. $log x=-0{,}2=\overline{1}{,}80000$; $x=0{,}63096$.

622. Имѣемъ: $x=\sqrt{-\frac{2}{7}}=i\sqrt{\frac{2}{7}}$; но $\sqrt{\frac{2}{7}}=0{,}53453$; слѣд., $x=0{,}53453i$.

623. $log(-x)=0{,}23299$; $x=-1{,}70996$.

624. Отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ. См. «Дополн. къ Алгебрѣ» § 81.

625. 0,25662. **626**. $log(-x)=1{,}89442$; $x=-78{,}418$.

627. $log(-x)=\overline{3}{,}40001$; $x=-0{,}0025119$.

628. Такъ какъ подъ корнемъ находится разность двухъ количествъ, то логариѳмировать данное выраженіе непосредственно нельзя: надо предварительно вычислить величину произведенія $7{,}00021\sqrt[3]{0{,}01}$, вычесть эту величину изъ 1 и потомъ, когда подъ корнемъ будетъ одночленъ— прологариѳмировать. Итакъ, пусть $y=7{,}00021\sqrt[3]{0{,}01}$. Логариѳмируя, находимъ: $log y=log 7{,}00021+\frac{1}{3}log 0{,}01=0{,}84511-$ $-\frac{2}{3}=0{,}84511-0{,}66667=0{,}17844$; слѣд., $y=1{,}5081$. Послѣ этого имѣемъ:

$x=\sqrt[5]{1-1{,}5081}=-\sqrt[5]{0{,}5081}$; $log(-x)=\frac{1}{5}log 0{,}5081=\overline{1}{,}94119$, слѣд., $x=-0{,}87336$.

629. Рѣшается такъ же, какъ предыдущая. Пусть $y=$ $=4{,}20131\sqrt[3]{0{,}1}$. По таблицамъ найдемъ $y=1{,}9501$. Слѣд., $x=-\sqrt[3]{0{,}9501}$; $log(-x)=\overline{1}{,}99259$; $x=-0{,}98308$.

630. Рѣшается такъ же, какъ № 628. Пусть $y=\sqrt[13]{0,0059^7}$; по таблицамъ находимъ $y=0,06305$. По таблицамъ же отыскиваемъ $(0,034)^5=0,00000045436$. Слѣдовательно,

$$x=\sqrt[7]{0,00000045436-0,06305}=\sqrt[7]{-0,06305},$$

такъ какъ дальнѣйшія цыфры не могутъ имѣть никакого вліянія на пятизначныя логариѳмы. Слѣд., $log(-x)=$ $=\frac{1}{7}log(0,06305)=\bar{1},82853$; $x=-0,6738$.

631. Имѣемъ: $x=\sqrt[3]{log\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-log3}=\sqrt[3]{-0,47712}$;

$log(-x)=\frac{1}{3}log0,47712$; $x=-0,78142$.

632. Имѣемъ: $x=\sqrt[3]{log0,37}=\sqrt[3]{\bar{1},56820}=\sqrt[3]{-0,43180}$; $log(-x)=\bar{1},87843$; $x=-0,75584$.

633. $logx=\bar{1},50300$; $x=0,31842$.

634. Имѣемъ: $x=2log32-4log55=\bar{4},04886$.

635. Имѣемъ: $x=(\bar{2},47712)^3=(-1,52288)^3$; $log(-x)=$ $=3log1,52288=0,54801$; $x=-3,5319$.

636. Имѣемъ: $x=(0,273)^{1,573}$; $logx=1,573\times\bar{1},43616=$ $=-1,573\times 0,56384$; $log(-logx)=log1,573+log0,56384=$ $=\bar{1},94789$; $-logx=0,88694$; $logx=\bar{1},11306$; $x=0,12974$.

637. Имѣемъ: $logx=-0,2073\times 0,47712$; $log(-logx)=$ $=log0,2073+log0,47712=\bar{2},99523$; $logx=-0,09891=\bar{1},90109$; $x=0,79632$.

638. Имѣемъ: $3logx=\bar{2},59118$; $logx=\bar{1},53039$; $x=0,33915$.

639. Имѣемъ: $x=0,17624log0,0173=0,17624\times\bar{2},23805=$ $=-0,17624\times 1,76195$; $log(-x)=\bar{1},49211$; $x=-0,31054$.

640. Имѣемъ: $x=(-1,93211)^6$; $logx=6log1,93211$; $x=52,021$.

641. Имѣемъ: $x = -017593 \times 1{,}06584$; $log(-x) = \bar{1}{,}27303$; $x = -0{,}18751$.

642. Имѣемъ: $x = -\frac{0{,}17024}{1{,}02955}$; $log(-x) = \bar{1}{,}24371$; $x = -0{,}17527$.

643. Имѣемъ: $log x = -0{,}33333 = \bar{1}{,}66667$; $x = 0{,}46416$.

644. Имѣемъ: $log x = \bar{1}{,}30000$; $x = 0{,}19953$.

645. Имѣемъ: $log x = \bar{4}{,}20350$; $x = 0{,}00015977$.

646. Имѣемъ: $x = -0{,}17325 \times 1{,}46529$; $log(-x) = \bar{1}{,}40460$; $x = -0{,}25386$.

647. Имѣемъ: $x = (-1{,}93211)^{\frac{1}{3}}$; $log(-x) = \frac{1}{3} log\, 1{,}93211 = 0{,}09534$; $x = -1{,}2455$.

648. $log x = 1{,}29970$; $x = 19{,}939$.

Общее замѣчаніе,

относящееся къ задачамъ №№ 649—661.

Всѣ эти задачи рѣшаются очень однообразно и требуютъ двукратнаго логариѳмированія. Первая изъ нихъ (№ 649) рѣшена очень подробно, чтобы указать общій методъ ихъ рѣшенія. Во всѣхъ остальныхъ №№ даны только отвѣты, такъ какъ было бы безсмысленно повторять одно и то же рѣшеніе нѣсколько разъ.

649. Если $log_2 x = \bar{1}{,}14596$, то по опредѣленію логариѳмовъ равенство это можетъ быть переписано такъ: $x = 2^{\bar{1},14596}$, или логариѳмируя: $log x = \bar{1}{,}14596 log 2 = \bar{1}{,}14596 \,.\, 0{,}30103$. Замѣняя логариѳмъ съ отрицательной характеристикой отрицательнымъ значеніемъ логариѳма ($\bar{1}{,}14596 = -1 + 0{,}14596 = -0{,}85404$), имѣемъ:

$$log x = -0{,}85404 \times 0{,}30103, \text{ или } -log x = 0{,}85404 \times 0{,}30103.$$

Логариѳмируемъ обѣ части этого равенства:

$$log(-log x) = log 0{,}85404 + log 0{,}30103 = \bar{1}{,}41009;$$

слѣд., потенцируя, найдемъ: $-\log x = 0{,}25709$, или $\log x =$ $= -0{,}25709$. Вводя отрицательную характеристику, получаемъ: $\log x = \overline{1}{,}74291$, откуда потенцированіемъ находимъ $x = 0{,}55324$.

650. $\log(-\log x) = \overline{1}{,}78718$; $\log x = \overline{1}{,}38740$; $x = 0{,}24401$. См. № 649.

651. $\log(-\log x) = \overline{1}{,}56699$; $\log x = \overline{1}{,}63103$; $x = 0{,}42759$. См. № 649.

652. $\log(-\log x) = \overline{1}{,}52216$; $\log x = \overline{1}{,}66722$; $x = 0{,}46475$. См. № 649.

653. $\log x = (\overline{1}{,}04923)\ .\ 2 = \overline{2}{,}09846$; $x = 0{,}012545$.

654. $\log x = \overline{1}{,}05348\ .\ \log 0{,}1 = 0{,}94652$; $x = 8{,}8414$.

655. $\log x = 2{,}67\ .\ \log 0{,}1 = \overline{3}{,}33000$; $x = 0{,}002138$.

656. $\log(-\log x) = \overline{1}{,}56115$; $\log x = \overline{1}{,}63596$; $x = 0{,}43247$. См. № 649.

657. $\log(-\log x) = \overline{1}{,}41009$; $\log x = \overline{1}{,}74291$; $x = 0{,}55324$. См. № 649.

658. $\log x = \overline{3}{,}17028 \log 0{,}1 = 2{,}82972$; $x = 675{,}65$.

659. $\log\log x = \overline{3}{,}43450$; $\log x = 0{,}00272$; $x = 1{,}0063$ См. № 649.

660. $\log x = (0{,}18)\ .\ 2 = 0{,}36000$; $x = 2{,}2908$.

661. $\log x = 2{,}19418 \log 100 = 4{,}38836$; $x = 24454$.

662. По условію задачи имѣемъ уравненіе $3^x = 0{,}937$, откуда $x = \dfrac{\log 0{,}937}{\log 3} = \dfrac{\overline{1}{,}97174}{0{,}47712} = -\dfrac{0{,}02826}{0{,}47712}$; слѣд., $\log(-x) =$ $= \log 0{,}02826 - \log 0{,}47712 = \overline{2}{,}77254$: $x = -0{,}05923$.

663. *а*) Пусть $\log_2 2{,}7168 = x$. На основаніи опредѣленія логариѳмовъ равенство это равносильно такому: $2^x = 2{,}7168$, откуда, логариѳмируя, находимъ:

$$x = \frac{\log 2{,}7168}{\log 2} = \frac{0{,}43406}{0{,}30103}\,.$$

Вмѣсто того, чтобы производить это дѣленіе, лучше прологариѳмировать еще разъ:

$$\log x = \log 0{,}43406 - \log 0{,}30103 = 0{,}15894;\ x = 1{,}44190.$$

b) Имѣемъ $4^x = 0{,}015$; логариѳмируемъ:

$$x = \frac{\log 0{,}015}{\log 4} = \frac{\bar{2},17609}{0{,}60206} = -\frac{1{,}82391}{0{,}60206};\ \text{слѣд.,}$$

$$(-x) = \frac{1{,}82391}{0{,}60206};$$

логариѳмируя еще разъ, получимъ: $\log(-x) = 0{,}48136$, откуда $(-x) = 3{,}02940$. Такъ какъ x означаетъ логариѳмъ, то лучше написать послѣдній результатъ съ отрицательной характеристикой:

$$x = -3{,}02940 = \bar{4},97060.$$

$$c)\ x = \frac{3}{-0{,}30103};\ \log(-x) = 0{,}99851;\ x = -0{,}9658.$$

$$d)\ x = \frac{\bar{2},25527}{0{,}77815} = -\frac{1{,}74473}{0{,}77815};\ \log(-x) = 0{,}35066;$$
$x = -2{,}2421$.

$$e)\ x = \frac{\bar{2},23045}{0{,}47712} = -\frac{1{,}76955}{0{,}47712};\ \log(-x) = 0{,}56923;$$
$x = -3{,}7088$.

$$f)\ x = \frac{\bar{1},47712}{-0{,}30103} = \frac{0{,}52288}{0{,}30103};\ \log x = 0{,}23979;\ x = 1{,}7370.$$

$$g)\ x = \frac{3}{0{,}30103};\ \log x = 0{,}99851;\ x = 9{,}9658.$$

664. $x = -\dfrac{0{,}12113}{0{,}30103};\ \log(-x) = \bar{1},60464;\ x = -0{,}40238.$

665. $x = \dfrac{2}{\log 12};\ \log x = 0{,}26794;\ x = 1{,}8533.$

666. $x = \dfrac{\bar{2},72181}{0{,}43136} = -\dfrac{1{,}27819}{0.43136};\ \log(-x) = 0{,}47175;$
$x = -2{,}9631$.

667. $x = \frac{2,76290}{0,43136} = -\frac{1,23710}{0,43136}$; $log(-x) = 0,45757$; $x = -2,8679$.

668. $x = \frac{\bar{2},30103}{\bar{3},30103} = \frac{1,69897}{2,69897}$; $logx = \bar{1},79898$; $x = 0,62947$.

669. $x = \frac{1,07918}{0,69897}$; $logx = 0,18863$; $x = 1,5439$.

670. $x = \frac{\bar{2},18412}{0,50515} = -\frac{1,81588}{0,50515}$; $log(-x) = 0,55567$; $x = -3,5948$.

671. $x = \frac{\bar{5},75381}{0,11394} = -\frac{4,24619}{0.11394}$; $log(-x) = 1,57133$; $x = -37,268$.

672. $x = \frac{\bar{2},23659}{0,47712} = -\frac{1,76341}{0,47712}$; $log(-x) = 0,56772$; $x = -3,6959$.

673. $x = \frac{\bar{1},23993}{2} = \bar{1},61997$.

674. $x = \frac{0,90309}{1,07918}$; $logx = \bar{1},92265$; $x = 0,83686$.

675. Изъ равенства $x^{-\frac{2}{3}} = 5$ находимъ: $logx =$ $= -\frac{3}{2} log5 = -1,04846 = \bar{2},95154$; $x = 0,089442$.

676. $logx = \frac{0,30103}{0,6} = 0,50172$; $x = 3,1748$.

677. $logx = \frac{0,90309}{0,6} = 1,50515$; $x = 32$. Задачу эту можно рѣшить и безъ таблицъ, такъ какъ изъ уравненія $x^{0,6} = 8$, имѣемъ: $x = 8^{\frac{10}{6}} = 8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = 2^5 = 32$.

678. Имѣемъ: $x^{\overline{1}{,}47917} = 2$, или, логариѳмируя: $log x =$ $= -\frac{0{,}30103}{0{,}52083}$; логариѳмируемъ еще разъ: $log(-log x) =$ $= \overline{1}{,}76192$, слѣд., $log x = -0{,}57798 = \overline{1}{,}42202$; $x = 0{,}26425$.

679. $28 - 16\sqrt{3}$.

680. $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

681. $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$.

682. $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$.

683. $x^7 + 7x^5 + 21x^3 + 35x + \frac{35}{x} + \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^7}$.

684. $\frac{x^{12}}{y^6} - 6\frac{x^9}{y^3} + 15x^6 - 20x^3y^3 + 15y^6 - 6\frac{y^9}{x^3} + \frac{y^{12}}{x^6}$.

685. $2a^6 + 30a^4(bi)^2 + 30a^2(bi)^4 + 2(bi)^6$, или, вспоминая правила о степеняхъ мнимой единицы i («Дополн. § 145), получаемъ: $2a^6 - 30a^4b^2 + 30a^2b^4 - 2b^6$.

686. Въ разложенiи 14-ой степени среднiй членъ — *восьмой.* По формулѣ общаго члена получаемъ:

$$u_8 = (-1)^7 \cdot C_{14}{}^7 x^7 y^7 = -3432x^7y^7.$$

687. По формулѣ общаго члена разложенiя имѣемъ:

$$u_5 = \left(-1\right)^4 \cdot C_9{}^4\left(\frac{10x}{y}\right)^5 \cdot \left(\frac{y}{10x}\right)^4 = 1260\,\frac{x}{y};$$

$$u_6 = \left(-1\right)^5 \cdot C_9{}^5\left(\frac{10x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{y}{10x}\right)^5 = -12{,}6\,\frac{y}{x}.$$

Общее замѣчанiе,

относящееся къ задачамъ №№ 688—700.

Всѣ тѣ задачи, въ которыхъ требуется найти коэффицiентъ при членѣ, содержащемъ данную степень главной буквы, рѣшаются очень однообразно при помощи слѣдующаго пріема. Пусть, напр., въ разложеніи

$$(\alpha+\beta)^n$$

требуется найти коэффиціентъ при α^p. Общій членъ даннаго разложенія $U_{k+1}=C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k$. Слѣдовательно, въ общемъ членѣ показатель степени при α равенъ $n-k$; намъ надо найти членъ, въ который α входила бы съ показателемъ p; очевидно это будетъ только тогда, когда $n-k=p$, откуда $k=n-p$. Вычисливъ k, найдемъ искомый коэффиціентъ C_n^k.

Вслѣдствіе полнаго однообразія рѣшенія всѣхъ подобныхъ задачъ, подробныя рѣшенія даны только для № 688, 689, а въ остальныхъ указаны только отвѣты.

688. Всѣ задачи подобнаго типа (688—700) рѣшаются на основаніи формулы общаго члена бинома Ньютона при помощи слѣдующихъ соображеній. Возьмемъ разложеніе $(\alpha+\beta)^m$ и напишемъ его общій членъ:

$$U_{k+1}=C_m^k\alpha^{m-k}\beta^k=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\;.\;.\;.\,m}{1\,.\,2\,.\;.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\;.\,(m-k)}\alpha^{m-k}\beta^k\quad.\;.\;(1).$$

Сравнивая же это разложеніе $(\alpha+\beta)^m$ съ даннымъ намъ разложеніемъ $(x^2+a^3x^{-1})^5$, замѣчаемъ, что буквѣ α соотвѣтствуетъ x^2, буквѣ β — соотвѣтствуетъ a^3x^{-1}; показатель разложенія $m=5$; итакъ, подставляемъ въ формулу (1) эти значенія:

$$U_{k+1}=C_5^kx^{2(5-k)}a^{3k}x^{-k},\text{ или}$$

$$U_{k+1}=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\;.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\;.\,(5-k)}x^{10-3k}\,.\,a^{3k}\quad.\;.\;(2).$$

Итакъ, въ формулу общаго члена даннаго разложенія x входитъ въ степени $(10-3k)$; намъ же нужно отыскать членъ, въ который x входилъ бы въ первой степени, т. е., чтобы $10-3k=1$, откуда $k=3$. Итакъ, искомый членъ будетъ $3+$первый, т. е. 4-ый; подставляя теперь вмѣсто k найденное его значеніе 3, въ формулу (2) находимъ искомый членъ:

$$U_4=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,1\,.\,2}x^{10-9}\,.\,a^9=10a^9x;$$

искомый коэффиціентъ при x^1 равенъ слѣдов. $10a^9$.

689. Рѣшается совершенно такъ же, какъ № 688; сравнивая наше разложеніе $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}$ съ разложеніемъ $(\alpha+\beta)^m$, общій членъ котораго равенъ:

$$U_{k+1}=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,m}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,(m-k)}\alpha^{m-k}\beta^k,$$

замѣчаемъ, что $\alpha=x^{\frac{1}{2}}$, $\beta=x^{-\frac{1}{3}}$, $m=16$; итакъ, для нашего разложенія общій членъ будетъ:

$$U_{k+1}=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,16}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,(16-k)}x^{\frac{1}{2}(16-k)}x^{-\frac{1}{3}\cdot k},$$

слѣд., показатель степени при x въ общемъ членѣ имѣетъ видъ: $\left(8-\frac{5}{6}k\right)$, а по условію, мы ищемъ членъ, содержащій x^3, слѣд., $8-\frac{5}{6}k=3$, откуда $k=6$, а потому искомый членъ будетъ $U_7=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,16}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,6\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,10}x^3=8008x^3$, т. е. искомый коэффиціентъ будетъ 8008.

690. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ:

$$U_{k+1}=C_{15}^k a^{\frac{1}{3}(15-k)}\,.\,a^{-\frac{1}{2}k}=C_{15}^k a^{5-\frac{5}{6}k}.$$

Такъ какъ мы ищемъ членъ, независящій отъ a, т. е. содержащій a въ нулевой степени, то $5-\frac{5}{6}k=0$, откуда $k=6$. Слѣд., искомый членъ — *седьмой*: $u_7=C_{15}{}^6a^0=5005$.

691. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1}=C_6^k x^{6-k}\,.\,x^{-k}=C_6^k x^{6-2k}$; такъ какъ мы ищемъ членъ, не содержащій x, то $6-2k=0$, т. е. $k=3$. Искомый членъ — *четвертый* $=C_6^3x^0=20$.

692. См. №№ 688 и 689. Общій членъ разложенія равенъ: $U_{k+1}=C_{12}^k\, x^{\frac{1}{6}(12-k)}\,.\,x^{\frac{2k}{3}}=C_{12}^k\, x^{2+\frac{k}{2}}$. Въ членѣ, содержащемъ x^6, показатель степени $2+\frac{k}{2}=6$, откуда $k=8$. Искомый членъ — *девятый* $=C_{12}^8 x^6=495x^6$.

693. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1}=C_7^k a^{\frac{2}{3}(7-k)}\,.\,a^{-\frac{8}{9}k}=C_7^k\, a^{\frac{14}{3}-\frac{14}{9}k}$. Въ членѣ, независящемъ отъ a, показатель степени долженъ равняться нулю, т. е. $\frac{14}{3}-\frac{14}{9}k=0$, откуда $k=3$. Искомый членъ — *четвертый* $=C_7^3 a^6=35$.

694. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1}=C_{12}^k a^{\frac{2}{3}(12-k)}\,.\,a^{\frac{3}{5}k}=C_{12}^k\, a^{8-\frac{k}{15}}$. Въ членѣ, содержащемъ $a^{\frac{22}{3}}$, показатель степени $8-\frac{k}{15}=\frac{22}{3}$, откуда $k=10$. Искомый членъ — *одиннадцатый* $=C_{12}^{10} a^{\frac{22}{3}}=66a^{\frac{22}{3}}$.

695. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1}=(-1)^k.\ C_7^k a^{3(7-k)}\,.\,b^{-(7-k)}\,.\,b^{3k}\,.\,a^{-k}=$ $=(-1)^k\,.\,a^{21-4k}\,.\,b^{4k-7}$. Такъ какъ надо найти членъ, содержащій $a^5\,b^9$, то должны быть удовлетворены равенства: $21-4k=5$ и $4k-7=9$; изъ обѣихъ этихъ равенствъ $k=4$ и слѣд., искомый членъ — *пятый* $=(-1)^4.\ C_7^4\, a^5\, b^9=$ $=35a^5b^9$. Если бы значенія k изъ двухъ уравненій получились разныя, то это указало бы на то, что искомаго члена въ разложеніи не имѣется. То же было бы при k дробномъ или отрицательномъ.

696. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1}=(-1)^k\,.\,C_{11}^k a^{2(11-k)}\,.\,b^{-(11-k)}\,.\,b^{2k}\,.\,a^{-k}=$ $=(-1)^k\,.\,C_{11}^k a^{22-3k}\,.\,b^{3k-11}$. Приравнивая $22-3k=1$ и $3k-$ $-11=11$, находимъ изъ перваго равенства $k=7$, а изъ второго $k=\frac{22}{7}$. Слѣдовательно, члена, содержащаго ab^{11}, въ данномъ разложеніи не имѣется. (См. № 695).

697. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = C_{14}^k a^{14-k} \cdot b^{-(14-k)} \cdot b^k \cdot a^{-k} = C_{14}^k a^{14-2k} \cdot b^{2k-14}$. Такъ какъ оба уравненія $14 - 2k = 6$ и $2k - 14 = -6$ удовлетворяются однимъ и тѣмъ же значеніемъ $k = 4$, то искомый членъ — *пятый* $= C_{14}^4 a^6 b^{-6} = 1001 a^6 b^{-6}$.

698. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = (-1)^k \cdot C_{12}^k \cdot a^{2(12-k)} \cdot b^{-(12-k)} \cdot b^{2k} \cdot a^{-k} = (-1)^k \cdot C_{12}^k \cdot a^{24-3k} \cdot b^{3k-12}$. Такъ какъ оба уравненія $24 - 3k = 0$ и $3k - 12 = 12$ удовлетворяются однимъ и тѣмъ же значеніемъ $k = 8$, то искомый членъ — *девятый* $= (-1)^8 \cdot C_{12}^8 a^0 b^{12} = 495 b^{12}$.

699. См. №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = (-1)^k \cdot C_9^k \cdot a^{3(9-k)} \cdot b^{-(9-k)} \cdot b^{3k} \cdot a^{-k} = (-1)^k \cdot C_9^k a^{27-4k} \cdot b^{4k-9}$. Такъ какъ оба уравненія $27 - 4k = 3$ и $4k - 9 = 15$ удовлетворяются однимъ и тѣмъ же значеніемъ $k = 6$, то искомый членъ — *седьмой* $= (-1)^6 \cdot C_9^6 a^3 b^{15} = 84 a^3 b^{15}$.

700. См №№ 688 и 689. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = (-1)^k \cdot C_{11}^k \cdot a^{11-k} \cdot b^{-(11-k)} \cdot b^k \cdot a^{-k} = (-1)^k \cdot C_{11}^k a^{11-2k} \cdot b^{2k-11}$. Такъ какъ оба уравненія $11 - 2k = 3$ и $2k - 11 = -3$ удовлетворяются однимъ и тѣмъ же значеніемъ $k = 4$, то искомый членъ — *пятый* $= (-1)^4 \cdot C_{11}^4 a^3 b^{-3} = 330 a^3 b^{-3}$.

701. По формулѣ общаго члена 3-ій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_3 = (-1)^2 \cdot C_n^2 \cdot x^{2(n-2)} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Слѣдовательно, коэффиціентъ при x равенъ:

$$C_n^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 16} = 31.$$

Изъ квадр. уравненія $n^2 - n - 992 = 0$ находимъ $n_1 = 32$ и $n_2 = -31$. Итакъ, $n = 32$. Слѣдовательно, восьмой членъ разложенія будетъ $U_8 = (-1)^7 \cdot C_{32}^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot x^{50}$.

702. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = C_{12}^k x^{-\frac{1}{2}(12-k)} \cdot x^{\frac{1}{3}k} = C_{12}^k x^{\frac{5}{6}k-6}$. Мы должны найти всѣ раціональные члены. Но для того, чтобы x было раціонально, показатель степени при x долженъ быть числомъ цѣлымъ; итакъ, пусть $\frac{5}{6}k - 6 = t$, гдѣ t произвольное цѣлое число (во всякомъ случаѣ не больше 12).

Очевидно, что t будетъ *цѣлымъ числомъ* только въ томъ случаѣ, если k будетъ дѣлиться на 6, т. е. при $k=0$, $k=6$ и $k=12$. Если $k=0$, то искомый членъ—*первый* $=\frac{1}{x^6}$; если $k=6$, то — седьмой $= C_{12}^6 x^{-1} = \frac{924}{x}$; если $k=12$, то *послѣдній* $= x^4$.

703. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = C_{13}^k x^{\frac{1}{3}(13-k)} \cdot x^{\frac{1}{7}k} = C_{13}^k x^{\frac{91-4k}{21}}$. Чтобы x было раціонально, необходимо, чтобы показатель степени $\frac{91-4k}{21}$ было *цѣлымъ числомъ*.

Итакъ, пусть $\frac{91-4k}{21} = t$, гдѣ t произвольное цѣлое число.

Рѣшая это неопредѣленное уравненіе по общимъ правиламъ, находимъ $k = 7 + 21t_1$. Такъ какъ k должно быть больше нуля и не больше 13, то единственное годное рѣшеніе будетъ при $t_1 = 0$, $k = 7$. Итакъ, единственный раціональный членъ разложенія будетъ *восьмой* $= U_8 = C_{13}^7 x^3 = 1716x^3$.

704. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = (-1)^k \cdot C_{21}^k x^{\frac{1}{6}(21-k)} \cdot x^{\frac{1}{9}k} = (-1)^k \cdot C_{21}^k x^{\frac{63-k}{18}}$. Для того, чтобы x было раціонально, показатель степени долженъ быть цѣлымъ числомъ. Рѣшая неопр. уравненіе $\frac{63-k}{18} = t$, находимъ

$k = 63 - 18t$; но k должно быть больше нуля и не больше 21. Изъ неравенствъ $63 - 18t > 0$ и $63 - 18t \leqslant 21$ находимъ: $t < \frac{7}{2}$ и $t \geqslant \frac{7}{3}$.

Единственное цѣлое значенiе t, заключенное между этими предѣлами, есть $t = 3$, слѣдов., $k = 63 - 18 \cdot 3 = 9$, и искомый членъ — *десятый* $= (-1)^9 C_{21}^9 x^3 = -293930x^3$.

705. Общiй членъ даннаго разложенiя равенъ: $U_{k+1} = (-1)^k \cdot C_{19}^k x^{\frac{1}{3}(19-k)} \cdot y^{\frac{1}{5}k}$. Для того, чтобы y было рацiонально, очевидно k должно быть кратнымъ 5. Такъ какъ $k \leqslant 19$, то k можетъ равняться только 0, 5, 10 и 15. Пробуя подставлять эти значенiя k въ показатель при x, видимъ, что только при $k = 10$ получается цѣлое число.

Итакъ, единственный рацiональный членъ разложенiя *одиннадцатый* $= (-1)^{10} \cdot C_{19}^{10} x^3 y^2 = 92378x^3y^2$.

706. Единственный рацiональный членъ даннаго разложенiя будетъ *одиннадцатый* (см. № 705); онъ же будетъ и однимъ изъ среднихъ членовъ.

707. Общiй членъ даннаго разложенiя равенъ: $U_k = C_{63}^k x^{\frac{1}{3}(63-k)} \cdot x^{\frac{1}{6}k} = C_{63}^k x^{21 - \frac{k}{6}}$. Очевидно, члены будутъ рацiональны только при k, кратномъ шести, т. е. это будетъ если $k = 0, 6, 12, 18 \ldots\ldots 60$. Итакъ, искомые члены будутъ: *первый, седьмой, тринадцатый . . . . шестьдесятъ первый.*

708. Общiй членъ даннаго разложенiя равенъ: $U_k = C_{63}^k x^{\frac{1}{2}(63-k)} \cdot x^{\frac{1}{4}k} = C_{63}^k x^{\frac{126-k}{4}}$. Члены будутъ рацiональны, если $\frac{126-k}{4} = t$, произвольному цѣлому числу. Итакъ, $k = 126 - 4t$.

Изъ неравенствъ $126 - 4t > 0$ и $126 - 4t \leqslant 63$ находимъ $t < 31\frac{1}{2}$ и $t \geqslant 15\frac{3}{4}$. Итакъ, t можетъ принимать всѣ цѣлыя значенiя отъ 16 до 31 включ. Соотвѣтственно съ этимъ k можетъ равняться 2, 6, 10 . . . . 62. Итакъ, рацiональными членами будутъ *третiй, седьмой, одиннадцатый* . . . . . до *шестьдесятъ третьяго.*

709. Общій членъ даннаго разложенія равенъ: $U_{k+1} = C_{100}^k x^{\frac{2}{5}(100-k)} \,.\, x^{\frac{3}{10}k} = C_{100}^k \,.\, x^{40-\frac{k}{10}}$. Очевидно, члены будутъ раціональны при k, кратномъ десяти, т. е. будутъ члены *одиннадцатый, двадцать первый*, ... до *сто перваго* вкл.

710. Такъ какъ A по условію есть сумма членовъ нечетнаго (т. е. $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots$), а B — четнаго порядка (т. е. $u_2 + u_4 + \ldots$) въ разложеніи $(x+a)^n$, то очевидно, что сумма $A+B$ представитъ собой все разложеніе $(x+a)^n$, такъ что

$$(x+a)^n = A + B \quad \ldots \quad (1).$$

Если у четныхъ членовъ перемѣнить знаки на обратные, то получится очевидно разложеніе $(x-a)^n$, такъ что

$$(x-a)^n = A - B \quad \ldots \quad (2)$$

перемножая (1) на (2) находимъ:

$$A^2 - B^2 = (x^2 - a^2)^n.$$

711. Данная дробь $=2$; (1,1,1,1,1,1,1,1,1,2). Третья подходящая $=\frac{5}{2}$. См. «*Дополн. къ Алг.*» §§ 101—105.

712. Поступая, согласно извѣстнымъ изъ теоріи правиламъ, (см. «*Дополн. къ Алг.* §§ 215, 216), получаемъ:

a) $x = -75 + 12t$; $y = -45 + 7t$; $t \geqslant 7$.

b) $x = -50 + 27t$; $y = 115 - 62t$; положит. рѣшеній нѣтъ ни одного.

c) $x = -20 + 37t$; $y = -46 + 85t$; $t \geqslant 1$.

d) $x = 5 + 13t$; $y = 3 + 8t$; $t \geqslant 0$.

e) $x = -48 + 17t$; $y = 144 - 29t$; полож. рѣшеній нѣтъ ни одного.

f) невозможно, потому что коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго дѣлителя 2, на котораго не дѣлится свободный членъ («*Дополн.*» § 200).

g) $x = -44 + 15t$; $y = -110 + 37t$; $t \geqslant 3$.

713. Обозначая величину данной дроби буквой x, имѣемъ: *)

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}}.$$

Составляемъ подходящія 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{10}{7}$; 4) $\frac{10x+3}{7x+2}$.

Послѣдняя подходящая равна точному значенію непрерывной, т. е. $= x$. Итакъ, имѣемъ уравненіе

$\frac{10x+3}{7x+2} = x$, или $7x^2 - 8x - 3 = 0$, откуда $x = \frac{4 \pm \sqrt{37}}{7}$.

Такъ какъ x очевидно положительно, то вопросу удовлетворяетъ только лишь положительный корень уравненія. Итакъ,

$$x = \frac{4 + \sqrt{37}}{7}.$$

714. Обозначивъ величину дроби буквой x, имѣемъ:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + x}} = \frac{2 + x}{3 + x},$$

что приводитъ къ квадр. уравненію $x^2 + 2x - 2 = 0$, откуда $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Такъ какъ x положительно, то вопросу удовлетворяетъ только лишь положительный корень уравненія. Итакъ, $x = -1 + \sqrt{3}$.

715. Обозначивъ величину первой дроби буквой x, имѣемъ: $x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}}$, что приводитъ къ квадр. уравн., $bx^2 - abx - a = 0$, откуда $x = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b}$. Знакъ $+$ передъ корнемъ поставленъ потому, что x по заданію по-

---

*) См. „*Дополн. къ Алгебрѣ*“ § 118.

ложительно. Вторая дробь равна очевидно $x - a$, т. е. $=$

$$\frac{-ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b}.$$

Перемножая эти значенія, найдемъ что величина заданнаго произведенія равна $\frac{a}{b}$.

716. Пишемъ тождество:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_1}{q_1} = \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) + \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right) + \left(\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_{n-3}}{q_{n-3}}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}\right) + \left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right),$$

или, замѣняя каждую изъ стоящихъ въ скобкахъ разностей равной ей величиной (См. «Дополн. § 106»), получаемъ:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-2}q_{n-1}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{q_3q_4} - \frac{1}{q_2q_3} + \frac{1}{q_1q_2}.$$

717. Согласно изложенному въ § 7 «*Дополн. къ Алгебрѣ*» искомое уравн., будетъ: $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$, или $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Такимъ образомъ, это будетъ уравненіе— биквадратное, какъ и слѣдовало ожидать. (См. тамъ же § 155).

718. Чтобы коэффиціенты были раціональны, другой корень долженъ равняться $5 + \sqrt{2}$. Искомое уравн., будетъ $x^2 - 10x + 23 = 0$.

719. Чтобы коэф. были вещественны, другой корень долженъ быть $2 - 3i$. (См. «Дополн.» § 154). Искомое ур-іе $x^2 - 4x + 13 = 0$.

720. Наименьшая возможная степень — вторая; другой корень $1 + \sqrt{2}$. Искомое ур-іе: $x^2 - 2x - 1 = 0$.

721. Чтобы коэф. были вещественны, ур-іе, кромѣ корня $1+i$, должно имѣть и сопряженный корень $1-i$; итого всего будетъ 3 корня, т. е., ур-іе будетъ третьей степени. Для составленія его имѣемъ:

$$(x-1)(x-1-i)(x-1+i)=0, \text{ или } x^3-3x^2+4x-2=0.$$

См. *«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 7.

722. Чтобы коэфф. были раціональны, ур-іе должно имѣть корень сопряженный съ $1+\sqrt{3}$, т е.. $1-\sqrt{3}$; также чтобы они были вещественны необходимъ еще корень $1-i\sqrt{2}$; итого, всѣхъ корней 4, т. е. уравненія — *четвертой степени*:

$$(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{2})(x-1+i\sqrt{2})=0,$$

$$\text{или } x^4-4x^3+5x^2-2x-6=0.$$

723. Разсуждая подобно предыдущему (№№ 720—222), видимъ что наименьшая возможная степень — *четвертая*; корни этого уравн., $1+i$, $1-i$, $3+i\sqrt{2}$, $3-i\sqrt{2}$:

$$(x-1-i)(x-1+i)(x-3-i\sqrt{2})(x-3+i\sqrt{2})=0, \text{ или}$$

$$x^4-8x^3+25x^2-34x+22=0.$$

724. Наименьшая возможная степень—*третья*; третій корень $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Искомое ур-іе:

$$\left(x-1\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=0, \text{ или } 2x^3-4x^2+$$

$$+x+1=0.$$

725. Четвертый корень ур-ія равенъ $\frac{1}{3}$ (*«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 175) и искомое ур-іе будетъ:

$$\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0, \text{ или } 6x^4-35x^3+62x^2-$$

$$-35x+6=0.$$

726. Четвертый корень равенъ $\left(-\frac{1}{3}\right)$. См. *«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 177 и искомое ур-іе будетъ:

$$\left(x-2\right)\left(x+3\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0, \text{ или } 6x^4+5x^3-38x^2+$$
$$+5x+6=0.$$

727. Остальные два корня суть $\left(-\frac{1}{5}\right)$ и $\left(+1\right)$ см. *«Дополн. къ Алг.»* § 177. Искомое уравненіе:

$$(x-5)\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-1)(x+1)=0,$$

или $5x^4-24x^3-10x^2+24x+5=0.$

728. Остальные два корня суть $(-\sqrt{3})$ и $(-\sqrt{2})$. См. *«Дополн. къ Алг.»* § 155. Искомое уравненіе будетъ: $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$, или $x^4-5x^2+6=0$

729. Чтобы коэф. были раціональны, уравненіе кромѣ данныхъ двухъ корней, должно имѣть еще два сопряженные корня $1-\sqrt{2}$ и $2-\sqrt{2}$. Слѣд., искомое ур-іе будетъ:

$$(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})=0,$$
или $x^4-6x^3+9x^2-2=0.$

730. Если биквадратное ур-іе имѣетъ корень $(\sqrt{2}+\sqrt{5})$, то оно имѣетъ также и корень $(-\sqrt{2}-\sqrt{5})$. См. *«Дополн. къ Алг.»* § 155. Но для того, чтобы коэффиціенты были раціональны, ур-іе должно еще имѣть корни, сопряженные этимъ, т. е. $(\sqrt{2}-\sqrt{5})$ и $(-\sqrt{2}+\sqrt{5})$. Слѣд., искомое ур-іе имѣетъ видъ:

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{5})(x+\sqrt{2}+\sqrt{5})(x-\sqrt{2}+\sqrt{5})(x+\sqrt{2}-\sqrt{5})=0,$$
или $x^4-14x^2+9=0.$

731. Если бикв. ур-іе имѣетъ корень $\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)$, то оно имѣетъ и корень $\left[-\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)\right]$. См. *«Дополн. къ Алг.»*

§ 155. Но чтобы коэф. были вещественны и раціональны, оно должно имѣть еще и сопряженные съ этими корни, т. е. $\frac{2}{\sqrt{2}}(1-i)$ и $\left[-\frac{2}{\sqrt{2}}(1-i)\right]$. Итакъ, искомое уравненіе будетъ:

$$\left[x-\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)\right]\left[x+\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)\right]\left[x-\frac{2}{\sqrt{2}}(1-i)\right]\left[x+\frac{2}{\sqrt{2}}(1-i)\right]=0,$$

или $$x^4+16=0.$$

732. Искомое уравненіе будетъ квадратное, имѣющее другой корень $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, т. е. $x^2-x+1=0$.

733. Рѣшается совершенно такъ же, какъ № 730. Искомое уравненіе будетъ $x^4-10x^2+1=0$.

734. Да, всегда. Извѣстно, что условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы неопредѣленное уравненіе рѣшалось въ цѣлыхъ числахъ, состоитъ въ томъ, чтобы коэффиціенты при x и y были числа первыя между собою. (*«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 203). Здѣсь же, если a и b имѣютъ общаго множителя, то такъ какъ вторая часть уравненія $=ab$, то этотъ же множитель войдетъ и во вторую часть и все уравненіе можно будетъ на него сократить, такъ что въ результатѣ коэффиціенты при x и y будутъ взаимно простыя, и потому уравненіе можно будетъ рѣшить въ цѣлыхъ числахъ.

735. Всякое число, кратное 5, имѣетъ видъ $5x$, гдѣ x — произвольное цѣлое. Число же, дающее при дѣленіи на 13 въ остаткѣ 7 имѣетъ видъ $13y+7$. Слѣдовательно, имѣемъ неопредѣленное уравненіе $5x=13y+7$, изъ котораго надо по условію опредѣлить наименьшее цѣлое и положительное значеніе x. Рѣшая это неопр. уравненіе по общимъ правиламъ, получаемъ $x=4-13t$. Наименьшее значеніе x будетъ при $t=0$; въ этомъ случаѣ $x=4$. Такъ какъ интересующее насъ число имѣетъ видъ $5x$, то оно равно 20.

736. Разсуждая такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, увидимъ, что вопросъ сводится къ рѣшенiю въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопр. уравненiя $13x = 21y + 8$, откуда $x = 21t - 1$. Наименьшее положительное значенiе x будетъ при $t = 1$; въ этомъ случаѣ $x = 20$. Слѣд., искомое число $= 13x = 260$.

737. См. предыдущую.

738. Подобно № 735 вопросъ приводитъ къ неопред. уравненiю $5x = 3y + 1$, изъ котораго $x = 2 + 3t$. Наименьшее значенiе x при $t = 0$; въ этомъ случаѣ $x = 2$. Слѣд., искомое число $= 5x = 10$.

739. Подобно № 735 вопросъ приводитъ къ рѣшенiю неопр. уравненiя $7x = 5y + 3$, изъ котораго $x = 4 + 5t$; при $t = 0$, x имѣетъ наименьшее значенiе $= 4$. Слѣд., искомое число $= 7x = 28$.

740. Въ условiе этой задачи вкралась досадная опечатка, а именно при дѣленiи на 12 долженъ получиться остатокъ:

$$\sqrt{2}\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right]\left[\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right],$$

т. е. въ третьемъ множителѣ подъ вторымъ корнемъ должно находится не $x^2 + 1$, а $x^2 - 1$.

Преобразуя $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$ по извѣстнымъ правиламъ (*«Дополн. къ Алгебрѣ»* §§ 167, 168), находимъ:

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}},$$

а слѣд., все это выраженiе равно:

$$\sqrt{2}\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right]\left[\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \left[(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2\right] = 2.$$

Число, дающее при дѣленіи на 21 въ остаткѣ 17, имѣетъ видъ $21x+17$; также число, дающее отъ дѣленія на 12 остатокъ 2 равно $12y+2$. Слѣд., вопросъ приводитъ къ рѣшенію въ цѣлыхъ и полож. числахъ неопредѣленнаго уравненія:

$$21x+17=12y+2, \text{ или } 4y-7x=5.$$

Изъ этого уравненія получаемъ: $x=1+4t$. Слѣд., искомое число $21x+17=21(1+4t)+17=38+84t$. Такъ какъ мы должны найти наибольшее трехзначное число, то имѣемъ неравенство $38+84t<1000$, изъ котораго $t\leqslant 11$. Взявъ для t наибольшее возможное значеніе, т. е. 11, находимъ, что искомое число $=38+84t=38+924=962$.

Провѣрка: $962=21 \,.\, 45+17$; $962=12 \,.\, 80+2$.

741. Общій видъ всякаго нечетнаго числа есть $2y+1$, гдѣ y произвольное цѣлое число. Слѣдовательно, вопросъ приводится къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія:

$$\frac{10-7x}{9}=2y+1, \text{ или } 7x+18y=1,$$

причемъ, по условію, выраженіе $2y+1$, должно быть отрицательнымъ.

Рѣшая это уравненіе пока только въ *цѣлыхъ числахъ*, получаемъ $x=-5+18t$ и $y=2-7t$. Такъ какъ по условію $2y+1$ должно быть отрицательнымъ, то для опредѣленія предѣловъ для t имѣемъ неравенство: $2(2-7t)+1<0$, или $5-14t<0$, откуда $t>\frac{5}{14}\cdot$ Такъ какъ t число цѣлое, то слѣд., оно можетъ равняться 1, 2, 3, 4 . . . Итакъ, отвѣтъ на предложенную задачу слѣдующій: $x=-5+18t$, причемъ $t\geqslant 1$.

742. Общій видъ числа, дающаго при дѣленіи на 6 въ остаткѣ 5 есть $6y+5$, гдѣ y — произвольное цѣлое число. Слѣдовательно, вопросъ приводится къ рѣшенію неопр. уравненія:

$$\frac{3-7x}{11}=6y+5, \text{ или } 66y+7x=-52.$$

Рѣшая это уравненіе по извѣстнымъ правиламъ (см. «*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 209), получаемъ: $x=2-66t$, $y=-1+7t$. Такъ какъ по условію $6y+5$ должно быть положительнымъ, то для опредѣленія предѣловъ для t имѣемъ неравенство:

$$6(-1+7t)+5>0, \text{ или } 42t-1>0, \text{ откуда } t>\frac{1}{42}\cdot$$

Слѣд., t можетъ равняться 1, 2, 3, 4 . . .

Итакъ, отвѣтъ на предложенную задачу слѣдующій:

$$x=2-66t, \text{ причемъ } t\geqslant 1.$$

743. Поступая такъ же, какъ въ №№ 741 и 742 рѣшаемъ неопр. уравненіе:

$$\frac{11-x}{7}=4y+3, \text{ или } x+28y=-10,$$

откуда $x=-10-28t$; $y=t$. По условію $4y+3>0$, значитъ $4t+3>0$, т. е. $t>-\frac{3}{4}\cdot$ Итакъ, $x=-10-28t$, гдѣ t есть любое положительное и цѣлое число, или нуль.

744. Поступая такъ же, какъ въ №№ 741 и 742, рѣшаемъ неопредѣленное уравненіе:

$$\frac{4-9x}{10}=4y+1, \text{ или } 9x+40y=-6,$$

откуда $x=-14-40t$, $y=3+9t$. По условію $4y+1>0$, значитъ $4(3+9t)+1>0$, откуда $t>-\frac{13}{36}\cdot$ Итакъ, $x=-14-40t$, гдѣ t есть любое положительное цѣлое число, или нуль.

745. Поступая такъ же, какъ въ №№ 741 и 742, рѣшаемъ неопр. уравненіе:

$$\frac{10-7x}{9}=2y, \text{ или } 7x+18y=10,$$

откуда $x=4-18t$, $y=-1+7t$. По условію $2y<0$, значитъ $2(-1+7t)<0$, откуда $t<\frac{1}{7}\cdot$ Итакъ, $x=4-18t$, гдѣ t есть любое цѣлое отрицательное число, или нуль.

746. Поступая такъ же, какъ въ №№ 471, 472, рѣшаемъ неопр. уравненіе:

$$\frac{1-7x}{9}=2y+1,\ \text{или}\ 7x+18y=-8,$$

откуда $x=4-18t$, $y=-2+7t$. По условію $2y+1>0$, значитъ $2(-2+7t)+1>0$, откуда $t>\frac{3}{14}$. Итакъ, $x=4-$ $-18t$, причемъ t есть любое цѣлое положительное число 1, 2, 3, 4 . . . .

747. $x=2t$; $y=-100+11t$. См. «*Дополн. къ Алг.*» § 209.

748. Отвѣты для рѣшенія въ *цѣлыхъ числахъ*:

$$x=-8+30t\ \text{и}\ y=9-23t.$$

Для того, чтобы x и y были отрицательны необходимо, чтобы t удовлетворяло одновременно двумъ неравенствамъ: $-8+30t<0$ и $9-23t<0$, изъ которыхъ для t получаются противорѣчащіе предѣлы: $t<\frac{4}{15}$ и $t>\frac{9}{23}$.

Итакъ, данное неопр. уравненіе рѣшить въ *отрицательныхъ* числахъ нельзя, чего и слѣдовало ожидать, такъ какъ сумма двухъ отрицательныхъ чиселъ не можетъ равняться положительной величинѣ 86.

749. Формулы рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ: $x=-3+$ $+30t$; $y=5-23t$. Отрицательныхъ рѣшеній нѣтъ ни одной пары. См. № 748.

750. Отрицательныхъ рѣшеній нѣтъ ни одной пары. Формулы *цѣлыхъ* рѣшеній: $x=-660+144t$; $y=408-89t$.

751. Сложивъ данныя уравненія, получаемъ: $5x-y=3$, откуда $x=t$, $y=-3+5t$. Подставляя эти значенія въ любое изъ данныхъ уравненій, получаемъ $z=-14+17t$.

752. Вычитая первое уравненіе изъ второго, получаемъ: $6x+5y=-400$, откуда непосредственно убѣждаемся въ невозможности рѣшенія этихъ уравненій въ *положительныхъ* числахъ; рѣшеніе же только въ *цѣлыхъ* числахъ не представляетъ труда.

753. Складывая данныя уравненія, получаемъ $4x=10$, т. е. убѣждаемся въ невозможности рѣшенія данныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ.

754. Числитель данной дроби разлагается на множители: $(x-2)(x+3)$. Смотримъ, не дѣлится ли на этихъ же множителей и знаменатель. Для этого подставляемъ вмѣсто x сперва 2, а потомъ (-3) (см. «*Дополн. къ Алг.*». § 4). Такъ какъ подстановка 2 вмѣсто x обращаетъ знаменатель въ 0, то онъ дѣлится на $x-2$. На $x+3$ онъ не дѣлится. Итакъ, данная дробь равна:

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(5x^3-3x^2+12)}=\frac{x+3}{5x^3-3x^2+12}.$$

755. Знаменатель разлагается на множители $3(x-7)\left(x-\frac{17}{3}\right)$. Подставляя въ числитель вмѣсто x значенія 7 и $\frac{17}{3}$, видимъ, что при $x=7$ онъ обращается въ нуль. Слѣдовательно, и знаменатель дѣлится на $x-7$. («*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 4). Итакъ, данная дробь равна:

$$\frac{(x-7)(x^2-12x+35)}{3(x-7)(x-\frac{17}{3})}=\frac{x^2-12x+35}{3x-17}.$$

756. Числитель и знаменатель легко разлагаются на множителей:

числит. $=5x(x^2-3)+2(x^2-3)=(x^2-3)(5x+2)$.

знаменат. $=7x(x^2-3)-4(x^2-3)=(x^2-3)(7x-4)$.

Итакъ, данная дробь $=\frac{5x+2}{7x-4}$.

757. Числитель разлагается на множители: $(x-1)(x+5)$. Такъ какъ знаменатель, при $x=1$, обращается въ нуль, то и онъ дѣлится на $x-1$. («*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 4). Итакъ, данная дробь равна:

$$\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x^2+4x+2)}=\frac{x+5}{x^2+4x+2}.$$

758. Числитель и знаменатель легко разлагаются на множители:

числит. $= 5x(x^2+3)+7(x^2+3)=(x^2+3)(5x+7)$;

знаменат. $= 6x(x^2+3)-4(x^2+3)=(x^2+3)(6x-4)$.

Итакъ, данная дробь равна $\frac{5x+7}{6x-4}$.

759. При $x=3$ числитель и знаменатель обращаются въ нуль, и слѣд., тотъ и другой дѣлятся на $x-3$. (См. *Дополн. къ Алгебрѣ»* § 4). Поэтому данная дробь равна:

$$\frac{(x-3)(x^3-x^2-7x+3)}{(x-3)(x^2+2x-15)}=\frac{x^3-x^2-7x+3}{x^2+2x-15}.$$

Подставляя вмѣсто x его значенiе 3, видимъ, что числитель и знаменатель опять таки обращаются въ нули, т. е. дѣлятся на $x-3$. Слѣд., данная дробь равна:

$$\frac{(x-3)(x^2+2x-1)}{(x-3)(x+5)}=\frac{x^2+2x-1}{x+5}.$$

Подставляя вмѣсто x его значенiе 3, находимъ, что истинное значенiе данной дроби $=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$.

Общее замѣчанiе,

относящееся къ задачамъ №№ 760—773.

Всѣ квадратныя неравенства рѣшаются такъ, какъ показано въ Учебникѣ Алгебры Киселева § 246, а. Не повторяя здѣсь того, что должно быть знакомо изъ учебника, приведемъ только результаты:

Квадратное неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ *удовлетворяется слѣдующими значенiями* x:

I Если корни трехчлена ax^2+bx+c *вещественные и неравные, то при* $a>0$, *значенiя x находятся* **внѣ корней,** (*т. е. больше большаго или меньше меньшаго корня; при* $a<0$, *x лежитъ* **между корнями** *(т. е. меньше большаго и больше меньшаго корней).*

II Если корни вещественные и равные, то при $a>0$ неравенство удовлетворяется всѣми вещественными значенiями x. При $a<0$, неравенство удовлетворено не можетъ быть.

III. *Если корни мнимые, то при $a>0$ неравенство удовлетворяется всѣми вещественными значенiями x, при $a<0$, — неравенство удовлетворено не можетъ быть.*

760. $-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)>0;\ \frac{1}{2}>x>-\frac{3}{2}.$

761. $6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)>0;\ x>\frac{2}{3}$ или $x<-\frac{3}{2}.$

762. $-2\left(x-2\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)>0;\ 2>x>-\frac{1}{3}.$

763. $5\left(x-10\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)>0;\ x>10$ или $x<-\frac{2}{5}.$

764. Корни трехчлена мнимые; коэф. при x^2 положителенъ; слѣд., неравенство удовлетворяется всякимъ вещественнымъ значенiемъ x.

765. Совершенно то же, что въ № 764.

766. $-(x-2)^2>0$; неравенство не удовлетворяется никакимъ вещественнымъ значенiемъ x.

767. То же, что въ № 764.

768. $-6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)>0;\ \frac{1}{2}>x>\frac{1}{3}.$

769. Корни трехчлена мнимые; неравенство не можетъ быть удовлетворено никакимъ вещественнымъ значенiемъ x.

770. То же, что въ № 769.

771. $-\left(x-2-\sqrt{11}\right)\left(x-2+\sqrt{11}\right)>0;$

$2+\sqrt{11}>x>2-\sqrt{11}.$

772. $-3\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-1\right)>0$, слѣд., $\frac{5}{3}>x>1$. Цѣлыхъ отрицательныхъ значенiй между $\frac{5}{3}$ и 1 не существуетъ, слѣд., предложенная задача невозможна.

773. Имѣемъ: $2x^2-bx+3<0$, или $-2x^2+bx-3>0$. Неравенство можетъ удовлетворяться всякимъ произвольнымъ значенiемъ x только лишь тогда, если корни квадр. трехчлена равные или мнимые и притомъ коэф. при x^2 *положителенъ*. Такъ какъ въ данномъ трехчленѣ коэф. при x^2 отрицателенъ, то такой случай, когда неравенство удовлетворяется произвольнымъ значенiемъ x для данной задачи *невозможенъ*.

774. Изъ теорiи извѣстно (*«Дополн. къ Алг.»* § 138), что при безконечномъ убыванiи коэффицiента a въ квадр. уравненiи $ax^2+bx+c=0$ одинъ изъ корней этого уравненiя стремится къ безконечности. Если одинъ корень даннаго уравненiя $ax^2+2x+4=0$ равенъ 1000, то соотвѣтствующее значенiе a можно найти изъ уравненiя:

$$a \,.\, 1000^2+2 \,.\, 1000+4=0, \text{ откуда } a=-\frac{2004}{1000^2}.$$

Для того же, чтобы x сдѣлалось больше тысячи, надо, чтобы a было меньше этого значенiя, т. е. $a<-\frac{2004}{1000^2}$.

775. Разсуждая такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, находимъ, что при $x=100$ величина a опредѣлится изъ уравненiя $a100^2-2\,.\,100-2=0$, откуда $a=\frac{202}{100^2}$; если же x долженъ быть >100, то a должно быть $<\frac{202}{100^2}$.

776. На основанiи формулы № 1 въ § 67 *«Дополн. къ Алгебрѣ»*, выводимъ, что $x\geqslant 999000$. Надо помнить, что полученный результатъ даетъ очень преувеличенное значенiе x и что въ дѣйствительности можно взять для x значенiе гораздо меньшее, но вычислить его можно только при помощи логариѳмовъ (см. § 68 *«Дополненiй»*).

777. Требуемое неравенство будетъ удовлетворено, если мы подберемъ x такъ, чтобы $\left(\frac{10}{8}\right)^x > 10000$; но послѣднему неравенству очень легко удовлетворить на основаніи форм. 1 № 67 «*Дополн. къ Алгебрѣ*»:

$$x > \frac{10000-1}{\frac{10}{8}-1};\ x \geqslant 39996.$$

778. Чтобы удовлетворить требуемому неравенству, достаточно подобрать x такъ, чтобы $\left(\frac{100}{102}\right)^x > \frac{100}{23}$, откуда на основаніи форм. 2 изъ § 67 «*Дополн. къ Алгебрѣ*» заключаемъ, что для этого x долженъ быть отрицательнымъ числомъ, численное значеніе котораго $\geqslant \frac{3850}{23}$.

779. Имѣемъ: $3^x - 1 < \frac{1}{270}$, или $3^x < \frac{271}{270}$, или $3^{-x} > \frac{270}{271}$. По форм. № 1 изъ § 67 «*Дополн. къ Алгебрѣ*» находимъ $x \leqslant \frac{1}{542}$.

780. Требуется удовлетворить неравенству:

$$(0{,}5)^x \cdot (0{,}5^7 - 1) < 0{,}001, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(-\frac{127}{128}\right) < 0{,}001, \text{ или}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{127}{128} > -\frac{1}{1000}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > -\frac{128}{127000}.$$

Такъ какъ всякая степень положительнаго числа есть число положительное, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ всегда > 0, а потому неравенство это удовлетворяется произвольнымъ значеніемъ x.

781. Обозначая величину даннаго выраженія черезъ x, имѣемъ:

$$\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a}\ \ldots}}}\ \ldots = x,$$

или, возвышая обѣ части въ степень r:

$$\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a\sqrt[r]{a}\ldots\ldots}}}=x^r,\ \text{т. е. } a\,.\,x=x^r,$$

откуда $x=\sqrt[r-1]{a}$.

782. Данное выраженіе можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія $(1-x^n)$ на $(1-x)$. Слѣд., квадратъ его будетъ:

$$\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)^2=\frac{1-2x^n+x^{2n}}{1-2x+x^2}.$$

Выполняя дѣленіе, найдемъ частное

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots\ldots,$$

которое и представляетъ собой искомый квадратъ.

783. Первый множитель произведенія есть частное отъ дѣленія $(1-x^n)$ на $(1-x)$. Второй множитель можетъ быть частнымъ

1) или отъ дѣленія $(1+x^n)$ на $(1+x)$, или 2) отъ дѣленія $(1-x^n)$ на $(1+x)$. Слѣд., искомое произведеніе равно

$$1)\text{ или }\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1+x^n}{1+x}\right)=\frac{1-x^{2n}}{1-x^2},$$

$$2)\text{ или }\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1-x^n}{1+x}\right)=\frac{1-2x^n+2^{2n}}{1-x^2}.$$

Выполнивъ дѣленіе, увидимъ, что какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ первые 7 членовъ будутъ одинаковые, а именно: $1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots\ldots$

Это и есть искомое произведеніе.

784. Если корни кубичнаго ур-ія суть α, α и β, то самое ур-іе имѣемъ видъ $(x-\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)=0$, или открывъ скобки:

$$x^3-(2\alpha+\beta)\,x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta=0.$$

Такъ какъ по условію данное кубичное ур-іе имѣетъ форму $x^3+px+q=0$, то изъ сравненія коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x находимъ:

1. . . . . . $2\alpha+\beta=0$; 2. . . . $\alpha^2+2\alpha\beta=p$; 3. . . . . $-\alpha^2\beta=q$.

Опредѣливъ изъ (1) ур-ія $\beta=-2\alpha$ и подставляя во второе и третье, получимъ: $p=-3\alpha^2$ и $q=2\alpha^3$; возведя первое изъ этихъ ур-ій въ кубъ, а второе въ квадратъ, имѣемъ: $p^3=-27\alpha^6$; $q^2=4\alpha^6$; слѣд.,

$$\alpha^6=-\frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}, \text{ откуда } 27q^2+4p^3=0.$$

Это и есть искомая зависимость.

785. Имѣемъ $2^{4h+2}+1=2^{2(2h+1)}+1=4^{2h+1}+1^{2h+1}$. Послѣднее выраженіе, какъ сумма нечетныхъ степеней, непремѣнно дѣлится на сумму первыхъ степеней, $(4+1)$, т. е. на 5, и потому не можетъ быть числомъ абсолютнымъ — простымъ.

786. Если основаніе больше единицѣ, то большему числу соотвѣтствуетъ и большій логариѳмъ; при основаніи же меньше единицы — наоборотъ. (*«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 66). Поэтому предложенное неравенство возможно только лишь при $x<1$.

787. См. Алгебру Киселева § 325. Нахожденіе логариѳмовъ при помощи непрерывныхъ дробей въ программу не входитъ, такъ что предлагать подобные вопросы на экзаменахъ не имѣютъ права.

788. Уравненіе это можетъ быть удовлетворено только лишь при $x=\infty$. См. *«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 130.

789. Обозначая искомыя числа x и y, имѣемъ два ур-ія: $x+y=2A$ и $xy=q^2$. Слѣд., эти числа найдутся, какъ корни квадр. ур-ія $z^2-2Az+q^2=0$.

790. Корни, о которыхъ говорится въ условіи, суть очевидно $(+2)$ и (-2). См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. уравн.» § 10.

Выдѣляемъ въ ур-іи множители $(x-2)$ и $(x+2)$:

$$(x-2)(x+2)(x^2+x+1)=0.$$

Итакъ $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$.

791. См. «*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 187, IV.

792. См. «*Дополн. къ Алгебрѣ*» § 187, VI.

793. Имѣемъ: $x^3-2^3=0$, или $(x-2)(x^2+2x+4)=0$, откуда $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$.

794. См. № 793.

795. Если $x=\sqrt[5]{-1024}$, то $x^5+1024=0$, или $x^5+4^5=0$, или $(x+4)(x^4-4x^3+16x^2-64x+256)=0$. Слѣд., $x_1=-4$ и остается рѣшить ур-іе $x^4-4x^3+16x^2-64x+256=0$. Такъ какъ $1:256=4^2:64^2$, то ур-іе это рѣшается, какъ возвратное (См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур-ій § 13).

Можно эту задачу рѣшить и иначе: найдя ариѳметическій корень 4, умножаемъ его поочередно на всѣ 5 значеній корня пятой степени изъ отрицательной единицы. См. «*Дополн. къ Алгебрѣ*» §§ 186 и 187, IV.

796. Изъ ур-ія $x^3=0{,}125$, или $x^3-0{,}5^3=0$, находимъ: $(x-0{,}5)(x^2+0{,}5x+0{,}25)=0$, откуда или $x=0{,}5$, или же $x^2+0{,}5x+0{,}25=0$, т. е. $x=\frac{1}{4}(-1\pm i\sqrt{3})$.

797. 1) $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$. См. «Дополн.» § 187, III.

2) $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$. См. «Дополн.» § 187, V.

3) $x^8+1=(x^4+1)^2-2x^4=(x^4+x^2\sqrt{2}+1)(x^4-x^2\sqrt{2}+1)$.

798. $(2x)^6-3^6=\Big[(2x)^3-3^3\Big]\Big[(2x)^3+3^3\Big]=$

$$=(2x-3)(2x+3)(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9).$$

799. $2b^2+4a^2b+a^2b+2a^4=2b(b+2a^2)+a^2(b+2a^2)=(b+2a^2)(2b+a^2)$.

800. $2x^2 - x + 3$. См. Алгебру Киселева § 162.

801. $2a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{3}} + 4c^{\frac{1}{4}}$. См. Алгебру Киселева § 162.

802. $1728 = 2^6 . 3^3$. **803.** 0,4985.

804. $x : y = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$, откуда $(x + y) : x = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : \frac{3}{4}$, или $343 : x = 19 : 9$. Слѣд., $x = 343 . \frac{9}{19} = \frac{3087}{19}$; $y = \frac{3430}{19}$.

805. $x : y : z : v = 1 : 2 : 3 : 4$, или $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{v}{4} = \frac{x+y+z+v}{1+2+3+4} = \frac{2570}{10}$, откуда $x=257$; $y=514$; $z=771$; $z=1028$.

806. $x : y = \frac{3}{4} : 1$; $y : z = 5 : \frac{1}{2}$, слѣд., $x = \frac{3}{4}y$ и $z = \frac{1}{10}y$. Такъ какъ $x + y + z = 100$, то $\frac{3}{4}y + y + \frac{1}{10}y = 100$, откуда $y = \frac{2000}{37}$ и т. д.

807. $x : y = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$; $y : z = \frac{7}{9} : \frac{3}{5}$; слѣд. $x = \frac{9}{10}y$ и $z = \frac{27}{35}y$. Такъ какъ $x + y + z = 630$, то $\frac{9}{10}y + y + \frac{27}{35}y = 630$, откуда $y = \frac{44100}{187}$ и т. д.

808. При обращенiи $\frac{11}{27}$ въ десятичную, получится чистая перiодическая дробь съ тремя цыфрами въ перiодѣ. При обращенiи $\frac{1}{60}$ получится смѣшанная перiодическая съ двумя цыфрами до перiода и одной въ перiодѣ. См. «Курсъ теоретической Ариѳметики» §§ 144.

809. Число 1920 не можетъ быть полнымъ квадратомъ, потому что оканчивается *однимъ* нулемъ. Числа 8757 и 2133 не могутъ быть полнымъ квадр., потому что оканчиваются на 7 и на 3.

810. 80 съ недост. и 81 съ избыткомъ. См. Алгебру Киселева § .

811. Изъ уравненія $(80-x) \cdot 1 = (x-50) \cdot 3$ находимъ $x = 57^\circ{,}5$.

812. Проба сплава $= \frac{82 \cdot 5 + 90 \cdot 3}{8} = 85$.

813. $\frac{ap + bq + cd}{a + b + c}$. **814**. $\frac{p(96c + d)}{q(96a + b)}$.

815. 6. **816**. 4 часа 10 минутъ.

817. $2{,}4419a$ фунтовъ $= 2{,}4419a \cdot 96$ золотниковъ $=$ $2{,}4419a \cdot 96 \cdot 96$ долей.

818. 125. **819**. $44444\frac{4}{9}$ руб.

820. Формула сложныхъ процентовъ имѣетъ видъ $A = a(1 + r)^t$, гдѣ $r = 0{,}01p$. (См. Алгебру Киселева § 295). По условію $A = 2a$. Изъ формулы:

$$2a = a(1 + r)^t \text{ находимъ } t = \frac{log 2}{log(1 + r)}.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что сложные проценты въ программу не входятъ.

821. Пусть нищихъ было x, денегъ y. По условію $15x = y + 10$; $12x = y - 14$, откуда $x = 8$, $y = 110$ коп.

822. Число перестановокъ изъ 5 элементовъ $= P_5 =$ $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

823. Первый игрокъ можетъ получить столько различныхъ сдачъ, сколько сочетаній можно сдѣлать изъ 52 элемен. по 13, т. е. $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \ldots 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 13}$; второй — столько, сколько можно сдѣлать сочетаній изъ оставшихся 39 картъ по 13, т. е. $\frac{39 \cdot 38 \ldots 27}{1 \cdot 2 \ldots 13}$ и т. д. Слѣд., общее число различныхъ способовъ раздачи картъ равно произведенію этихъ чиселъ, т е. $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 52}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 13)^4}$.

824. Имѣемъ: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$. Но по условію $\sqrt{ab}$ есть количество раціональное, слѣд., теорема доказана.

825. Изъ теоріи извѣстно, что квадр. уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$ имѣетъ два равные корня, если $b^2 - 4ac = 0$. Умножая обѣ части уравненія на $4a$, получаемъ: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$, или замѣняя $4ac$ равной величиной b^2, имѣемъ $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0$, или $(2ax + b)^2 = 0$.

826. Изъ данныхъ уравненій находимъ $x = y = \frac{1}{a+1}$. Слѣдовательно, при $a > -1$ оба корня положительны; при $a = -1$ оба корня обращаются въ безконечность, что показываетъ, что уравненія становяться противорѣчащими другъ другу; при $a < -1$ оба корня отрицательны.

827. Имѣемъ: $\frac{3}{2} log_x 5 - \frac{1}{4} log^2{}_x 5 - \frac{5}{4} = 0$, или $log^2{}_x 5 - 6 log_x 5 + 5 = 0$, откуда $log_x 5 = 1$ или $= 5$. Если $log_x 5 = 1$, то $x = 5$; если же $log_x 5 = 5$, то $x = \sqrt[5]{5}$.

828. Имѣемъ: $log_{25} 50 = log_{10} 50 \cdot \frac{1}{log_{10} 25} = \frac{log_{10} 5 + 1}{2 log_{10} 5}$; но $5 = \frac{10}{2}$, слѣд., $log_{10} 5 = log_{10} 10 - log_{10} 2 = 1 - 0{,}30103 = 0{,}69897$; подставивъ это значеніе, получаемъ $= 1{,}21534$.

829. По условію имѣемъ неравенство $10000 > (1{,}08)^x > 1000$, или логариѳмируя:

$4 > x log 1{,}08 > 3$, или $4 > x(2 log 2 + 3 log 3 - 2) > 3$, откуда

$$\frac{4}{2 log 2 + 3 log 3 - 3} > x > \frac{3}{2 log 2 + 3 log 3 - 3}.$$

Подставляя значенія $log 2$ и $log 3$, найдемъ: $120 > x > 89$.

830. Прежде всего опредѣляемъ z изъ уравненія:

$z^3 - 4z^2 + 27 + 308 = (z + 2)^2$, откуда $z_1 = 5$ и $z_2 = -6$.

По условію для z берется положительное значеніе, т. е. 5.

Теперь изъ показательнаго уравненія:

$a^{x^2+2x-6,8}=a^{\frac{6}{5}}$ получаемъ $x^2+2x-6,8=1,2$ откуда $x=-4$ или $=2$.

831. Въ прогрессіи дано $U_1=\frac{5}{4}$ и $U_2=\frac{1}{2}$; слѣд., знаменатель этой прогрессіи равенъ $q=\frac{2}{5}\cdot$ Предѣлъ суммы членовъ этой прогрессіи (*«Дополн. къ Алгебрѣ»* § 84) равенъ $\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{25}{12}\cdot$

Итакъ, $a=\frac{25}{12}\cdot$ Остается рѣшить уравненіе:

$$(1+x^2)^2=\frac{25}{6}(1-x^2).$$

Открывъ скобки, получимъ возвратное ур-іе

$$6x^4+25x^3+12x^2-25x+1=0,$$

изъ котораго $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$; $x_3=\frac{1}{3}$; $x_4=-3$.

832. Пусть коэффиціенты разложенія будутъ $C_1, C_2, C_3, \ldots C_{m-1}, C_m, C_{m+1}\ C_{m+2} \ldots C_{2m-1}, C_{2m}, C_{2m+1}$.

На основаніи свойства равенства коэффиціентовъ, равно отстоящихъ отъ начала и конца имѣемъ: $C_1=C_{2m+1}$; $C_2=C_{2m}$; $C_3=C_{2m-1} \ldots C_m=C_{m+2}$.

Слѣдовательно, $C_1+C_3+C_5+\ldots+C_m=C_{2m+1}+C_{2m-1}+C_{2m-3}+\ldots+C_{m+2}=S$.

Отсюда ясно, что сумма всѣхъ коэф., стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, равна:

$$C_1+C_3+\ldots+C_m+C_{m+2}+\ldots+C_{2m-1}+C_{2m+1}=2S.$$

Но извѣстно, что сумма коэф., стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, равна двумъ въ степени, на единицу меньшей, чѣмъ степень разложенія. Слѣдовательно,

$$2S=2^{2m-1}, \text{ или } S=2^{2m-2}.$$

Логариөмируя, имѣемъ: $(2m-2)log2=log\ S$, откуда $m=\frac{logS}{2log2}+1$.

833. Если заяцъ сдѣлаетъ x прыжковъ, то собака успѣетъ сдѣлать $\frac{2}{3}x$. Пусть длина прыжка зайца $=y$, тогда прыжокъ собаки $=2y$.

Слѣдовательно, въ x прыжковъ заяцъ пройдетъ разстояніе xy, а собака въ $\frac{2}{3}x$ прыжковъ — разстояніе $\frac{2}{3}x.\ 2y=\frac{4}{3}xy$.

По условію разность этихъ разстояній равна 80 заячьимъ прыжкамъ, т. е. $=80y$. Слѣд., имѣемъ уравненіе $\frac{4}{3}xy-xy=80y$, или $\frac{4}{3}x-x=80$, откуда $x=240$.

834. Такъ какъ A идетъ быстрѣе B на 1 версту въ часъ, то на разстояніи 450 саж. онъ догонитъ B въ $\frac{60\ .\ 450}{500}=54$ минуты. Скорость мухи равна $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ версты въ минуту; слѣд., въ 54 минуты, которые протекутъ, пока A догонитъ B, муха сдѣлаетъ $54\cdot\frac{1}{6}=9$ верстъ.

Несмотря на очевидную легкость этой задачи въ Инст. Инж. П. С., гдѣ она предлагалась въ 1906 г. нѣсколько человѣкъ на ней срѣзалось, такъ какъ пытались высчитывать разстоянія, пролетаемыя мухой въ отдѣльности каждый разъ отъ A къ B и обратно отъ B къ A, причемъ для опредѣленія этихъ разстояній прибѣгали чуть ли не къ прогрессіямъ, на которыхъ и запутывались.

835. Прежде всего вычисляемъ u_1 изъ условія: $log_{\sqrt[3]{9}}\ u_1=\frac{3}{2}$; отсюда $u_1=\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}}=3$. Пусть разность прогрессіи $=d$.

Тогда имѣемъ ур-іе

$$(3+d)(3+2d)+3(3+2d)+3(3+d)=167,$$

или $d^2+9d-70=0$, откуда $d=-14$ или $=+5$.

Слѣдов., данныя прогрессіи будутъ:

1) . . . $\div 3, -11, -25$ . . . или 2) $\div 3, 8, 13$ . . . .

Для первой прогрессіи $u_{10}=3+9\,.\,(-14)=-123$, а $S_{10}=-600$;

Для второй $u_{10}=3+9\,.\,5=48$, а $S_{10}=255$.

836. Имѣемъ: $log\left(\frac{a+b}{a-b}\right)=3log2-log3$ или $log(a+b)-$ $-log(a-b)=3log2-log3$, или замѣняя $log(a+b)=4log2$, находимъ: $log(a-b)=log2+log3$. Итакъ,

$$log(a+b)=4log2, \text{ т. е. } a+b=16,$$

$$log(a-b)=log2+log3, \text{ т. е. } a-b=6.$$

Слѣд., $a=11$ и $b=5$; кромѣ того $\sqrt{6241}=79$. Итакъ, остается рѣшить неопр. ур-іе:

$$11x+5y=79, \text{ откуда } x=4-5t \text{ и } y=7+11t.$$

Для положительности рѣшеній необходимо, чтобы было $4-5t>0$, т. е. $t<\frac{4}{5}$ и $7+11t>0$, т. е. $t>-\frac{7}{11}$.

Слѣд., единственная система полож. рѣшеній получится при $t=0$; тогда $x=4$ и $y=7$.

837. Изъ перваго уравненія имѣемъ:

$$2\left(\frac{1}{4}x^2-2x-8\right)=\frac{1}{2}, \text{ откуда } x=+11 \text{ или } =-3.$$

Второе уравненіе даетъ:

$$x-y=10^{log\sqrt[3]{10}+log\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{100}\right)}=10^{lo\left(\sqrt[3]{10}\,.\,\frac{1}{2}\sqrt[3]{100}\right)}=10^{log\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{1000}\right)}=$$

$=10^{log5}=5$. Итакъ, получаются двѣ системы рѣшеній:

1) $x=11$, $y=6$ и 2) $x=-3$, $y=-8$.

838. Изъ уравненій $x^3+y^3=468$, $x+y=12$ находимъ двѣ системы: 1) $x=5$, $y=7$ и 2) $x=7$, $y=5$. См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.» § 34.

839. Изъ уравненія $(0,13)^{N-204}=(0,13)^3$ находимъ $N=$ $=207$. Число кратное семи имѣетъ видъ $7x$; число, дающее при дѣленіи на 17 въ остаткѣ 9 имѣетъ форму $17y+9$. Слѣдовательно, имѣемъ неопр. уравненіе

$$7x+17y+9=207, \text{ или } 7x+17y=198.$$

Рѣшая, находимъ $x=38-17t$ и $y=-4+7t$. Для положительности отвѣтовъ необходимо, чтобы было

$$38-17t>0 \text{ и } -4+7t>0.$$

Слѣдовательно, t можетъ равняться 1 или 2. Соотвѣтствующія значенія x и y будутъ: 1) $x=21$, $y=3$ и 2) $x=4$, $y=10$. Слѣдовательно, искомыя части числа 207 равны 1) 147 и 60 или 2) 28 и 179.

840. Рѣшая заданное возвратное уравненіе по общимъ правиламъ, получаемъ рѣшенія: $x_1=x_2=1$; $x_3=-10$, $x_4=-0,1$. См. *Дополн. къ Алгебрѣ»* § 172.

841. Имѣемъ: $a=10^{\log_{10}5}=5$; $b=\sqrt{7\ .\ 28}=14$; $c=85$. Остается рѣшить неопр. уравненіе $5x+14y=85$, или $x+$ $+14z=17$, гдѣ $z=\frac{y}{5}$. Рѣшивъ это уравненіе найдемъ $x=17-14t$, $y=5t$. Рѣшенія будутъ положительны, если $17-14t>0$ и $5t>0$. Слѣд., t можетъ равняться 0 и 1. Итакъ, данная система допускаетъ всегодвѣ пары рѣшеній: 1) $x=17$ $y=0$; 2) $x=3$, $y=5$.

842. Изъ ур-ій $x+y=39$, $x^3+y^3=17199$ находимъ двѣ пары рѣшеній: 1) $x=15$, $y=24$ и 2) $x=24$, $y=15$. См. «Иск. спос. и мет. рѣш. алг. ур.» § 34. Такъ какъ прогрессія по условію убывающая, то $u_1=24$, $u_2=15$, а потому $q=\frac{5}{8}$. Предѣлъ суммы членовъ этой прогрессіи $=\frac{u_1}{1-q}=\frac{24}{\frac{3}{8}}=64$. Для рѣшенія ур-ія $\log_{2\sqrt{2}}64=x$ имѣемъ: $(2\sqrt{2})^z=64$, или $2^{\frac{3}{2}z}=2^6$, откуда $z=4$.

843. Прежде всего находимъ третій членъ даннаго разложенія: $U_3=(-1)^2 \cdot C_8{}^2 \cdot (\sqrt{10})^6 \cdot (\sqrt{0,1})^2=\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 10^3 \cdot$ $\cdot\, 0,1=2800$. Слѣдовательно, $A=28$. Рѣшая неопредѣленное ур-іе $3x+5y=28$, находимъ $x=6-5t$ и $y=2+3t$. Рѣшенія будутъ положительны при $t=0$ и 1. Итакъ, получаемъ двѣ системы: 1) $x=6$, $y=2$ и 2) $x=1$, $y=5$.

844. Имѣемъ:

$$3^{\frac{3}{5}\left(\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}\right)\left(\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}\right)}=3^{\frac{7}{4}}, \text{ откуда } \frac{3}{5}\left(\frac{x^2}{16}-\frac{x}{3}\right)=\frac{7}{4},$$

что приводитъ къ квадр. уравненію $3x^2-16x-140=0$, изъ котораго $x_1=10$ и $x_2=-\frac{14}{3}$.

845. Прежде всего рѣшаемъ систему $x^y=y^x$, $y:x=3:2$. Изъ второго уравненія $y=\frac{2}{3}x$. Подставляемъ это значеніе въ первое уравненіе: $x^{\frac{3}{2}x}=\left(\frac{3}{2}x\right)^x$.

Поступая, согласно указанію въ § 69 книги «Иск. спос. и мет. рѣш. алгебр. уравн.», логариѳмируемъ обѣ части:

$\frac{3}{2}x\log x=x\log\left(\frac{3}{2}x\right)$, или $x\left[\frac{3}{2}\log x-\log\frac{3}{2}-\log x\right]=0$, слѣд., или $x=0$, или же

$$\frac{1}{2}\log x-\log\frac{3}{2}=0,\ \log x=2\log\frac{3}{2}=\log\frac{9}{4},$$

$$\text{откуда } x=\frac{9}{4}, \text{ а слѣд., } y=\frac{3}{2}x=\frac{27}{8}.$$

Изъ условія $u_3=\frac{9}{4}$, $u_{12}=\frac{27}{8}$ имѣемъ:

$$u_1+2d=\frac{9}{4},\ u_1+11d=\frac{27}{8}, \text{ т. е. } d=\frac{1}{8} \text{ и } u_1=2.$$

Второй членъ этой прогрессіи $u_2 = u_1 + d = \frac{17}{8}$; по условію это число составляетъ $4\frac{1}{6}\,\%$, т. е. $\frac{1}{24}$ суммы n членовъ. Поэтому сумма эта $= \frac{17}{8} \cdot 24 = 51$.

Обозначивъ искомое число членовъ прогрессіи x, имѣемъ уравненіе:

$$\left[u_1 + u_1 + d(x-1)\right]x = 2S_x, \text{ или } \left[2 + 2 + \frac{1}{8}(x-1)\right] = 102,$$

что даетъ квадр. уравн. $x^2 + 31x - 816 = 0$, откуда $x = 17$.