

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, Н. В. Малай, Н. Н. Миронова, Решение краевой задачи для линеаризованных по скорости уравнений Навье–Стокса в случае неизотермического обтекания нагретого сфероида газообразной средой, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012, том 52, номер 5, 946–959

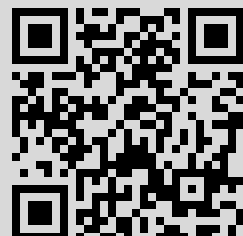
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 91.229.177.159

26 июня 2020 г., 22:23:23



УДК 519.634

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ПО СКОРОСТИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В СЛУЧАЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ОБТЕКАНИЯ НАГРЕТОГО СФЕРОИДА ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДОЙ¹⁾

© 2012 г. А. В. Глушак, Н. В. Малай, Н. Н. Миронова

(308007 Белгород, ул. Студенческая, 14, Белгородский гос. ун-т)

e-mail: Glushak@bsu.edu.ru, malay@bsu.edu.ru, mironovanadya@mail.ru

Поступила в редакцию 8.07.2011 г.

Найдено аналитическое решение линеаризованных по скорости уравнений Навье–Стокса с учетом степенной зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Установлена теорема единственности решения таких уравнений. Решение краевой задачи ищется методом разложения по полиномам Лежандра. В качестве приложения рассмотрена задача гравитационного движения твердой равномерно нагретой аэрозольной частицы сфероидальной формы. Библ. 19. Фиг. 7.

Ключевые слова: линеаризованные по скорости уравнения Навье–Стокса, аналитический метод решения, обтекание, аэрозольная частица сфероидальной формы, метод разложения по полиномам Лежандра.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе, на примере задачи обтекания нагретой неподвижной частицы сфероидальной формы плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ , получено решение линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса в сфероидальной системе координат с учетом зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В работе рассматривается степенной вид зависимости от температуры. Доказана теорема единственности полученного решения.

Частицы, входящие в состав реальных систем (газ, жидкость) могут иметь форму поверхности, отличную от сферической, например, сфероидальную, т.е. форму вытянутого или сплюснутого эллипсоида вращения. Отметим, что в настоящее время движение частиц несферической формы достаточно подробно изучено лишь при малых относительных перепадах температуры в их окрестности, в так называемом изотермическом случае (см. [1]), когда пренебрегают зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Это приводит к тому, что линеаризованные по скорости уравнения Навье–Стокса существенно упрощаются, и поэтому их решение хорошо изучено (см., например, [2, с. 169]). Под *относительным перепадом температуры* понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_S и температурой области вдали от нее T_∞ к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_S - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого неравенства коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность) и плотность можно считать постоянными величинами. Если $(T_S - T_\infty)/T_\infty \sim O(1)$, то относительный перепад температуры считается значительным, и необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса и плотности газообразной среды от температуры.

При описании процессов осаждения частиц в разнотемпературных каналах, при зондировании атмосферы мощным лазерным излучением, при разработке методов тонкой очистки газов от

¹⁾Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00276).

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке ФЦП коллектива НОЦ ГК (проект № 02.740.11.0545). Работа третьего автора выполнена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (гос. контракт № П29 от 25 марта 2010 г.).

гидро- и аэрозольных примесей и т.д. сталкиваются с ситуацией, когда средняя температура поверхности частицы по величине существенно отличается от температуры окружающей среды вдали от нее. В этих случаях уже необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры, при этом получаются довольно сложные нелинейные задачи [3]–[5]. Как показали проведенные исследования, при определенном виде поиска решений компонент массовой скорости и допустимых с точки зрения физики упрощениях, линеаризованные по скорости уравнения Навье–Стокса могут быть сведены к неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с изолированной особой точкой. Решение полученного дифференциального уравнения можно найти в виде обобщенных степенных рядов.

При математическом описании движения нагретых частиц в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть гравитационной, магнитной, термофоретической и т.д., что позволит распространить методы решения линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса, разработанные для конкретной физической задачи, на более широкий класс физических задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для нахождения решения линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса в качестве примера рассмотрим классическую задачу обтекания аэрозольной частицы сфероидальной формы плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ ($U_\infty \parallel Oz$), но не при малых относительных перепадах температуры, как в [2, с. 169], а при произвольных перепадах температуры. Описание обтекания производится в сфероидальной системе координат (τ, η, ϕ) , которая связана с декартовой следующими соотношениями (см. [2, с. 583, 587]):

$$x = c \operatorname{sh} \tau \sin \eta \cos \phi, \quad y = c \operatorname{sh} \tau \sin \eta \sin \phi, \quad z = c \operatorname{ch} \tau \cos \eta, \quad (1)$$

$$x = c \operatorname{ch} \tau \sin \eta \cos \phi, \quad y = c \operatorname{ch} \tau \sin \eta \sin \phi, \quad z = c \operatorname{sh} \tau \cos \eta, \quad (2)$$

где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ в случае вытянутого сфероида ($a < b$ в формуле (1)) и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ в случае сплюснутого сфероида ($a > b$ в формуле (2)), a и b – полуоси сфероида, $0 \leq \tau < \infty$, $0 \leq \eta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Фиксированное значение τ соответствует сфероидальной поверхности с общим центром, совпадающим с началом координат. В связи с этим поверхности рассматриваемой сфероидальной частицы, с заданными длинами полуосей a и b , соответствует строго определенное значение координаты $\tau = \tau_0$, которое связано с длинами a и b соотношением $\tau_0 = 1/2 \ln |(a+b)/(a-b)|$ (см. [2, с. 585]). При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы ось Oz совпадала с осью симметрии сфероида.

Общая система уравнений газовой динамики нелинейна, и при ее решении сделаем следующие физические допущения, реализуемые в большинстве прикладных задач.

Допущение 1. Обтекание частицы происходит при значительных относительных перепадах температуры. Рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости, теплопроводности и плотности от температуры (см. [6]):

$$\mu_g = \mu_{g\infty} t_g^\beta, \quad \lambda_g = \lambda_{g\infty} t_g^\alpha, \quad \rho_g = \rho_{g\infty} / t_g, \quad \mu_{g\infty} = \mu_g(T_\infty), \quad \rho_{g\infty} = \rho_g(T_\infty), \quad \lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_\infty), \\ t_g = T_g / T_\infty, \quad 0.5 \leq \alpha, \quad \beta \leq 1.$$

Здесь и далее индексы g и p будем относить соответственно к газообразной среде и к частице. Индексом S будем обозначать значения физических величин, взятых при средней относительной температуре частицы, равной T_S , а индексом ∞ – значения физических величин, характеризующих газообразную среду вдали от частицы.

Допущение 2. Коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа, что имеет место для большинства реальных газообразных сред. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла η в системе “частица–газообразная среда” (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и, следовательно, вязкость связана только с температурой $t_{g_0}(\tau)$, т.е. $\mu_g(t_g(\tau, \eta)) \approx \mu_g(t_{g_0}(\tau))$. При этом $t_g(\tau, \eta) = t_{g_0}(\tau) + \delta t_g(\tau, \eta)$, где $\delta t_g(\tau, \eta) \ll t_{g_0}(\tau)$; $\delta t_g(\tau, \eta)$, $t_{g_0}(\tau)$ определяются из решения тепловой задачи (4)–(6). При таком допущении мы можем рассматривать

гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется с помощью граничных условий.

Допущение 3. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В рамках сформулированных выше допущений система газодинамических уравнений, описывающая стационарные распределения полей скорости U_g , давления P_g и температуры T_g в декартовой системе координат имеет вид (см. [2], [7])

$$\frac{\partial P_g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \mu_g \left(\frac{\partial U_k}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_m}{\partial x^m} \right) \right\}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}(\rho_g \mathbf{U}_g) = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}(\lambda_g \nabla T_g) = 0. \tag{5}$$

Система (3)–(5) решается со следующими краевыми условиями в системе координат сплюснутого сфероида:

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} U_\tau(\tau, \eta) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} U_\eta(\tau, \eta) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} T_p(\tau) = T_S, \tag{6}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} U_\tau(\tau, \eta) = U_\infty \cos \eta, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} U_\eta(\tau, \eta) = -U_\infty \sin \eta, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} T_g(\tau) = T_\infty. \tag{7}$$

В граничных условиях (6) на поверхности частицы учтены условия непроницаемости для нормальной $U_\tau(\tau, \eta)$ и касательной $U_\eta(\tau, \eta)$ компонент массовой скорости \mathbf{U}_g и постоянство температуры на поверхности частицы. В качестве граничных условий на бесконечности, т.е. вдали от частицы, взяты условия (7).

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В сфероидальной системе координат уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры вне частицы равенством (5), имеет вид

$$\frac{1}{c^3 (\operatorname{ch}^2 \tau - \sin^2 \eta) \operatorname{ch} \tau \sin \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(c \operatorname{ch} \tau \sin \eta \frac{\partial t_g^{1+\alpha}}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c \operatorname{ch} \tau \sin \eta \frac{\partial t_g^{1+\alpha}}{\partial \eta} \right) \right] = 0. \tag{8}$$

Переходя в уравнении (8) к новым переменным $\lambda = \operatorname{sh} \tau$ и $x = \cos \eta$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((1 + \lambda^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0, \quad \Phi = t_g^{1+\alpha}. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) будем искать в виде ряда по полиномам Лежандра $P_n(x)$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\lambda) P_n(x). \tag{10}$$

Поскольку полиномы Лежандра являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$ краевой задачи для уравнения Лежандра, то подставляя (10) в (8), получим уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(1 + \lambda^2) \frac{\partial \Phi_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right] - n(n+1) \Phi_n(\lambda) \right\} = 0. \tag{11}$$

Умножая (11) на $P_m(x)$ и интегрируя его по отрезку $[-1, 1]$, будем иметь

$$(1 + \lambda^2) \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \lambda^2} + 2\lambda \frac{\partial \Phi_n}{\partial \lambda} - n(n+1) \Phi_n = 0. \tag{12}$$

Выполняя в уравнении (12) замену переменной $y = i\lambda$, где i – мнимая единица, мы получим уравнение Лежандра, общее решение которого имеет вид

$$\Phi_n(-iy) = M_n P_n(y) + N_n Q_n(y),$$

где $P_n(y)$ и $Q_n(y)$ – полиномы Лежандра первого и второго рода соответственно.

Таким образом, запишем общее решение уравнения (5) в виде

$$t_g = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (M_n P_n(y) + N_n Q_n(y)) P_n(x) \right)^{1/(1+\alpha)}.$$

При этом решение стационарного уравнения теплопроводности, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям, переписывается в виде

$$t_g(\lambda, \eta) = t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \frac{\gamma}{c} \operatorname{arctg} \lambda \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (13)$$

где $\lambda_0 = \operatorname{sh} \tau_0$, γ – постоянная, определяемая из граничных условий на поверхности сфероида $\gamma/c = ((T_S/T_\infty)^{1+\alpha} - 1)/\operatorname{arctg} \lambda_0 = \Gamma_0$.

С учетом выражения (13) и допущения 2 формула для коэффициента динамической вязкости принимает вид

$$\mu_g(t_g(\tau, \eta)) \approx \mu_g(t_{g0}) = (1 + \gamma/c \operatorname{arctg} \lambda)^{\beta/(1+\alpha)}. \quad (14)$$

При поиске выражений для компонент массовой скорости вида

$$U_\tau(\tau, \eta) = \frac{U_\infty}{c \operatorname{ch} \tau H_\tau} G(\operatorname{sh} \tau) \cos \eta, \quad U_\eta(\tau, \eta) = -\frac{U_\infty}{c H_\tau} g(\operatorname{sh} \tau) \sin \eta, \quad (15)$$

где $G(\operatorname{sh} \tau)$ и $g(\operatorname{sh} \tau)$ – некоторые подлежащие определению функции, зависящие от радиальной координаты τ , линеаризованные по скорости уравнения Навье–Стокса сводятся к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка для функции $G(\operatorname{sh} \tau)$, решение которого можно получить в виде обобщенных степенных рядов.

Связь между функциями $G(\operatorname{sh} \tau)$ и $g(\operatorname{sh} \tau)$ определяется из уравнения непрерывности (4) с учетом зависимости плотности газообразной среды от температуры. Она имеет вид

$$g(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{dG(\lambda)}{d\lambda} \sqrt{1+\lambda^2} - \frac{1}{2} f(\lambda) G(\lambda), \quad f(\lambda) = \frac{1}{t_{g0}(\lambda)} \frac{dt_{g0}(\lambda)}{d\lambda}. \quad (16)$$

Записав (4) в сфероидальной системе координат, подставляя в него (14), (15) и учитывая (16), в конечном итоге получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $G(\lambda)$

$$\begin{aligned} & \left(-1 + \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \frac{d^3 G}{\lambda^2 d\lambda^3} + \left\{ -\frac{1}{\lambda} - \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} + (1-\beta) f \left(1 - \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \right\} \frac{d^2 G}{d\lambda^2} + \\ & + \left\{ \frac{2}{1+\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} + \left(2 \frac{df}{d\lambda} + \beta f^2 \right) \left(1 - \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \right\} \frac{dG}{d\lambda} + \\ & + \frac{(1-\beta) f}{\lambda} \left(1 + \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \left\{ \frac{dG}{d\lambda} + \left\{ \frac{2(1-\lambda^2)}{\lambda(1+\lambda^2)^2} + \frac{2}{\lambda^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right\} G \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{d^2 f}{d\lambda^2} + \beta f \frac{df}{d\lambda} \right) \left(1 - \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) + \left(\frac{df}{d\lambda} + \beta f^2 \right) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) + \\
 & + \frac{4\beta f}{1 + \lambda^2} \left(1 - \lambda \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \Big\} G = - \frac{D}{(1 + \lambda^2)^2 t_{g0}^\beta}
 \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$G(\lambda_0) = N_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{G(\lambda)}{c^2 \sqrt{(1 + \lambda^2)(\lambda^2 + x^2)}} = 1, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dG(\lambda_0)}{d\lambda} \sqrt{1 + \lambda_0^2} - \frac{1}{2} f(\lambda_0) G(\lambda_0) = N_2, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{G'(\lambda) \sqrt{1 + \lambda^2} - f(\lambda) G(\lambda)}{2c^2 \sqrt{\lambda^2 + x^2}} = 1, \tag{19}$$

где D – константа, подлежащая определению из граничных условий (6), N_1, N_2 – постоянные, вид которых определяется конкретной физической задачей. Например, в случае классической задачи обтекания $N_1 = N_2 = 0$, а в случае задачи о термофоретическом движении $N_1 = 0, N_2 = K_{TS} \mu_g / R \rho_g T_g \partial T_g / \partial \theta$, $K_{TS} \approx 1.2$ – коэффициент теплового скольжения (см. [1]).

Найдем решение уравнения (17) в интервале (λ_0, ∞) и докажем единственность решения краевой задачи (18)–(19). Для этого в уравнении (17) перейдем к новой переменной $v = 1/\lambda$, в результате имеем

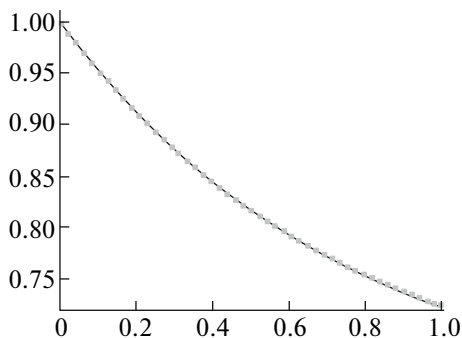
$$\begin{aligned}
 & v^3 \left\{ -1 + \frac{1 + v^2}{v} \operatorname{arctg} v \right\} \frac{d^3 \tilde{G}}{dv^3} + v^2 \left\{ -5 + \frac{5 + 7v^2}{v} \operatorname{arctg} v + \left(\frac{v}{1 + v^2} - \operatorname{arctg} v \right) \gamma_1 L \right\} \frac{d^2 \tilde{G}}{dv^2} + \\
 & + v \left\{ -2 \frac{1 + 2v^2}{1 + v^2} + 2 \frac{1 + 4v^2}{v} \operatorname{arctg} v + \left(\frac{\gamma_2 v + \gamma_1 v^3}{(1 + v^2)^2} - \frac{\gamma_2 + 3\gamma_1 v^2}{1 + v^2} \operatorname{arctg} v \right) L - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{v^2}{(1 + v^2)^2} - \frac{v}{1 + v^2} \operatorname{arctg} v \right) \gamma_3 L^2 \right\} \frac{d\tilde{G}}{dv} + \left\{ 2 \frac{1 - v^2}{(1 + v^2)^2} - \frac{2}{v} \operatorname{arctg} v + \right. \\
 & + \frac{4vL}{(1 + v^2)^2} \left(\frac{\gamma_4 - \gamma_1 v^2}{1 + v^2} - \frac{\gamma_4}{v} \operatorname{arctg} v \right) + \left(\frac{\gamma_5 + \gamma_6 v^2}{1 + v^2} - \frac{\gamma_5 - \gamma_6 v^2}{v} \operatorname{arctg} v \right) \frac{v^2 L^2}{(1 + v^2)^2} + \\
 & \left. + \left(\frac{1}{1 + v^2} - \frac{1}{v} \operatorname{arctg} v \right) \frac{\gamma_3 v^3 L^3}{(1 + v^2)^2} \right\} \tilde{G} = \frac{Dv}{(1 + v^2)^2 t_{g0}^\beta}, \tag{20}
 \end{aligned}$$

где введены обозначения:

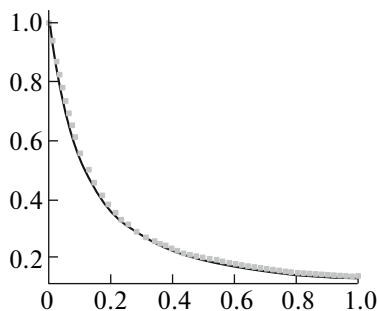
$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(v) &= G(1/v), \quad \gamma_1 = \frac{1 - \beta}{1 + \alpha}, \quad \gamma_2 = \frac{5 - \beta}{1 + \alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2 + 2\alpha - \beta}{(1 + \alpha)^2}, \quad \gamma_4 = \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}, \\
 \gamma_5 &= \frac{\beta - 5\alpha - 5}{(1 + \alpha)^2}, \quad \gamma_6 = \frac{1 + \alpha - \beta}{(1 + \alpha)^2}, \quad L = \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0 \operatorname{arctg} v}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что точка $v = 0$ для однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (20), является регулярной особой точкой, поэтому решение однородного дифференциального уравнения можно искать с помощью обобщенных степенных рядов, разложив в степенные ряды функции, входящие в уравнение (20).

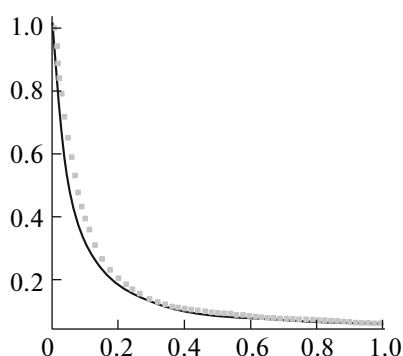
При разложении в степенной ряд функции $L(v)$ мы сталкиваемся со следующей проблемой. Разложение в степенной ряд функции $L(v)$ в нашем случае не годится, так как мы решаем задачу



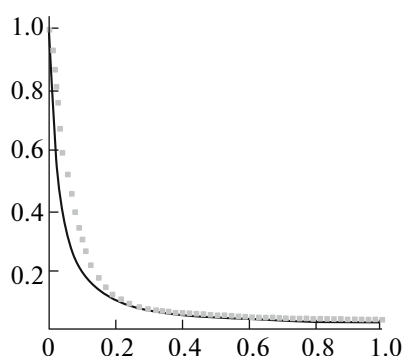
Фиг. 1. $T = 300$, $A = 0.35$, $F_0 = 1$, $F_1 = -0.1356384$, $F_2 = 0.166226$.



Фиг. 2. $T = 600$, $A = 2.4$, $F_0 = 1$, $F_1 = -3.7773998$, $F_2 = 11.0057611$, $F_3 = -12.10147$, $F_4 = 5.4274344$.



Фиг. 3. $T = 900$, $A = 3.4$, $F_0 = 1$, $F_1 = -7.00949$, $F_2 = 27.4012794$, $F_3 = -47.9568459$, $F_4 = 40.9996872$, $F_5 = -12.5382442$.



Фиг. 4. $T = 1200$, $A = 4.1$, $F_0 = 1$, $F_1 = -8.4758062$, $F_2 = 33.9054718$, $F_3 = -60.1746712$, $F_4 = 51.2487679$, $F_5 = -15.06196778$.

при произвольных перепадах температуры. Когда перепад температуры мал, $\Gamma_0 < 1$. В случае большого перепада температуры в Γ_0 входит выражение $((T_S/T_\infty)^{1+\alpha} - 1)$, которое влияет на ее величину и может быть больше единицы. Например, при $T_S = 1200$ К, $T_\infty = 293$ К, $\alpha = 1$ имеем $((T_S/T_\infty)^{1+\alpha} - 1) \approx 16$, следовательно, степенной ряд для функции $L(v)$ в этом случае будет расходящимся.

Учитывая, что переменная v изменяется от 0 до v_0 , а функция $L(v)$ монотонно убывает на данном интервале, мы подбираем аппроксимирующую функцию для $L(v)$ так, чтобы она аппроксимировала функцию $L(v)$ с достаточно высокой точностью. Функция

$$L(v) = \Gamma_0 e^{-Av} \sum_{n=0}^{N(v)} F_n v^n,$$

где $N(v)$ и A подбираются так, чтобы погрешность приближения относительно первоначальной функции не превышала наперед заданной точности. Так, например, погрешности 0.05 достаточно для рассмотрения многих физических задач. Коэффициенты F_n определяются при помощи математических пакетов, например, с помощью пакета Maple.

На фиг. 1–4 приведены графики, показывающие, с какой точностью полученный ряд аппроксимирует исходную функцию $L(v)$ при различных значениях температуры (количество и значения коэффициентов F_n для каждой температуры различны). Сплошной линией изображена исходная функция $L(v)$, а точками – аппроксимирующая ее функция.

Разлагая входящие в уравнение (20) функции в ряды, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 & \left(v^3 - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n+5}}{(2n+3)(2n+5)} \right) \frac{d^3 \tilde{G}}{dv^3} + \left\{ 8v^2 - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5) v^{2n+4}}{(2n+3)(2n+5)} - 3\gamma_1 \Gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(1)} v^{n+3} \right\} \frac{d^2 \tilde{G}}{dv^2} + \\
 & + \left\{ 8v + 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 5n - 1) v^{2n+3}}{(2n+3)(2n+5)} + \frac{3}{2} \Gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(2)} v^{n+2} + 3\gamma_3 \Gamma_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(3)} v^{n+3} \right\} \frac{d \tilde{G}}{dv} + \\
 & + \left\{ -8 + 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+3) v^{2n+2}}{(2n+5)} - 6\Gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(4)} v^{n+1} + 3\Gamma_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(5)} v^{n+2} - 3\Gamma_0^3 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(6)} v^{n+3} \right\} \tilde{G} = \\
 & = \frac{3}{2} D \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(7)} v^{n-1}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Перемножая степенные ряды для функций $\operatorname{arctg} v$ и $L(v)$, получаем следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов $\Theta_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 7$):

$$\begin{aligned}
 L(v) &= \Gamma_0 e^{-Av} \sum_{n=0}^{N(v)} F_n v^n = \Gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)} v^n, \quad d_n^{(1)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k! A^k}{k!} F_{n-k}, \\
 L^2(v) &= \Gamma_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(2)} v^n, \quad d_0^{(2)} = F_0^2 = 1, \quad d_{m \geq 1}^{(2)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (3n-m) d_n^{(1)} d_{m-n}^{(2)}, \\
 L^3(v) &= \Gamma_0^3 \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(3)} v^n, \quad d_0^{(3)} = F_0^3 = 1, \quad d_{m \geq 1}^{(3)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (4n-m) d_n^{(1)} d_{m-n}^{(3)}, \quad \frac{1}{t_{g0}^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(4)} v^n, \\
 F_n &= 0 \quad \forall n \geq N(v), \quad \Theta_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{k+1}{2k+3} d_{n-2k}^{(1)}, \\
 \Theta_n^{(2)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[(\gamma_2 - 3\gamma_1) \sum_{m=0}^k \frac{1}{2m+1} + \gamma_1(k+1) - \gamma_2 \frac{2k^2 + 7k + 5}{2k+3} \right] d_{n-2k}^{(1)}, \\
 \Theta_n^{(3)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\sum_{m=0}^k \frac{m+1}{2m+3} \right] d_{n-2k}^{(2)}, \\
 \Theta_n^{(4)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\sum_{m=0}^k (k-m+1) \left(\gamma_1 + 2\gamma_4 \frac{m+1}{2m+3} \right) \right] d_{n-2k}^{(1)}, \\
 \Theta_n^{(5)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\sum_{m=0}^k (m+1)(k-m+1) \left(\frac{\gamma_6}{2m+1} - \frac{\gamma_5}{2m+3} \right) \right] d_{n-2k}^{(2)}, \\
 \Theta_n^{(6)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\sum_{m=0}^k \frac{(m+1)(k-m+1)}{2m+3} \right] d_{n-2k}^{(3)},
 \end{aligned}$$

$$\Theta_n^{(7)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k (1+k) d_{n-2k}^{(4)},$$

через $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ обозначена целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (21), ищется в виде следующего обобщенного степенного ряда:

$$\tilde{G} = v^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n v^n, \quad C_0 \neq 0. \quad (22)$$

Вычисляя производные, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}' &= v^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n) C_n v^n, & \tilde{G}'' &= v^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n)(\rho+n-1) C_n v^n, \\ \tilde{G}''' &= v^{\rho-3} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n)(\rho+n-1)(\rho+n-2) C_n v^n. \end{aligned}$$

Подставляя (22) в однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (21), и приравнявая коэффициенты при $v^{n+\rho}$, получаем определяющее уравнение

$$\rho(\rho-1)(\rho-2) + 8\rho(\rho-1) + 8\rho - 8 = 0,$$

корни которого равны $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -2$, $\rho_3 = -4$. Заметим, что разность корней равна целому числу, следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов методом Фробениуса, во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего $\rho_1 = 1$, появляется дополнительное слагаемое, содержащее множитель $\ln v/v_0$, умноженный на первое решение (см. [8]–[11]).

Таким образом, учитывая значения корней определяющего уравнения, система линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (21), имеет вид

$$\tilde{G}_1(v) = v \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} v^n, \quad \tilde{G}_2(v) = \frac{1}{v^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} v^n + \omega_1 \ln \frac{v}{v_0} \tilde{G}_1(v), \quad (23)$$

$$\tilde{G}_3(v) = \frac{1}{v^4} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} v^n + \omega_2 \ln \frac{v}{v_0} \tilde{G}_1(v). \quad (24)$$

Частным решением неоднородного уравнения (21) будет функция

$$\tilde{G}_5 = D\tilde{G}_4, \quad \tilde{G}_4(v) = \frac{1}{v} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,4} v^n + \omega_3 \ln \frac{v}{v_0} \tilde{G}_1(v). \quad (25)$$

Подставляя (23)–(25) в уравнение (21), получаем рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов $C_{n,i}$, $i = 1, 2, 4$:

$$\begin{aligned} C_{n,1} &= -\frac{3}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-4k)}{(2k+1)(2k+3)} C_{n-2k,1} - \\ &- \frac{3}{2n(n+3)(n+5)} \left\{ \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-1} [(n-k)\Theta_k^{(2)} - 2\gamma_1(n-k-1)(n-k)\Theta_k^{(1)} - 4\Theta_k^{(4)}] C_{n-k-1,1} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-2} [\Theta_k^{(5)} - \gamma_3(n-k-1)\Theta_k^{(3)}]C_{n-k-2,1} - 2\gamma_3\Gamma_0^3 \sum_{k=0}^{n-3} \Theta_k^{(6)}C_{n-k-3,1} \Big\}, \\
 C_{n,2} = & -\frac{3}{n-3} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k(n-4k-3)}{(2k+1)(2k+3)}C_{n-2k,2} - \\
 & -\frac{3}{2n(n-3)(n+2)} \left\{ \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-1} [\Theta_k^{(2)}(n-k-3) - 2\gamma_1\Theta_k^{(1)}(n-k-3)(n-k-4) - 4\Theta_k^{(4)}]C_{n-k-1,2} + \right. \\
 & + 2\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-2} [\gamma_3\Theta_k^{(3)}(n-k-4) + \Theta_k^{(5)}]C_{n-k-2,2} - 2\gamma_3\Gamma_0^3 \sum_{k=0}^{n-3} \Theta_k^{(6)}C_{n-k-3,2} + \\
 & + \omega_1 \left(2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k(n+1)(3n-8k-5)-1}{(2k+1)(2k+3)}C_{n-2k-3,1} + \right. \\
 & \left. + \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-4} [\Theta_k^{(2)} - 2\gamma_1\Theta_k^{(1)}(2n-2k-7)]C_{n-k-4,1} + 2\gamma_3\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-5} \Theta_k^{(3)}C_{n-k-5,1} \right) \Big\}, \\
 C_{n,4} = & -\frac{3}{n-2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k(n-4k-2)}{(2k+1)(2k+3)}C_{n-2k,4} - \frac{3}{2(n+1)(n-2)(n+3)} \times \\
 & \times \left\{ -\tilde{D}\Theta_n^{(7)} + \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-1} [\Theta_k^{(2)}(n-k-2) - 2\gamma_1\Theta_k^{(1)}(n-k-2)(n-k-3) - 4\Theta_k^{(4)}]C_{n-k-1,4} + \right. \\
 & + 2\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-2} [\Theta_k^{(5)} + \gamma_3\Theta_k^{(3)}(n-k-3)]C_{n-k-2,4} - 2\gamma_3\Gamma_0^3 \sum_{k=0}^{n-3} \Theta_k^{(6)}C_{n-k-3,4} + \\
 & + \omega_2 \left(2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k(n+2)(3n-8k-2)-1}{(2k+1)(2k+3)}C_{n-2k-2,1} + \right. \\
 & \left. + \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-3} [\Theta_k^{(2)} - 2\gamma_1\Theta_k^{(1)}(2n-2k-5)]C_{n-k-3,1} + 2\gamma_3\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-4} \Theta_k^{(3)}C_{n-k-4,1} \right) \Big\}.
 \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов $C_{0,1}$ ($n \geq 1$), $C_{0,2}$ ($n \geq 4$) и $C_{0,4}$ ($n \geq 3$) по приведенным выше рекуррентным соотношениям необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned}
 C_{0,1} = 1, \quad C_{0,4} = -\frac{D\Theta_0^{(7)}}{4}, \quad C_{1,4} = -\frac{3}{16}[\tilde{D}\Theta_1^{(7)} + \Gamma_0 C_0^{(2)}(4\gamma_1\Theta_0^{(1)} + \Theta_0^{(2)} + 4\Theta_0^{(4)})], \quad C_{2,4} = 1, \\
 C_{0,2} = 1, \quad C_{1,2} = -\frac{1}{2}\Gamma_0 C_{0,2}(6\gamma_1\Theta_0^{(1)} + \Theta_0^{(2)} + 2\Theta_0^{(4)}), \quad C_{3,2} = 0, \quad C_{0,4} = 1, \\
 C_{2,2} = C_{0,2} - \frac{3\Gamma_0}{16} \{ (4\gamma_1\Theta_0^{(1)} + \Theta_0^{(2)} + 4\Theta_0^{(4)})C_{1,2} + 2(6\gamma_1\Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(2)} + 2\Theta_1^{(4)})C_{0,2} \} + \\
 + \frac{3\Gamma_0^2}{8}(\Theta_0^{(5)} - 2\gamma_3\Theta_0^{(3)})C_{0,2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{10C_{0,1}} \{ -8C_{1,2} + \Gamma_0 [4\Theta_0^{(4)}C_{2,2} + (4\gamma_1\Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(2)} + 4\Theta_1^{(4)})C_{1,2} + \\ &+ C_{0,2}(12\gamma_1\Theta_2^{(1)} + 2\Theta_2^{(2)} + 4\Theta_2^{(4)})] + 2\Gamma_0^2 [C_{1,2}(\gamma_3\Theta_0^{(3)} - \Theta_0^{(5)}) + (2\gamma_3\Theta_1^{(3)} - \Theta_1^{(5)})C_{0,2}] + 2\gamma_3\Gamma_0^3\Theta_0^{(6)}C_{0,2} \}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{10C_{0,1}} \{ -8C_{0,4} + D\Theta_2^{(7)} + \Gamma_0 [(4\gamma_1\Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(2)} + 4\Theta_1^{(4)})C_{0,4} + 4\Theta_0^{(4)}C_{1,4}] + \\ &+ 2\Gamma_0^2(\gamma_3\Theta_0^{(3)} - \Theta_0^{(5)})C_{0,4} \}.\end{aligned}$$

Выбор постоянных $C_{0,1}$, $C_{0,2}$ и $C_{0,4}$ осуществляется так, чтобы функции $\tilde{G}_1(v)$, $\tilde{G}_2(v)$ и $\tilde{G}_4(v)$ стремились к соответствующим функциям (см. [2, с. 172]) для эллипсоида вращения при малых относительных перепадах температуры. Отметим, что решение $\tilde{G}_3(v)$ уравнения (21), вычисляемое по формуле (24), не удовлетворяет краевому условию (18).

Таким образом, общее решение уравнения (21) имеет вид

$$\tilde{G}(v) = A_1\tilde{G}_1(v) + A_2\tilde{G}_2(v) + A_3\tilde{G}_3(v) + D\tilde{G}_4(v).$$

Функция $\tilde{G}(v) = A_1\tilde{G}_1(v) + A_2\tilde{G}_2(v) + A_3\tilde{G}_3(v) + D\tilde{G}_4(v)$ удовлетворяет уравнению (21) по построению. Ряды, определяющие функции $\tilde{G}_i(v)$, $i = 1, 2, 3, 4$, равномерно сходятся при $v \in (0, 1)$.

Постоянные A_1 , A_2 , A_3 и D однозначно определяются из граничных условий (20). Очевидно, что $A_2 = c^2$, $A_3 = 0$, а для определения постоянных A_1 , D имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}A_1G_1(\lambda_0) + DG_4(\lambda_0) &= N_1 - c^2G_2(\lambda_0), \\ A_1G_1'(\lambda_0) + DG_4'(\lambda_0) &= \frac{2N_2}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}} - \frac{\Gamma_0 N_1}{(1 + \alpha)(1 + \Gamma_0 \arctg \lambda_0)(1 + \lambda_0^2)^{3/2}} - c^2G_2'(\lambda_0).\end{aligned}\quad (26)$$

Система (26) имеет единственное решение, поскольку ее главный определитель отличен от нуля в силу линейной независимости решений $G_1(\lambda)$, $G_2(\lambda)$ и $G_4(\lambda)$.

В результате проведенного исследования доказана следующая

Теорема. Функция $G(\lambda) = A_1G_1(\lambda) + A_2G_2(\lambda) + DG_4(\lambda)$ с коэффициентами A_1 , D , определяемыми системой (26), и $A_2 = c^2$ является единственным решением уравнения (17), удовлетворяющим краевым условиям (18), (19).

Заметим, что полученное решение определено при $\lambda \in (1, +\infty)$. Следует добавить, что приведенные выше формулы могут быть распространены на случай, когда частица имеет форму поверхности вытянутого сфероида. Для этого необходимо заменить λ на $i\lambda$ и c на $-ic$ (i – мнимая единица).

Вывод. Получены аналитические выражения для компонент массовой скорости, что имеет большое практическое значение. Это позволяет описать такие физические процессы, как осаждение частиц в разнотемпературных каналах, зондирование атмосферы мощным лазерным излучением, разработка методов тонкой очистки газов от гидро- и аэрозольных примесей и т.д. Кроме того, результаты работы могут иметь важное значение для процесса построения общего решения нелинейного уравнения Навье–Стокса.

В качестве физического приложения разработанной выше теории рассмотрим гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы сфероидальной формы. Самым распространенным видом движения аэрозольных частиц является гравитационное движение, т.е. движение под действием силы тяжести за счет разности удельных весов частицы и окружающей среды (см. [2], [7]). На нем основаны такие технологические процессы, как флотация, седиментация, получение псевдосжиженных слоев и т.п. В частности, определение гранулометрического анализа аэродисперсных систем посредством седиментации является одним из самых практичных и широко применяемых методов дисперсионного анализа. Скорость седиментации частиц можно существенно корректировать за счет нагрева их поверхности, поскольку вязкость, теплопроводность и плотность газа существенно зависят от температуры. В связи с этим представляет как теоретический, так и практический интерес гравитационное движение нагретых частиц в вязких газообразных средах.

3. ГРАВИТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОЙ РАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим гравитационное движение равномерно нагретой твердой сфероидальной частицы, температура поверхности которой равна T_S . Считается, что газ заполняет все пространство и покоится на бесконечности. Мы получим аналог формулы Стокса для случая стационарного движения равномерно нагретого сфероида в газообразной среде при произвольных перепадах температуры.

Разность температур между частицей и газообразной средой может стационарно поддерживаться, например, за счет выделения тепла при химических реакциях на поверхности частицы, за счет радиоактивного распада вещества частицы, внешнего излучения и т.п. Если коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности внешней среды, то поглощенная энергия распределяется по поверхности частицы равномерно, т.е. частицу можно считать равномерно нагретой (см. [12]).

В рамках сформулированных ранее допущений обтекание равномерно нагретой сфероидальной частицы описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial P_g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \mu_g \left(\frac{\partial U_k}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_m}{\partial x^m} \right) \right\} + F_k, \quad m, k, j = 1, 2, 3, \quad (27)$$

$$\operatorname{div}(\rho_g \mathbf{U}_g) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\lambda_g \nabla T_g) = 0,$$

с граничными условиями (6)–(7), где (x_1, x_2, x_3) – декартовы координаты, T_g – температура газообразной среды, T_S – средняя температура поверхности частицы, U_r и U_τ – радиальная и тангенциальная компоненты массовой скорости в сфероидальной системе координат, U_∞ – величина скорости набегающего потока, F_k – вектор гравитационных сил (\mathbf{U}_g и F_k должны быть связаны так, чтобы полная сила, действующая на частицу, равнялась нулю).

Движение сфероидальной частицы целесообразно рассматривать в системе координат, связанной с ее центром масс. В этом случае задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью \mathbf{U}_∞ ($\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_p$, где \mathbf{U}_p – скорость гравитационного движения частицы), которая подлжет определению из условия обращения в ноль полной силы, действующей на частицу ($U_\infty > 0$, если эта скорость направлена по оси Oz , и $U_\infty < 0$ в противном случае). Положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы ось Oz совпадала с осью симметрии сфероида.

Для нахождения силы, действующей со стороны окружающей среды на нагретую твердую аэрозольную частицу, и скорости ее движения в гравитационном поле необходимо знать распределение температуры в окрестности сфероида.

Распределение поля температуры вне частицы найдем, решая уравнение (27). С учетом степенного вида зависимости теплопроводности от температуры и граничных условий (6), (7) получим

$$t_g(\lambda, \eta) = t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \frac{\gamma}{c} \operatorname{arcctg} \lambda \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (28)$$

где $\lambda = \operatorname{sh} \tau$, γ – постоянная, определяемая из граничных условий на поверхности сфероида, $\gamma/c = (T_S/T_\infty)^{1+\alpha} - 1/\operatorname{arcctg} \lambda_0 = \Gamma_0$.

Из формулы (28) следует, что температура окружающей частицу газа изменяется с расстоянием от поверхности частицы, следовательно, и динамическая вязкость также является функцией расстояния.

Подставляя (28) в выражение для динамической вязкости $\mu_g = \mu_{g\infty} t_{g0}^\beta$, получаем формулу, в точности совпадающую с формулой (14), и, следовательно, полученное аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса применимо в нашем случае, т.е. имеем

$$U_\tau(\tau, \eta) = \frac{U_\infty}{c \operatorname{ch} \tau H_\tau} [A_1 G_1(\operatorname{sh} \tau) + A_2 G_2(\operatorname{sh} \tau) + D G_4(\operatorname{sh} \tau)] \cos \eta, \quad (29)$$

$$U_\eta(\tau, \eta) = -\frac{U_\infty}{2c H_\tau} [A_1 G_6(\operatorname{sh} \tau) + A_2 G_7(\operatorname{sh} \tau) + D G_8(\operatorname{sh} \tau)] \sin \eta, \quad (30)$$

где

$$G_6 = \frac{dG_1}{d\lambda} + \frac{\Gamma_0}{1 + \lambda^2} \frac{G_1}{(1 + \alpha)t_{g0}^{1+\alpha}}, \quad G_7 = \frac{dG_2}{d\lambda} + \frac{\Gamma_0}{1 + \lambda^2} \frac{G_2}{(1 + \alpha)t_{g0}^{1+\alpha}}, \quad G_8 = \frac{dG_4}{d\lambda} + \frac{\Gamma_0}{1 + \lambda^2} \frac{G_4}{(1 + \alpha)t_{g0}^{1+\alpha}}.$$

Постоянные интегрирования A_1 и D , входящие в (29), (30), определяются из граничных условий на поверхности частицы (6) и имеют вид

$$A_1 = c^2 \frac{G_2(\lambda_0)G_4'(\lambda_0) - G_2'(\lambda_0)G_4(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)}, \quad D = c^2 \frac{G_2'(\lambda_0)G_1(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_1'(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)}. \quad (31)$$

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и в сфероидальной системе координат находится по формуле

$$\mathbf{F} = -4\pi \frac{\mu_{g\infty} U_\infty}{c} D \mathbf{n}_z, \quad (32)$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси Oz .

Подставляя в (32) определяемый равенством (31) коэффициент D , получаем выражение для силы сопротивления равномерно нагретого сфероида

$$\mathbf{F} = -4\pi \mu_{g\infty} U_\infty c \frac{G_2'(\lambda_0)G_1(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_1'(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)} \mathbf{n}_z. \quad (33)$$

Обычно в выражение для силы сопротивления сфероида вводят поправочный множитель, учитывающий отличие от силы сопротивления сферы с радиусом, равным экваториальному радиусу сфероида ($R = a$). Представим выражение для силы (33) в виде

$$\mathbf{F} = 6\pi \mu_{g\infty} U_\infty K_\mu \mathbf{n}_z, \quad (34)$$

где K_μ — поправка к закону Стокса, которая, в случае произвольных перепадов температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее, определяется соотношением

$$K_\mu = \frac{2}{3\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \frac{G_2(\lambda_0)G_1'(\lambda_0) - G_2'(\lambda_0)G_1(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)},$$

где значения функций G_1 , G_2 , G_4 берутся при средней температуре поверхности сфероида T_S .

Формула (34) представляет собой обобщение закона Стокса при стационарном движении равномерно нагретой твердой крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы для случая, когда перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее произволен.

Сфероидальная частица, падающая под действием силы тяжести, в конце концов начинает двигаться с постоянной скоростью \mathbf{U}_p , при которой действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами.

Сила тяжести, действующая на частицу, имеющую форму поверхности сплюснутого сфероида, с учетом выталкивающей силы равна

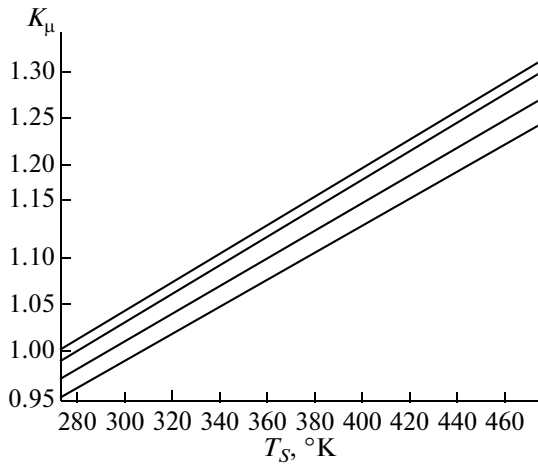
$$\mathbf{F}_g = (\rho_p - \rho_g) \mathbf{g} \frac{4}{3} \pi a^2 b, \quad (35)$$

где \mathbf{g} — ускорение свободного падения, ρ_p , ρ_g — плотность частицы и газообразной среды, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_S , a и b — полуоси сфероида.

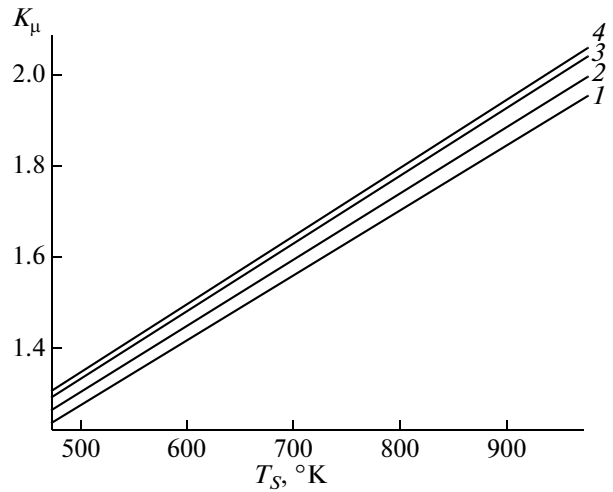
Сравнивая (34) и (35), получаем выражение для скорости установившегося падения твердой равномерно нагретой аэрозольной частицы сфероидальной формы

$$\mathbf{U}_p = \frac{2(\rho_p - \rho_g)}{9 \mu_{g\infty} K_\mu} a b \mathbf{g} \mathbf{n}_z. \quad (36)$$

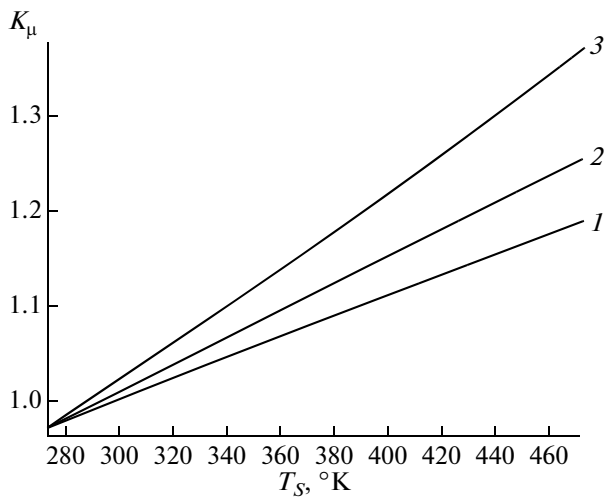
Выражения (34) и (36) позволяют оценить силу, действующую на равномерно нагретый сфероид, и скорость ее осаждения с учетом зависимости плотности газообразной среды и коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры при произвольных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и области вдали от нее. Формулы (34) и (36) справедливы даже тогда, когда относительный перепад температуры



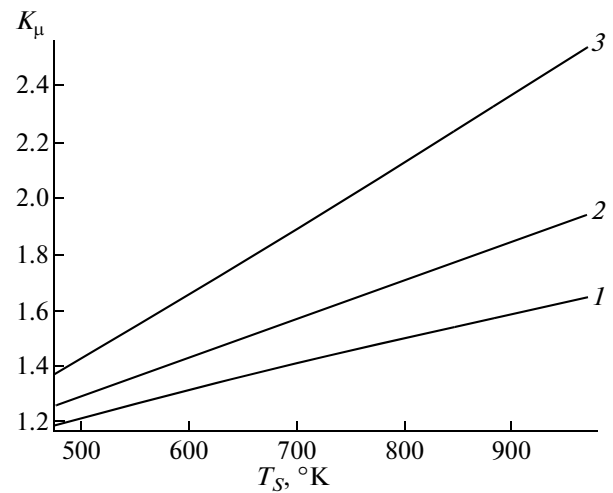
Фиг. 5. Зависимость функции K_μ от температуры поверхности T_S ($T_S \leq 500^\circ$) при различных отношениях полуосей сфероида: $b/a = 0.75$ (кривая 1), $b/a = 0.85$ (кривая 2) и $b/a = 0.95$ (кривая 3). Кривая 4 соответствует шару.



Фиг. 6. Зависимость функции K_μ от температуры поверхности T_S ($T_S > 500^\circ$) при различных отношениях полуосей сфероида: $b/a = 0.75$ (кривая 1), $b/a = 0.85$ (кривая 2) и $b/a = 0.95$ (кривая 3). Кривая 4 соответствует шару.



Фиг. 7. Зависимость функции K_μ от температуры поверхности T_S ($T_S \leq 500^\circ$) для различных газов: $\alpha = \beta = 0.5$ (кривая 1), $\alpha = \beta = 0.7$ (кривая 2) и $\alpha = \beta = 1$ (кривая 3) ($b/a = 0.85$).



Фиг. 8. Зависимость функции K_μ от температуры поверхности T_S ($T_S > 500^\circ$) для различных газов: $\alpha = \beta = 0.5$ (кривая 1), $\alpha = \beta = 0.7$ (кривая 2) и $\alpha = \beta = 1$ (кривая 3) ($b/a = 0.85$).

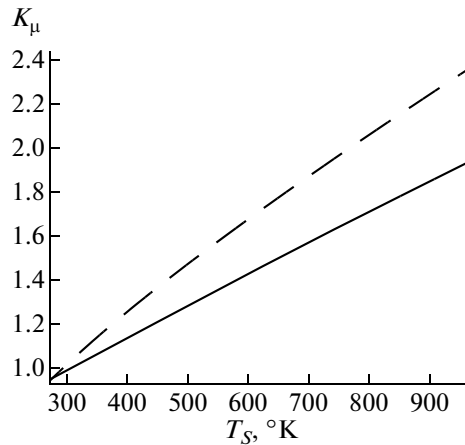
мал. В этом случае Γ_0 , α , β стремятся к нулю, и (34), (36) переходят в соответствующие выражения, отвечающие малым относительным перепадам температуры (см. [2, с. 174]:

$$\mathbf{F}^* = 6\pi\mu_{g\infty} U_\infty K_\mu^* \mathbf{n}_z, \tag{37}$$

$$\mathbf{U}_p^* = \frac{2(\rho_p - \rho_g)}{9\mu_{g\infty} K_\mu^*} abgn_z, \tag{38}$$

где

$$K_\mu^* = \frac{4}{3\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \frac{1}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arctg} \lambda_0}.$$



Фиг. 9. Зависимость функции K_μ от температуры поверхности T_S .

Влияние форм-фактора на силу сопротивления равномерно нагретого сфероида представлено на фиг. 5 и 6, где приведена зависимость K_μ от температуры поверхности частицы в случае, когда внешней средой является воздух, для разных отношений полуосей сфероида: $b/a = 0.75$ (кривая 1), $b/a = 0.85$ (кривая 2) и $b/a = 0.95$ (кривая 3). Кривая 4 соответствует шару.

Параметры α и β , через которые выражаются теплопроводность и динамическая вязкость, для большинства газов меняются от 0.5 до 1. На фиг. 7 и 8 представлены кривые для поправки K_μ , построенные при отношении полуосей сфероида $b/a = 0.85$, для различных газов: $\alpha = \beta = 0.5$ (кривая 1), $\alpha = \beta = 0.7$ (кривая 2) и $\alpha = \beta = 1$ (кривая 3).

Для случая нагретой медной частицы на фиг. 9 показана зависимость функции K_μ (кривые для K_μ (сплошная) и K_μ^* (штриховая)) от температуры поверхности при условии, что внешняя среда — воздух — отношение полуосей сфероида $b/a = 0.75$. При построении графика для K_μ^* значения динамической вязкости $\mu_{g,sc}$, согласно [13], брались при средней температуре поверхности сфероида.

Как видно на фиг. 9, величина силы сопротивления нагретой частицы определяется в основном температурой ее поверхности, а не температурой набегающего потока газа, что хорошо согласуется с результатами эксперимента (см. [13]). Однако формула (37), в которой вязкость $\mu_{g,sc}$ берется при средней температуре поверхности сфероида, дает значение силы сопротивления, которое сильно (до 20%) отличается от значения, вычисленного в данной работе по формуле (34). Указанное различие в результатах объясняется тем, что формула (37), в отличие от (34), не учитывает зависимость теплофизических свойств газообразной среды (вязкости, теплопроводности) и плотности от температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leong K.N. Thermophoresis and Diffusiophoresis of Large Aerosol Particles of Different Shapes // J. Aerosol Sci. 1984. V. 15. № 4. P. 511–517.
2. Хатпель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1960.
3. Малай Н.В. Обтекание неравномерно нагретой капли потоком жидкости при произвольных перепадах температуры в ее окрестности // Инженерно-физ. ж. 2000. Т. 73. № 4. С. 728–738.
4. Малай Н.В. Движение твердой нагретой сфероидальной частицы в вязкой жидкости с однородным внутренним тепловыделением // Ж. техн. физ. 2001. Т. 71. № 8. С. 13–16.
5. Яламов Ю.И., Малай Н.В., Шукин Е.Р. Особенности термокапиллярного дрейфа нагретой капли в вязкой жидкости в поле электромагнитного излучения // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 6. С. 1–6.
6. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.—Л.: Химия, 1966.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1981.
9. Кордингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностран. лит-ра, 1958.
10. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Иностран. лит-ра, 1960. Т. 1.
11. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Иностран. лит-ра, 1960. Т. 2.
12. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
13. Бабий В.И., Иванова И.П. Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях // Теплоэнергетика. 1965. № 9. С. 19–23.