УДК 517.9, 629.42

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРИВОДА МЕТОДАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

В.Д. Дмитриенко [1], А.Ю. Заковоротный [2]

[1), 2)] Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», 61002, г. Харьков, ул. Фрунзе, 21; e-mail: arcade@datasvit.net

Рассмотрен геометрический метод линеаризации обратной связью математической модели тягового асинхронного электропривода. Получена математическая модель электропривода в форме Бруновского.

Ключевые слова: математическая модель электропривода в форме Бруновского, линеаризация нелинейных систем управления с помощью обратной связи в пространстве "вход-состояние" или "вход-выход", инволютивные распределения геометрической теории управления.

ВВЕДЕНИЕ

Большой размер территории стран СНГ обусловливает значительные расстояния, которые необходимо преодолевать при транспортировке грузов и перевозке пассажиров. Это напрямую влияет на стоимость проезда пассажиров и цену товаров, которые содержат в своей себестоимости транспортную составляющую. Потому стоимость перевозок, особенно железнодорожным транспортом, которым выполняется большая часть перевозок грузов и пассажиров во внутреннем и международном сообщении, является значительным экономическим фактором, который воздействует в той или иной степени на развитие всех отраслей промышленности стран СНГ [1]. Для уменьшения влияния стоимости транспортных перевозок необходимо совершенствовать существующий технологический процесс транспортировки грузов и перевозки пассажиров в направлении повышения пропускной способности железных дорог, повышения маршрутных скоростей движения подвижного состава [2 – 3], а также уменьшения затрат потребляемой энергии и топлива железнодорожным транспортом, т.к. именно энергетическая составляющая является основной при формировании себестоимости перевозок. Для решения проблемы улучшения качества технологического процесса транспортировки грузов и перевозки пассажиров необходимо создавать новые тяговые приводы, совершенствовать уже существующие или синтезировать новые системы управления, минимизирующие потребление топлива или расход электроэнергии. Так как в СНГ затраты, связанные с потреблением топлива и расходом энергии на единицу перевозимого груза железнодорожным транспортом, выше, чем в развитых странах, то вопросам создания систем оптимального управления, разработки и внедрения энергосберегающих технологий уделяется большое внимание [2, 3].

Американские, японские и европейские фирмы создали для тягового подвижного состава бортовые вычислительные системы, хранящие программы управления силовым оборудованием локомотивов, дизельных и электропоездов на маршрутах любой протяженности. С помощью таких бортовых систем существенно улучшается работа силового оборудования тягового подвижного состава, что приводит к значительной экономии энергетических ресурсов. Однако в полном объеме проблема оптимального управления тяговым подвижным составом не решена, поскольку не решена проблема синтеза оптимальных систем управления для объектов, описываемых нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений выше второго-третьего порядка. В настоящее время существует целый ряд методов [4 – 11], позволяющих выполнять синтез регуляторов для нелинейных объектов, однако они все обладают существенными недостатками, и их использование для синтеза оптимальных систем управления тяговым подвижным составом затруднено, особенно если речь идет об управлении приводом переменного тока. Трудности синтеза систем управления для нелинейных объектов привели к разработке методов линеаризации исходных нелинейных систем и последующему применению хорошо разработанной теории линейных систем управления. Однако наиболее часто применяемая линеаризация по Тейлору, позволяющая линеаризовать систему в достаточно малой окрестности выбранной рабочей точки, практически неприменима для сложных объектов и, в частности, для управления тяговым приводом переменного тока.

Поскольку хорошо разработанная теория управления линейными системами постоянно привлекает внимание и используется специалистами для управления нелинейными объектами, то в последнее время были разработаны новые методы линеаризации на основе геометрических методов и геометрической теории управления [12 – 14]. Эти методы позволяют выполнить линеаризацию нелинейных систем управления с помощью обратной связи в пространстве "вход – состояние" или "вход – выход". Успехи этого подхода привели к интенсивной разработке нового научного направления – единой геометрической теории управления [14, 15]. Существенное преимущество нового научного направления состоит не только в создании математического аппарата, позволяющего описывать системы управления в пространствах состояний более общих, чем линейные пространства, что необходимо при решении целого ряда задач управления [14, 15], но и в реальной осуществимости эквивалентных преобразований нелинейных систем к линейным. Такие преобразования открывают возможности для использования при решении задач разработки нелинейных систем управления методов и средств теории линейных систем [15 – 17]. При этом линеаризация нелинейной системы выполняется не с помощью классического разложения в ряд Тейлора, а на основе использования обратной связи в пространстве "вход – выход" или "вход – состояние". Теоретически линеаризация с помощью обратной связи позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем управления [12 – 17]. Однако практическое использование нового геометрического метода линеаризации для сколько-нибудь общих нелинейных систем выше третьего-четвертого порядка существенно затруднено из-за отсутствия конструктивных методов выполнения такой линеаризации. Целью статьи является решение задачи линеаризации математической модели тягового асинхронного привода на основе инволютивных распределений геометрической теории управления.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Задача определения эквивалентной линейной системы управления для нелинейной системы вида

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{m} u_k \boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in M \subset R^n, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор фазовых координат нелинейной системы управления на гладком многообразии M размерности n; $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{x})$ – гладкие векторные поля на многообразии M, которые в локальных системах координат имеют вид $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}$ и $\boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \psi_{kj}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}$; $\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $\psi_{kj}(\boldsymbol{x})$, $j = \overline{1,n}$ – гладкие функции векторного аргумента $\boldsymbol{x}$, определенные в локальных системах координат на многообразии M; u_k, $k = \overline{1,m}$ – управления, может быть сформулирована следующим образом [14].

Необходимо найти такую гладкую замену координат $z = z(x)$, $z \in R^n$ и управлений $v = v(u, x)$, ($v = (v_1, v_2, ..., v_m)$, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$), что система уравнений (1) приводится в новой системе координат к некоторой ей эквивалентной управляемой линейной системе

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv, \ z \in R^n, \ v \in R^m, \ m < n. \tag{2}$$

Здесь матрицы A и B имеют размеры $n \times n$ и $n \times m$ соответственно и являются блочно-диагональными матрицами $A = \text{blockdiag}[A_1, ..., A_p, ..., A_m]$, $\mathbf{B} = \text{blockdiag}[B_1, ..., B_p, ..., B_m]$, где

$$A_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix}_{q_p \times q_p} ; \quad B_p = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_{q_p \times 1}, \quad p = \overline{1, m},$$

q_p, $p = \overline{1, m}$ – индексы управляемости линейной системы управления (2), $\sum_{p=1}^{m} q_p = n$. При $m = 1$, т.е. при скалярном управлении, система уравнений (2) относительно легко приводится к канонической форме

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= z_2; \\ \frac{dz_2}{dt} &= z_3; \\ &\cdots \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} &= z_n; \\ \frac{dz_n}{dt} &= v, \end{aligned} \tag{3}$$

получившей название формы Бруновского. В случае векторного управления пространство R^n представляется в виде прямой суммы подпространств меньшей размерности:

$$R^n = \bigoplus_{p=1}^{m} R^p. \tag{4}$$

Каждое из подпространств R^p является подпространством состояний для p-й подсистемы декомпозированной исходной системы в пространстве R^n. Размерности подпространств, а следовательно, и размерности линейных подсистем в системе управления (2) однозначно определяются индексами управляемости q_p, $p = \overline{1, m}$ линейной системы (2). Каждая линейная подсистема уравнений имеет одно управление и структуру системы уравнений вида (3), где число дифференциальных уравнений равно индексу управляемости. Говорят также, что индексы управляемости определяют структуру клеток Бруновского для канонической формы линейной системы с векторным управлением. Понятно, что решение, полученное при совместном интегрировании m независимых линейных подсистем уравнений, являющихся результатом декомпозиции исходной нелинейной системы уравнений в некоторой области V_{R^n} пространства R^n, не может в самом общем случае совпадать с решением нелинейной системы (1) в этой же области V_{R^n}.

Для перехода от нелинейной системы уравнений (1) к канонической форме Бруновского необходимо не только определить индексы управляемости q_p ($p=\overline{1,m}$), но и некоторые дополнительные условия (условия инволютивности [14]), связанные с совместным интегрированием векторных полей на многообразии *M*.

Определение 1. Пусть заданы: некоторая точка на *n*-мерном гладком многообразии *M* класса C^k, $k \ge 3$ и целое число *m* ($1 \le m < n$); касательное пространство TM_q; TS_q – *m*-мерное подпространство пространства TM_q. Распределением класса C^r, $1 \le r < k$ или *m*-мерным распределением (или дифференциальной системой размерности *m*) на многообразии *M* называется отображение

$$\Delta: M \to TS_q,\ \Delta_q = TS_q \subset TM_q,$$

где Δ_q – подпространство векторного пространства TM_q, а точка $\boldsymbol{x}$ имеет окрестность $\boldsymbol{U}_x$ с такими C^r векторными полями $\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_q$ на ней, что векторы $\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x}^*), ..., \boldsymbol{X}_q(\boldsymbol{x}^*)$ образуют базис подпространства TS_q для каждой точки $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{U}$.

Определение 2. Распределение Δ называется инволютивным, если для всех точек $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{U}$

$$[\boldsymbol{X}_k,\ \boldsymbol{X}_l](\boldsymbol{x}^*) \in \Delta(\boldsymbol{x}^*),\ 1 \le k, l \le q,$$

где $[\boldsymbol{X}_k,\ \boldsymbol{X}_l]$ – скобки Ли векторных полей $\boldsymbol{X}_k,\ \boldsymbol{X}_l$.

Ведем распределение Δ_0 векторных полей $\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{x})$, ..., $\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{x})$ нелинейной системы (1)

$$\Delta_0 = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{x}),\ ...,\ \boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{x})\} = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\},$$

где span – линейная оболочка $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, ..., $\boldsymbol{G}_m$ векторов в точке $\boldsymbol{x}$, т.е. это минимальное пространство, порожденное этим набором векторов. Введем также распределение Δ_F

$$\Delta_F = \Delta_0 + \boldsymbol{F} = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\},$$

где Δ_F – распределение, смещенное на векторное поле $\boldsymbol{F}$ относительно распределения Δ_0.

Определим с помощью распределений Δ_0 и Δ_F следующие два семейства распределений:

$$\begin{aligned} &\Delta^0 = \Delta_0; && M^0 = \Delta_0; \\ &\Delta^j = \mathrm{span}\,\{\Delta^{j-1}, [\Delta_F, \Delta^{j-1}]\}; && M^j = \mathrm{span}\,\{M^{j-1}, [\boldsymbol{F}, M^{j-1}]\}; \qquad (5) \\ &\Delta^\infty = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta^j; && M^\infty = \bigcup_{j=0}^{\infty} M^j, \end{aligned}$$

где $[\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G}]$ – скобки Ли двух векторных полей $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$; это векторное поле, характеризующее степень «связанности» на многообразии *M* полей $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$. В рассматриваемом случае они характеризуют возможность или ее отсутствие для совместного интегрирования, задаваемых векторными полями $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ на гладком многообразии *M*, уравнений в частных производных. Скобки Ли для векторных полей $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, которые на многообразии M в локальной системе координат имеют вид $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}\psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}$ определяются следующим образом:

$$[\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}](\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}-\psi_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{6}$$

В матричной форме выражение (6) можно записать следующим образом:

$$[\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}](\boldsymbol{x})=\frac{\partial\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

где $\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{pmatrix}$; $\frac{\partial\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\psi_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\ ...,\ \varphi_n(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=(\psi_1(\boldsymbol{x}),\ ...,\ \psi_n(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$.

В работе [14] доказано, что для локальной линеаризации с помощью аналитической обратной связи и замены координат нелинейной системы уравнений (1) в окрестности $U_{x_0}\subset M$ некоторой точки равновесия x_0 необходимо выполнение следующих условий:

1. Каждое распределение M^j является инволютивным, $0\le j\le p$, где $p=k_{\max}-1$ и $k_{\max}$ – наибольший индекс управляемости, т.е. наибольший размер клетки Бруновского в матрице $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{gathered}k_{\max}=\max_q(k_q,q=\overline{1,m}),\\ k_q=\mathrm{card}\{r_j\ge q,\ 0\le j\le n-m,\ r_0=m_0,\ r_j=m_j-m_{j-1}\},\ q=\overline{1,m},\end{gathered} \tag{8}$$

где card – кардинальное число (число элементов, для которых справедливо неравенство $r_j\ge q$).

2. $\dim(M^p(x)=\Delta^p(x)=\boldsymbol{L}_0(x))=n\quad\forall x\in U_{x_0}$, где $\dim(\cdot)$ – размерность соответствующего математического объекта.

В случае неинволютивности распределений $M^j\,(j=\overline{0,n-m})$ точная линеаризация возможна за счет увеличения размерности пространства и получения инволютивных распределений уже на расширенном пространстве.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АСИНХРОННОГО ПРИВОДА

Рассмотрим возможность применения описанного метода для линеаризации математической модели тягового асинхронного привода дизель-поезда. В первом приближении два тяговых двигателя дизель-поезда можно заменить одним эквивалентным, математическую модель которого запишем следующим образом:

$$\frac{d\Psi_1}{dt}=a_{11}\Psi_1+a_{13}\Psi_3+u_1;$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_2}{dt} &= a_{22}\Psi_2 + a_{24}\Psi_4 + u_2;\\
\frac{d\Psi_3}{dt} &= a_{31}\Psi_1 + a_{33}\Psi_3 + a_{345}\Psi_4\Omega;\\
\frac{d\Psi_4}{dt} &= a_{42}\Psi_2 + a_{44}\Psi_4 + a_{435}\Psi_3\Omega;\\
\frac{d\Omega}{dt} &= a_{514}\Psi_1\Psi_4 + a_{523}\Psi_2\Psi_3 - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ – потокосцепления эквивалентного двигателя; a_{11}, a_{13}, ..., a_{514}, a_{523} – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами эквивалентного асинхронного двигателя; u_1, u_2 – статорные напряжения; a_{51}, a_{52} – постоянные коэффициенты, определяемые нагрузкой двигателя; Ω – угловая скорость вращения эквивалентного двигателя.

Математическую модель (9) в осях u и v с помощью известных выражений для токов статора [18]:

$$i_{us} = \frac{1}{\sigma L_s}\left(\Psi_{us} - k_r\Psi_{ur}\right); \;\; i_{vs} = \frac{1}{\sigma L_s}\left(\Psi_{vs} - k_r\Psi_{vr}\right),$$

где i_{us}, i_{vs} – статорные токи по осям u и v; $\sigma = 1 - k_r k_s = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ – полный коэффициент рассеяния; L_m – индуктивность контура намагничивания (взаимная индуктивность); L_s, L_r – полная индуктивность статора и ротора соответственно; Ψ_{us}, Ψ_{vs} – потокосцепления по осям u и v статора; $k_s = \frac{L_m}{L_s}$, $k_r = \frac{L_m}{L_r}$ – коэффициенты электромагнитной связи статора и ротора соответственно; Ψ_{ur}, Ψ_{vr} – потокосцепления ротора по осям u и v, преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\frac{di_{us}}{dt} &= \alpha\beta\Psi_{ur} - \gamma i_{us} + p\beta\Omega\Psi_{vr} + \frac{1}{\sigma L_s}u_{us};\\
\frac{di_{vs}}{dt} &= \alpha\beta\Psi_{vr} - \gamma i_{vs} - p\beta\Omega\Psi_{ur} + \frac{1}{\sigma L_s}u_{vs};\\
\frac{d\Psi_{ur}}{dt} &= -\alpha\Psi_{ur} - p\Omega\Psi_{vr} + \alpha L_m i_{us};\\
\frac{d\Psi_{vr}}{dt} &= -\alpha\Psi_{vr} + p\Omega\Psi_{ur} + \alpha L_m i_{vs};\\
\frac{d\Omega}{dt} &= k_1\mu\left(\Psi_{ur}i_{vs} - \Psi_{vr}i_{us}\right) - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\alpha = \frac{1}{T_r}$; T_r – постоянная времени ротора двигателя; $\beta = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r}$; $\gamma = \frac{R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s}$; R_r, R_s – активные сопротивления роторной и статорной обмоток двигателя; p – число пар полюсов статора; u_{us}, u_{vs} – статорные напряжения по осям u и v; k_1 – постоянный коэффициент; $\mu = \frac{pL_m}{JL_r}$; J – приведенный момент инерции двигателя (с учетом момента инерции дизель-поезда); $M_н = a_{51}\Omega + a_{52}\Omega^2$ – момент нагрузки двигателя.

Математическая модель асинхронного привода (10) не может быть непосредственно использована для линеаризации объекта с помощью динамической обратной связи из-за слишком большого числа одночленов, входящих в правую часть системы уравнений (10), что приводит к нетривиальным громоздким преобразованиям и необходимости весьма сложного поиска решений системы уравнений в частных производных. Выполним нелинейное преобразование системы уравнений (10) во вращающуюся систему координат d, q. Получим, что в новой системе координат

$$\Omega = \Omega; \tag{11}$$

$$\Psi_d i_q = \Psi_{ur} i_{vs} - \Psi_{vr} i_{us}, \tag{12}$$

где $\Psi_d = \sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}$; (13)

$$i_q = i_{vs}\cos\rho - i_{us}\sin\rho; \tag{14}$$

$$\rho = \arcsin\frac{\Psi_{vr}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}} \text{ или } \rho = \arccos\frac{\Psi_{ur}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}}; \tag{15}$$

i_q – ток статора по оси q в системе координат d, q. При этом ток статора по оси d определяется выражением

$$i_d = i_{us}\cos\rho - i_{vs}\sin\rho. \tag{16}$$

Наиболее просто с помощью соотношений (11) и (12) в новой системе координат получается последнее уравнение из системы уравнений (10), которое в d-q-системе координат приобретает вид

$$\frac{d\Omega}{dt} = k_1\mu\Psi_d i_q - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2. \tag{17}$$

Второе дифференциальное уравнение получим, продифференцировав левую и правую части выражения (13) и подставив вместо производных $\frac{d\Psi_{ur}}{dt}$, $\frac{d\Psi_{vr}}{dt}$ соответствующие правые части третьего и четвертого уравнений из системы (10). После несложных алгебраических преобразований с учетом выражений (15) и (16) имеем:

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = -\alpha\Psi_d + \alpha L_m i_d. \tag{18}$$

Продифференцировав левую и правую части одного из выражений (15) и выполнив простые преобразования с учетом выражений (10), (13) и (14), получим

$$\frac{d\rho}{dt} = p\Omega + \alpha L_m \frac{i_q}{\Psi_d}. \tag{19}$$

Последние два дифференциальных уравнения новой математической модели получим, продифференцировав левые и правые части выражений (14), (16) и подставив необходимые соотношения из уравнений (10) и (19), а также выполнив необходимые алгебраические преобразования:

$$\frac{di_d}{dt} = -\gamma i_d + p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{us}\cos\rho + u_{vs}\sin\rho); \tag{20}$$

$$\frac{di_q}{dt} = -\gamma i_q - p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{vs}\cos\rho + u_{us}\sin\rho). \tag{21}$$

Введем в полученную модель (17) – (21) асинхронного двигателя новые управления u_1, u_2, позволяющие убрать из правых частей уравнений (20), (21) нелинейные члены:

$$u_1 = p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}\left(u_{us}\cos\rho + u_{vs}\sin\rho\right); \tag{22}$$

$$u_2 = -p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}\left(u_{vs}\cos\rho + u_{us}\sin\rho\right). \tag{23}$$

Обозначив $x_1 = \Omega$; $x_2 = \Psi_d$; $x_3 = i_d$; $x_4 = i_q$; $x_5 = \rho$; $a_{11} = -a_{51}$; $a_{12} = -a_{52}$; $a_{124} = k_1\mu$; $a_{21} = -\alpha$; $a_{23} = \alpha L_m$; $a_{31} = a_{41} = -\gamma$; $a_{51} = p$; $a_{524} = \alpha L_m$ и подставив управления u_1 и u_2 (соотношения (22) и (23)) в уравнения (20), (21), получим модель асинхронного двигателя в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4;\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_2 + a_{23}x_3;\\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_3 + u_1;\\
\frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_4 + u_2;\\
\frac{dx_5}{dt} &= a_{51}x_1 + a_{524}\frac{x_4}{x_2}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Определим возможность преобразования нелинейной системы (24) к линейной форме (к канонической форме Бруновского [14, 15]). Для этого определим инволютивность последовательности распределений M^0, M^1, M^2 [14, 19].

С системой дифференциальных уравнений (24) связаны векторные поля

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 \\ a_{51}x_1 + a_{524}\dfrac{x_4}{x_2} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{Y}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку векторные поля $\boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{Y}_2(\boldsymbol{x})$ постоянны, то распределение $M^0 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\}$ – инволютивно и $\dim M^0 = 2$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$; span – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1$ и $\boldsymbol{Y}_2$; $\dim M^0$ – размерность распределения M^0 [14, 19].

Определим распределение $M^1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L_x Y}_1, \boldsymbol{L_x Y}_2\}$, где $\boldsymbol{L_x Y}_1$ и $\boldsymbol{L_x Y}_2$ – производные Ли векторных полей $\boldsymbol{Y}_1$ и $\boldsymbol{Y}_2$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{L_x Y}_1 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_1] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = \left|0, -a_{23}, -a_{31}, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_x Y}_2 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_2] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2 = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2 = \left|-a_{124}x_2, 0, 0, -a_{41}, -\frac{a_{524}}{x_2}\right|^{\mathrm{T}},$$

где $[X, Y_k]$ – скобки Ли векторных полей X, Y_k.

Для инволютивности распределения M^1 необходимо выполнение условия $\mathrm{rank}(Y_1, Y_2, L_x Y_1, L_x Y_2, [X_i, X_j]) = 4$, где X_i, X_j – векторные поля из семейства $(Y_1, Y_2, L_x Y_1, L_x Y_2)$. Имеем:

$$[Y_1, Y_2] = [Y_1, L_x Y_1] = [Y_1, L_x Y_2] = [Y_2, L_x Y_2] = [Y_2, L_x Y_1] = 0. \tag{25}$$

Однако $[L_x Y_1, L_x Y_2] = \dfrac{\partial(L_x Y_2)}{\partial x} L_x Y_1 - \dfrac{\partial(L_x Y_1)}{\partial x} L_x Y_2 = \left| a_{23}a_{124}, 0, 0, 0, \dfrac{a_{524}a_{23}}{x_2^2} \right|^{\mathrm{T}}$.

Поэтому ранг матрицы $R = (Y_1, Y_2, L_x Y_1, L_x Y_2, [L_x Y_1, L_x Y_2])$ равен пяти:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{124}x_2 & a_{23}a_{124} \\ 0 & 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{a_{524}}{x_2} & \dfrac{a_{524}a_{23}}{x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, распределения M^1 не являются инволютивными. Подраспределения $M_1^1 = \mathrm{span}\{Y_1, Y_2, L_x Y_1\}$ и $M_2^1 = \mathrm{span}\{Y_1, Y_2, L_x Y_2\}$ распределения M^1 в силу соотношений (25) являются инволютивными и имеют одинаковые размерности, равные 3. Введем дополнительную фазовую координату в канал, связанный с управлением u_2:

$$x_6 = u_2; \ \frac{dx_6}{dt} = u_2^*; \ u_1^* = u_1.$$

С расширенной моделью асинхронного двигателя связаны следующие векторные поля:

$$X^*(x^*) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 + x_6 \\ a_{51}x_1 + a_{524}\dfrac{x_4}{x_2} \\ 0 \end{vmatrix}; \ Y_1^*(x^*) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \ Y_2^*(x^*) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

где $x^* = (x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6)$.

Для расширенной модели асинхронного двигателя распределение $M^{0*} = \mathrm{span}\{Y_1^*, Y_2^*\}$ – инволютивно, $\dim M^{0*} = 2$. Распределение $M^{1*} = \mathrm{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{x^*}Y_1^*, L_{x^*}Y_2^*\}$ также инволютивно, поскольку $[Y_1^*, Y_2^*] =$ $= [Y_1^*, L_{x^*}Y_1^*] = [Y_1^*, L_{x^*}Y_2^*] = [Y_2^*, L_{x^*}Y_2^*] = [Y_2^*, L_{x^*}Y_1^*] = [L_{x^*}Y_1^*, L_{x^*}Y_2^*] = 0$,

где $\quad L_{x^*}Y_1^* = [X^*, Y_1^*] = \dfrac{\partial Y_1^*}{\partial x^*} X^* - \dfrac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_1^* = -\dfrac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_1^* = \left|0, \ -a_{23}, \ -a_{31}, \ 0, \ 0, \ 0\right|^{\mathrm{T}};$

$$L_{x^*}Y_2^* = [X^*, Y_2^*] = \frac{\partial Y_2^*}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_2^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_2^* = \left|0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$-\frac{\partial X^*}{\partial x^*}Y_1^* = \begin{vmatrix} a_{11}+2a_{12}x_1 & a_{124}x_4 & 0 & a_{124}x_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & 0 & 1 \\ a_{51} & -a_{524}\frac{x_4}{x_2^2} & 0 & \frac{a_{524}}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -a_{23} \\ -a_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

При этом матрица $R_1 = (Y_1^*, Y_2^*, L_{x^*}Y_1^*, L_{x^*}Y_2^*)$ имеет ранг, равный 4, $m_1 = \dim M^{1*} = 4$.

Рассмотрим распределение $M^{2*} = \mathrm{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{x^*}Y_1^*, L_{x^*}Y_2^*, L_{x^*}^2 Y_1^*, L_{x^*}^2 Y_2^*\}$, где

$$L_x^2 Y_1^* = [X^*, L_{x^*}Y_1^*] = \frac{\partial(L_{x^*}Y_1^*)}{\partial x^*}X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*}L_{x^*}Y_1^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*}L_{x^*}Y_1^* =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{23}a_{124}x_4, \; a_{23}(a_{21}+a_{31}), \; a_{31}^2, \; 0, \; -\frac{a_{23}a_{524}x_4}{x_2^2}, \; 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$L_x^2 Y_2^* = [X^*, L_{x^*}Y_2^*] = \frac{\partial(L_{x^*}Y_2^*)}{\partial x^*}X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*}L_{x^*}Y_2^* = \begin{vmatrix} a_{124}x_2, 0, 0, a_{41}, \frac{a_{524}}{x_2}, 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Распределение M^{2*} имеет следующую размерность:

$$\dim M^{2*} = \mathrm{rank}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{x^*}Y_1^*, L_{x^*}Y_2^*, L_{x^*}^2 Y_1^*, L_{x^*}^2 Y_2^*\} = 6.$$

Распределение M^{2*} инволютивно. Используя теорию о линейном эквиваленте для *нелинейной аффинной системы с векторным* управлением [14, теорема 1.16], получим, что индексы управляемости k_1 и k_2 для рассматриваемой системы управления одинаковы ($k_1 = k_2 = 3$) и имеются две клетки канонической формы Бруновского.

Таким образом, имеется следующий эквивалент исходной математической модели в форме Бруновского:

$$\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = y_{i+1}, \; i = 1,\ 2,\ 4,\ 5; \\ &\frac{dy_i}{dt} = v_k, \; i = 3,\ 6;\ k = i/3. \end{aligned} \tag{26}$$

Следовательно, известно, что существуют некоторые преобразования $y_1 = T_1(x^*)$ и $y_4 = T_2(x^*)$, из которых путем последовательного дифференцирования функций $T_1(x^*)$ и $T_2(x^*)$ вдоль векторного поля $X_1 = X^* + u_1^* Y_1^* + u_2^* Y_2^*$ можно определить, соответственно, y_2, y_3 и y_5, y_6. Получим систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $T_1(x^*)$ и $T_2(x^*)$. Для этого вначале продифференцируем вдоль векторного поля X_1 эти функции:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 = L_{X_1}T_1(x^*) = L_{X^*}T_1(x^*) + u_1^* L_{Y_1^*}T_1(x^*) + u_2^* L_{Y_2^*}T_1(x^*); \tag{27}$$

$$\frac{dy_4}{dt}=y_5=L_{X_1}T_2(x^*)=L_{X^*}T_2(x^*)+u_1^*L_{Y_1^*}T_2(x^*)+u_2^*L_{Y_2^*}T_2(x^*),\tag{28}$$

где $L_{X_1}T_i(x^*)$, $L_{X^*}T_i(x^*)$, $L_{Y_1^*}T_i(x^*)$, $L_{Y_2^*}T_i(x^*)$ – производные Ли функций $T_i(x^*)$, $i=1$, 2, вдоль, соответственно, векторных полей $X_1=X^*+u_1^*Y_1^*+u_2^*Y_2^*$, X^*, Y_1^* и Y_2^*.

Поскольку из выражений (26) следует, что y_2 и y_5 в соотношениях (27), (28) не зависят от управлений u_1^* и u_2^*, то имеем:

$$L_{Y_1^*}T_1(x^*)=\left\langle\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x^*},Y_1^*\right\rangle=\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_1}\cdot 0+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_2}\cdot 0+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_3}\cdot 1+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_4}\cdot 0+$$
$$+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_5}\cdot 0+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_6}\cdot 0=0;\tag{29}$$

$$L_{Y_2^*}T_1(x^*)=\left\langle\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x^*},Y_2^*\right\rangle=\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_1}\cdot 0+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_2}\cdot 0+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_3}\cdot 0+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_4}\cdot 0+$$
$$+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_5}\cdot 0+\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_6}\cdot 1=0;\tag{30}$$

$$L_{Y_1^*}T_2(x^*)=\left\langle\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x^*},Y_1^*\right\rangle=\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_1}\cdot 0+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_2}\cdot 0+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_3}\cdot 1+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_4}\cdot 0+$$
$$+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_5}\cdot 0+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_6}\cdot 0=0;\tag{31}$$

$$L_{Y_2^*}T_2(x^*)=\left\langle\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x^*},Y_2^*\right\rangle=\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_1}\cdot 0+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_2}\cdot 0+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_3}\cdot 0+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_4}\cdot 0+$$
$$+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_5}\cdot 0+\frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_6}\cdot 1=0.\tag{32}$$

Из выражений (29) – (32) следует, что функции $T_1(x)$ и $T_2(x)$ не зависят от аргументов x_3 и x_6.

Дифференцируя $y_2=L_{X^*}T_1(x^*)$ и $y_5=L_{X^*}T_2(x^*)$ вдоль векторного поля X_1, получим:

$$\frac{dy_2}{dt}=y_3=L_{X_1}(L_{X^*}T_1)=L^2_{X^*}T_1+u_1^*L_{Y_1^*}(L_{X^*}T_1)+u_2^*L_{Y_2^*}(L_{X^*}T_1);\tag{33}$$

$$\frac{dy_5}{dt}=y_6=L_{X_1}(L_{X^*}T_2)=L^2_{X^*}T_2+u_1^*L_{Y_1^*}(L_{X^*}T_2)+u_2^*L_{Y_2^*}(L_{X^*}T_2(x^*)).\tag{34}$$

Из выражений (26) следует, что y_3 и y_6 в соотношениях (33), (34) не зависят от управлений u_1^* и u_2^*, поэтому имеем

$$L_{Y_1^*}(L_{X^*}T_1)=L_{Y_2^*}(L_{X^*}T_1)=L_{Y_1^*}(L_{X^*}T_2)=L_{Y_2^*}(L_{X^*}T_2)=0.\tag{35}$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся известной теоремой [16, с. 180].

Теорема. Пусть имеются $f(x)$, $g(x)$ – гладкие векторные функции и $T_1(x)$ – скалярная функция векторного аргумента (f, g, $x\in R^n$; $T_1\in R$) и выполняются соотношения

$$L_g L_f^i T_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = 0, 1, ..., m-1, \ L_g L_f^m \alpha(\boldsymbol{x}) \neq 0, \tag{36}$$

тогда справедливо выражение

$$L_{ad_f^j g} L_f^k T_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ 0 \leq j+k \leq m-1, \\ (-1)^j L_g L_f^m T_1(\boldsymbol{x}) \neq 0, \ j+k = m. \end{cases} \tag{37}$$

Рассмотрим случай, когда $k = 0$, тогда из соотношений (36) $L_g L_f T_1(\boldsymbol{x}) = L_g L_f^2 T_1(\boldsymbol{x}) = ... = L_g L_f^{m-1} T_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ L_g L_f^m T_1(\boldsymbol{x}) \neq 0$ следует:

$$L_{ad_f^j g} T_1(\boldsymbol{x}) = 0 \ \text{ при } \ j = 0, 1, ..., m-1, \ L_{ad_f^m g} T_1(\boldsymbol{x}) \neq 0. \tag{38}$$

Известно [16], что производная Ли $L_f T_1(\boldsymbol{x})$ скалярной функции $T_1(\boldsymbol{x})$ векторного аргумента по векторной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ $(T_1(\boldsymbol{x}) \in R; \ \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}) \in R^n)$ может быть определена несколькими эквивалентными выражениями:

$$L_f T_1(\boldsymbol{x}) = \frac{dT_1(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \nabla T_1(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x})}{dx_i} f_i(\boldsymbol{x}), \tag{39}$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{dx_1}, \frac{\partial}{dx_2}, ..., \frac{\partial}{dx_n} \right)$ – оператор, равносильный оператору дифференцирования $\frac{d}{d\boldsymbol{x}}$ по векторному аргументу. Поэтому соотношения (38) можно, используя выражение (39), записать в виде

$$\nabla T_1(\boldsymbol{x}) ad_f^j \boldsymbol{g} = 0, \ j = 0, 1, ..., m\text{-}1, \ \nabla T_1(\boldsymbol{x}) ad_f^m \boldsymbol{g} \neq 0. \tag{40}$$

Используя выражения (36) – (40), из соотношений (35) получим

$$L_{Y_1^*}(L_{X^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, L_{X^*} Y_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} \cdot (-a_{23}) +$$
$$+ \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3} \cdot (-a_{31}) + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0; \tag{41}$$

$$L_{Y_2^*}(L_{X^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, L_{X^*} Y_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 0 +$$
$$+ \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4} \cdot (-1) + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0. \tag{42}$$

Поскольку функция $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от x_3, то из выражения (41) следует, что она не зависит и от x_2, а из выражения (42) получим и независимость $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ от аргумента x_4. Таким образом, функция $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ может зависеть только от аргументов x_1 и x_5.

С помощью соотношений, аналогичных (41), (42), нетрудно получить, что функция $T_2(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от аргументов x_2, x_4 и, таким образом, может быть функцией только аргументов x_1 и x_5.

Дифференцируя $y_3 = L^2_{X^*}T_1(x^*)$ и $y_5 = L^2_{X^*}T_2(x^*)$ вдоль векторного поля X_1, получим

$$\frac{dy_3}{dt} = L_{X_1}(L^2_X T_1(x^*)) = L^3_{X^*}T_1 + u_1^* L_{Y_1^*}(L^2_X T_1) + u_2^* L_{Y_2^*}(L^2_X T_1); \tag{43}$$

$$\frac{dy_6}{dt} = L_{X_1}(L^2_X T_2(x^*)) = L^3_{X^*}T_2 + u_1^* L_{Y_1^*}(L^2_X T_2) + u_2^* L_{Y_2^*}(L^2_X T_2). \tag{44}$$

Из этих выражений следует, что $L_{Y_1^*}(L^2_X T_1(x^*)) \neq 0$ и $L_{Y_2^*}(L^2_X T_2(x^*)) \neq 0$ или

$$L_{Y_1^*}(L^2_X T_1(x)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x}, L^2_X Y_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}\cdot(a_{23}a_{124}x_4) + \frac{\partial T_1}{\partial x_5}\cdot\left(-\frac{a_{23}a_{524}x_4}{x_2^2}\right) \neq 0; \tag{45}$$

$$L_{Y_2^*}(L^2_X T_2(x)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial x}, L^2_X Y_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_1}\cdot(a_{124}x_4) + \frac{\partial T_2}{\partial x_5}\cdot\left(\frac{a_{524}}{x_2}\right) \neq 0. \tag{46}$$

При $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ одним из возможных решений системы неравенств (45), (46) может быть $T_1(x) = x_1$ и $T_2(x) = x_5$.

Известно [14], что для того, чтобы существовали преобразования (27), (28), (33), (34), (43), (44), необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$Q = \begin{vmatrix} L_{Y_1^*}(L^2_{X^*}T_1(x^*)) & L_{Y_2^*}(L^2_{X^*}T_1(x^*)) \\ L_{Y_1^*}(L^2_{X^*}T_2(x^*)) & L_{Y_2^*}(L^2_{X^*}T_2(x^*)) \end{vmatrix}$$

была не вырождена. Проверим это, вычислив элементы матрицы Q и ее определитель:

$$L_{Y_1^*}(L^2_{X^*}T_1(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x^*}, L^2_{X^*}Y_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}\cdot a_{124}a_{23}x_4 = a_{124}a_{23}x_4; \tag{47}$$

$$L_{Y_1^*}(L^2_{X^*}T_1(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x^*}, L^2_{X^*}Y_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}\cdot a_{124}x_2 = a_{124}x_2; \tag{48}$$

$$L_{Y_1^*}(L^2_{X^*}T_2(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial x^*}, L^2_{X^*}Y_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_5}\cdot\left(-\frac{a_{23}a_{524}x_4}{x_2^2}\right) = -a_{23}a_{524}\frac{x_4}{x_2^2}; \tag{49}$$

$$L_{Y_2^*}(L^2_{X^*}T_2(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial x^*}, L^2_{X^*}Y_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_5}\cdot\frac{a_{524}}{x_2} = \frac{a_{524}}{x_2}; \tag{50}$$

$$\det Q = \begin{vmatrix} a_{124}a_{23}x_4 & a_{124}x_2 \\ -a_{23}a_{524}\dfrac{x_4}{x_2^2} & \dfrac{a_{524}}{x_2} \end{vmatrix} = 2a_{124}a_{23}a_{524}\frac{x_4}{x_2}.$$

Таким образом, при $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ преобразования (27), (28), (33), (34), (43), (44) существуют.

Зная $T_1(x^*)$ и $T_2(x^*)$, определим функции перехода к форме Бруновского (26):

$$y_1 = T_1(x) = x_1; y_4 = T_2(x) = x_5;$$

$$y_2 = L_{X^*}T_1(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_i}X^* = a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{124}x_2x_4;$$

$$y_5 = L_{X^*}T_5(x^*) = \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial T_5(x^*)}{\partial x_i}X_i^* = a_{51}x_1 + a_{524}\frac{x_4}{x_2};$$

$$y_3 = L^2_{X^*} T_1(x^*) = L_{X^*}(L_{X^*} T_1(x^*)) = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial (L_{X^*} T_1(x^*))}{\partial x_i} X_i^* = (a_{11} + 2a_{12}x_1) \cdot$$

$$\cdot (a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + a_{124}x_4(a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + a_{124}x_2(a_{41}x_4 + a_6);$$

$$y_6 = L^2_{X^*} T_2(x^*) = L_{X^*}(L_{X^*} T_2(x^*)) = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial (L_{X^*} T_2(x^*))}{\partial x_i} X_i^* =$$

$$= a_{51}(a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + \left(-a_{524}\frac{x_4}{x_2^2}\right)(a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + \frac{a_{524}}{x_2}(a_{41}x_4 + a_6).$$

Из уравнений (27), (28), (33), (34), (43), (44) следует, что управления v_1, v_2 для системы уравнений в форме Бруновского (26) определяются из выражений (43), (44):

$$\begin{aligned} v_1 &= L^3_{X^*} T_1(x^*) + u_1^* L_{Y_1^*}(L^2_X T_1(x^*)) + u_2^* L_{Y_2^*}(L^2_X T_1(x^*)); \\ v_2 &= L^3_{X^*} T_2(x^*) + u_1^* L_{Y_1^*}(L^2_X T_2(x^*)) + u_2^* L_{Y_2^*}(L^2_X T_2(x^*)). \end{aligned} \qquad (51)$$

Систему уравнений (26) можно использовать для определения оптимальных управлений v_1, v_2, затем, зная v_1 и v_2, – определить u_2^* и u_1^* из системы уравнений (51), а потом – найти u_1 и u_2:

$$u_2^* = \frac{1}{\det \boldsymbol{Q}}\left[L_{Y_1^*}(L^2_{X^2} T_1(x^*))(V_2 - L^3_{X^*} T_2(x)) - L_{Y_1^*}(L^2_X T_2(x^*))(V_1 - L^3_{X^*} T_1(x))\right];$$

$$u_1^* = \frac{1}{L_{Y_1^*}(L^2_{X^2} T_1(x^*))}\left[V_1 - L^3_{X^*} T_1(x) - u_2^* L_{Y_2^*}(L^2_X T_1(x^*))\right];$$

$$u_1 = u_1^*; \; u_2 = \int_0^T u_1^* dt.$$

Сравнение процессов в математических моделях асинхронного привода (9), (10), (24) и (26) в разных режимах работы привода подтвердило правильность линеаризации обратной связью исходной модели (9) и работоспособность модели объекта в форме Бруновского.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, впервые средствами дифференциальной геометрии получена работоспособная математическая модель асинхронного привода в канонической форме Бруновского, которую можно использовать для синтеза системы управления асинхронным приводом.

Литература

1. Могилевкин И. М. Транспорт и коммуникации: прошлое, настоящее, будущее / И. М. Могилевкин. – М.: Наука, 2005. – 357 с.

2. Басов Г.Г. Прогнозування розвитку дизель-поїздів для залізниць України: моногр. /Г.Г. Басов. – Харків: Апекс+, 2004. – Ч. 1. – 240 с.

3. Басов Г.Г. Розвиток електричного моторвагонного рухомого складу / Г.Г. Басов, С.І. Ясько. – Харків: Апекс+, 2005. – Ч.1. – 248 с.

4. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

5. Zhou K., Doyle J.C., Clover K. Robust and optimal control // Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995. – 596 p.

6. Нейронні мережі в системах автоматизації / В.І. Архангельський, І.М. Богаєнко, Г.Г. Грабовський, М.О. Рюмшин. – К.: Техніка, 1999. – 364 с.

7. Башняков О.М. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем / О.М. Башняков, Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур. – К.: Київський університет, 2000. – 197 с.

8. Габасов Р. Синтез оптимальных замкнутых систем / Р. Габасов, Ф.М. Куриллова, И.В. Балашевич // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 3. – С. 100 – 119.

9. Комашинский В.М. Нейронные сети и их применение в системах управления и связи / В.М. Комашинский, Д.А. Смирнов. – М., 2002. – 94 с.

10. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления / А.А. Ерофеев. – СПб.: Политехника, 2003. – 302 с.

11. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы / И.В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с.

12. Byrnes C., Isidori A. A survey of recent developments in nonlinear control theory // Proc. of the I IFAC Symp. Robot Conf., Barselona, Nov. 6 – 8. – 1985. – P. 287 – 291.

13. Краснощёченко В.И. Синтез регуляторов для нелинейных систем, приводимых к канонической форме Бруновского / В.И. Краснощёченко // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1997. – № 569. – С. 28 – 33.

14. Краснощёченко В.И. Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.

15. Методы классической и современной теории автоматического управления: учеб. в 5 т. – Т. 5. Методы современной теории управления / под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.

16. Ким Д.П. Теория автоматического управления: учеб. пособие / Д.П. Ким. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – 464 с.

17. Kim D.P. Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System. – Seol: Harnol, 2000. – 558 p.

18. Сандлер А.С. Автоматическое частотное управление асинхронными двигателями / А.С. Сандлер, Р.С. Сарбатов. – М.: Энергия, 1974. – 328 с.

19. Дмитриенко В.Д. Динамическая линеаризация с помощью обратной связи математической модели тягового привода / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Вісник НТУ «ХПІ»: Зб. наук. праць. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. – № 40. – С. 49–57.

DYNAMIC LINEARIZATION OF MATHEMATICAL MODEL ELECTRIC DRIVE BY METHODS OF GEOMETRICAL THEORY OF MANAGEMENT

V. Dmitrienko[1)], A. Zakovorotnyi[2)]

[1), 2)] National technical university "Kharkov polytechnic institute", Kharkov, 61002, Ukraine
e-mail: arcade@datasvit.net

The geometrical method of linearization is considered by a feedback of mathematical model of the traction asynchronous electric drive. The mathematical model of the electric drive in the form of Brunovsky.

Keywords: mathematical model of electromechanic in form Brunovskogo, linearizing of nonlinear control the system by a feed-back in space "entrance-state" or "entrance-output", *involute distributing of geometrical theory of management.*