ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 01.04.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001632
Тарасовой Оксаны Александровны

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Глушак А.В.

Рецензент
к. ф.-м.н.
Полунин В.А.

БЕЛГОРОД 2018

Оглавление

Введение……………………………………………………………………..3

Глава I. Управляемость и устойчивость в задачах управления………………………………………..…………………….5

1.1. Постановка задачи оптимального управления…………….….….…5

1.2. Критерии управляемости……….………..…………………………...11

1.3. Связь между упавляемостью и устойчивостью в задачах управления……………………………………………………………..…..16

Глава II. Стабилизация системы относительно подпространства……...28

2.1. Критерии управляемости линейной системы на подпространство…………...…………………………………………………28

2.2. Критерий стабилизации системы относительно подпространства. Алгоритм проверки возможности стабилизации системы относительно подпространства……………………………………………………………...…40

2.3. Примеры стабилизации систем относительно подпространства………………………………………………….................51

Список использованной литературы ……………………………………..55

Введение

За последние годы современная теория управления получила быстрое развитие, и теперь она по общему признанию является мощным практическим инструментом для решения задач построения линейных замкнутых систем управления. Для современного этапа развития науки и техники характерны быстрый прогресс технической кибернетики и значительное расширение сферы ее применения. В настоящее время основными чертами задач управления являются большая сложность объектов, а также высокие требования к точности и динамике управления. Так, например, развитие авиации и ракетно-космической техники обусловило постановку и необходимость решения принципиально новых проблем: управление многосвязными объектами, построение оптимальных систем стабилизации и терминального управления, управление системами при неполной информации. Это привело к интенсивной разработке и широкому практическому применению таких разделов теории, как оптимальное управление.

Математическая теория оптимального управления – раздел математики, в котором изучаются способы формализации и методы решения задач о выборе наилучшего в заранее предписанном смысле способа осуществления управляемого динамического процесса. Этот динамический процесс может быть описан при помощи дифференциальных, интегральных, функциональных, конечно разностных уравнений, зависящих от системы функций или параметров, называется управлением.

Математическая теория оптимального управления возникла в середине 50-х годов XX столетия. Ее возникновение связано с необходимостью решения новых в тот период задач управления движущимися объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями. Выдающуюся роль в развитии теории оптимального управления сыграло открытие принципа максимума – Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Е.Ф. Мищенко, который дает необходимое условие оптимальности.

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия. Теория оптимального управления играет большое значение в направлении, где требуется уменьшение времени течения процесса. В настоящее время оказались эффективными методы решения линейных задач быстродействия, основанных на min – проблеме моментов А.А. Маркова, предложенные В.И. Коробовым и Г.М. Скляром.

Структура работы: выпускная квалификационная работа включает в себя введение, две главы, заключение и список использованной литературы.

В первой главе рассматривается общая постановка задачи оптимального управления: динамика объекта, класс допустимых управлений, начальное и конечное состояния объекта, критерий качества; основные вопросы математической теории оптимального управления: управляемость, существование оптимального управления, необходимые условия оптимальности, достаточные условия оптимальности, единственность оптимального управления; постановка линейной задачи быстродействия.

Во второй главе рассматриваются критерии управляемости линейной системы на подпространство, доказывается критерий стабилизации системы относительно подпространства, дается алгоритм проверки возможности стабилизации системы относительно подпространства, в конце приводятся примеры стабилизирующих систем.

Цель настоящей квалификационной работы – исследовать вопросы стабилизации системы относительно подпространства и построить примеры стабилизирующих систем на основе критерия стабилизации систем относительно подпространства.

Глава I. Управляемость и устойчивость в задачах управления

1.1. Постановка задачи оптимального управления

Динамика объекта. Для задачи оптимального управления характерно наличие некоторого динамического объекта, т.е. объекта, меняющегося во времени[1,8-16]. Пусть положение объекта в каждый момент времени *t* полностью характеризуется набором параметров $x^{'}(t),...,x^{n}(t)$. Это могут быть координаты объекта в какой-то системе координат, координаты скорости и т.п. Вектор

$$x(t) = (x^{1}(t),...,x^{n}(t))$$

называется фазовым, вектором объекта. Предполагается, что движением объекта можно управлять, т.е. объект снабжен некоторыми рулями, от положения которых зависит его поведение. Пусть положение рулей характеризуется в каждый момент времени *t* набором параметров $u^{'}(t),...,u^{m}(t)$. Вектор

$$u(t) = (u^{1}(t),...,u^{m}(t))$$

называется управляющим параметром, объекта или управлением. Естественно предположить, что состояние объекта в данный момент времени *t* зависит от того, какие значения принимает управление *u(t)* до момента времени *t*, и не зависит от будущего поведения управления.

В зависимости от того, как выражается зависимость вектора фазового состояния *x(t)* от управления *u(t)*, рассматривают различные динамические объекты. Например, эта зависимость может описываться системой дифференциальных уравнений

$$x = f(t, x, u) \tag{1.1.1}$$

В этом случае, зная значение управления *u(t)* в каждый момент времени *t*, можно определить траекторию объекта *x(t)* как решение дифференциального уравнения

$$x = f(t, x, u(t))$$

Будем считать, что каким-то образом задана динамика объекта, т.е. закон изменения вектора состояния *x(t)* в зависимости от изменения вектора управления *u(t)*.

Класс допустимых управлений. В конкретных физических объектах управление *u(t)* может не быть произвольным. На него наложены какие-то ограничения, вытекающие из физического смысла управления. Например, если $u^l(t)$ — тяга двигателя, то в каждый момент времени она должна удовлетворять ограничению

$$u_{\min} \le u^1(t) \le u_{\max}$$

При этом тяга $u^l(t)$ может принимать также и крайние значения u_{min} и u_{max}. Обычно предполагают, что вектор управления *u(t)* удовлетворяет в каждый момент времени *t* ограничению

$$u(t) \in U \tag{1.1.2}$$

где *U* — некоторое заданное множество. Как правило, в конкретных физических объектах множество *U* замкнуто. Эта замкнутость и не позволяет в общем случае исследовать поведение управляемого объекта методами классического вариационного исчисления. Кроме ограничения вида (1.1.2) могут быть наложены ограничения на зависимость управления *u(t)* от времени. Из физического смысла допустимыми управлениями могут быть либо гладкие функции, либо непрерывные, либо кусочно-непрерывные и т.п. Будем считать, что каким-то образом задан класс кусочно-непрерывных управлений *u(t)*.

Начальное и конечное состояния объекта. Предположим, что задан начальный момент времени t_0 и множество M_0 допустимых начальных состояний объекта. Кроме того, желательно управлять объектом так, чтобы в какой-то конечный момент времени t_1 объект перешел на некоторое множество

M_1 допустимых конечных состояний. Будем считать, что допустимое управление $u(t)$ переводит объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 на отрезке времени $[t_0,t_1]$ если соответствующее этому управлению $u(t)$ фазовое состояние объекта $x(t)$ удовлетворяет условиям

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1 \tag{1.1.3}$$

Заметим, что конечный момент времени t_1 может быть, вообще говоря, не фиксированным, а определяться из условия попадания вектора $x(t)$ на конечное множество M_1. Предположим, что допустимые множества M_0 и M_1 заданы.

Критерий качества. Может случиться, что управляемый объект можно перевести из множества M_0 на множество M_1 многими способами. Часто на практике желательно среди всех таких переходов выбрать в каком-то смысле наилучший. Обычно предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$, заданному на отрезке $[t_0,t_1]$ и соответствующей ему траектории объекта $x(t)$ сопоставлено некоторое число J, оц*енивающее качество пары u(t), x(t), т.е. задан функционал, или критерий, качества J (u(t), x(t))*. Например, этот функционал может иметь вид

$$J(u(t), x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(s, x(s), u(s))ds \tag{1.1.4}$$

Теперь можно сформулировать задачу оптимального управления. Эта задача заключается в нахождении таких допустимого управления $u^*(t)$ и соответствующей ему траектории объекта $x^*(t)$, переводящей объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1, что при этом функционал качества $J(u(t), x(t))$ принимает минимальное значение, т.е.

$$J(u^*(t), x^*(t)) = \min J(u(t), x(t))$$

Здесь минимум берется по всевозможным допустимым управлениям $u(t)$ и соответствующим траекториям $x(t)$, переводящим объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1.

Математическая теория оптимального управления включает в себя следующие вопросы:

Управляемость. Будем говорить, что объект является управляемым из множества M_0 на множество M_1. В противном случае сама постановка задачи оптимального управления теряет смысл.

Существование оптимального управления. Если вопрос об управляемости решается положительно, т.е. существует некоторое управление $u(t)$, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1, то необходимо выяснить, существует ли оптимальное управление. С математической точки зрения этот вопрос является одним из основных, и если оптимального управления не существует, то дальнейшие поиски его становятся бессмысленными. В математике мы имеем дело всегда лишь с некоторой моделью реального физического объекта, и отсутствие в модели оптимального управления может указывать на то, что модель построена неправильно.

Необходимые условия оптимальности. Если оптимальное управление в задаче существует, то далее нужно развивать методы нахождения этого оптимального управления. Даже в простых задачах может оказаться бесконечно много допустимых управлений, переводящих объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1. Поэтому простым перебором всех допустимых управлений обойтись не удается. Таким образом, оптимальное управление нужно искать лишь среди множества допустимых управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности.

Таким необходимым условием оптимальности является принцип максимума Понтрягина. Первоначально он был высказан в качестве гипотезы академиком Львом Семеновичем Понтрягиным в 1953 г. для управляемых систем, динамика которых описывается уравнением вида (1.1), а затем доказан его учениками. По существу, с принципа максимума и началась математическая теория оптимального управления. В некоторых задачах оказывается даже, что принципу максимума удовлетворяет лишь конечное число управлений, среди которых уже нетрудно выбрать оптимальное.

Достаточные условия оптимальности. Отобрать оптимальное управление в классе позволяют достаточные условия оптимальности. Если некоторое управление $u(t)$ из этого класса удовлетворяет достаточным условиям оптимальности, то тем самым гарантируется его оптимальность. Конечно, может случиться, что достаточным условиям оптимальности удовлетворяет не одно, а несколько управлений. Тем самым гарантируется, что все они оптимальны, т.е. функционал качества принимает на всех этих управлениях одинаковое и притом минимальное значение.

Единственность оптимального управления. Важно знать, является ли оптимальное управление единственным. Если оно единственно, то в конкретных управляемых объектах реализация единственного оптимального управления может оказаться существенно проще. Сначала устанавливаем, что оптимальное управление существует, и мы нашли единственное доступное управление $u(t)$, переводящее из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 и удовлетворяющее необходимых условиям оптимальности, то тем самым гарантируется, что это управление $u(t)$ оптимально.

Линейная задача быстродействия. Мы сформулировали общую постановку задачи оптимального управления – линейной задачи быстродействия. Динамика объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + u \tag{1.1.5}$$

где x – n-мерный вектор фазового состояния объекта, u — n-мерный вектор управления, на который наложено ограничение $u(t) \in U$, А – постоянная матрица размером $n \times n$. Зная некоторую допустимую функцию управления $u(t)$ и начальное состояние объекта $x(t_0)=x_0$, можно получить единственную функцию $x(t)$ вектора фазового состояния объекта как решение дифференциального уравнения (1.1.5).

Начальное и конечное состояния объекта будем выбирать как элементы некоторых непустых и компактных подмножеств M_0 и M_1 соответственно из n-мерного фазового пространства. Критерием качества будет служить время перехода из множества M_0 на множество M_1, т. е.

$$J(u(t), x(t)) = t_1 - t_0$$

Такой критерий качества получаете, из критерия качества (1.1.4), когда подынтегральная функция имеет вид

$$f^0(t, x(t), u(t)) \equiv 1$$

Таким образом, мы пришли к постановке линейной задачи быстродействия. Эта задача заключается в нахождении допустимого управления $u^*(t)$ и соответствующего ему решения $x^*(t)$ уравнения (1.1.5), переводящего объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 за минимальное время.

1.2. Критерии управляемости

Определение 1.2.1 Система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

называется полностью управляемой за время *T*, если для любых точек x_0, $x_T \in R^n$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что траектория системы, $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ начинающаяся в начальный момент времени $t_0 = 0$ в точке $x(0) = x_0$, оканчивалась в момент времени *T* в точке $x(T) = x_T$.

Следующая теорема дает удобный критерий управляемости автономных линейных систем[6,91-93].

Теорема 1.2.1 Автономная линейная система в R^n

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (*)$$

будет управляемой тогда и только тогда, когда ранг $(n \times nm)$-матрицы $\left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right]$ равен n.

Доказательство. Предположим, что система $(*)$ управляема, т. е. ее можно перевести из точки x_0 в произвольную точку x_1 из R^n. Предположим, что при этом, вопреки предположению теоремы,

$$rank[B, AB, ..., A^{n-1}B] < n.$$

Тогда строки матрицы связаны линейной зависимостью, и существует ненулевой постоянный вектор-строка v такой, что

$$v[B, AB, ..., A^{n-1}B] = 0$$

или

$$vB = vAB = vA^2B = ... = vA^{n-1}B = 0.$$

По теореме Гамильтона-Кэли матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n = c_1A^{n-1} + c_2A^{n-2} + ... + c_nI,$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ - некоторые действительные числа. Таким образом,

$$vA^nB = c_1vA^{n-1}B + ... + c_nvB = 0$$

и, по индукции,

$$vA^{n+k}B = 0 \text{ для всех } k = 0,1,2,3,...$$

Отсюда

$$ve^{At}B = v[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + ...]B = 0$$

для любого действительного t.

Решение $x(t)$, исходящее из точки $x_0 = 0$ и соответствующее управлению $u(t)$, дается формулой

$$x(t) = e^{At}\int_0^t e^{-As}Bu(s)ds.$$

Поэтому

$$vx(t) = \int_0^t ve^{A(t-s)}Bu(s)ds = 0$$

для любого управления $u(t)$. Таким образам, все траектории $x(t)$ должны находится в R^n на гиперплоскости, ортогональной вектору v. Однако это противоречит предположению об управляемости системы ($*$). Отсюда заключаем, что ранг матрицы $\left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right]$ равен n.

Обратно, предположим, что матрица $\left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right]$ имеет ранг n; докажем, что система ($*$) управляема. Пусть K_0' есть совокупность всех точек, в которые система может быть переведена из начала координат за промежуток времени $0 \le t \le 1$ с помощью управлений, удовлетворяющих условиям $i = 1, 2, ..., m.$ Тогда множество K_0' будет компактным и выпуклым в R^n.

Предположим, что размерность множества K_0' меньше, чем n. Тогда существует единичный вектор v такой, что

$$\int_0^t ve^{A(1-s)}Bu(s)ds = 0, \qquad (1.2.1)$$

для всех описанных выше уравнений. Поскольку, если не считать ограничений на величину, управления $u(t)$ являются произвольными, то можно заключить, что

$$ve^{A(1-s)}B \equiv 0, 0 \le s \le 1. \qquad (1.2.2)$$

При $s=1$ получим $vB=0$. Далее, дифференцируя равенство (1.2.2) по s и снова полагая $s=1$, получаем $vAB=0$. Продолжая этот процесс дифференцирования, выводим следующую цепочку равенств

$$vB = vAB = vA^2B = ... = vA^{n-1}B = 0.$$

Но это означает, что строки матрицы $\left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right]$ линейно зависимы, что противоречит нашему предположению, и значит, размерность множества K_0' равна n.

Поскольку управление $u(t)$ можно заменить управлением $-u(t)$, то множество K_0' симметрично относительно начала координат. Поскольку множество K_0' содержит открытое подмножество и выпукло, то оно должно содержать начало координат в своей внутренности. Если рассматривать управления, ограниченные условиями $\left|u^i\right| \le l$, где $l = 1, 2, 3, ...$, то соответствующие множества K_0' заменяются на lK_0'. Таким образом, множество достижимости K_0, соответствующее точке $x_0 = 0$, если не накладывать никаких ограничений на управления, будет представлять собой все пространство R^n. Рассмотрим теперь в качестве начальной точки произвольную точку $x_0 \in R^n$. Тогда множество достижимости имеет вид $K = e^A x_0 + K_0$, т. е. снова совпадает со всем пространством R^n. Таким образом, система $(*)$ управляема. Теорема доказана.

Пример 1.2.1 Управляемость тележки[5,4-5]. Пусть система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \qquad (**)$$

Здесь матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, вектор $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = (b, Ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Так как $rangQ = 2$, то система (**) полностью управляема.

Пример 1.2.2 Управляемость математического маятника. Пусть система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u. \end{cases} \qquad (***)$$

Здесь матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, вектор $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = (b, Ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Так как $rangQ = 2$, то система (***) полностью управляема.

Теорема 1.2.2 Для того чтобы система $(*)$ была полностью управляемой необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$W(T) = \int_0^T e^{-At} BB^* e^{-A^* t} dt$$

была положительно определенной [5,5-6].

Доказательство. *Необходимость.* От противного, пусть система является полностью управляемой, но матрица $W(T)$ не является положительно определенной, т. е. не имеет обратной. Тогда существует нулевой вектор $\psi \in R^n$ такой, что $W(T)\psi = 0$. Тогда имеем равенства

$$0=(W(T)\psi,\psi)=\int_0^T(e^{-At}BB^*e^{-A^*t}\psi,\psi)dt=\int_0^T(B^*e^{-A^*t}\psi,B^*e^{-A^*t}\psi)dt.$$

В силу непрерывности и неотрицательности подинтегральной функции последнее соотношение эквивалентно соотношению $B^*e^{-A^*t}\psi=0$ на *[0,T].*

Дифференцируя последнее равенство, получаем для всех $t\in[0,T]$ равенства

$$B^*e^{-A^*t}\psi=0,B^*A^*e^{-A^*t}\psi=0,...,B^*(A^*)^{n-1}e^{-A^*t}\psi=0,$$

откуда при *t=0* получаем

$$\psi^*B=0,\psi^*AB=0,...,\psi^*A^{n-1}B=0,\phi$$

т. е. $\psi^*Q=0$, что противоречит условию $rangQ=n$.

Достаточность. Поскольку матрица $W(T)$ является положительно определенной, то существует $W^{-1}(T)$. Выберем управление $u(t)$ в виде

$$u(t)=-B^*e^{-A^*t}W^{-1}(T)x_0$$

Подставляя это управление в правую часть равенства

$$x_0=-\int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\,,$$

получаем

$$\int_0^T e^{-A\tau}BB^*e^{-A^*t}W^{-1}(T)x_0d\tau=W(t)W^{-1}(T)x_0=x_0.$$

Теорема доказана.

1.3 Связь между управляемостью и устойчивостью в задачах управления

Определение 1.3.1 Нулевое решение системы $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$, называется устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, t \geq 0.$

Определение 1.3.2 Управляемая система

$$\dot{x} = f(x,u), f(0,0) = 0$$

называется стабилизируемой, если существует такое управление $u = u(x)$, что его нулевое решение системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ асимптотически устойчиво.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{1.3.1}$$

где A — постоянная ($n \times n$) — матрица, B — постоянная ($n \times r$) матрица. Для краткости будем говорить, что эта система стабилизируема, если возможно выбрать управление $u(x)=(u_1(x),..., u_r(x))$ так, чтобы нулевое решение было асимптотически устойчиво[5,5-10]. Пусть ранг матрицы управляемости $(B,AB,\ldots,A^{n-1}B)$ равен $p \leq n$. Если система (1.3.1) полностью управляема, т.е. $p = n$, то она стабилизируема. Исследуем, какие условия необходимы для стабилизации системы (1.3.1), если эта система, вообще говоря, не является полностью управляемой, т.е. $p < n$. Если существует замена переменных такая, что система (1.3.1) распадается на управляемую и неуправляемую части, причем неуправляемая часть устойчива, то система стабилизируема. Ниже описывается подпространство, в котором система управляема, а, следовательно, и стабилизируема, даются достаточно эффективные условия для проверки стабилизируемости систем, приводится алгоритм стабилизации в явной форме в виде линейной функции от фазовых координат, указывается замена переменных, приводящая систему (1.3.1) к канонической форме.

Обозначим через L подпространство, порожденное столбцами матрицы управляемости. Это подпространство инвариантно относительно оператора A, поэтому любая траектория как системы (1.3.1), так и системы с обращенным временем

$$\frac{dx}{dt} = -Ax - Bu$$

начинающаяся в L, остается в L. Из этого следует, что траектории системы (1.3.1), начинающиеся из точек, не лежащих в L, не могут попасть в L за конечное время, иначе траектории системы с обращенным временем, начинающиеся в L могли бы покидать L, а это невозможно.

Через $d_1,...,\ d_{n-p}$ обозначим линейно независимые вектор-строки ортогональные вектор-столбцам матрицы управляемости ($B,\ AB,...,\ A^{n-1}\ B$).

Теорема 1.3.1 Система (1.3.1) полностью управляема только в подпространстве L.

Доказательство. Сделаем следующую замену переменных

$$y = \begin{pmatrix} d_1 \\ \ldots \\ d_{n-p} \\ e_1 \\ \ldots \\ e_p \end{pmatrix} x = Fx \tag{1.3.2}$$

где векторы $e_1, ..., e_p$ образуют базис подпространства L.

Так как

$$\frac{dy_i}{dt} = d_i \frac{dx}{dt} = d_i Ax + d_i Bu = d_i Ax \quad i = 1,\ldots,n-p$$

и ввиду того, что вектор-строка d_i ортогональна инвариантному относительно оператора A подпространству L. то d_iA также ортогональна L. Следовательно, $d_i A = \sum_{j=1}^{n-p} \gamma_j d_j$ откуда в силу (1.3.2)

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_{ij} y_j \quad i = 1,\ldots,n-p$$

Следовательно, после замены переменных (1.3.2) система (1.3.1) переходит в систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_1}{dt} = A_{11}z_1 \\ \dfrac{dZ_2}{dt} = A_{12}z_1 + A_{22}Z + B_2u \end{cases} \tag{1.3.3}$$

где $z_1 = (y_1, \ldots, y_{n-p})$, $z_2 = (y_{n-p+1}, \ldots, y_n)$. Система (1.3.3) при z_1=0. т.е. в L имеет вид

$$\frac{dZ_2}{dt} = A_{22}Z_2 + B_2u \tag{1.3.4}$$

Установим, что ранг матрицы (B, $A_{22}B_2$,..., $A_{22}^{p-1}B_2$) равен p т.е. система (1.3.4) а, следовательно, и система (1.3.3) в L полностью управляема.

Обозначим через M и N блочные матрицы

$$M = FB = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad N = FAF^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда

rank (M, NM,…, N^{n-1}M) = rank (FB, FAB,…, FA^{n-1}B) = rank (B, AB,…,A^{n-1}B) = P,

а так как

rank (M, NM,…, N^{n-1}M) = rank (B_2, $A_{22}B_2$,…, $A_{22}^{n-1}B_2$) = rank (B_2, $A_{22}B_2$,…, $A_{22}^{p-1}B_2$)

(матрица A_{22} размера ($n \times p$),то

rank (B_2, $A_{22}B_2$,…, $A_{22}^{p-1}B_2$) = p

Так как ни в одну точку из L нельзя попасть из точек не принадлежащих L, а начало координат принадлежит L, то система полностью управляема только в L.

Теорема 1.3.2 Для того чтобы система (1.3.1) была стабилизируемой необходимо и достаточно, чтобы вещественная часть любого корневого вектора, отвечающего собственному значению λ такому, что $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ принадлежала L.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $z = \omega_{01} + i\omega_{02}$ корневой вектор высоты *k*, отвечающий собственному значению $\lambda = \mu + iv$ такому, что $\mu \geq 0$. Покажем, что вектор $\operatorname{Re} z = \omega_{01} \in L$.

Пусть *u(x(t))* — управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.3.1). Обозначим через $x_0(t)$ траекторию системы (1.3.1), удовлетворяющую условию $x_0 = x_0(0) = \omega_0$, а через $\upsilon(t)$ обозначим $u(x_0(t))$. Тогда

$$x_0(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\upsilon(\tau)d\tau$$

Откуда

$$d_i x_0(t) = d_i e^{At} x_0 + \int_0^t d_i e^{A(t-\tau)} (b_1\upsilon_1(\tau) + \ldots + b_r\upsilon_r(\tau))d\tau\,,\ \ i = 1,\ldots,n-p$$

Так как $e^{A(t-\tau)}b_i \in L$, то $d_i e^{A(t-\tau)} B\upsilon(\tau) = 0$, поэтому

$$d_i x_0(t) = d_i e^{At} x_0 \tag{1.3.5}$$

Так как *z* — корневой вектор высоты *k*, то

$$e^{(A-\lambda E)t}z = z + t(A-\lambda E)z + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A-\lambda E)^{k-1}z$$

откуда

$$e^{At}z = e^{\lambda t}\left[z + tz + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}z_{k-1}\right] \tag{1.3.6}$$

где z_j — корневой вектор высоты *k* — *j*, соответствующий тому же собственному значению λ. Следовательно, ввиду вещественности e^{At}

$$e^{At}x_0 = e^{At}\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} e^{At}z = \operatorname{Re} e^{\lambda t}\left[z + tz + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}z_{k-1}\right]$$

Пусть

$$z_j = \omega_{j1} + i\omega_{j2}\,,\ j=1,\ldots,k-1$$

тогда

$$e^{At}\,\mathrm{Re}\,z = e^{At}\omega_{0_1} = e^{\mu t}\sum_{j=0}^{k-1} t^{j}(\omega_{j_1}\cos\nu t - \omega_{j_2}\sin\nu t)$$

Так как $x_0(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, то $d_i x_0(t)\to 0$ при $t\to\infty$, поэтому и выражение

$$d_i e^{At}\,\mathrm{Re}\,z = e^{\mu t}\sum_{j=0}^{k-1}(d_i\omega_{j_1}\cos\nu t - d_i\omega_{j_2}\sin\nu t)\frac{t^{j}}{j!}\to 0 \text{ при } t\to\infty$$

Полагая $\nu t = 2n\pi$, получим

$$d_i e^{At}\,\mathrm{Re}\,z = e^{\mu t}\sum_{j=0}^{k-1} d_i\omega_{j_1}\frac{t^{j}}{j!}$$

Если $d_i\omega_{k-11}\neq 0$,то при достаточно большом n

$$\left|d_i\omega_{k-1}1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right| > \left|\sum_{j=0}^{k-2} d_i\omega_{j_1}\frac{t^{j}}{j!}\right|$$

а так как $\mu\geq 0$,то

$$e^{\mu t}\sum_{i=0}^{k-1} d_i\omega_{j_1}\frac{t^{j}}{j!}\to\infty \text{ при } n\to\infty$$

поэтому $d_i\omega_{k-11}=0$, аналогично устанавливаем, что $d_i\omega_{j1}=0$ при $j=k-2,\ k-1,\ldots,$ 0.

Итак, $d_i\omega_{01}=d_i\,\mathrm{Re}\,z=0$, что и требовалось доказать.

Отметим, что, полагая $\nu t=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, можно установить, что $d_i\omega_{02}=0$.

Достаточность. Предположим, что векторы b_j, $Ab_j,\ldots,A^{k_j-1}b_j$ — линейно- независимые, а векторы b_j $Ab_j,\ldots,A^{k_j}b_j$ — линейно-зависимые при $j = 1,\ldots,r$. Рассмотрим цепочку векторов b_1, $b_2,\ldots$, b_r, Ab_1, $Ab_2,\ldots$, $Ab_r,\ldots$, $A^{n-1}b_r$. Начиная с вектора b_2 будем проверять является ли он и все следующие за ним векторы линейными комбинациями предыдущих векторов. Если какой-то вектор A^jb_s линейно зависит от предыдущих, то его и все последующие векторы до вектора $A^{n-1}b_s$ включительно, выбрасываем из цепочки. Таким образом, получаемая цепочка векторов состоит из линейно-независимых векторов, число которых равно числу линейно-независимых векторов в исходной цепочке. Меняя, если это необходимо, нумерацию столбцов матрицы *B*, получим цепочку векторов

$$b_1, Ab_1, \ldots, A^{n_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{n_2-1}b_2, \ldots, b_r Ab_r, \ldots, A^{n_r-1}b_r$$

$$n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_r \qquad n_1 + \ldots + n_r = p \tag{1.3.7}$$

Выберем вектор $C_k(k = 1,\ldots,r)$ так, чтобы $(c_k, A^{n_k-1}b_k) = 1$и чтобы он был ортогонален всем остальным векторам цепочки (1.3.7). Сделаем следующую замену переменных

$$y = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_{n-p} \\ c_1 \\ c_1A \\ \ldots \\ c_1A^{n_1-1} \\ \ldots \\ c_r \\ c_rA^{n_r-1} \end{pmatrix} x = Fx$$

Покажем, что матрица не особенная. Для этого рассмотрим выражение

$$\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j d_j + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1} \beta_{ij} c_j A^j = 0$$

Умножая обе части этого выражения поочередно на векторы цепочки (1.3.7), получим, что все коэффициенты β_{ij} равны нулю, а тогда в силу линейной независимости векторов d_j равны нулю также коэффициенты β_j, $j = 1,\ldots, n - p$. Таким образом, строки матрицы *F* линейно независимы.

После этой замены переменных первые *n-p* уравнений имеют вид

$$\dot{y} = d_i \dot{x} = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_{ij} y_j \quad j = 1,\dots, n - p$$

Остальные уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{y}_{n-p+1} = c_1 Ax + c_1 Bu = c_1 Ax = y_{n-p+2} \\ \dots \\ \dot{y}_{n-p+n_1-1} = c_1 A^{n_1-1} x + c_1 A^{n_1-2} Bu = c_1 A^{n_1-1} x = y_{n-p+n_1} \\ \dot{y}_{n-p+n_1} = c_1 A^{n_1} x + c_1 A^{n_1-1} Bu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n-p+n_1 j} y_j + u_1 + \sum_{j=2}^{n} \beta_{n-p+n_1 j} u_j \\ \dots \\ \dot{y}_{n-n_1-n_2+1} = \dot{y}_{n-n_1-n_2+2} \\ \dots \\ \dot{y}_{n-n_1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n-n_1 j} y_j + u_{r-1} + \beta_{n-n_1 r} u_r \\ \dots \\ \dot{y}_{n-n_1+1} = \dot{y}_{n-n_1+2} \\ \dots \\ \dot{y}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{nj} y_j + u_r \end{cases}$$

(1.3.8)

Если ранг матрицы управляемости ($B, AB,\dots, A^{n-1}B$) равен n, т.е. система полностью управляема (в нашем случае $p = n$), система (1.3.1) приводится к виду (1.3.8). Эта форма называется канонической формой полностью управляемой системы. В общем случае, т.е. при $p \le n$, канонической формой системы (1.3.1) назовем (1.3.8).

Покажем, что $y_1(t),\dots, y_{n-p}(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$ при любом выборе управления u и любых начальных значениях. Так как $y_i(t) = d_i x(t)$, то в силу (1.3.5)

$$y_i(t) = d_i e^{At} x_0, \quad j = 1,\dots, n - p$$

Все пространство представимо в виде прямой суммы корневых подпространств, отвечающих различным собственным значениям матрицы A, поэтому произвольное начальное условие x_0 можно разложить по корневым подпространствам матрицы A:

$$x_0 = \sum V_j$$

где V_j — проекция вектора x_0 на корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ_j а слагаемых в сумме столько, сколько различных собственных значений у матрицы A, причем, если $\mathrm{Im} V_i \neq 0$, то сумма содержит $\overline{V}_j$, а поэтому справа также стоит вещественный вектор. Тогда

$$y_i(t) = d_i \sum e^{At} V_j$$

Пусть V_j — корневой вектор высоты k_j, тогда из формулы (1.3.6) имеем

$$e^{At} V_j = e^{\lambda_j t} \left[V_j + t V_{i1} + \ldots + \frac{t^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} V_{jk_j - 1} \right]$$

где V_{js} — корневой вектор высоты k_j — s, соответствующий тому же собственному значению λ_j.

Представим множество индексов j в виде объединения $J_1 \cup J_2$, где J_1 соответствует собственным значениям с $\mathrm{Re}\lambda_j \geq 0$, а J_2 остальным собственным значениям. Для $j \in J_1$ по условию теоремы вещественные части (а значит и мнимые) корневых векторов лежат в L, поэтому $d_i V_{js} = 0$, следовательно,

$$y_i(t) = \sum_{j \in J_2} e^{\lambda_j t} d_i \left[V_j + \ldots + \frac{t^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} V_{jk_j - 1} \right]$$

Так как при $j \in J_1$ $\mathrm{Re}\lambda_j \geq 0$, то $y_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ ($i = 1, \ldots, n-p$).

Выберем теперь управление $u(y) = u(Fx)$ в виде линейной функции от y так, чтобы при $y_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ $i = n - p + 1, \ldots, n$.

Положим

$$u_m(y) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_{nj} y_j - \sum_{j=n-n+1}^{n} \gamma_j y_j$$

где положительные постоянные γ_j подбираются таким образом, чтобы система

$$\begin{cases} \dot{y}_{n-n_1+1} = y_{n-n_1+2} \\ \dots \\ \dot{y}_n = -\sum\limits_{j=n-n_1+1}^{n} \gamma_j y_j \end{cases}$$

была асимптотически устойчивой (с любой наперед заданной степенью устойчивости).

Аналогично

$$u_{m-1}(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n-n_1 j} y_j - \beta_{n-n_1 m} \left(-\sum_{j=1}^{n} \alpha_{nj} y_j - \sum_{j=n-n_1+1}^{n} \gamma_j y_j \right) - \sum_{j=n-n_1-n_2+1}^{n-n_1} \gamma_j y_j$$

где γ_j подбирается из прежних соображений и т.д. до $u_1(y)$ включительно.

Таким образом $x(t) = F^{-1} y(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого начального условия $x(0) = x_0$, что завершает доказательство достаточности.

Пример 1.3.1

Рассмотрим систему[7,274-280], описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_3 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 4x_3 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= 4x_3 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= -2x_4 + x_5, \\ \dot{x}_5 &= -x_5. \end{aligned}$$

Подсистема $\begin{cases} \dot{x}_4 = -2x_4 + x_5, \\ \dot{x}_5 = -x_5. \end{cases}$ неуправляема (независит от x_1, x_2, x_3),

однако она устойчива т.к.: подсистема задается матрицей

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем λ:

$$\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$$

=> $\lambda_{1,2} < 0$, значит подсистема устойчива.

Остальная часть системы задается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 01 \end{pmatrix},$$

Эта система управляема по критерию Калмана ($rang(B, AB, A^2B) = 3$).

Матрицы данной системы образуют невырожденную пару т. к.:

Здесь n=3 и m=2, и

$$rankA_u = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 & 1 & 32 \\ 1 & 2 & 2 & 8 & 4 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 3,$$

поскольку

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Причем $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; тогда $\bar{B} = Bq = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

и нетрудно проверить, что

$$\det\left\{\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, A^2\bar{B}\right\} = \det\begin{pmatrix} 3 & 9 & 33 \\ 3 & 10 & 36 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Введем скалярное управление u такое, что u_1=q_1u, u_2=q_2u, или (при q_1=*1*, q_2=*1*) положить обе компоненты управления одинаковыми. В результате управляемая часть системы приобретает вид

$$\dot{x}_1 = x_1 + 6x_3 + 3u,$$
$$\dot{x}_2 = 2x_2 + 4x_3 + 3u,$$
$$\dot{x}_3 = 4x_3 + u.$$

Поведение координаты x_3 зависит только от управления u_2. Причем $u_2 = -5x_3$. Тогда система, замкнутая такой обратной связью, приобретает вид

$$\dot{x}_1 = x_1 - 4x_3 + u_1,$$
$$\dot{x}_2 = 2x_2 - 6x_3 + u_1,$$
$$\dot{x}_3 = -x_3.$$

В ней выделилась устойчивая неуправляемая часть, задаваемая координатой x_3. Остается стабилизировать лишь управляемую часть с помощью выбора u_1. Это возможно, поскольку характеризующая ее пара матриц $a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - невырожденная:

$$\det\left\{B_1, a_{11}B_1\right\} = \det\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \neq 0.$$

Зададим собственные числа $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = -1$, матрицы $\bar{A} = A - BK$, здесь $n=2$. Найдем $K=(\kappa_1\, \kappa_2)$.

Характеристический многочлен матрицы A равен

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 => a_1 = -3, a_0 = 1.$$

Тогда действуя по алгоритму, получаем:

$$1. \left(\lambda - \bar{\lambda}_1\right)\left(\lambda - \bar{\lambda}_2\right) = \left(\lambda + 1\right)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 => \bar{a}_1 = 2, \bar{a}_0 = 1.$$
$$2. \tilde{k}_1 = \bar{a}_0 - a_0 = 1 - 2 = -1, \tilde{k}_2 = \bar{a}_1 - a_1 = 2 + 3 = 5.$$
$$3. S = \left(S_1 S_2\right),$$
$$S_2 = B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$S_1 = a_{11}B_1 + a_1B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$4.KS = \tilde{K} \Leftrightarrow \left(k_1 k_2\right)\left(S_1 S_2\right) = \left(\tilde{k}_1 \tilde{k}_2\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(k_1 k_2\right)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(-2k_1 - k_2, k_1 + k_2\right) = \left(-1,5\right) \Leftrightarrow$$

$$k_1 + k_2 = 5,$$

$$2k_1 - k_2 = -1.$$

$$k_1 = \frac{4}{3}, k_2 = \frac{11}{3}.$$

=> $K=(\kappa_1,\kappa_2)=\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$, т. е. $u_1 = \frac{4}{2}x_1 + \frac{11}{3}x_2.$

Глава II. Стабилизация системы относительно подпространства

2.1. Критерии управляемости линейной системы на подпространство

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{2.1.1}$$

где *A, B* – постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, x - вектор n-мерного пространства E_n, u - вектор r-мерного пространства E_r [3,3-11]. В данном пункте даются необходимые и достаточные условия управляемости системы (2.1.1) на произвольное подпространство пространства E_n как за свободное, так и за фиксированное время.

Определение 2.1.1 Система (2.1.1) называется полностью управляемой на множество $G \subset E_n$ за свободное время, если для любой точки $x_0 \in E_n$ существует число $T(x_0) \geq 0$ и заданное на отрезке $[0, T(x_0)]$ суммируемое управление $u(t, x_0)$, переводящее согласно системе

$$\dot{x} = Ax + Bu(t, x_0) \tag{2.1.2}$$

точку x_0 в некоторую точку множества G, то есть для решения $x(t)$ системы (2.1.2), удовлетворяющего произвольному начальному условию $x(0) = x_0$, справедливо включение $x(T(x_0)) \in G$.

Определение 2.1.2 Если в определении 2.1.1 оказалось, что для всех $x_0 \in E_n$ и некоторого T_1 справедливо $T(x_0) = T_1$, то система (2.1.1) называется полностью управляемой на G за время T_1.

Определение 2.1.3 Если для наперед заданного T и для любой точки x_0 существует управление $u(t, x_0)$ $0 \le t \le T$, переводящее точку x_5 в некоторую точку G согласно (2.1.2), то система (2.1.1) называется полностью управляемой за наперед заданное время T на множество G.

Далее будет показательно, что если система (2.1.1) полностью управляема за время T_1, то она полностью управляема за наперед заданное время T.

Определение 2.1.4 Множество $G \subset E_n$ называется достижимым за свободное время из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы

$$\dot{x} = Ax \tag{2.1.3}$$

если существует время $T(x_0)$ такое, что траектория системы (2.1.2), начинающаяся в точке x_0 при $t = 0$, в момент времени $T(x_0)$ достигает множества G, то есть $x(T(x_0)) \in G$.

Определение 2.1.5. Множество G называется достижимым за время T_1 (или за наперед заданное время T) изо всех точек E_n в силу системы (2.1.3), если траектория системы (2.1.3), начинающаяся в точке x_0 при $t=0$, в момент T_1 (в наперед заданный момент времени T) достигает множества G, т. е. $x(T_1) \in G$ $(x(T) \in G)$.

Вспомогательные результаты. Рассмотрим случай, когда определения 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 эквивалентны.

Лемма 2.1.1. Если $G = 0$, то определения 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 эквивалентны.

Доказательство. Установим, что из управляемости в смысле определения 2.1.1 следует управляемость в смысле определения 2.1.2. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – линейно независимые векторы пространства E_n, а $u_i(t)$ (i=1,2,…, n) – управления, переводящие соответствующие точки x_i в 0 за время $T_i = T(x_i)$. Обозначим через $T^* = \max\limits_{1<i\le n} T_i$, тогда управление

$$\upsilon_i = \begin{cases} u_i(t), & 0 \le t \le T_i \\ 0, & T_i < t \le T^* \end{cases}$$

переводит точку x_i в 0 за время T^* (для любого i). Пусть x_0 – произвольная точка из E_n и $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, тогда из x_0 возможно попадание в точку *0* за время T^* с помощью управления $u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \upsilon_i(t)$. Таким образом, система (2.1.1) полностью управляема в смысле определения 2.1.2.

Если система управляема в смысле определения 2.1.2, то $rank\ (B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$, но тогда система (2.1.1) управляема в смысле определения 2.1.3. Следование из управляемости в смысле определения 2.1.3, управляемости в смысле определений 2.1.2 и 2.1.1 очевидно.

Лемма 2.1.2. Если множество G достижимо в силу (2.1.3) за наперед заданное время или за некоторое время T_1, то $G = E_n$.

Доказательство. Так как для любого $x_0 \in E_n$ справедливо включение $e^{AT_1} x_0 \in G$ и так как, в силу невырожденности оператора e^{AT}, справедливо равенство

$$\{x : x = e^{AT} x_0, \quad x_0 \in E_n\} = E_n$$

В формулировке некоторых критериев управляемости на подпространство G используется понятие наибольшего инвариантного подпространства относительно оператора A, содержащегося в G. Следующая лемма дает способ отыскания такого подпространства.

Лемма 2.1.3. Пусть подпространство $G \subset E_n$ задается равенством $G = \{x : Hx = 0\}$, где H — постоянная вещественная матрица, тогда подпространство

$$M = \{x : Hx = 0, \quad (HA)x = 0, \ldots, (HA^{n-1})x = 0\}$$

является наибольшим подпространством, инвариантным относительно оператора A, содержащимся в G.

Доказательство. Пусть $x \in M$. Установим, что $Ax \in M$.

Имеем:

$$H(Ax) = (HA)x = 0, \qquad HA(Ax) = (HA^2)x = 0, \ldots,$$

$$HA^{n-2}(Ax) = (HA^{n-1})x = 0$$

$$HA^{n-1}(Ax) = H(A^n x) = H(\alpha_0 A^{n-1}x + \ldots + \alpha_{n-2}Ax +$$

$$+ \alpha_{n-1}x) \equiv \alpha_0 (HA^{n-1})x + \ldots + \alpha_{n-1}Hx = 0$$

В последнем равенстве использована теорема Гамильтона-Кэли, в силу которой $A^n = \alpha_0 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-2}A + \alpha_{n-1}E$.

Пусть M_1 – произвольное подпространство, инвариантное относительно оператора A, принадлежащее G. Покажем, что $M_1 \subset M$. Если $x \in M_1$, тогда $A^i x \in G \quad i \geq 0$ в силу инвариантности M_1, а так как $M_1 \subset G$, то $HA^{i-1}x = 0$. Следовательно, $M_1 \subset M$ и лемма доказана.

Заметим, что степень n – 1 в формулировке леммы можно заменить на степень минимального многочлена матрицы A.

Из доказанной теорема об эквивалентности задачи управляемости (в смысле определения 2.1.1 системы (2.1.1) на множество G задаче достижимости в силу системы (2.1.3) более широкого множества $L + G$. Это утверждение об эквивалентности задач справедливо также и в смысле определения 2.1.2, 2.1.3.

Ниже докажем эту теорему.

Вначале введем обозначения. Пусть L – подпространство, натянутое на вектор – столбцы матрицы $(B, AB,\ldots, A^{n-1}B)$, через K обозначим подпространство, натянутое на корневые вектор – столбцы матрицы A, отвечающие вещественным собственным значениям.

Теорема 2.1.1. Система (2.1.1) управляема (в смысле любого из определений 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3) на множество G тогда и только тогда, если множество $L + G$ достижимо (в смысле определения достижимости за свободное время, за некоторое время, за наперед заданное время соответственно) в силу системы (2.1.3).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x_0 \in E_n$. Так как система (2.1.1) управляема на множество *G* за время *T* в смысле любого из определений 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, т. е. время *T* представимо либо в виде *T(x₀)*, либо существует *T* одинаковое для всех x_0, либо *T* и наперед задано и одинаково для всех x_0, то существует управление $u(t, x_0)$, заданное на отрезке *[0, T]* такое, что $x(T) \in G$,

где

$$x(T) = e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau, x_0) d\tau$$

Используя представление $e^{A(T-\tau)}$ в виде степенного ряда, получаем, что вектор $\int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau, x_0) d\tau \in L$. Поэтому $e^{AT} x_0 \in (L + G)$, следовательно, множество $L + G$ достижимо из произвольной точки x_0 в силу системы (2.1.3).

Достаточность. Так как множество $L + G$ достижимо из точки x_0 за время *T*, в силу (2.1.3), согласно любому из введенных определении 2.1.4, 2.1.5, то $e^{AT} x_0 \in (L + G)$, следовательно, $e^{AT} x_0 = l + g$ где $l \in L$, $g \in G$. Система (2.1.1) в подпространстве *L* полностью управляема в смысле определения 2.1.3, тогда, в силу леммы 2.1.1, она управляема и в смысле определений 2.1.2 и 2.1.3. Поэтому существует управление *u(t)*, переводящее точку $x_0 = 0$ в точку $x = -l$ за время *T*. Следовательно,

$$x(T) = e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau = l + g - l = g$$

т. е. $x(T) \in G$.

С помощью этой теоремы легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1.4. Если система (2.1.1) полностью управляема за некоторое время T_1 на множество *G*, то она полностью управляема на множество *G* и за наперед заданное время *T*.

Доказательство. В силу теоремы 2.1.1 множество (L + G) достижимо из произвольной точки x_0 за время T_1, поэтому

$$e^{AT}x_0 \in (L+G). \qquad (2.1.4)$$

Зададим произвольное число $T > 0$ и установим, что из произвольной точки x_1 возможно попасть на L + G, в силу (2.1.3), за это время T, что будет означать управляемость системы (2.1.1) за наперед заданное время (в силу теоремы 2.1.1. Выберем x_0 во включении (2.1.4) в виде $x_0 = e^{A(T-T_1)}x_1$, тогда $e^{AT}x_1 \in (L+G)$.

В силу доказанной леммы в дальнейшем будем рассматривать управляемость системы (2.1.1) на G за свободное время или за наперед заданное время T.

Обозначим через M матрицу, столбцы которой являются базисом в M, через $L\{...\}$ будем обозначать линейную оболочку множества векторов, стоящих и фигурных скобках.

В следующей теореме устанавливаются критерии достижимости подпространства $G-\{x : Hx = 0\}$ за свободно время в силу (2.1.3).

Теорема 2.1.2. Для того чтобы подпространство G было достижимо за свободное время в силу (2.1.3) из любой точки $x_0 \in E_n$, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) Корневое подпространство K, отвечающее вещественным, собственным значениям оператора A, содержится в G, $\dim G \geq n-1$;

2) не существует собственного вектора A^*, отвечающего вещественному собственному значению, ортогонального наибольшему инвариантному подпространству относительно оператора A и содержащемуся в G, $\dim G \geq n-1$;

3) $rank(A-\lambda e, \widetilde{M}) = n$ для всех вещественных λ, $rankH \leq 1$;

4) $L\{(A^*-\lambda E)^n, H^*\} = L\{(A-\lambda E)^n\}$ для всех вещественных λ, $rankH \leq 1$;

5) $rank\begin{pmatrix} (A-\lambda E)^n \\ H \end{pmatrix} = rank(A-\lambda E)^n$ для всех, вещественных λ, $rankH \le 1$.

Доказательство. Наши рассмотрения будем производить в пространстве C_n – комплексном расширении пространства E_n, произвольный элемент которого обозначим через $x+iy(x \in E_n, \quad y \in E_n)$. Произвольному вещественному подпространству $F \subset E_n$ сопоставим подпространство $F = L\{x+io, \quad x \in F\}$ (линейная оболочка берется в пространстве C_n). Рассмотрим также расширение A вещественного оператора A на комплексное пространство C_n, положив $A(x+iy) = Ax + iAy$. Подпространству $F \subset E_n$ соответствует единственное подпространство $F \subset C_n$ и любому $F \subset C_n$, соответствует единственное подпространство F такое, что $L(F) = F$. Для нахождения подпространства F и рассматриваем в F векторы вида $x + oi$, тогда вещественные векторы $\{x\}$ образуют подпространство $F \subset E_n$. Если $F_1 \subset F^2$, где $F_1 \subset E_n$ и $F_2 \subset E_n$, то $F_1 \subset F_2$ и обратное, если подпространство $F_1 = L\{F_1\}$ принадлежит подпространству $F_2 = L\{F_2\}$, то $F_1 \subset F_2$. Поэтому в дальнейшем комплексное расширение $F = L\{F\}$ подпространства F обозначаем буквой F, а расширение A оператора A будем также обозначать через A.

Прежде чем доказывать эквивалентность условий, отметим, что все они содержат условие $\dim G \ge n-1$, которое в условиях 3, 4, 5 записано в виде $H = rankH^* \le 1$.

Докажем эквивалентность условий 1 и 2. Прежде всего отметим, что $K \subset G$ тогда и только тогда, когда $K \subset M$. Пусть выполняется условие 1 и пусть ω — произвольный собственный вектор оператора A^*, отвечающий вещественному собственному значению λ. Вектор ω ортогонален всем корневым векторам оператора A, отвечающим собственным значениям $\mu \ne \overline{\lambda}$ (в данном случае $\lambda = \overline{\lambda}$). В частности, вектор ω ортогонален всем корневым векторам оператора *A*, отвечающим собственному значению λ с $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Если ω ортогонален подпространству *M*, то, так как $K \subset M$, ω ортогонален также и всем корневым векторам оператора *A*, отвечающим вещественным собственным значениям, следовательно, ортогонален всем корневым векторам оператора *A*, поэтому $\omega = 0$.

Пусть выполняется условие 2. Можно считать, что $K \neq 0$, так как в противном случае условие 1 выполняется очевидным образом. В этом случае $M^{\perp}$ (значок $\perp$обозначает ортогональное дополнение к соответствующему множеству в пространстве C_n) не содержит ни одного собственного вектора оператора A^*, отвечающего вещественному собственному значению. Тогда не существует в $M^{\perp}$ и корневых векторов оператора A^* высоты больше 1, отвечающих вещественным собственным значениям. Действительно, пусть $\upsilon \in M^{\perp}$ – корневой вектор высоты *m*, отвечающий вещественному значению λ. Тогда $\omega = (A^* - \lambda E)^{m-1}\upsilon$ – собственный вектор оператора A^*. Имеем для любого вектора $\psi \in M$:

$$(\omega,\psi) = ((A^* - \lambda E)^{m-1}\upsilon,\psi) = (\upsilon,(A - \lambda E)^{m-1}\psi)$$

Вектор $(A - \lambda E)^{m-1}\psi \in M$, так как *M* инвариантно относительно оператора *A*. Поэтому $(\omega,\psi) = 0$, т. е. $\omega \in M^{\perp}$, что противоречит условию 2. Следовательно, канонический базис пространства $M^{\perp}$ состоит из корневых векторов оператора A^*, отвечающих только вещественным собственным значениям λ. Поэтому *M* содержит все корневые векторы оператора A^*, отвечающие вещественным собственным значениям.

Докажем теперь эквивалентность условий 2 и 3. Пусть выполняется условие 2, но условие 3 не выполняется, т. е. существует вещественное число λ_0 такое, что $(A - \lambda_0 E, \widetilde{M}) < n$. В этом случае существует вектор $\psi \neq 0$, ортогональный столбцам матрицы $(A - \lambda_0 E, \widetilde{M})$, т. е.

$$\psi^*(A - \lambda_0 E) = 0, \quad \psi^*\widetilde{M} = 0$$

(ψ^*– транспонированный вектор ψ). Но тогда $(A^* - \lambda_0 E)\psi = 0$, т. е. существует собственный вектор ψ матрицы A^*, отвечающий вещественному собственному значению, ортогональный подпространству M, что противоречит 2.

Пусть теперь выполняется условие 3, а условие 2 не выполняется, т. е. существует вектор $\omega \neq 0$ такой, что $A^*\omega = \lambda_0\omega,\ \omega^*\widetilde{M} = 0$, где λ_0– вещественно. Тогда $\omega^*(A - \lambda_0 E, \widetilde{M}) = 0$, что означает невыполнение условия 3.

Эквивалентность условий 1 и 4. Если вещественное число λ не является собственным значением оператора A, то условие 4 выполняется очевидным образом. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ все вещественные собственные значения оператора A, тогда $K = \sum_{i=1}^{s} K_i$, где $K_i = \{x : (A - \lambda_i E)^n x = 0\}$. Пусть условие 4 выполняется. Так как линейная оболочка столбцов матрицы образует подпространство $K_i^\perp$, то условие 4 означает, что $K_i^\perp \supset G^\perp$. Но тогда $K_i \subset G$, i=1,2,..., s, т. е. $K \subset G$, а так как из того, что $rank H^* \leq 1$, следует, что $\dim G \geq n - 1$, то условие 1 выполнено. Если же выполняется условие 1, т.е. $K \subset G$, то, так как $K_i \subset G, K_i^\perp \supset G^\perp$, что означает выполнение условия 4.

Условие 5 означает, что строки матрицы $\begin{pmatrix} (A - \lambda E)^n \\ H \end{pmatrix}$ принадлежат линейной оболочке строк матрицы $(A - \lambda E)^n$, т.е. условие 5 лишь иная форма записи условия 4, но более удобная в конкретных проверках свойств управляемости.

Основные результаты. Вернемся теперь к задаче управляемости системы (2.1.1) на подпространство $F \subset E_n$. Рассмотрим подпространство $G = F + L$. Пусть подпространство G задается равенством $G = \{x : Hx = 0\}$, H – матрица}, через M обозначим, как и ранее, наибольшее инвариантное подпространстве, но содержащееся теперь уже в $G = F + L$ пусть $\tilde{M}_1$ – матрица, столбцы которой являются базисом в *M*.

Из теорем 2.1.1 и 2.1.2 следуют критерии управляемости системы (2.1.1) за свободное время, содержащиеся в следующей теореме.

Теорема 2.1.3. Для того чтобы система (2.1.1) была управляемой на подпространство F за свободное время, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) корневое подпространство K, отвечающее вещественным собственным, значениям оператора A, содержится в $G = F + L$, $\dim(F + L) \geq n - 1$;

2) не существует вещественного собственного вектора оператора A*, ортогонального M – наибольшему инвариантному подпространству относительно оператора A и содержащемуся в (F + L), причем $\dim(F + L) \geq n - 1$;

3) $rank(A - \lambda E, M_1) = n$ для всех вещественных λ и $rankH \leq 1$;

4) $L\{(A^* - \lambda E)^n, H^*\} = L\{(A^* - \lambda E)^n\}$ для всех вещественных λ и $rankH^* \leq 1$;

5) $rank\begin{pmatrix} (A - \lambda E)^n \\ H \end{pmatrix} = rank(A - \lambda E)^n$ для всех вещественных λ.

Замечание. Очевидно, что условия 4, 5 теорем 2.1.2, 2.1.3 выполняются, если λ не является собственным значением оператора *A*. Если λ является собственным значением кратности *q*, то в условиях 4, 5 можно *n* заменить на *q*.

Из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.2 следует критерий управляемости системы (2.1.1) за наперед заданное время *T* на произвольное множество *G*.

Теорема 2.1.4. Для того чтобы система (2.1.1) была управляемой на произвольное множество G за наперед заданное время, необходимо и достаточно, чтобы

$$L + G = E_n. \qquad (2.1.5)$$

В случае, если G – подпространство, известен критерий управляемости системы (2.1.1) за наперед заданное время T. Пусть G задается равенством $\{x : Hx = 0,\ H$ – вещественная матрица$\}$, тогда этот критерий формулируется следующим образом.

Для того чтобы система (2.1.1) была управляемой на подпространство $G = \{x : Hx = 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$rank(HB, HAB, \ldots, HA^{n-1}B) = rankH \qquad (2.1.6)$$

Установим непосредственно эквивалентность критерия (2.1.5) в случае, если G – подпространство, и критерия (2.1.6). Не ограничивая общности, будем считать строки матрицы H линейно независимыми, обозначим их через h_1, $h_2, \ldots, h_m$, столбцы матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_p$. Тогда матрица $(HB, HAB, \ldots, HA^{n-1}B)$ имеет вид

$$Q = (HB, HAB, .., HA^{n-1}B) = \begin{pmatrix} h_1 l_1 & \ldots & h_1 l_p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_m l_1 & \ldots & h_m l_p \end{pmatrix} \qquad (2.1.7)$$

Пусть условие (2.1.5) выполняется, докажем тогда справедливость условия (2.1.6). Предположим противное. Тогда $rankQ < m$. Так как в этом случае строки матрицы Q линейно зависимы, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \neq 0$ такие, что

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i \right) l_1 = 0\ ,\ j=1, 2, \ldots, p. \qquad (2.1.8)$$

В силу линейной независимости вектор – строк $h_1, h_2, \ldots, h_m$ будет отлична от нуля и вектор – строка $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i$. Равенство (2.1.8) означает, что подпространство L принадлежит подпространству $N = \{x : fx = 0\}$.

Подпространство $N \neq E_n$ и содержит также подпространство G, так как если $x \in G$, то $h_i x = 0$, но тогда $fx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i x = 0$. Полученные включения $G \subset N$, $L \subset N$ противоречат тому, что $G + L = E_n$.

Пусть теперь выполняется условие (2.1.6). Предположим, что условие (2.1.5) не выполняется, т. е. $G + L \neq E_n$. Тогда существует вектор $f \neq 0$ такой, что $f \in (L^{\perp} \cap G^{\perp})$. Так как $f \in G^{\perp}$, то $f^* = \sum_{i=r}^{m} \alpha_i h_i$ (f^* – вектор – строка , h_i – вектор – строки матрицы H), а так как $f \in L^{\perp}$, то

$$f^* l_i = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i \right) l_1 = 0 \ , \ j=1, 2, \ldots, p.$$

Последнее равенство означает линейную зависимость строк матрицы (2.1.7), следовательно, ранг этой матрицы меньше m, что противоречит предположению.

2.2. Критерий стабилизации системы относительно подпространства

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\,, \tag{2.2.1}$$

где A, B– постоянные вещественные матрицы размером $n \times n$
и $n \times r$ соответственно; x– вектор n– мерного пространства E_n;
u – вектор r – мерного пространства E_r [4,114-123].

Зададим подпространство G равенством $G = \{x : Hx = 0\}$, где H – постоянная матрица.

Определение 2.2.1 Систему (2.2.1) назовем стабилизируемой относительно подпространства G, если существует такое линейно зависящее от x управление $u = Qx$ (Q - постоянная матрица размера $r \times n$), что

$$Hx(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0, \text{ где } x(t) \text{ - любое решение системы } \frac{dx}{dt} = Ax + BQx\,.$$

Пусть L – подпространство, натянутое на вектор – столбцы матрицы $\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)$. Так как L инвариантно относительно A, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Введем в $L^{\perp}$ канонический базис из вещественных частей собственных и корневых векторов A^*.

Определение 2.2.2 Корневым вектором линейного преобразования A, действующим в пространстве L над полем K, для данного собственного значения $\lambda \in K$ называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого натурального числа m

$$(A - \lambda E)^m x = 0$$

Если m является наименьшим из таких натуральных чисел (то есть $(A-\lambda E)^{m-1}x \neq 0$), то m называется высотой корневого вектора x.

Тогда $L^{\perp}$ можно представить в виде $L^{\perp} = K^{-} + K^{+}$, где K^{-} подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^{*} из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\mathrm{Re}\lambda < 0$, а K^{+} – подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^{*} из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.

Соответственно разложению $E_n = K^{-} + K^{+} + L$ любой вектор g разлагается в сумму $g = g^{-} + g^{+} + g^{L}$.

Если обозначить $g^{M} = g^{+} + g^{L}$, то любой вектор g можно также представить в виде

$$g = g^{-} + g^{M} \tag{2.2.2}$$

Докажем предварительно три леммы.

Лемма 2.2.1: Для произвольных – вектора g^{-}, управления $u(x)$ и начального условия x_0 решение $x(t)$ системы (2.2.1) удовлетворяет соотношению

$$(g^{-}, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Вектор g^{-} может быть записан в виде разложения по корневым векторам матрицы $A^{*}: g^{-} = \mathrm{Re}\sum_{k}\eta_k$, где η_k - корневой вектор высоты m_k, отвечающий собственному значению λ_k с $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$.

Если обозначить $u(x(t))$ через $\nu(t)$, то справедлива формула

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_{\nu}(\tau)d\tau$$

Пусть b_i – столбцы матрицы B. Имеем

$$(g^{-}, x(t)) = (g^{-}, e^{At}x_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{r} (g^{-}, e^{A(t-\tau)}b_i)\nu_i(\tau) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 d\tau.$$

Так как $e^{A(t-\tau)}b_i \in L$, $g^- \in L^\perp$, то интеграл равен нулю.

Тогда $(g^-, x(t)) = (e^{A^* t} g^-, x_0)$.

Вычислим

$$e^{A^* t}\eta_k : e^{A^* t}\eta_k = e^{\lambda_k t} e^{(A^* - \lambda_k E)t}\eta_k = e^{\lambda_k t}\sum_{j=0}^{\infty}(A^* - \lambda_k E)^j \eta_k \frac{t^j}{j!} = e^{\lambda_k t}\sum_{j=0}^{m_k - 1}(A^* - \lambda_k E)^j \eta_k \frac{t^j}{j!}$$

(здесь использовано то, что для корневого вектора высоты m_k $(A^* - \lambda_k E)^{m_k}\eta_k = 0$).

Таким образом, $e^{A^* t} g^- = \operatorname{Re}\sum_k e^{\lambda_k t}\sum_{j=0}^{m_k - 1}\frac{t^j}{j!}(A^* - \lambda_k E)^j \eta_k$, откуда в силу $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ вытекает утверждение леммы.

Лемма 2.2.2: Если $g^+ \neq 0$, то существует начальное условие x_0 такое что, решение $x(t)$ системы (2.2.1) с произвольным управлением $u(x)$ удовлетворяет соотношению $\left(g^+, x(t)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Так как $g^+ \in L^\perp$, то, как и в доказательстве предыдущей леммы, $\left(g^+, x(t)\right) = \left(g^+, e^{At}x_0\right) = \left(e^{A^* t} g^+, x_0\right)$. Поскольку g^+ разлагается по корневым векторам A^*, то $e^{A^* t} g^+$ представим в виде линейной комбинации функций вида $e^{\lambda t} t^{\mu}\left(\operatorname{Re}\lambda \geq 0\right)$ с векторными коэффициентами, причем в силу $g^+ \neq 0$ один из этих коэффициентов (обозначим его f_0) отличен от нуля. Если f_0 – вещественный, то в качестве x_0 выберем вектор, не ортогональный f_0 и ортогональный всем остальным коэффициентам. Если f_0 – комплексный, то в разложение обязательно войдет член $\overline{f}_0 e^{\overline{\lambda} t} t^{\mu}$. В этом случае в качестве x_0 достаточно взять вещественный вектор, не ортогональный f_0 (тогда он также не ортогонален $\overline{f}_0$) и ортогональный всем остальным слагаемым.

В первом случае $\left(e^{A^*t}g^+, x_0\right) = e^{\lambda t}t^{\mu}\left(f_{0,}x_0\right)$ $\left(\lambda \geq 0\right)$, во втором $\left(e^{A^*t}g^+, x_0\right) = 2\,\mathrm{Re}(e^{\lambda t}t^{\mu}\left(f_{0,}x_0\right)) = 2t^{\mu}e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\left[\mathrm{Re}\left(f_{0,}x_0\right)\cos\mathrm{Im}\,\lambda t - \mathrm{Im}\left(f_{0,}x_0\right)\sin\mathrm{Im}\,\lambda t\right]$.

Таким образом, в обоих случаях $\left(g^+, x(t)\right) = \left(e^{A^*t}g^+, x_0\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Лемма 2.2.3: Если система (2.2.1) стабилизируема относительно подпространства $\{x:(g,t)=0\}$ и если вектор g ортогонален всем столбцам матрицы $\left(B, AB, ..., A^{j-1}B\right)$, то любое решение системы (2.2.1) со стабилизирующим управлением $u = Qx$ удовлетворяет соотношениям $\left(A^{*i}g, x(t)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $\left(i = 0, 1, ..., j\right)$.

Доказательство. Так как при выборе управления $u = Qx$ система (2.2.1) превращается в однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то ее общее решение выражается через экспоненты $e^{\mu}i^{t}$, умноженные на полиномы от t. Поэтому, если $\left(g, x(t)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, эта функция содержит только убывающие экспоненты, значит, все ее производные также стремятся к нулю.

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(g,x) = (g, Ax + BQx) = (g, Ax) = (A^*g, x) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0;$$

$$\frac{d}{dt}(A^*g,x) = (A^*g, Ax + BQx) = (A^{*2}g, x) + (g, ABQx) = (A^{*2}g, x) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0;$$

....

$$\frac{d}{dt}(A^{*j-1}g,x) = (A^{*j}g, x) + (g, A^{j-1}BQx) = (A^{*j}g, x) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Сформулируем и докажем теорему о необходимом и достаточном условии стабилизируемости для случая одномерного управления *u* (при этом матрица *B* заменится вектором *b*).

Пусть запись $D \subset Z$, где D – матрица, а Z – подпространство, обозначает, что все столбцы матрицы D принадлежат подпространству Z; запись $Z\{a,b,...\}$ обозначает линейную оболочку векторов $a,b,...$

Теорема 2.2.1: Для стабилизируемости системы $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ необходимо и достаточно, чтобы либо $H^* \subset K^-$, либо существовали вектор c и неотрицательное число j такие, что $H^* \subset L\left\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\right\} + K^-$, причем $\left(c, A^k b\right) = 0 \quad \left(0 \le k < j\right). \left(c, A^j b\right) \ne 0.$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим что, система (2.2.1) стабилизируема относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ управлением $u = Qx$.

Если $H^* \subset K^-$, то необходимость доказана.

Пусть теперь $H^* \subset K^-$. Обозначим столбцы матрицы H^* через h_i. Рассмотрим полученные в соответствии с обозначением (2.2.2) векторы h_i^M. Пусть q – максимальное число линейно независимых векторов системы $\left\{h_i^M\right\}$. Очевидно, $q \ge 1$. Не нарушая общности, будем считать, что векторы $h_1, ..., h_q$ линейно независимы.

Обозначим $H^{*(1)} = (h_1^M, h_2^M, ..., h_q^M)$.

Докажем, что существуют постоянные $\alpha_i (1 \le i \le q)$, не равные нулю одновременно, такие, что для некоторого $j \ge q - 1$ вектор $\tilde{c} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^M$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(\tilde{c}, b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, b) = 0,$$

$$(\tilde{c}, Ab) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, Ab) = 0, \qquad (2.2.3)$$

....

$$(\tilde{c}, A^{j-1}b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, A^{j-1}b) = 0,$$

$$(\tilde{c}, A^{j}b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, A^{j}b) \neq 0. \qquad (2.2.3')$$

Действительно, при $j = q-1$ система (2.2.3) имеет нетривиальное решение, как однородная линейная система $q-1$ уравнений с q неизвестными, т. е. существует ненулевой вектор $\tilde{c}$, удовлетворяющий системе $(2.2.3')$. Если при данном j удовлетворяется соотношение $(2.2.3')$, то нужный вектор построен. В противном случае вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет системе (2.2.3) при $j = q$. Если соотношение $(2.2.3')$ удовлетворяется, то вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет нужным требованиям при $j = q$. В противном случае снова увеличиваем j на единицу и повторяем рассуждения.

Докажем, что при некотором $j \le n$ вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет соотношению $(2.2.3')$. Предположим противное, т. е. вектор $\tilde{c}$ ортогонален $b, Ab, ..., A^{n-1}b,$ следовательно, $\tilde{c} \in L^{\perp}$. При этом по построению $\tilde{c}^{-} = 0$. Таким образом, $\tilde{c} = \tilde{c}^{+} \neq 0$. Поэтому по лемме 2.2.2 при произвольном управлении $u(x)$ найдется x_0 такое, что $\left(\tilde{c}, x(t)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Но $\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i, x(t) \right) = \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^M + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t) \right) = (\tilde{c}, x(t)) + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t) \right).$

И так как второе слагаемое по лемме 2.2.1 стремится к нулю, то $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ при любом управлении $u(x)$, что противоречит стабилизируемости системы.

Итак, требуемый вектор $\tilde{c}$ построен. Возможны два случая:

1. $H^{*(1)} \subset L\left\{ \tilde{c}^M, (A^{*}\tilde{c})^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M \right\}$.

В этом случае

$$H^{*} \subset L\left\{ \tilde{c}, A^{*}\tilde{c}, ..., A^{*j}\tilde{c} \right\} + K^{-}, \qquad (2.2.4)$$

и доказательство необходимости закончено.

Действительно, возьмем любой вектор h_i. Тогда

$h_i^M \in L\left\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right\}$, т. е. $h_i^M = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^M$.

Имеем

$$h_i = h_i^M + h_{\bar{i}} = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^M + h_{\bar{i}} = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c}) - \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^- + h_{\bar{i}} \in L\left\{\tilde{c}, A^*\tilde{c}, ..., A^{*j}\tilde{c}\right\} + K^-$$

.

2. $H^{*(1)} \subset L\left\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right\}$. . (2.2.5)

В этом случае рассмотрим матрицу $H^{*(2)} = \left(H^{*(1)}\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c}), ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right)$.

Докажем, что ранг этой матрицы, который обозначим через q_2, больше или равен $q+1$.Для этого достаточно доказать, что $j+1$ векторов $\tilde{c}^M, ..., \left(A^{*j}\right)^M$ линейно независимы. Пусть $\sum_{k=0}^{j} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M = 0$. Умножим это равенство скалярно на вектор b:

$$0 = \sum_{k=0}^{j} \delta_k ((A^{*k}\tilde{c})^M, b) = \sum_{k=0}^{j} \delta_k (A^{*k}\tilde{c}, b) - \sum_{k=0}^{j} \delta_k ((A^{*k}\tilde{c})^-, b).$$

Так как $(\left(A^{*k}\right)\tilde{c})^- \in L^\perp$, а $b \in L$, то $\sum_{k=0}^{j} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}, b\right) = 0$.

Пользуясь(2.2.3), получаем $\delta_j \left(A^{*j}\tilde{c}, b\right) = 0$, а, используя $(2.2.3')$, получаем $\delta_j = 0$.

Умножим равенство $\sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M = 0$ на вектор Ab. Как и выше, получим $0 = \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k (\left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M, Ab) = \sum_{k=0}^{j-1} (A^{*k}\tilde{c}, Ab)\delta_k = \delta_{j-1}(A^{*j}\tilde{c}, b)$, откуда $\delta_{j-1} = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты δ_k равны нулю.

Таким образом, в силу (2.2.5) ранг $H^{*(2)}$ больше или равен $j+2 \geq q+1$.

Докажем, что для любого столбца $h_i^{(2)}$ матрицы $H^{*(2)}$ и любого решения $x(t)$ системы (2.2.1) со стабилизирующим управлением $u = Qx (h_i^{(2)}, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Для столбцов матрицы $H^{*(1)}$ это следует из условия стабилизируемости и леммы 2.2.1:

$$(h_i^{(1)}, x(t)) = (h_i^M, x(t)) = (h_i, x(t)) - (h_i^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, система (2.2.1) стабилизируема на подпространство $\{x : (\tilde{c}, x) = 0\}$ тем же управлением $u = Qx$. Следовательно, по лемме 2.2.3 $(A^{*k}c, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $(k = 0,1,..., j)$.

Окончательно имеем

$$((A^{*k}\tilde{c})^M, x(t)) = (A^{*k}\tilde{c})^M, x(t)) - ((A^{*k}\tilde{c})^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Повторяя все рассуждения, относящиеся к матрице $H^{*(1)}$ применительно к матрице $H^{*(2)}$, получим, что либо при некотором векторе $\tilde{c}_2$ и числе j_2 выполнено соотношение $H^{*(2)} \subset L\{\tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, ..., (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M\}$, т.е. $H^* \subset L\{\tilde{c}_2, A^*\tilde{c}_2, ..., A^{*j_2}\tilde{c}_2\} + K^-$, либо можно построить матрицу $H^{*(3)}$, ранг которой не меньше $q_2 + 1 \geq q + 2$:

$$H^{*(3)} = (H^{*(2)}, \tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, ..., (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M).$$

Этот процесс построения матриц $H^{*(k)}$ с увеличивающимся рангом должен обязательно оборваться на соотношении типа (2.2.4), так как ранг любой системы n – мерных векторов не превышает n.

Достаточность. Пусть существует вектор c и число j такие, что

$$H^* \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-, \ (c, A^k b) = 0, (0 \leq k \leq j), (c, A^j b) \neq 0.$$

Введем переменные $y_m (1 \leq m \leq j+1)$ следующим образом: $y_m = (A^{*m-1}c, x) = (c, A^{m-1}x)$.

Тогда

$$\dot{y}_1 = (c, \dot{x}) = (c, Ax + bu) = (c, Ax) = y_2,$$

$$\dot{y}_2 = (c, A\dot{x}) = (c, A^2x + Abu) = (c, A^2x) = y\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot{y}_j = (c, A^{j-1}\dot{x}) = (c, A^jx + A^{j-1}bu) = (c, A^jx) = y_{j+1},$$

$$\dot{y}_{j+1} = (c, A^j\dot{x}) = (c, A^{j+1}x + A^jbu) = (c, A^{j+1}x) + (c, A^jb)u\,.$$

Выбирая

$$u = \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m(c, A^{m-1}x)\right] = \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m y_m\right], \qquad (2.2.6)$$

где положительные постоянные γ_m подобраны так, чтобы система

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_j = y_{j+1}, y_{j+1} = -\sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m y_m$$

имела только экспоненциально убывающие решения.

По предположению для любого i существуют постоянные γ_m и вектор $q_i^- \in K^-$ такие, что $h_i = \sum_{m=1}^{j+1}\beta_m^i A^{*m-1}c + g_i^-$.

Поэтому при управлении задаваемой формулой (2.2.6) для любого решения системы (2.2.1) получим $(h_i, x(t)) = \sum_{m=1}^{j+1}\beta_m^i y_m(t) + (g_i^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ при любом начальном условии x_0. Действительно, первое слагаемое стремится к нулю по выбору управления $u(x)$, а стремление к нулю второго слагаемого вытекает из леммы 2.2.1.

Если $H^* \subset K^-$, то стабилизируемость системы (2.2.1) относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ также следует из леммы 2.2.1.

Приведем алгоритм, позволяющий проверить возможность стабилизации и, если стабилизация возможна, построить вектор c, найти число j и дать явный вид стабилизирующего управления $u = Qx$.

Пусть $rankH = l$. Напомним, что через h_i обозначены столбцы матрицы H^*, и, не нарушая общности, будем считать векторы $h_1, h_2, \ldots, h_l$ линейно независимыми.

Алгоритм проверки возможности стабилизации системы.

1.Находим базис K^-.

2.Вычисляем $r = rank(Hb, HAb, ..., HA^{n-1}b)$. Рассмотрим систему уравнений относительно $\omega_i\left(i=1,2,...,l\right)$:

$$(\xi,b)=(\xi,Ab)=...=(\xi,A^{n-1}b)=0,$$

где $\xi=\sum_{i=1}^{l}\omega_i h_i$. Обозначим через $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{l-r}$ линейно независимые решения этой системы. Если хоть один из этих векторов не принадлежит K^-, то стабилизация относительно подпространства G невозможна.

3.Пусть все $\xi_j \in K^-$ (если при этом $r=0$,то $H^* \subset K^-$ и есть стабилизация при любом выборе управления $u(x)$, например при $u(x)\equiv 0$).

Дополним систему $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{l-r}$ векторами $h_{i_1},h_{i_2},...,h_{i_r}$ до базиса в линейной оболочке $L(h_1,...,h_l)$. Обозначим через $H^*_{(1)}$ матрицу $(h_{i_1},h_{i_2},...,h_{i_r})$.

4.Рассмотрим систему уравнений относительно $a_1,a_2,...,a_r$;

$$(c,b)=(c,Ab)=...=(c,A^{j-1}b)=0, \tag{2.2.7}$$

где

$$c=\sum_{k=1}^{r}a_k h_{i_k},$$

а j таково, что ранг системы (2.2.7) равен $r-1$, в то время как ранг системы, полученной из (2.2.7) заменой j на $j+1$ равен r. При этом $j \ge r-1$ и $(c,A^j b)\ne 0$.

5.Проверяем, выполнено ли включение

$$H^*_{(1)} \subset L\{c,A^*c,...,A^{*j}c\}+K^-. \tag{2.2.8}$$

Если (2.2.8) имеет место, то стабилизация возможна. Для построения стабилизирующего управления выберем такие постоянные $\gamma_i\left(i=1,2,...,j+1\right)$, чтобы уравнение относительно $\mu\mu^{j+1} + \gamma_1\mu^j + ... + \gamma_{j+1} = 0$ имело все корни μ такие, что $\mathrm{Re}\,\mu < 0$.

Управление $u(x)$ задаем формулой

$$u = \frac{1}{(c, A^j b)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m (c, A^{m-1}x)\right]. \qquad (2.2.9)$$

6.Если включение (2.2.8) не имеет места, то строим матрицу $H^*_{(2)} = (H^*_{(1)}, c, A^*c, ..., A^{*j}c)$.

Если число $r_2 = rank(H_{(2)}b, H_{(2)}Ab, ..., H_{(2)}A^{n-1}b)$ равно r, то стабилизация возможна.

Если $r_2 \geq r + 1$,то, заменяя H на $H_{(2)}$, переходим к пункту 2 и повторяем дальнейшие построения. В силу того, что r_k (если данный процесс дойдет до построения матрицы $H_{(k)}$) не может неограниченно увеличиваться $(r \leq n)$, то на некотором обращении к пунктам 2-6 обнаружится невозможность стабилизации, или выполнится включение типа (2.2.8). В этом случае стабилизирующее управление определяется формулой (2.2.9).

2.3 Примеры стабилизации систем относительно подпространства

<u>Пример 2.3.1</u> Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u. \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

В нашем случае: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Зададим матрицу $H = (2,1)$. Тогда $rankH = l = 1,\ h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец матрицы H^*.

1. Собственные значения матрицы $A^* - \lambda E = \pm 1,$ соответствующие им собственные вектора (-1,1) и (-3,3).

Тогда базис $K^- - (-1,1)$.

2. $r = rank(Hb, HAb) = rank(3,3) = 1.$

Обозначим, $\xi = \omega_1 h_1$.

Система уравнений относительно $\omega_1 : (\xi, b) = (\xi, Ab) = 0$ имеет вид

$$3\omega_1 = 0,$$
$$3\omega_1 = 0.$$

Решение этой системы $\omega_1 = 0$.

3. Матрица $H^*_{(1)} = h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Обозначим $c = \alpha_1 h_1$.

Уравнение относительно $\alpha_1 : (c,b) = 3\alpha_1 \neq 0$ возьмем в виде (c,b)=3, откуда $\alpha_1 = 1, c = h_1, j = 0.$

5. Так как $H^*_{(1)} \subset L(c, A^*c) + K^- = R^2,$ то стабилизация возможна.

Для построения стабилизирующего управления выберем постоянные γ_1, чтобы уравнение относительно $\mu : \mu + \gamma_1 = 0$ имело корни μ такие, что $\mathrm{Re}\,\mu < 0.$

Пусть $\gamma_1 = 1.$ Тогда управление имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{(c,b)}[-(c, Ax) - \gamma_1(c,x)] = \frac{1}{3}(-9x_1 + 3x_2).$$

Следовательно, матрица Q имеет вид Q = (-3,1).

Подставим полученное управление в систему (2.3.1).

Тогда система $\dot{x} = (A + bQ)x$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Общее решение которой: $\left(\begin{cases} x_1 = x_1^0 e^{-t}, \\ x_2 = x_2^0 e^{-t} \end{cases} \right),$ где $x_1^0 = x_1(0), x_2^0 = x_2(0).$

Тогда $Hx = e^{-t}(2x_1^0 + x_2^0) \to 0$ при $t \to \infty.$

Пример 2.3.2 Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + u. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

В нашем случае: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Зададим матрицу $H = (2,0,1)$. Тогда $rank H = l = 1,\ h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец матрицы H^*.

1. Собственные значения матрицы $A^* - \lambda E = (-2,0,0)$, соответствующие им собственные вектора (1,2,-1), (1,1,2),(2,2,4).

Тогда базис $K^- - (1,2,-1)$.

2. $r = rank(Hb, HAb, HA^2b) = rank(3,-1,0) = 1$.

Обозначим, $\xi = \omega_1 h_1$.

Система уравнений относительно $\omega_1 : (\xi, b) = (\xi, Ab) = (\xi, A^2b) = 0$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
3\omega_1 &= 0, \\
-\omega_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Решение этой системы $\omega_1 = 0$.

3. Матрица $H^*_{(1)} = h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Обозначим $c = \alpha_1 h_1$.

Уравнение относительно $\alpha_1 : (c,b) = 3\alpha_1 \neq 0$ возьмем в виде (c,b)=3, откуда $\alpha_1 = 1, c = h_1, j = 0$.

5. Так как $H^*_{(1)} \subset L(c, A^*c) + K^- = R^2$, то стабилизация возможна.

Для построения стабилизирующего управления выберем постоянные γ_1, чтобы уравнение относительно $\mu : \mu + \gamma_1 = 0$ имело корни μ такие, что $\mathrm{Re}\,\mu < 0$.

Пусть $\gamma_1 = 1$. Тогда управление имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{(c,b)}[-(c,Ax) - \gamma_1(c,x)] = \frac{1}{3}(-x_1).$$

Следовательно, матрица Q имеет вид $Q = (-\frac{1}{3}, 0, 0)$.

Подставим полученное управление в систему (2.3.2).

Тогда система $\dot{x} = (A + bQ)x$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{4}{3}x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{2}{3}x_1 + x_2. \end{cases}$$

Общее решение которой:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}c_1 e^{-2t} + \dfrac{3(\sqrt{13}-5)}{\sqrt{13}-4}c_2 e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{6}t} + \dfrac{3(\sqrt{13}-5)}{\sqrt{13}-4}c_3 e^{\frac{\sqrt{13}-1}{6}t}, \\ x_2 = -c_1 e^{-2t} - 6c_2 e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{6}t} + 6c_3 e^{\frac{\sqrt{13}-1}{6}t}, \\ x_3 = c_1 e^{-2t} + (\sqrt{13}-5)c_2 e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{6}t} + (\sqrt{13}-5)c_3 e^{\frac{\sqrt{13}-1}{6}t} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1^0 = -\dfrac{3}{2}c_1 + \dfrac{3(\sqrt{13}-5)}{\sqrt{13}-4}c_2 + \dfrac{3(\sqrt{13}-5)}{\sqrt{13}-4}c_3, \\ x_2^0 = -c_1 - 6c_2 + 6c_3, \\ x_3^0 = c_1 + (\sqrt{13}-5)c_2 + (\sqrt{13}-5)c_3. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} c_1 = 0,16x_1^0 - 1,01x_2^0 + 0,78x_3^0, \\ c_2 = 0,05x_1^0 - 0,08x_2^0 - 0,14x_3^0, \\ c_3 = 0,07x_1^0 - 0,09x_2^0 - 0,02x_3^0. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 = e^{-2t}(1,52x_2^0 - 0,24x_1^0 - 1,17x_3^0) + e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{6}t}(0,53x_1^0 - 0,85x_2^0 - 1,49x_3^0) + e^{\frac{\sqrt{13}-1}{6}t}(0,74x_1^0 - 0,96x_2^0 - 0,11x_3^0), \\ x_2 = e^{-2t}(1,01x_2^0 - 0,16x_1^0 - 0,78x_3^0) + e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{6}t}(0,48x_2^0 - 0,3x_1^0 + 0,84x_3^0) + e^{\frac{\sqrt{13}-1}{6}t}(0,42x_1^0 - 0,54x_2^0 - 0,12x_3^0), \\ x_3 = e^{-2t}(0,16x_1^0 - 1,01x_2^0 + 0,78x_3^0) + e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{6}t}(0,11x_2^0 - 0,07x_1^0 + 0,19x_3^0) + e^{\frac{\sqrt{13}-1}{6}t}(0,13x_2^0 - 0,1x_1^0 + 0,03x_3^0). \end{cases}$$

где $x_1^0 = x_1(0), x_2^0 = x_2(0), x_3^0 = x_3(0).$

Тогда

$$Hx = e^{-2t}(2,03x_2^0 - 0,32x_1^0 - 1,56x_3^0) + e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{6}t}(0,99x_1^0 - 1,59x_2^0 - 2,79x_3^0) + e^{\frac{\sqrt{13}-1}{6}t}(1,38x_1^0 - 1,79x_2^0 - 0,19x_3^0) \to 0$$

, при $t \to \infty.$

Список литературы:

1. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Изд-во «Высшая школа»,2001 г.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Изд-во «Мир», 1677 г.
3. Коробов В.И.//Критерии управляемости линейной системы на подпространство//Вестник Харьковского университета// №221, выпуск 46, 1981г.
4. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н.//Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства// 1975 г.
5. Коробов В.И. Связь между управляемостью и устойчивостью в задачах управления для линейных систем. Полная управляемость линейных систем без ограничений на управление. Рукопись книги.
6. Ли Э.Б., Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М.: Изд-во «Наука», 1972 г.
7. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Изд-во «Наука», 1986 г.