Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №2. С. 89–96.

МАТЕМАТИКА

УДК 51.72
MSC 74S15
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-89-96

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА В ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА

А. М. Володченков[1], **А. В. Юденков**[2], **Л. П. Римская**[1]

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*)

[1]Смоленский филиал Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова,
Смоленск, 214030, Россия
[2]Смоленская государственная академия физической культуры, спорта и туризма,
Смоленск, 214018, Россия
E-mail: alexmw2012@yandex.ru, aleks-ydenkov@mail.ru, lilirimska@yandex.ru

Аннотация. В работе изучена структура комплексного стохастического потенциала напряженно деформированного состояния анизотропной среды. С его помощью поставлены краевые задачи для определения неизвестных напряжений и деформаций. Разработан алгоритм их решения. Отличием указанных краевых задач от используемых краевых задач классической теории упругости является то, что детерминированные краевые условия заменяются на стохастические. Это позволяет расширить область применения модели на среды, которые не являются абсолютно однородными. Кроме того, предложенная форма стохастического комплексного потенциала позволяет учитывать внутренние напряжения исследуемых образцов. Для иллюстрации работы алгоритма приведено решение основной задачи теории упругости для анизотропной среды, ослабленной отверстием близким к эллиптическому.

Ключевые слова: Теория упругости, краевая задача, комплексный потенциал, анизотропное тело.

Для цитирования: Володченков А. М., Юденков А. В., Римская Л. П. 2021. Стохастическая модель напряженного состояния анизотропного тела в теории комплексного потенциала. Прикладная математика & Физика, 53(2): 89–96. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-89-96.

STOCHASTIC MODEL OF THE STRESS STATE OF ANISOTROPIC BODY IN THE THEORY OF COMPLEX POTENTIAL

Alexander Volodchenkov[1], **Alexei Yudenkov**[2], **Lilia Rimskaya**[1]

(*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov*)

[1]Plekhanov Russian University of Economics, Smolensk Branch,
Smolensk, 214030, Russia
[2]Smolensk State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism,
Smolensk, 214018, Russia
E-mail: alexmw2012@yandex.ru, aleks-ydenkov@mail.ru, lilirimska@yandex.ru
Received April, 22, 2021

Abstract. The structure of the complex stochastic potential of the stress-strain state of an anisotropic medium has been studied. With its help, boundary-value problems are posed for determining unknown stresses and strains. An algorithm for their solution has been developed. The difference between the indicated boundary value problems and the used boundary value problems of the classical theory of elasticity is that the deterministic boundary conditions are replaced by stochastic ones. This allows you to expand the scope of the model to media that are not completely homogeneous. In addition, the proposed form of the stochastic complex potential makes it possible to take into account the internal stresses of the samples under study. To illustrate the operation of the algorithm, the solution of the main problem of the theory of elasticity for an anisotropic medium weakened by a hole close to elliptical is given.

Key words: Elasticity theory, boundary value problem, complex potential, anisotropic body.

For citation: Volodchenkov A. M., Yudenkov A. V., Rimskaya L. P. 2021. Stochastic model of the stress state of an anisotropic body in the theory of complex potential. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 89–96. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-89-96.

---

1. Введение. Важной задачей при проектировании подземных горных работ является оценка прочности сооружений. Для этого эффективно применяются методы математического моделирования с использованием комплексного потенциала (смотри, например, [1], [7], [11], [12]). Достаточно часто при этом возникают задачи по определению напряженно деформированного состояния однородной упругой среды, ослабленной отверстиями ([3], [8]). В работах Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили [5] было показано, что в случае упругой деформации изотропного тела основные задачи теории упругости сводятся к краевым задачам для аналитических компонент бигармонической функции. К настоящему времени теория классических краевых задач для бианалитических функций достаточно развита ([9], [13], [14]). Разработаны методы применения краевых задач для бианалитических функций для решения задач изотропной теории упругости. В то же время горные породы лишь приближённо можно считать изотропными. Для более точного описания напряженного состояния, особенно при предельных нагрузках, приводящих к образованию трещин, необходимо учитывать анизотропные свойства породы ([7], [12]). Наиболее полный разбор основных классических задач анизотропной теории упругости и их приложений к решению практических задач дан в работах [3] и [10].

В основе исследований упругих свойств анизотропных сред лежит использование функции комплексного потенциала. В отличие от изотропного случая, анизотропный комплексный потенциал и краевые условия для его определения имеют достаточно сложную структуру ([3], [10]), что существенно осложняет решение основных задач (смотри, например, [2]).

Помимо использования классического комплексного потенциала, для решения задач теории упругости можно эффективно использовать стохастический потенциал ([4], [9]). Использование стохастического комплексного потенциала позволяет существенно ослабить требования к граничным условиям. Это приводит к тому, что задачи теории упругости становятся применимы к средам, которые только приближённо являются однородными.

Целью работы является разработка математической модели для исследования напряжённо деформированного состояния упругого тела с учётом анизотропии и небольшой неоднородности. Кроме этого предлагаемая модель может остаться адекватной, если в исследуемой породе есть внутренние напряжения. Для достижения цели работы строится общий вид комплексного стохастического анизотропного потенциала, даются постановки основных задач теории упругости, приводится алгоритм их решения.

2. Построение модели и ее исследование. Исследования проводятся на основе теории стохастического потенциала и свойствах интеграла типа Коши. Приведём необходимые в дальнейшем определения и утверждения.

Определение 1. *Сингулярный интеграл*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z} \tag{1}$$

называется интегралом типа Коши. Функция $\varphi(\tau)$ называется плотностью, $\frac{1}{\tau - z}$ – ядром интеграла типа Коши.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. (Племеля – Сохоцкого) *Интеграл типа Коши имеет предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ при стремлении к точке t изнутри и извне соответственно, которые выражаются следующим образом*

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}. \end{aligned} \tag{2}$$

Определение 2. ([6], с. 145) *τ_D– называется первым моментом выхода случайного процесса Ито $Z(t)$ из D, если $\tau_D = inf\{t > 0, Z(t) \notin D\}$.*

Теорема 2. (Формула Дынкина) *Пусть f– непрерывная в среднем квадратическом функция, и пусть τ–момент остановки, причем $M(f(Z_{\tau_D})) < \infty$. Тогда*

$$M[f(Z_\tau)] = f(z) + M\left[\int\limits_0^\tau Af(Z_s)ds\right]. \tag{3}$$

Определение 3. *Пусть $Z(t)$– диффузионный процесс Ито. Характеристический оператор A процесса $Z(t)$ определяется формулой*

$$Af(z) = \lim_{U\to z}\frac{M[f(Z(\tau_U))] - f(z)}{M(\tau_U)}. \tag{4}$$

Здесь через U обозначаются множества U_k, стягивающиеся к точке z в том смысле, что $U_{k+1} \subset U_k$ и $\cap_k U_k = z$; τ_U– первый момент выхода из U процесса $Z(t)$.

Определение 4. *Функция $F(z)$ есть случайная аналитическая функция, если выполнено $AF(z) = 0$.*

Детерминированная модель. В случае, когда тело обладает анизотропией общего вида, неизвестные компоненты напряжений и смещений выражаются через функцию F, называемую комплексным потенциалом. В работе [3] показано, что при учёте внутренних напряжений комплексный потенциал имеет вид

$$F = F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3). \tag{5}$$

Сформулируем основное свойства комплексного потенциала.

Свойство 1. Функция (5) удовлетворяет уравнению

$$D_1 ... D_6 ReF = 0. \tag{6}$$

Здесь $D_k = \dfrac{\partial}{\partial y} - \mu_k \dfrac{\partial}{\partial x}$, μ_k– корни определённого характеристического уравнения.

Для удобства работают не с самими функциями $F_k(z_k)$, а с их производными $F_k' = \Phi_k$.

Приведём теперь математическую модель первой основной задачи теории упругости тел, обладающих анизотропией общего вида.

Определить функции $\Phi_k(z_k)(k = 1, 2, 3)$ по краевым условиям.

$$\begin{cases} 2Re[\Phi_1 + \Phi_2 + \nu_3\Phi_3] = f_1(s), \\ 2Re[\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2 + \mu_3\nu_3\Phi_3] = f_2(s), \\ 2Re[\nu_1\Phi_1 + \nu_2\Phi_2 + \Phi_3] = f_3(s). \end{cases} \tag{7}$$

Здесь f_k заданные на контуре L функции, определяемые внешними нагрузками и формой контура. В детерминированной постановке полагается, что функции f_k принадлежат классу Гёльдера.

Расширим требования к граничным условиям. Положим, что нагрузки и форма контура являются случайными функциями. Можно ли выразить решение задачи (7) в этом случае через компоненты функции (5)? В общем случае ответ отрицателен. Поэтому необходимо рассмотреть стохастический аналог комплексного потенциала.

Построение стохастической модели. Введём понятие стохастического комплексного потенциала.

Пусть w -– открытая область на плоскости комплексного переменного $z = x+iy$. Области $w_k(k = 1, 2, 3)$ находятся в аффинном соответствии области w на плоскостях $z_k = x_k + iy_k$.

Определение 5. *Функция Ψ называется стохастическим комплексным потенциалом, если*

$$M(\Psi) = M(\Psi_1(Z_{\tau_w 1}) + \Psi_2(Z_{\tau_w 2}) + \Psi_3(Z_{\tau_w 3})), \tag{8}$$

для всех $z_k \in D_k$ и всех открытых ограниченных множеств w_{km}, для которых замыкание которых принадлежит D_k. Здесь Ψ_k–случайная аналитическая функция.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть Ψ– стохастический комплексный потенциал, заданный в области D, тогда*

$$A_1A_2A_3Re\Psi = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$A_k f(z_k) = \lim_{w_k \to z_k} \frac{M(f(Z_{\tau_w k})) - f(z_k)}{M(Z_{\tau_w k})}. \tag{10}$$

Доказательство. Из формулы (10) следует

$$A_3Re\Psi = Re\left[\frac{1+\mu_1^2}{1+\mu_3^2}\Psi_1^{(2)}(z_1) + \frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_3^2}\Psi_2^{(2)}(z_2)\right],$$

$$A_2A_3Re\Psi = Re\left[\frac{(1+\mu_1^2)^2}{(1+\mu_2^2)(1+\mu_3^2)}\Psi_1^{(4)}(z_1)\right],$$

$$A_1A_2A_3Re\Psi = 0,$$

что т. д.

Теорема 4. *Если для функции $\Psi \in C^{(6)}(D)$ выполняется условие (9), то сама функция имеет вид (8).*

Доказательство. Для доказательства предложения воспользуемся формулой Дынкина (3).

$$A_2A_3Re\Psi = M(Re\Psi_1(Z_{\tau_D 1})) - \lim_{w \to z_{1_1}} \int_0^{\tau_D} A_1A_2A_3(Re\Psi)ds = M(Re\Psi_1(Z_{\tau_D 1})).$$

Аналогично

$$A_3 Re\Psi - M(Re\Psi_1(Z_{\tau_D 1})) = M(\Psi_2(Z_{\tau_D 2})) - \lim_{w\to z_{1_1}} \int_0^{\tau_D} (A_2 A_3 Re\Psi - M(Re\Psi_1))ds = M(Re\Psi_2(Z_{\tau_D 2})).$$

$$Re\Psi = M(Re\Psi_1(Z_{\tau_D 1})) + M(Re\Psi_2(Z_{\tau_D 2})) + M(Re\Psi_3(Z_{\tau_D 3})).$$

Заметим, что функцию Ψ можно восстановить по её действительной части с точностью до постоянного слагаемого.

Таким образом, стохастический комплексный потенциал можно записать в виде

$$\Psi = \Psi_1(z_1) + \Psi_2(z_2) + \Psi_3(z_3). \tag{11}$$

Сформулируем математическую модель первой основной задачи теории упругости для анизотропного тела, в случае, когда нагрузка и форма контура являются случайными функциями.

Определить случайный вектор $\{\Psi_1'(z_1), \Psi_2'(z_2), \Psi_3'(z_3)\}$ по краевому условию

$$\begin{gathered} Re[\Psi_1'(T_{1\tau_D}) + \Psi_2'(T_{2\tau_D}) + \nu_3\Psi_3'(T_{3\tau_D})] = f_1(T_{\tau_D}), \\ Re[\mu_1\Psi_1'(T_{1\tau_D}) + \mu_2\Psi_2'(T_{2\tau_D}) + \mu_3\nu_3\Psi_3'(T_{3\tau_D})] = f_2(T_{\tau_D}), \\ Re[\nu_1\Psi_1'(T_{1\tau_D}) + \nu_2\Psi_2'(T_{2\tau_D}) + \Psi_3'(T_{3\tau_D})] = f_3(T_{\tau_D}). \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $f_1(T_{T_D})$ – заданные случайные функции непрерывные в среднем квадратическом, $M(f_1(T_{T_D}))$ удовлетворяют условию Гельдера, $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ $\{V_1, V_2, V_3\}$ – комплексные постоянные, условия (12) выполняются почти наверное.

Результаты. Для исследования стохастической модели предположим следующий алгоритм.

Функции $\{\Psi_1'(z_1), \Psi_2'(z_2), \Psi_3'(z_3)\}$ можно рассматривать и как случайные функции обычных комплексных переменных $z_k = x + iy_k$, где

$$x_k = x + \alpha_k y, \quad y_k = \beta_k y \quad (k = 1, 2, 3).$$

При этом указанные функции будут определены в областях D_1, D_2, D_3 соответственно, полученных из области поперечного сечения D путем аффинного преобразования. Точке A контура L области D, определяемой дугой s, должны аффинно соответствовать точки A_1, A_2, A_{23}, на контурах L_1, L_2, L_3 областей D_1, D_2, D_3.

Пусть функции $\omega_0(\xi), \omega_1(\xi), \omega_2(\xi)$ и $\omega_3(\xi)$ конформно отображают области D, D_1, D_2, D_3 соответственно на внутренность единичного круга γ. Обозначим обратные функции через $\omega_k^{-1}(z_k)(k = 0, 1, 2, 3)$. При отображении границ L, L_1, L_2, L_3 точки A, A_1, A_2, A_3 находящиеся в аффинном соответствии, перейдут в точки $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ единичной окружности . Возникает так называемый сдвиг.

Выразим $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ через переменную σ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \omega_1^{-1}(t_1) = \omega_1^{-1}(\lambda_1(t)) = \omega_1^{-1}(\lambda_1(\omega_0(\sigma))) = \alpha_1\sigma, \quad t \in L, t_1 \in L_1, \\ \sigma_2 &= \omega_2^{-1}(t_2) = \omega_2^{-1}(\lambda_2(t)) = \omega_2^{-1}(\lambda_2(\omega_0(\sigma))) = \alpha_2\sigma, \quad t_2 \in L_2, \\ \sigma_3 &= \omega_3^{-1}(t_3) = \omega_3^{-1}(\lambda_3(t)) = \omega_3^{-1}(\lambda_3(\omega_0(\sigma))) = \alpha_3\sigma, \quad t_3 \in L_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Функции a_k называют функциями сдвига.

Перепишем краевые условия (12) в следующем виде

$$\begin{aligned} &2Re[\psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_\gamma})) + \psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_\gamma})) + \nu_3\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_\gamma}))] = g_1(\sigma_{\tau_\gamma}), \quad \sigma \in \Gamma \\ &2Re[\mu_1\psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_\gamma})) + \mu_2\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_\gamma})) + \mu_3\nu_3\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_\gamma}))] = g_2(\sigma_{\tau_\gamma}), \\ &2Re[\nu_1\psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_\gamma})) + \nu_2\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_\gamma})) + \psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_\gamma}))] = g_3(\sigma_{\tau_\gamma}). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\psi_k(\alpha_k(\sigma)) = \Psi_k'(t_k)$.

Для решения системы (14) применим комбинированный метод, основанный как на использовании теории стохастического потенциала, так и на теории детерминированных краевых задач. Перепишем краевые условия (14) в следующем виде

$$\begin{aligned} &\psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_\gamma})) = \overline{-\psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_\gamma}))} + Q_1(\sigma_{\tau_\gamma}), \\ &\mu_2\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_\gamma})) = \overline{-\mu_2\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_{\gamma D}}))} + Q_2(\sigma_{\tau_\gamma}), \\ &\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_\gamma})) = \overline{-\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_\gamma}))} + Q_3(\sigma_{\tau_\gamma}). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= -2Re[\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_\gamma})) + \nu_3\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_\gamma}))] + g_1(\sigma_{\tau_\gamma}),\\
Q_2 &= -2Re[\mu_1\psi_2(\alpha_1(\sigma_{\tau_\gamma})) + \mu_3\nu_3\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_\gamma}))] + g_2(\sigma_{\tau_\gamma}),\\
Q_3 &= -2Re[\nu_1\psi_2(\alpha_1(\sigma_{\tau_\gamma})) + \nu_2\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_\gamma}))] + g_3(\sigma_{\tau_\gamma}).
\end{aligned}
$$

Краевые условия (15) представляют собой стохастические задачи Дирихле для $Z-$аналитических ($X-$гармонических) функций.

Считая временно функции $Q_k \quad (k = 1, 2, 3)$ известными, решим задачи (15). Получим ([6] с. 217)

$$
\begin{aligned}
Re\psi_1(\xi) &= M(Q_1(\beta_1(\Xi_{\tau_\gamma}))),\\
Re\psi_2(\xi) &= \frac{1}{Re\mu_2}M(Q_2(\beta_2(\Xi_{\tau_\gamma}))),\\
Re\psi_3(\xi) &= M(Q_3(\beta_3(\Xi_{\tau_\gamma}))).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Здесь $\alpha_k(\beta_k(\xi)) = \xi$.

Краевые условия (16) являются детерминированными.

Перейдем в первом уравнении (16) к граничным значениям.

Учитывая, что

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\psi_k(\alpha_k(\sigma)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\psi_k(\alpha_k(\sigma_0))\alpha_k'(\sigma_0)d\sigma_0}{\alpha_k(\sigma_0) - \alpha_k(\sigma)},\\
&\frac{1}{2}\overline{\psi_k(\alpha_k(\sigma))} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\overline{\psi_k(\alpha_k(\sigma))}\alpha_k'(\sigma_0)d\sigma_0}{\alpha_k(\sigma_0) - \alpha_k(\sigma)} + C_k \quad (k = 2, 3),
\end{aligned}
\right\}
\tag{17}
$$

получим

$$
\begin{aligned}
\psi_1(\alpha_1(\sigma)) = &-\psi_2(\alpha_2(\sigma)) - \lambda_3\psi_3(\alpha_3(\sigma)) + \int\limits_\gamma A_2(\sigma,\sigma_0)\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))d\sigma_0 +\\
&+\int\limits_\gamma A_2(\sigma,\sigma_0)\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))}d\sigma_0 + \int\limits_\gamma A_3(\sigma,\sigma_0)\psi_3(\alpha_3(\sigma_0))d\sigma_0 +\\
&+\int\limits_\gamma B_3(\sigma,\sigma_0)\overline{\psi_3(\alpha_3(\sigma_0))}d\sigma_0 + \frac{1}{2}g_1(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{M(g_1)\alpha_1'(\sigma_0)d\sigma_0}{\alpha_1(\sigma_0) - \alpha_1(\sigma)}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Здесь функции $A_2(\sigma,\sigma_0), A_3(\sigma,\sigma_0), B_3(\sigma,\sigma_0)$ являются ядрами Фредгольма.

Аналогично продолжим работу со вторым и третьим условием (16). Получим

$$
\psi_2(\xi) = \frac{1}{2\pi i(\mu_2 - \mu_1)}\int\limits_\gamma \frac{Q_2(\beta_2(\sigma_0))d\sigma_0}{\sigma_0 - \xi} + \int\limits_\gamma R_2(\sigma_0,\sigma)Q_2(\beta_2(\sigma_0))d\sigma_0.
\tag{19}
$$

Через $Q_2(\sigma)$ обозначены заданные функции, зависящие от $M(g_1, M(g_2),\ \alpha_k(\sigma)\ (k = 1, 2)$.

$$
\begin{aligned}
&\triangle_3\psi_3(\alpha_3(\sigma)) + \overline{\triangle_3}\Psi_3(\alpha_3(\sigma)) + \int\limits_\gamma A_{33}(\sigma,\sigma_0)\Psi_3(\alpha_3(\sigma_0))d\sigma_0 +\\
&+\int\limits_\gamma B_{33}(\sigma,\sigma_0)\overline{\Psi_3(\alpha_3(\sigma_0))}d\sigma_0 = Q_3(\sigma),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где $A_{33}(\sigma,\sigma_0), B_{33}(\sigma,\sigma_0)$ – известные ядра Фредгольма, $Q_3(\sigma)$ – заданная функция.

Решая задачу (20), определим функцию $\psi(\xi)$. Подставим полученное выражение в уравнение (19), найдем функцию $\psi_2(\xi)$. Подставляя краевые значения функций $\psi_2(\xi)$ и $\psi_3(\xi)$ в первое краевое условие (16), найдем функцию $\psi_1(\xi)$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 5. *Решение краевой задачи для стохастического комплексного потенциала сводится к решению трех стохастических задач Дирихле для Z – аналитических функций (15) и последовательного решения детерминированных задач Гильберта с интегральными ядрами (18) и (20).*

Пример. В качестве примера рассмотрим случай бесконечной анизотроной пластинки с эллиптическим отверстием свободным от внешних усилий ([3] гл. 3).

Пусть напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение усилиями p, составляющими угол α с осью OX.

Запишем приведенные краевые условия

$$f_1^0 = -2Re[B_1 z_1 + (B_2 + iC_2)z_2],$$

$$f_2^0 = -2Re[B_1\mu_1 z_1 + \mu_2(B + iC_2)z_2],$$

где B_1, B_2, C_2 являются случайными величинами.

Функция, отображающая внутренность единичной окружности на внешность эллипса, имеет вид

$$z = \omega(\xi) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\xi} + \xi m\right) \quad \left(R = \frac{a+b}{2}, m = \frac{a-b}{a+b}\right). \tag{21}$$

Особенность рассматриваемой области (бесконечной плоскости с эллиптическмм отверстием) состоит в том, что при конформном отображении точки z_1, z_2 и z (здесь z принадлежит границе области) переходят в одну точку единичной окружности на плоскости ξ.

С учетом того, что $z_1 = \frac{a+i\mu_1 b}{2}\xi + \frac{a-i\mu_1 b}{2}\cdot\frac{1}{\xi}$, $z_2 = \frac{a+i\mu_2 b}{2}\xi + \frac{a-i\mu_2 b}{2}\cdot\frac{1}{\xi}$, преобразуем приведенные условия к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} f_1^0 &= -2Re[k_1\sigma + k_2\frac{1}{\sigma}],\\ f_2^0 &= -2Re[k_3\sigma + k_4\frac{1}{\sigma}],\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где k_n $(n = 1, \ldots, 4)$ – случайные величины.

Граничные условия (15) примут вид

$$\begin{aligned} &\psi_1(\sigma_{\tau_\gamma}) + \overline{\psi_1(\sigma_{\tau_\gamma})} + \psi_2(\sigma_{\tau_\gamma}) +\\ &+ \overline{\psi_2(\sigma_{\tau_\gamma})} = f_1(\sigma_{\gamma_\gamma}),\\ &\mu_1\psi_1(\sigma_{\tau_\gamma}) + \overline{\mu_1\psi_1(\sigma_{\tau_\gamma})} + \mu_2\psi_2(\sigma_{\tau_\gamma}) +\\ &+ \overline{\mu_2\psi_2(\sigma_{\tau_\gamma})} = f_2(\sigma_{\tau_\gamma}).\end{aligned} \tag{23}$$

Краевые условия (23) представляют собой две стохастических задачи Дирихле для Z−аналитических функций. Решая их, получим

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\xi) &= -M\left(\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_2(k_1 + \overline{k_2})}{\mu_1 - \mu_2}\right)\xi,\\ \psi_2^0(\xi) &= M\left(\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_1(k_1 + \overline{k_2})}{\mu_1 - \mu_2}\right)\xi.\end{aligned} \tag{24}$$

Возвращаясь к исходным координатам, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(z_1) &= -M\left(\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_2(k_1 + \overline{k_2})}{\mu_1 - \mu_2}\,\frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - (a^2 + \mu_1^2 b^2)}}{a + i\mu_1 b}\right),\\ \Phi_2^0(z_2) &= M\left(\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_1(k_1 + k_2)}{\mu_1 - \mu_2}\,\frac{z_2 - \sqrt{z_2^2 - (a^2 + \mu_2^2 b^2)}}{a + i\mu_2 b}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Напряженное состояние тела определим по формулам

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= p\cos^2\alpha + 2Re[\mu_1^2\Phi_1^{0\prime}(z_1) + \mu_2^2\Phi_2^{0\prime}(z_2)],\\ \sigma_y &= p\sin^2\alpha + 2Re[\Phi_1^{0\prime}(z_1) + \Phi_2^{0\prime}(z_2)],\\ \tau_{xy} &= p\sin\alpha\cos\alpha - 2Re[\mu_1\Phi_1^{0\prime}(z_1) + \mu_2\Phi_2^{0\prime}(z_2)].\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

3. Обсуждение результатов. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем 3, 4, 5. Из этих теорем следует, что разработана математическая модель для исследования напряжённо деформированного состояния упругого тела с учётом анизотропии, небольших неоднородностей, внутренних напряжений и допусков на внешние напряжения и форму тела. Сама модель представляет собой систему векторных, стохастических краевых задач со сдвигом для случайных аналитических функций. Предложен алгоритм решения основных задач теории упругости с использованием свойств разработанной модели. Таким образом, заявленная цель исследований достигнута.

Ограничения исследования и обобщения его результатов; предложения по практическому применению. При разработке математической модели полагалось, что зависимость между компонентами напряжений и смещений линейная. Это является главным ограничением к практическому применению результатов работы.

В то же время в области гуковских деформаций стохастическая модель основных задач теории упругости существенно обобщает аналогичные модели, основанные на использовании комплексного потенциала. Отличие предлагаемой модели состоит в том, что она, во-первых, работает с анизотропными средами за счёт введения в краевые условия функции сдвига; во-вторых, модель является стохастической, что позволяет применять её для почти однородных тел и в условиях неполной информации об упругих характеристиках среды; в-третьих, благодаря увеличению аналитических компонент в стохастическом комплексном потенциале до трёх, можно учитывать внутренние напряжения в образце. Указанные особенности позволяют рассчитывать, что построенная математическая модель будет эффективна при расчёте прочности подземных сооружений и других объектов.

4. Заключение. В статье построена и исследована математическая модель основных задач теории упругости для работы с анизотропными средами. При этом использовалась стохастическая теория комплексного потенциала. Получен алгоритм для решения основных задач теории упругости.

Список литературы

1. Борщ-Компониец В. И. 2013. Практическая механика горных пород. М., Горная книга, 322.
2. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. 2011. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2: 41–43.
3. Лехницкий Г. С. 1977. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 416.
4. Максимова Л. А., Юденков А. В. 2015. Теория стохастического потенциала в плоской теории упругости. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 4(26): 134–142.
5. Мусхелишвили Н. И. 1966. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М, Наука, 707.
6. Оксендаль Б. 2003. Стохастические дифференциальные уравнения. М, Мир, 300.
7. Оловянный А. Г. 2010. Математическое моделирование процессов деформирования и разрушения в трещиноватых массивах горных пород. Записки Горного института. СПб., 185.
8. Савин Г. Н. 1975. Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наукова думка, 315.
9. Юденков А. В., Володченков А. М., Римская Л. П. 2020. Математическое моделирование на основе теории потенциала. Москва.
10. Юденков А. В., Володченков А. М. 2020. Устойчивость математических моделей основных задач анизотропной теории упругости. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 30(1): 112–124.
11. Kuzmin Yu. O. 2015. Recent Geodynamics of a Fault System. Physics of the Solid Earth. 51(4): 480–485.
12. Kudo Y., Hashimoto K., Sano O., Nakagawa K. 1987. Relation between physical anisotropy and microstructures of granitlic rock in Japan. Proc. 6th Int. Congress on Rock Mech. Canada.
13. Kuritsyn S. Y., Rasulov K. M. 2018. On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type. Lobachevskii Journal of Mathematics. 39(1): 97–103.
14. Rasulov K. M. 2018. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk. Lobachevskii Journal of Mathematics. 39(1): 142–145.

References

1. Borshch-Komponiets V. I. 2013. Prakticheskaya mekhanika gornykh porod [Practical rock mechanics]. Moskva : Gornaya kniga, 322. (in Russian)

2. Ivlev D. D., Maksimova L. A., Mironov B. G. 2011. O sootnosheniyakh teorii translyatsionnoi ideal'no-plasticheskoi anizotropii v sluchae ploskoi deformatsii [On relations of the theory of translational ideal-plastic anisotropy in the case of plane deformation]. Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. № 2: 41–43. (in Russian)

3. Lekhnitskii G. S. 1977. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. [Elasticity theory for the anisotropic body] – M.: Nauka, – 416 s. (in Russian)

4. Maksimova L. A., Yudenkov A. V. 2015. Teoriya stokhasticheskogo potentsiala v ploskoi teorii uprugosti [Stochastic potential theory in the two-dimensional elasticitytheory]. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. № 4 (26). S. 134–142. (in Russian)

5. Muskhelishvili N. I. 1966. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some primalproblems of the mathematical theory of elasticity]. M, Nauka, 707 s. (in Russian)

6. Oksendal' B. 2003. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya [Stochastic differential equations]. M, Mir, 300s. (in Russian)

7. Olovyannyi A. G. 2010. Matematicheskoe modelirovanie protsessov deformirovaniya i razrusheniya v treshchinovatykh massivakh gornykh porod [Mathematical modeling of deformation and fracture processes in fractured rock mass]. Zapiski Gornogo instituta. SPb., 185. (in Russian)

8. Savin G. N. 1975. Raspredelenie napryazhenii okolo otverstii [Distribution of stresses around holes]. Kiev, Naukova dumka, 315. (in Russian)

9. Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M., Rimskaya L. P. 2020. Matematicheskoe modelirovanie na osnove teorii potentsiala [Mathematical modeling based on potential theory]. Moskva. (in Russian)

10. Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M. 2020. Ustoichivost' matematicheskikh modelei osnovnykh zadach anizotropnoi teorii uprugosti [Stability of mathematical models of the main problems of the anisotropic theory of elasticity]. Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki. 30(1): 112-124. (in Russian)

11. Kuzmin Yu. O. 2015. Recent Geodynamics of a Fault System. Physics of the Solid Earth. 51(4): 480-485.

12. Kudo Y., Hashimoto K., Sano O., Nakagawa K. 1987. Relation between physical anisotropy and microstructures of granitlic rock in Japan. Proc. 6th Int. Congress on Rock Mech. Canada.

13. Kuritsyn S. Y., Rasulov K. M. 2018. On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type. Lobachevskii Journal of Mathematics. 39(1): 97-103.

14. Rasulov K. M. 2018. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk. Lobachevskii Journal of Mathematics. 39(1): 142-145.

Получена 22.04.2021

Володченков Александр Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой естественнонаучных и гуманитарных дисциплин Смоленского филиала Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова.

http://orcid.org/0000-0001-9314-7324
ул. Нормандия-Неман, 21, Смоленск, 214030, Россия
E-mail: alexmw2012@yandex.ru

Юденков Алексей Витальевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой менеджмента и естественно-научных дисциплин Смоленской государственной академии физической культуры, спорта и туризма.

http://orcid.org/0000-0001-8329-1146
пр. Гагарина, 23, Смоленск, 214000, Россия
E-mail: aleks-ydenkov@mail.ru

Римская Лилия Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры менеджмента и таможенного дела Смоленского филиала Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова.

ул. Нормандия-Неман, 21, Смоленск, 214030, Россия
E-mail: lilirimska@yandex.ru