УДК 519.234.2

МЕТОДЫ СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Н.Н. Тютин [1)]

[1)] ОАО «НИИ суперЭВМ», 117437, Россия, г. Москва, ул. Академика Волгина, д. 33,
e-mail: tiuitn@super-computer.ru

В статье рассмотрены некоторые подходы к оценке эффективности и надежности мультисервисных систем связи (МСС) с учетом особенностей их построения и функционирования. Приведены примеры использования аппарата математической логики (булевой алгебры), позволяющей формализовать условия работоспособности сложных структур и получать аналитические формулы для расчета структурной надежности.

Ключевые слова: мультисервисные системы, аппарат математической логики (булевой алгебры), метод прямого перебора состояний, метод структурных преобразований, структурная надежность мультисервисной системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью настоящей статьи является рассмотрение некоторых подходов к оценке эффективности и надежности мультисервисных систем связи (МСС) с учетом особенностей их построения и функционирования.

Для того чтобы МСС стала востребованной, она должна обладать необходимым для пользователя качеством, то есть вовремя, без ошибок и в требуемом объеме обеспечивать обмен или предоставлять необходимую пользователям информацию. Кроме того, при создании или совершенствовании системы нужно уметь получать от нее требуемое качество при минимальных затратах или при выделенных ограниченных ресурсах получать максимальное качество. Отсюда вытекает сложная проблема получения аналитических зависимостей показателей эффективности и надежности сети в целом от характеристик элементов МСС, ее структуры и алгоритмов функционирования. Наличие таких зависимостей позволит оценивать влияние тех или иных принимаемых решений на качество системы, что в свою очередь позволит создать эффективную и надежную МСС.

Основной целью исследования в области эффективности и надежности является стремление разработать такие методы для инженеров-проектировщиков, которые упростили бы проектирование сетей, требующих повышенной надежности и эффективности. В идеале желательно сформировать модели проектирования МСС и алгоритмы, которые используют в качестве входных данных характеристики сетевых компонентов, а также критерии проектирования, и выдают на выходе оптимальную структуру сети. Так как точные выражения для надежности и эффективности сложны, в моделях для проектирования сетей вместо явных выражений целесообразно использовать приближенные, но гарантирующие требуемую точность оценки. Поэтому стоит задача разработки новых или совершенствования существующих приближенных методов оценки сети связи и приспособления их к особенностям МСС. Что касается надежности МСС в целом, то учесть показатели ее элементов в процессе синтеза МСС, как правило, не удается. Поэтому целесообразно применять различные модели анализа надежности МСС совместно с процедурами проектирования сети. На этапе синтеза необходимые предпосылки для обеспечения надежности закладываются в косвенном виде, например как топологическое требование обеспечения заданного числа независимых путей (требование υ – связанности). В этих условиях расчет структурной надежности сети сводится к расчету вероятности связанности между узлами, что соответствует расчету коэффициента готовности тракта передачи информации между указанными узлами.

Итак, задана структура некоторой сети, состоящей из n элементов, причем надежность $p_i(K_{\Gamma i})$ каждого элемента известна $\left(i=\overline{1,N}\right)$. При этом если показатели надежности элементов системы могут быть рассчитаны или определены экспериментально с учетом критериев их отказов, определенных руководящим документом Мининформсвязи (РД.45.128-2000) [2], то методы оценки структурной надежности сети в РД.45.128-2000 не освещены.

Необходимо определить вероятность связанности относительно выделенной пары узлов k,l (коэффициент готовности тракта $K_{k,l}$). Ниже рассмотрим возможные методы решения этой задачи.

2. МЕТОД ПРЯМОГО ПЕРЕБОРА СОСТОЯНИЙ

После определения отказа можно приступать к рассмотрению методов расчета структурной надежности систем связи. Начнем с рассмотрения метода прямого перебора состояний. Этот метод применим только для несложных структур, так как объем расчетов по этому методу растет в геометрической пропорции с ростом числа элементов системы. Однако этот метод вполне естествен и физически понятен, поэтому к нему иногда прибегают для оценки результатов, полученных другими методами в тех же условиях. Итак, имеется произвольная система, состоящая из n элементов, каждый из которых может находиться в состоянии работоспособности и в состоянии отказа, которая в свою очередь может находиться в 2^n различных состояниях:

H_o – все n элементов работоспособны;

H_i – отказал i-й элемент, остальные работоспособны;

H_{ji} – отказали i-й и j-й элементы, остальные работоспособны;

$H_{1,2,\ldots,n}$ – отказали все элементы.

Поскольку критерий отказа системы определен, то все множества ее состояний можно разделить на два подмножества: подмножество состояний работоспособности F и подмножество состояний отказа Y. Тогда если для каждого состояния H_α вычислить вероятность его появления P_α, то вероятность состояния работоспособности системы в целом можно записать как $P\{H_\alpha \in F\} = \sum\limits_{H_\alpha \in F} P_\alpha$.

Если система состоит из взаимно независимых элементов, то вероятности соответствующих состояний вычисляются по формулам:

$$P_O = \prod_{i=1}^{n} p_i; \qquad p_i = q_i \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} p_k = \frac{q_i}{p_i} P_O = \gamma_i P_O;$$

$$P_{ij} = q_i q_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} P_k = \gamma_i \cdot \gamma_j P_O; \qquad P_{1,2,\ldots,n} = P_O \prod_{i=1}^{n} \gamma_i = \prod_{i=1}^{n} q_i,$$

где p_i и q_i – вероятности состояния работоспособности и неработоспособности i-го элемента системы; $\gamma_i = q_i / p_i$.

Если p_i – вероятность работы до отказа i-го элемента, то есть $p_i(t) = P\{\xi_i \geq t\}$, где ξ_i – случайная наработка до отказа i-го элемента, то формула для P позволяет вычислять вероятность безотказной работы системы до отказа, то есть $P(t) = P\{\xi \geq t\}$, где ξ – случайная наработка до отказа системы. В этом случае можно вычислять и среднюю наработку системы до отказа по общей формуле

$$T = \int_0^\infty P(t)dt \cdot$$

Если p_i – коэффициент готовности (нестационарный коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности или нестационарный коэффициент оперативной готовности) i-го элемента, то вероятность P является коэффициентом готовности (нестационарным коэффициентом готовности, коэффициентом оперативной готовности или нестационарным коэффициентом оперативной готовности) системы в целом. Для примера использования метода прямого перебора рассчитаем коэффициент готовности мостиковой схемы (рис. 1), которая состоит из идентичных элементов, каждый из которых имеет коэффициент готовности $p_i=p$.

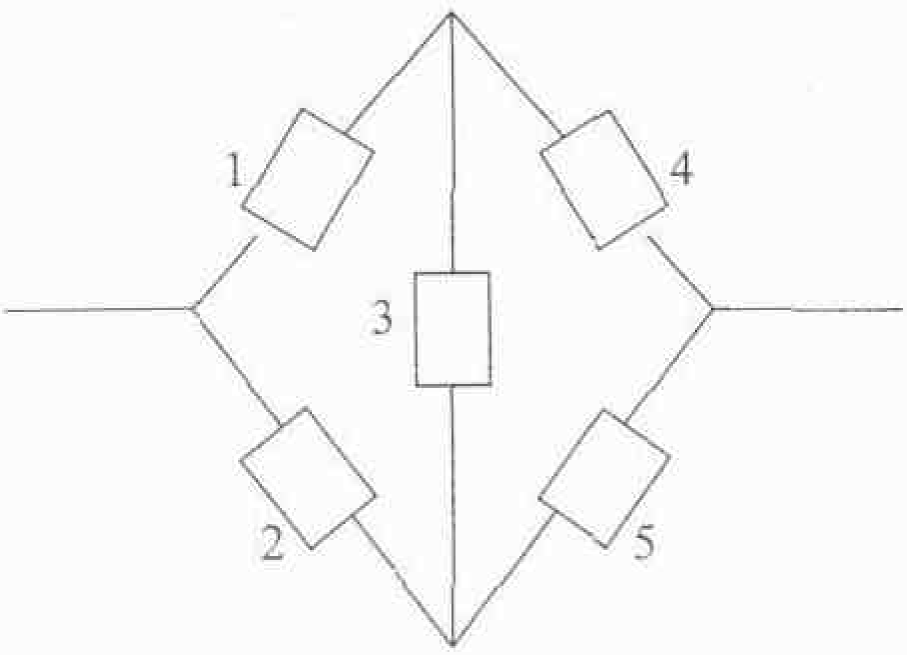

Рис. 1. Мостиковая схема

Для этого составляем таблицу возможных состояний (табл. 1.) и по рис. 1 непосредственно определяем, к какому из подмножеств F или Y относится то или иное состояние. В таблице $x_i=1$ означает, что i-й элемент исправлен, а $x_i=0$ – что он неисправен.

Таблица 1

Индекс состояния α	*Состояния элементов*					*Вид подмножества*	*Вероятность состояния* $P\alpha$	*Индекс состояния* α	*Состояния элементов*					*Вид подмножества*	*Вероятность состояния* $P\alpha$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	1	1	1	1	F	p^5	25	1	0	1	1	0	F	q^2p^3
1	0	1	1	1	1	F	qp^4	34	1	1	0	0	1	F	q^2p^3
2	1	0	1	1	1	F	qp^4	35	1	1	0	1	0	F	q^2p^3
3	1	1	0	1	1	F	qp^4	45	1	1	1	0	0	Y	q^2p^3
4	1	1	1	0	1	F	qp^4	134	0	1	0	0	1	F	q^2p^3
5	1	1	1	1	0	F	qp^4	135	0	1	0	1	0	Y	q^2p^3
12	0	0	1	1	1	Y	q^2p^3	145	0	1	1	0	0	Y	q^2p^3
13	0	1	0	1	1	F	q^2p^3	234	1	0	0	0	1	Y	q^2p^3
14	0	1	1	0	1	F	q^2p^3	235	1	0	0	1	0	F	q^2p^3
15	0	1	1	1	0	F	q^2p^3	245	1	0	1	0	0	Y	q^2p^3
23	1	0	0	1	1	F	q^2p^3	345	1	1	0	0	0	Y	q^2p^3
24	1	0	1	0	1	F	q^2p^3	1345	0	1	0	0	0	Y	q^4p

Здесь следует отметить, что если p_i имеют различное значение, то вероятность состояния $P\alpha$ необходимо подсчитывать с учетом значений p_i. Таким образом, в нашем случае $P=p^5+5qp^4+8q^2p^3+2q^3p^2$.

3. МЕТОД СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

3.1. Метод преобразования структуры типа «треугольник» в структуру типа «звезда» и обратно

Существо этого метода заключается в том, что узел сложной конфигурации заменяется на узел другой, более простой конфигурации, но при этом подбираются такие характеристики нового узла, чтобы показатели надежности преобразуемой системы сохранялись прежними.

Пусть, например, требуется заменить треугольник (рис. 2а) звездой (рис. 2б). Чтобы «звезда» была эквивалентной «треугольнику», необходимо обеспечить эквивалентность уравнений работоспособности «треугольника» и «звезды», то есть следующие равенства:

$$a \vee в \cdot c = x \cdot y; в \vee a \cdot c = x \cdot z; c \vee a \cdot в = y \cdot z, \qquad (1)$$

где a, $в$, c, x, y, z – события, состоящие в том, что элементы находятся в работоспособном состоянии.

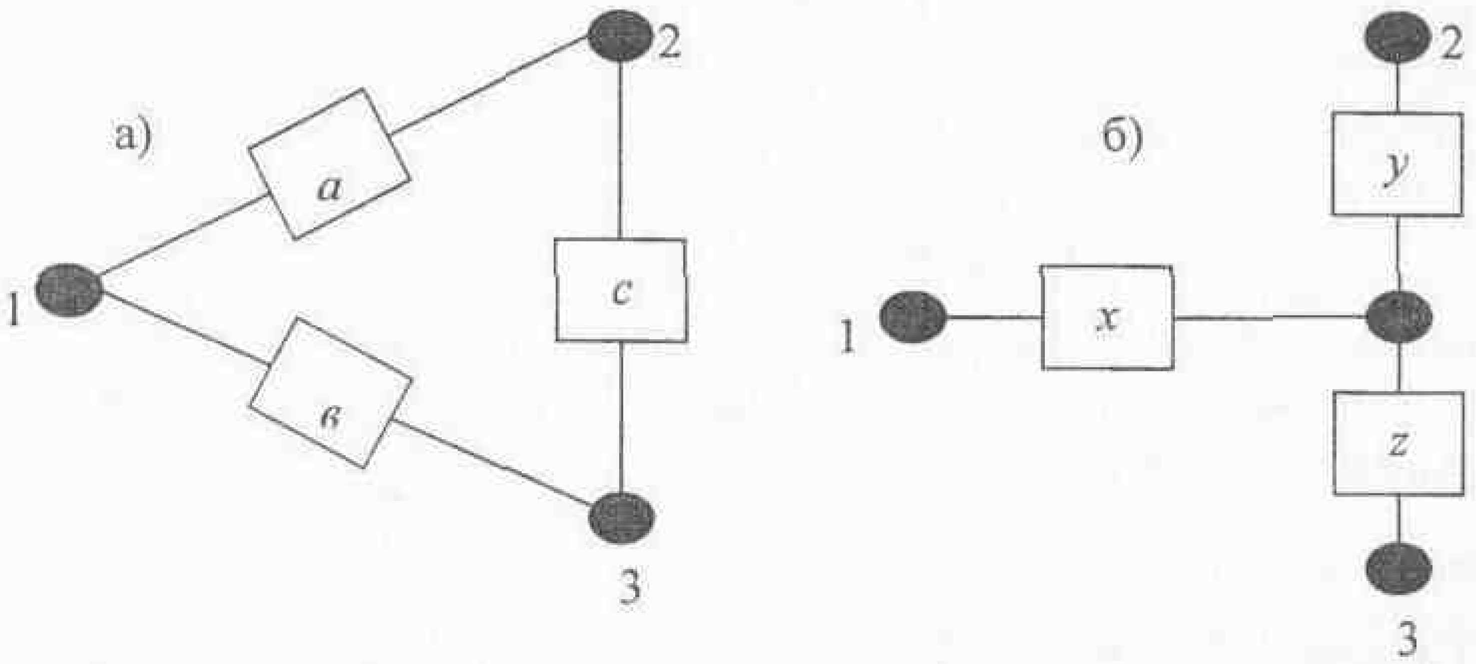

Рис. 2. Преобразование структуры типа «треугольник» (а) в структуру типа «звезда» (б).

Из (1) следует, что вероятности работоспособного состояния (коэффициенты готовности) цепей 1-2, 1-3, и 2-3 должны быть равны как для «треугольника», так и для «звезды». Поэтому

$$\left.\begin{aligned} &K_{Гa} + K_{Гв} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв}K_{Гc} = K_{Гx} \cdot K_{Гy}; \\ &K_{Гв} + K_{Гa}K_{Гc} - K_{Гa} \cdot K_{Гв} \cdot K_{Гc} = K_{Гx} \cdot K_{Гz}; \\ &K_{Гc} + K_{Гa} \cdot K_{Гв} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc} = K_{Гy} \cdot K_{Гz}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{aligned} K_{Гx} &= \sqrt{\frac{(K_{Гa} + K_{Гв} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})(K_{Гв} + K_{Гa} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})}{(K_{Гc} + K_{Гa} \cdot K_{Гв} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})}}; \\ K_{Гy} &= \sqrt{\frac{(K_{Гa} + K_{Гв} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})(K_{Гc} + K_{Гa} \cdot K_{Гв} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})}{(K_{Гв} + K_{Гa} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})}}; \\ K_{Гz} &= \sqrt{\frac{(K_{Гв} + K_{Гa} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})(K_{Гв} + K_{Гa} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})}{(K_{Гa} + K_{Гв} \cdot K_{Гc} - K_{Гa}K_{Гв} \cdot K_{Гc})}}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Для случая, когда $K_{Гa} = K_{Гв} = K_{Гc} = K_{ГТ}$; $K_{Гx} = K_{Гy} = K_{Гz} = K_{ГЗ}$, система уравнений (2) упрощается, и для этого случая получаем

$$K_{Г3} = \sqrt{K_{ГТ} + K_{ГТ}^2 - K_{ГТ}^3}\ ,$$

а $K_{Г3}^2$ – коэффициенты готовности цепей 1-2, 1-3 и 2-3.

В качестве примера приведем порядок расчета коэффициента готовности так называемой мостиковой схемы, приведенной на рис. 3.

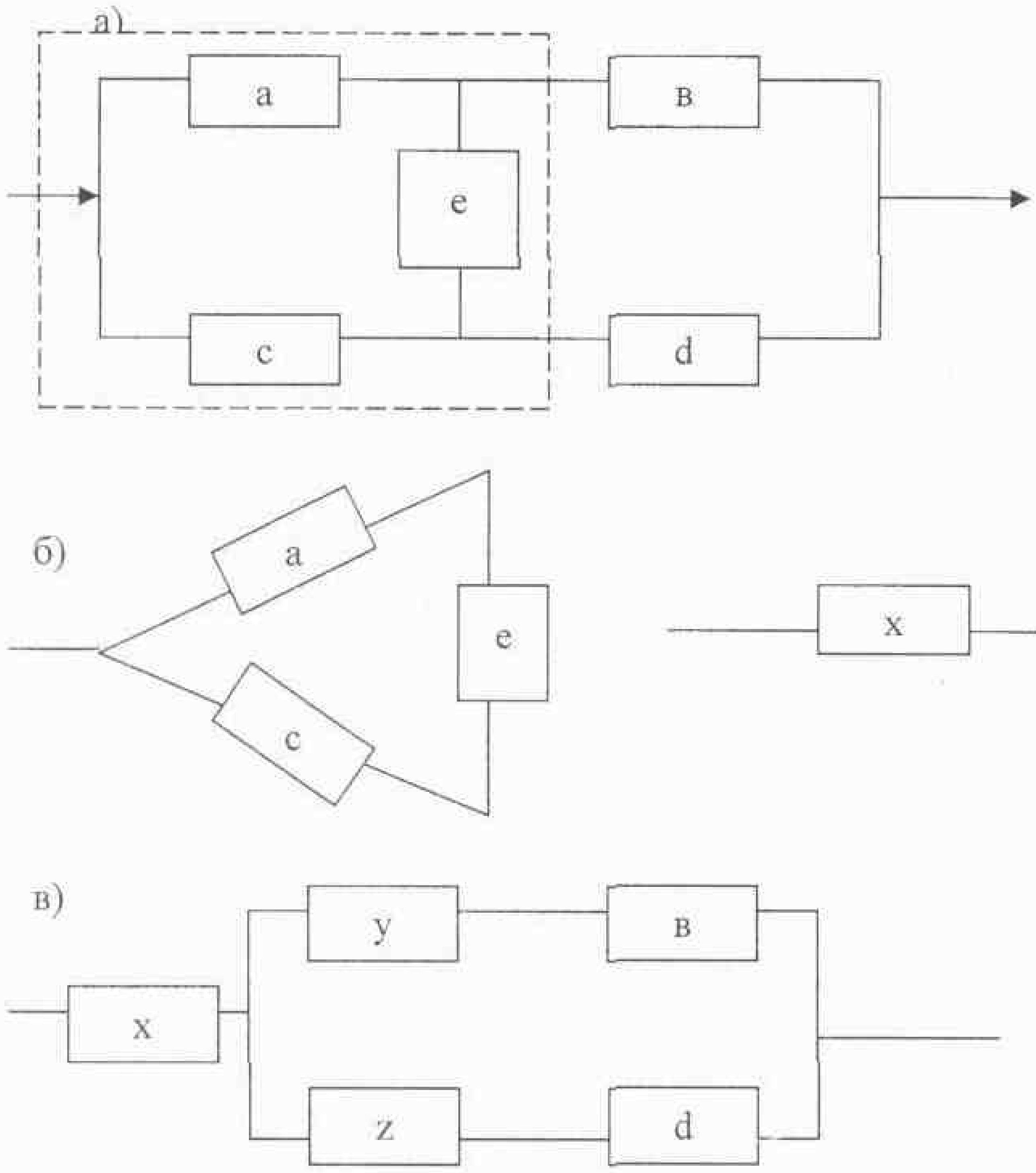

Рис. 3. Преобразование мостиковой схемы в последовательно-параллельную схему

Мостиковая схема в своем первоначальном виде не является последовательно-параллельной, так как в ней существует элемент *e* («мостик»). Но совокупность элементов *a, c, e* представляет собой «треугольник», преобразовав который в «звезду», мы получаем последовательно-параллельную схему. Значения коэффициентов готовности элементов *x, y, z* получим, используя выражения (3). Затем получим значения эквивалентных коэффициентов готовности двух цепочек из двух последовательно соединенных элементов:

$$K_{ГЭ1} = K_{ГY} \cdot K_{ГВ}, \quad K_{ГЭ2} = K_{ГZ} \cdot K_{Гd}.$$

В результате получим эквивалентную схему, приведенную на рис. 4.

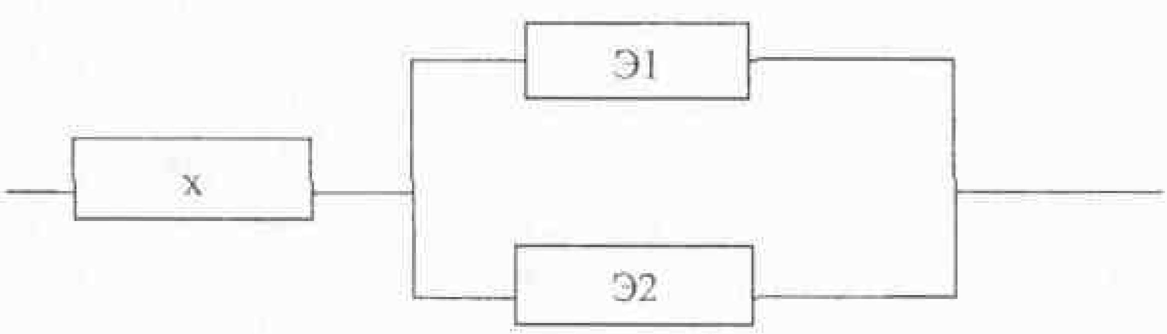

Рис. 4. Эквивалентная последовательно-параллельная схема

Окончательно имеем $K_Г = K_{ГХ} \cdot (K_{ГЭ1} + K_{ГЭ2} - K_{ГЭ1} \cdot K_{ГЭ2})$.

Для полноты изложения приведем формулы для преобразования соединений типа «звезда» в «треугольник» (рис. 2.):

$$q_{12} = \sqrt{\frac{q_x q_y}{q_z}}; q_{23} = \sqrt{\frac{q_y \cdot q_z}{q_x}}; q_{31} = \sqrt{\frac{q_x q_z}{q_y}}.$$

Точность приведенных выражений имеет порядок $q_i q_j$ и $q_i q_j q_k$ (то есть при выводе этих формул пренебрегаем произведениями вида $q_i q_j$ и $q_i q_j q_k$). Таким образом, в некоторых случаях преобразование «треугольника» в «звезду» и обратно позволяет изменить исходную структуру схемы, сводя ее к последовательно-параллельной схеме, что в свою очередь позволяет рассчитать показатели надежности, используя стандартные подходы.

3.2. Метод разложения сложной структуры по ключевым элементам

Этот способ преобразования сложных структур основан на использовании теоремы о сумме вероятностей несовместных событий или так называемой теоремы разложения.

Теорема разложения звучит следующим образом: функция надежности $p(E)$ системы, состоящей из N ненадежных элементов, равна произведению вероятности исправного состояния i-го элемента на функцию надежности системы из N-1 элементов при условии, что i-й элемент замкнут накоротко, плюс произведение вероятности отказа i-го элемента на функцию надежности системы из N-1 элементов при условии, что i-й элемент разомкнут. Очевидно, что к преобразованной системе из N-1 элементов вновь может быть применена теорема разложения, затем к системе из N-2 элементов и т.д. Тогда имеет место формула полной вероятности

$$p(E) = \sum_{i=0}^{N^{II}} p(N^{II}, i) p(E^{I}).$$

В этой формуле N^{II} – число элементов системы, не позволяющих производить вычисления по формулам последовательно-параллельного соединения $(N^{II}<N)$; $P(N^{II},i)$ – вероятность состояния совокупности N^{II} элементов при одновременном отказе $i=0,...,N^{II}$ и исправности N-i элементов; $p(E^{I})$ – условная вероятность сохранения связанности системы при размыкании i и замыкании накоротко N^{II}-i – элементов, определяемая по формулам последовательно-параллельного соединения.

Использование теоремы разложения для расчета надежности систем связи ограничивается для общего случая несколькими факторами, которые вытекают, во-первых, из условия формулирования самой теоремы и, во-вторых, из сложности программной реализации алгоритма преобразования структур. Поэтому область применения теоремы разложения ограничивается структурами специального класса, как, например, лестничная схема или «решетка» – схема, элементы которой представляют собой мостиковые схемы, и некоторыми другими, заранее заданными структурами.

В сложной структуре выбирают базовый элемент (или группу базовых элементов), и делаются следующие допущения: 1) базовый элемент находится в работоспособном состоянии; 2) базовый элемент находится в состоянии отказа. Для этих случаев, представляющих собой два несовместных события, исходная структурная схема преобразовывается в две новые схемы. В первой из них вместо базового элемента ставится короткое замыкание цепи, а во второй – разрыв. Вероятности безотказной работы каждой из полученных упрощенных структур вычисляются и умножаются: первая – на вероятность безотказного состояния базового элемента, вторая – на вероятность отказа базового элемента. Полученные произведения складываются. Сумма равна исходной вероятности безотказной работы сложной структуры (ее коэффициенту готовности).

Для примера рассмотрим сеть простейшей структуры в виде мостика (рис. 5).

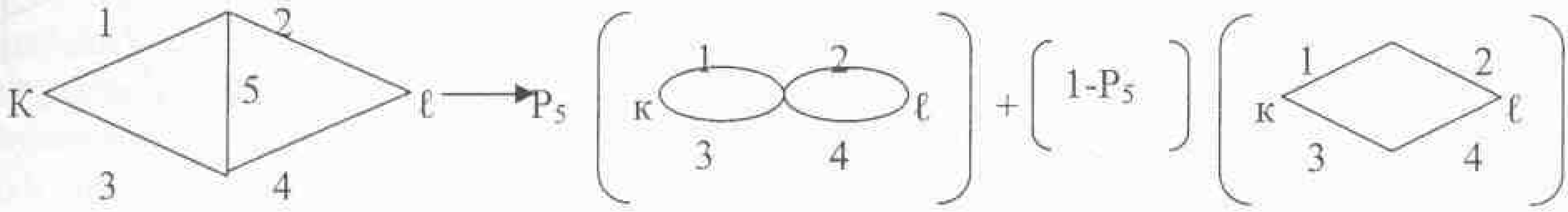

Рис. 5. Метод разложения по базовому элементу

Для простоты положим, что узлы этой сети идеально надежны, а ветви имеют конечную надежность $p_i, i=\overline{1,5}$. Нумерация ветвей приведена на рисунке. Проделаем с элементом под номером 5 («перемычка» мостика) два опыта – «короткого замыкания», соответствующего исправному состояния элемента, и «разрыва», соответствующего его неисправному состоянию. Здесь сразу следует заметить, что в качестве базового элемента выбирается элемент с наибольшим числом связей. Итак, если перемычка находится в исправном состоянии, что случается с вероятностью p_5, то соединяемые ею узлы можно «стянуть» в смысле надежности (см. рис. 5.) и сеть будет иметь вид двух последовательно соединенных и параллельно включенных пар ветвей. Если перемычка находится в неработоспособном состоянии, что случается с вероятностью $(1-p_5)$, то оставшаяся сеть будет иметь вид параллельного соединения цепочек.

Таким образом, мы «разложили» сеть относительно элемента 5, в результате чего получили две подсети в исходной сети. Поскольку обе подсети представляют собой последовательно-параллельные структуры, можно сразу записать искомое выражение для вероятности связанности сети относительно узлов k,ℓ (коэффициента готовности тракта передачи информации k,ℓ), используя для компактности обозначения $q_i=1-p_i$.

$$H_{k,\ell} = p_5(1-q_1q_3)(1-q_2q_4)+q_5[1-(1-p_1p_2)(1-p_3p_4)].$$

В более сложных структурах может потребоваться неоднократное применение теоремы разложения. Так на рис. 6. показано разложение исходной структуры относительно двух элементов – 7 и 8.

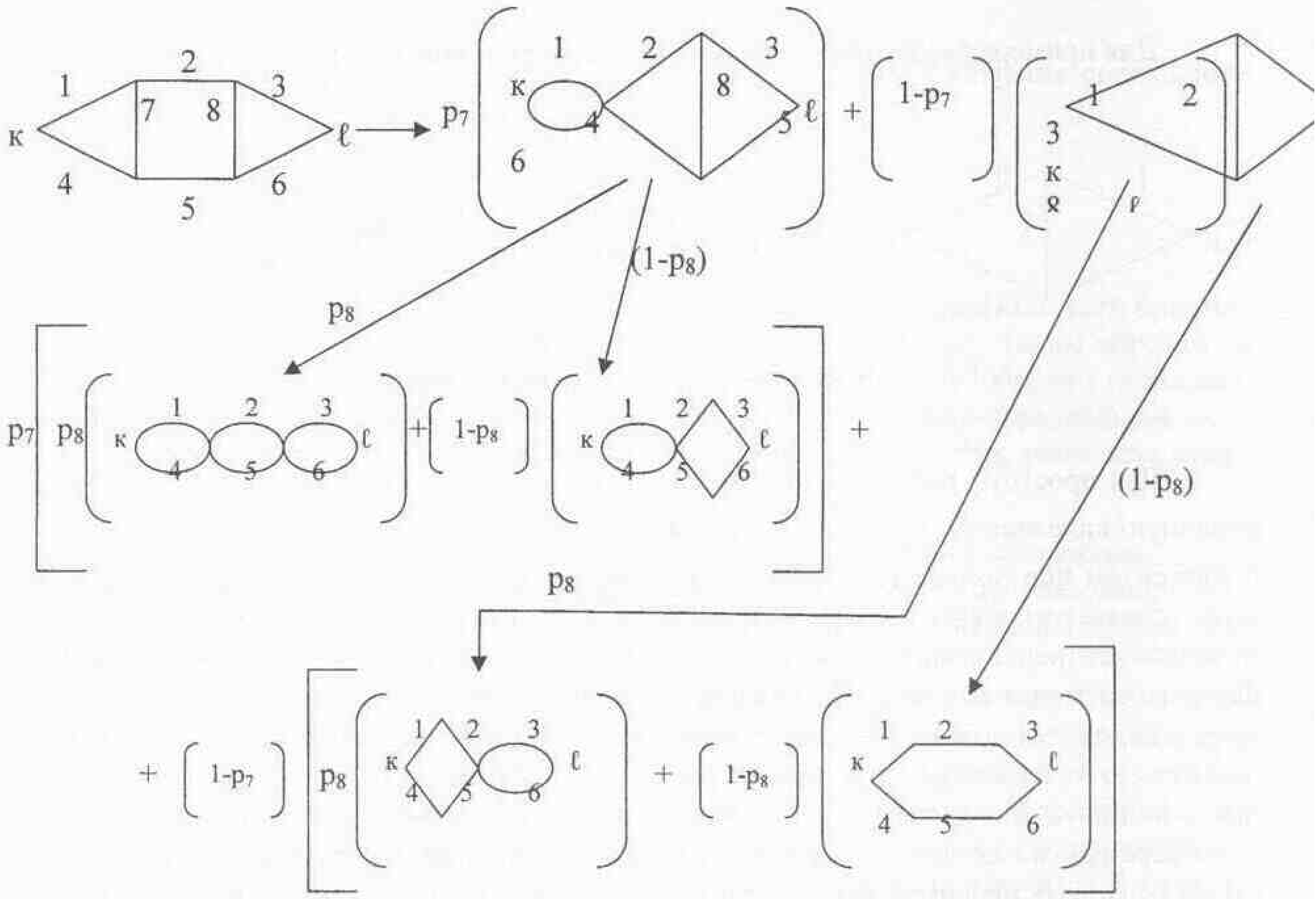

Рис. 6. Последовательное разложение сети по двум базовым элементам

Получившиеся четыре подсети имеют последовательно-параллельные структуры и больше не требуют разложений. Выражение для $H_{\kappa\ell}$ будет следующим:

$$H_{\kappa\ell} = p_7\{p_8(1-q_1q_4)(1-q_2q_5)(1-q_3q_6)+q_8(1-q_1q_4)\cdot[1-(1-p_2p_3)(1-p_5p_6)]\}+$$
$$+q_7\{p_8(1-q_3q_6)[1-(1-p_1p_2)(1-p_4p_5)]+q_8[1-(1-p_1p_2p_3)(1-p_4p_5p_6)]\}$$

Легко видеть, что в этом методе на каждом шаге число элементов в получающихся подсетях уменьшается на единицу, а число подсетей, требующих дальнейшего рассмотрения, удваивается. Поэтому описанный процесс в любом случае конечен, а число результирующих последовательно-параллельных структур составит 2^m, где m – число элементов, по которым пришлось провести разложение.

4. МЕТОД РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ (БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ)

Расчет надежности сложной системы, по сути дела, является определением истинности сложного высказывания.

Приведем пример высказывания: «система находится в работоспособном состоянии, если в работоспособном состоянии находится ее элемент a и один из следующих элементов: элемент $в$, или d, или оба элемента вместе взятых». Такое высказывание является сложным, состоящим из простых высказываний, связанных между собой логическими операциями конъюнкции (связка «и», обозначается знаком $\wedge$) и дизъюнкции (связка «или», обозначается знаком $\vee$). На языке математической логики выше приведенное высказывание может быть записано следующим образом: $c = a \wedge [в \vee d \vee (в \wedge d)] = a \wedge (в \vee d)$.

Главное в такой записи состоит не только в том, что существует возможность записать условие работоспособности системы в виде математической (логической) формулы, а в том, что такие формулы можно подвергать математической обработке. Путем соединения их в более сложные структуры – разлагать, преобразовывать, оптимизировать, находить по ним значения исследуемых величин, переходить от формул к схемам и наоборот и т.д.

Таким образом, использование аппарата математической логики позволяет формализовать условия работоспособности сложных структур и получать формулы для расчета надежности, поэтому рассмотрим самые необходимые из них для этого положения математической логики, используемые при расчетах надежности. Если о некотором высказывании C можно утверждать, что оно истинно, если истинны высказывания A или B, тогда делается вывод о том, что высказывание C равно высказываниям A и B, связанным между собой логической операцией дизъюнкции: $C = A \vee B$.

Точно так же, если об изделии можно утверждать, что оно работоспособно, если работоспособен его элемент a или $в$, можно сделать вывод о том, что работоспособность изделия (событие c) и работоспособность элементов a и $в$ (событие a и событие $в$) связаны между собой логическим уравнением работоспособности: $c = a \vee в$.

Логическая операция дизъюнкции может быть представлена схемой параллельного соединения элементов a и $в$.

Если о некотором высказывании C можно утверждать, что оно истинно тогда, когда истинны высказывания A и B, то делается вывод о том, что высказывание C равно высказываниям A и B, связанным между собой логической операцией конъюнкции: $C = A \wedge B$.

Точно так же, если об изделии можно утверждать, что оно работоспособно, если работоспособен элемент a и элемент $в$, можно сделать вывод о том, что работоспособность изделия (событие c) и работоспособность элементов a и $в$ (событие a и событие $в$) связанны между собой логическим уравнением работоспособности: $c = a \wedge в$.

Логическая операция конъюнкции может быть представлена схемой последовательного соединения элементов a и $в$ с точки зрения надежности.

Если некоторое высказывание A отрицается высказыванием B, тогда говорят, что высказывание A и высказывание B связаны между собой логической операцией отрицания: $B = \overline{A}$.

В теории надежности оно находит такое применение. Если работоспособное состояние элемента обозначить a, то его неработоспособное состояние обозначается $\overline{a}$.

Логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания – основные операции, используемые в прикладной теории надежности, так как к ним могут быть сведены все другие логические операции.

Сложную логическую функцию можно минимизировать, то есть преобразовать ее таким образом, что она будет содержать наименьшее число членов или в ней не будет повторяющихся членов.

Для минимизации функций и для исключения повторяющихся членов могут быть использованы следующие формулы:

1) $a \wedge a = a$;
2) $a \vee a = a$;
3) $a \vee aв = a$;
4) $(1 \vee a) = 1$;
5) $(a \vee \overline{a}) = 1$;
6) $(a \wedge в) \vee (a \wedge \overline{в}) = a$;
7) $a(a \vee в) = a$;
8) $(a \vee в) \wedge (a \vee c) = a \vee вc$;
9) $F_л(a, в, c...) = aF_л(1, в, c...) \vee \overline{a}F_л(o, в, c...)$.

Особого внимания заслуживает формула разложения $F_л$ на две составляющие. Она используется тогда, когда все остальные формулы не позволяют исключить повторяющиеся члены, что характерно для логических функций, описывающих надежность систем со сложной структурой.

Логические функции можно преобразовать в функции алгебраические, если заменить все логические операции арифметическими по следующим правилам

$$a \vee в = a + в - a \cdot в;\ a \wedge в = a \cdot в;\ \overline{a} = 1 - a. \qquad (4)$$

Итак, чтобы получить формулу для вероятности работоспособного состояния (коэффициента готовности) сложной системы, необходимо:

1) сформулировать условие работоспособности системы;
2) на основании формулировки об условии работоспособности системы записать функцию работоспособности $F_л$;
3) преобразовать в случае необходимости логическую функцию работоспособности (минимизировать, исключить повторяющиеся члены);
4) в логической функции работоспособности заменить логические операции арифметическими, то есть получить F_a;
5) в арифметической функции работоспособности заменить простые события (простые высказывания) их вероятностями;
6) в полученную формулу, устанавливающую связь между показателями надежности (вероятностями состояний) элементов системы и показателями надежности (вероятностью состояния) самой системы, подставить числовые значения показателей надежности элементов системы.

Для примера использования метода расчета надежности с использованием математической логики рассмотрим порядок расчета надежности мостиковой схемы, приведенной на рис. 6.

Дадим словесную формулировку минимально необходимых условий работоспособности тракта передачи информации. Тракт работоспособен, если работоспособны пути *a* и *в*, или *a* и *e* и *d*, или *c* и *d*, или *c* и *e* и *в*. Добавление такого условия, что работоспособен *a, в, c, d* и *e* излишне, так как оно включает перечисленное выше и будет исключено при минимизации логической функции.

Логическая функция работоспособности на основании словесной ее формулировки запишется следующим образом:

$$F_л = (a \wedge в) \vee (a \wedge e \wedge d) \vee (c \wedge d) \vee (c \wedge e \wedge в).$$

Разложим функцию $F_л$ с целью исключения повторяющихся членов по элементу e:

$F_л = e\{a \cdot в \vee a \cdot d \vee c \cdot d \vee в \cdot e\} \vee \overline{e}\{a \cdot в \vee c \cdot d\}$ (для упрощения записи знак "$\wedge$" заменен "$\cdot$").

Упростим выражение в первых фигурных скобках

$$aв \vee a \cdot d \vee c \cdot d \vee в \cdot c = a(в \vee c) \vee c(d \vee в) = (a \vee c) \cdot (в \vee d).$$

Окончательно функция работоспособности имеет следующий вид:

$$F_л = e\{(a \vee c) \cdot (в \vee d)\} \vee \overline{c}(a \cdot в \vee c \cdot d).$$

Заменим логические операции арифметическими согласно (6.11.):

$$F_a = e\{(a + c - a \cdot c)(в + d - в \cdot d)\} + (1 - e)(a \cdot в + c \cdot d - a \cdot в \cdot c \cdot d).$$

Заменим события *a, в, c, d* и *e* их вероятностями состояний работоспособности (коэффициентами готовности) и получим

$$P = P_e\{(P_a + P_c - P_a \cdot P_c)(P_в + P_d - P_в \cdot P_d)\} + (1 - P_e)(P_a \cdot P_в + P_c \cdot P_d - P_a \cdot P_в \cdot P_c \cdot P_d).$$

Рассмотрим пример определения надежности тракта передачи информации в мультисервисной сети связи, с использованием математической логики, для системы связи радиально-кольцевой конфигурации (рис. 7).

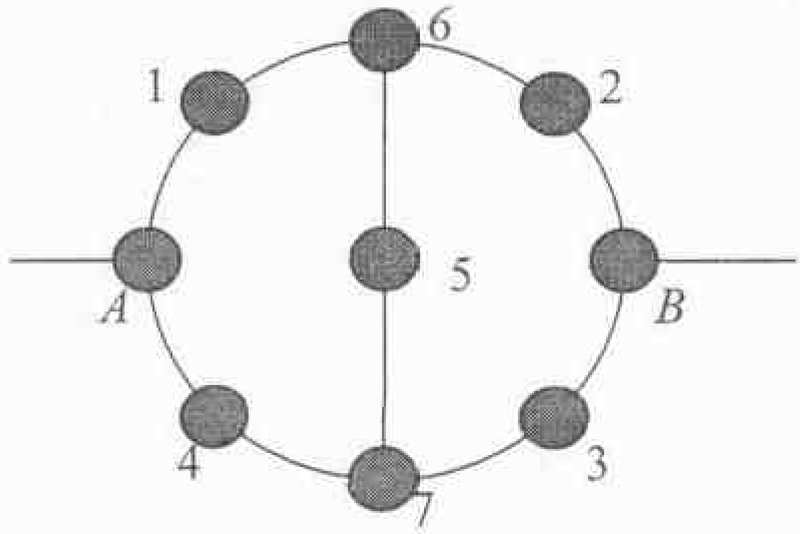

Рис. 7. Система связи с радиально-кольцевой конфигурацией

Сети с такой конфигурацией часто используются на практике, так как во многих случаях являются оптимальными (рациональными) с точки зрения суммарной длины каналов связи, а также надежности.

Возможными путями передачи информации между A и B будут: 1, 6, 2, или 1, 6, 5, 7, 3, или 4, 7, 5, 6, 2, или 4, 7, 3.

Отсюда логическая функция работоспособности будет

$$F_л = (1 \wedge 6 \wedge 2) \vee (1 \wedge 6 \wedge 5 \wedge 7 \wedge 3) \vee (4 \wedge 7 \wedge 5 \wedge 6 \wedge 2) \vee (4 \wedge 7 \wedge 3).$$

Данная функция работоспособности является сложной и требует разложения с целью исключения повторяющихся членов. В качестве элементов разложения целесообразно использовать элементы, наиболее часто входящие в возможные пути передачи информации. В нашем случае это элементы 6 и 7.

$$F_л = 6\{(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 5 \wedge 7 \wedge 3) \vee (4 \wedge 7 \wedge 5 \wedge 2) \vee (4 \wedge 7 \wedge 3)\} + \overline{6}(4 \wedge 7 \wedge 3).$$

Затем упростим выражение в фигурных скобках, обозначив его $F_{л1}$:

$$F_{л1} = 7\{(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 5 \wedge 3) \vee (4 \wedge 5 \wedge 2) \vee (4 \vee 3)\} + \overline{7}(1 \wedge 2).$$

Затем снова упростим выражение в фигурных скобках, обозначив его $F_{л2}$:

$$F_{л2} = 5\{(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (4 \wedge 2) \vee (4 \wedge 3)\} + \overline{5}\{(1 \wedge 2) \vee (4 \wedge 3)\} =$$
$$5\{(2 \vee 3) \wedge (1 \vee 4)\} + \overline{5}\{(1 \wedge 2) \vee (4 \wedge 3)$$

Заменим логические операции арифметическими:

$$F_{a2} = 5(2 + 3 - 2 \cdot 3)(1 + 4 - 1 \cdot 4) + (1 - 5)(1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4);$$

$$F_{a1} = 5 \cdot 7(2 + 3 - 2 \cdot 3)(1 + 4 - 1 \cdot 4) + 7(1 - 5)(1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + (1 - 7)1 \cdot 2;$$

$$F_a = 5 \cdot 6 \cdot 7(2 + 3 - 2 \cdot 3)(1 + 4 - 1 \cdot 4) + 6 \cdot 7(1 - 5)(1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) +$$
$$+ (1 - 7) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 + (1 - 6) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$$

Заменим события 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 их вероятностями состояний работоспособности и получим выражения для вероятности работоспособности тракта передачи информации A, B:

$$P = p_5 p_6 p_7 (p_2 + p_3 - p_2 p_3)(p_1 + p_4 - p_1 p_4) + p_6 p_7 (1 - p_5)(p_1 p_2 + p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4) +$$
$$+ (1 - p_7) p_1 p_2 p_6 + (1 - p_6) p_3 p_4 p_7$$

Упростив это выражение, окончательно получим

$$P = p_1p_2p_6 + p_1p_3p_5p_6p_7 + p_2p_4p_5p_6p_7 + p_3p_4p_7 - p_1p_2p_3p_5p_6p_7 - p_1p_2p_4p_5p_6p_7 - $$
$$- p_2p_3p_4p_5p_6p_7 - p_1p_3p_4p_5p_6p_7 - p_1p_2p_3p_4p_6p_7 + 2p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7$$

Если, например, все элементы сети имеют вероятность работоспособного состояния (коэффициент готовности), равную 0,9, то вероятность работоспособного состояния (коэффициент готовности) тракта передачи информации будет равна $p=2\cdot 0,9^3+2\cdot 0,9^5-5\cdot 0,9^6+2\cdot 0,9^7\approx 0,938$. Таким образом, надежность тракта передачи информации *AB* выше, чем надежность каждого из элементов сети за счет существования четырех путей доставки информации, два из которых (1, 6, 2 и 4, 7, 3) являются независимыми.

Если в той же схеме связи, представленной на рис. 7, потребуется рассчитать надежность тракта доставки информации 6,7, то в этом случае получается последовательно-параллельная схема. Расчет надежности такой схемы осуществляется стандартным способом, изложенным выше (в разделе 3).

Приведем пример расчета структурной надежности формализованной схемы магистральной части МСС Московского филиала ОАО «ЦентрТелеком». Эта схема [5] приведена на рис. 8.

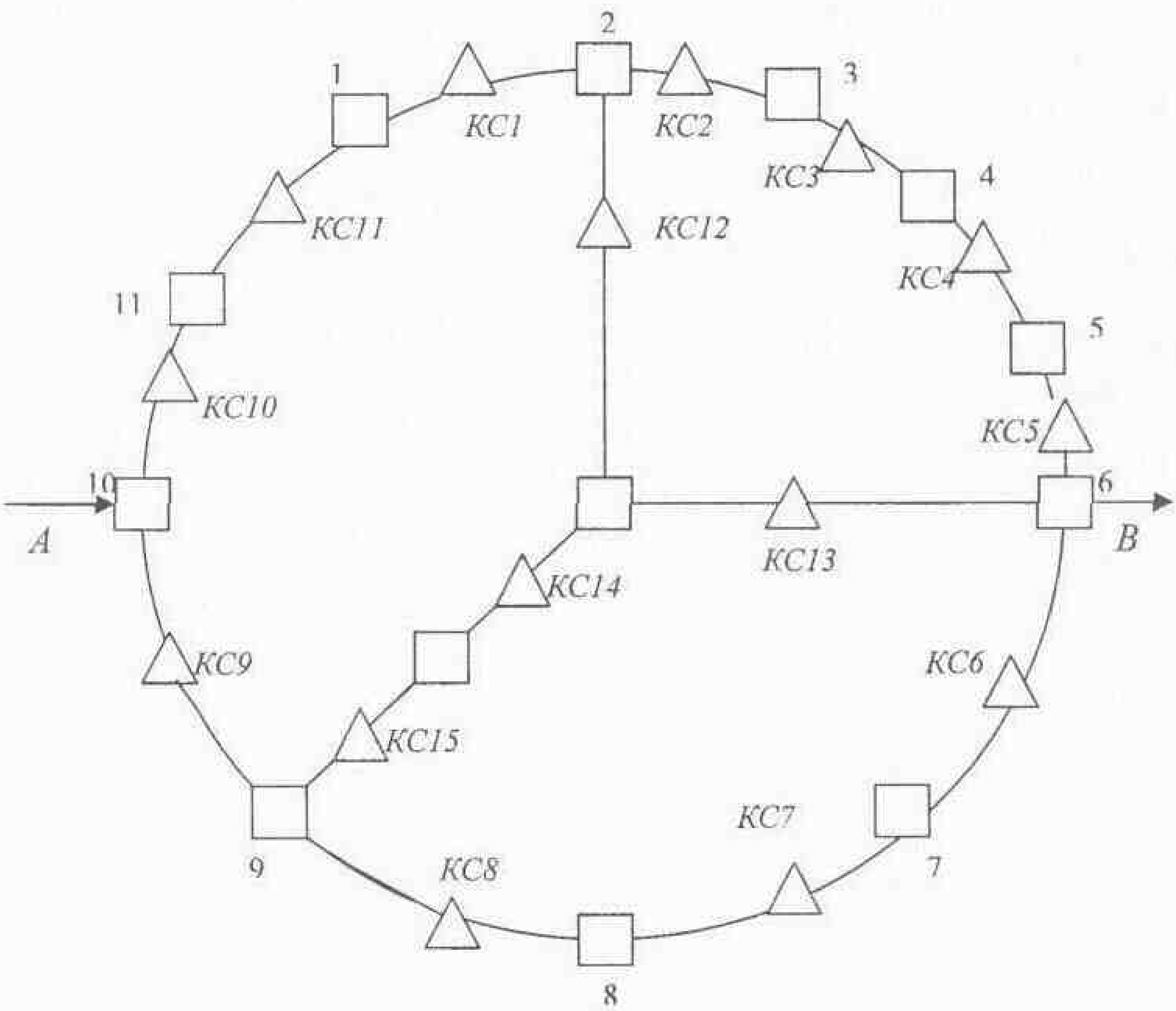

Рис. 8. Схема магистральной части МСС

В схеме прямоугольниками изображены узлы коммутации, имеющие вероятность работоспособного состояния $p_i, i=\overline{1,13}$, а треугольниками – каналы связи, имеющие вероятность работоспособного состояния $p_j, j=\overline{1,15}$. Например, в этой сети требуется рассчитать надежность (вероятность работоспособного состояния или коэффициент готовности) тракта *AB*. Этот тракт выбран как наиболее сложный для расчета. Для решения поставленной задачи необходимо и возможно упростить эту схему с точки зрения расчета надежности.

Естественно, любая модификация схемы не должна приводить к изменению показателей ее надежности, то есть эквивалентная упрощенная схема должна иметь те же показатели надежности, что и исходная. В исходной схеме имеется ряд цепочек с последовательным соединением элементов, каждую из которых можно заменить одним эквивалентным элементом с тем же показателем надежности:

1. Между точкой *А* и узлом коммутации 2: *УК10, КС10, УК11, УК1, КС1*. Эту цепочку заменим эквивалентным элементом *Э1* с вероятностью работоспособности $P_{Э1} = p_{УК10} \cdot p_{КС10} \cdot p_{УК11} \cdot p_{КС11} \cdot p_{УК1} \cdot p_{КС1}$.

2. Между узлами коммутации 2 и точкой *В*: *КС2, УК3, КС3, УК4, КС4, УК5, КС5, УК6*. Эту цепочку заменим эквивалентным элементом *Э2* с вероятностью работоспособности $P_{Э2} = p_{КС2} \cdot p_{УК3} \cdot p_{КС3} \cdot p_{УК4} \cdot p_{КС4} \cdot p_{УК5} \cdot p_{КС5} \cdot p_{УК6}$.

3. Между точкой *В* и узлом коммутации 9: *УК6, КС6, УК7, КС7, УК8, КС8* (эквивалентный элемент *Э3*), аналогично $P_{Э3} = p_{УК6} \cdot p_{КС6} \cdot p_{УК7} \cdot p_{КС7} \cdot p_{УК8} \cdot p_{КС8}$.

4. Между узлами коммутации 12 и 9: *КС14, УК13, КС15* (эквивалентный элемент *Э4*), аналогично $P_{Э4} = p_{КС14} \cdot p_{УК13} \cdot p_{КС15}$.

5. Между узлом коммутации 9 и точкой *А*: *КС8, УК10* (эквивалентный элемент Э5), $P_{Э5} = p_{КС8} \cdot p_{УК10}$.

В результате получим упрощенную схему, приведенную на рис. 9а. На рис. 9б приведена та же схема, но с буквенными обозначениями элементов с целью упрощения записи последующих формул.

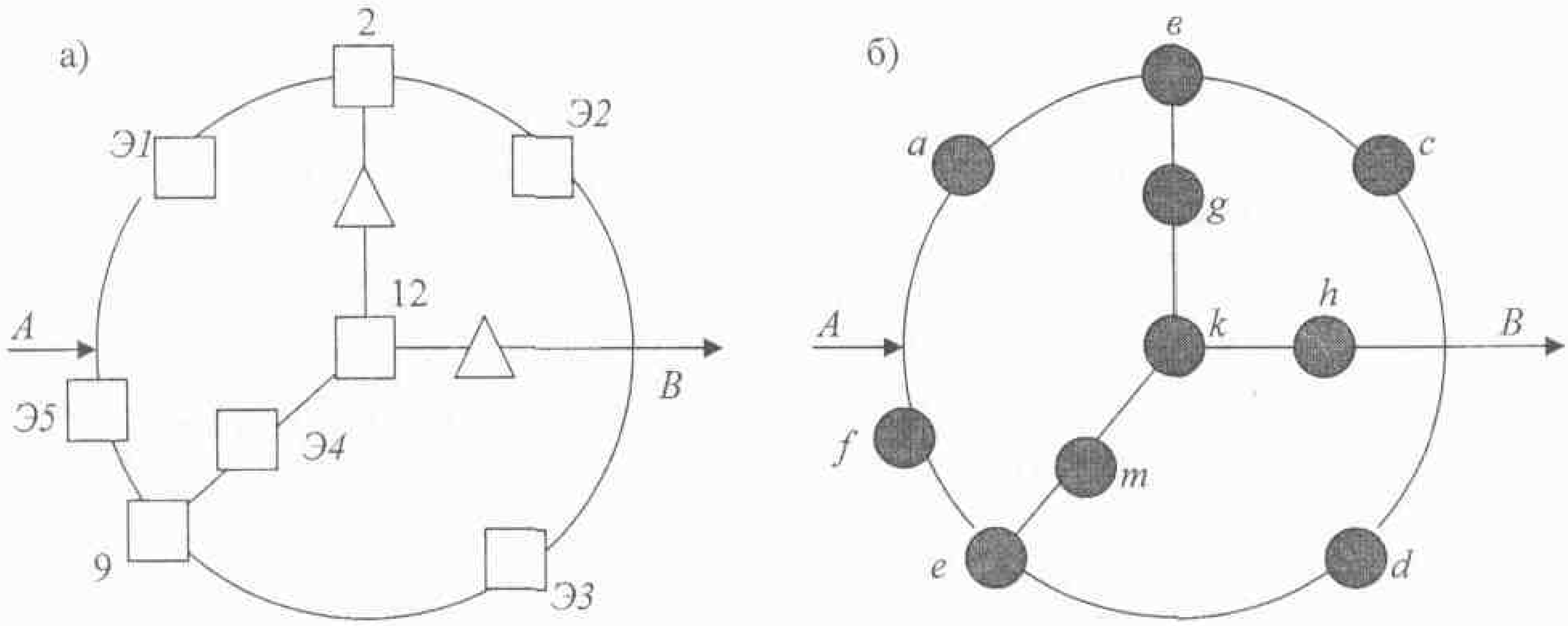

Рис. 9. Схема расчета надежности

В тракте *AB* имеется шесть путей передачи информации, и тракт будет работоспособен, когда работоспособен хотя бы один из этих путей. Этими путями являются:

1) *a, в, c*;	2) *a, в, g, k, h*;	3) *a, в, g, k, m, e, d*;
4) *f, e, d*;	5) *f, e, m, k, h*;	6) *f, e, m, k, g, в, c*.

Таким образом, логическую функцию работоспособности можно записать следующим образом:

$$F_{\wedge} = (a \wedge в \wedge c) \vee (a \wedge в \wedge g \wedge k \wedge h) \vee (a \wedge в \wedge g \wedge k \wedge m \wedge e \wedge d) \vee$$
$$\vee (f \wedge e \wedge d) \vee (f \wedge e \wedge m \wedge k \wedge h) \vee (f \wedge e \wedge m \wedge k \wedge d \wedge в \wedge c)$$

Для вывода формулы расчета надежности тракта *AB* необходимо проделать ранее описанные процедуры, то есть упростить эту логическую функцию, разложив ее по наиболее часто встречающимся элементам (*k, в, e* – по 4 раза, *a, f, g, m* – по 3 раза) и перевести ее в арифметическую зависимость. Для этого необходимо заменить события их вероятностными состояниями работоспособности сети (коэффициентами готовности), и получим искомую величину *P*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены некоторые возможные методы оценки структурной надежности МСС, которые носят в основном прикладной характер и могут быть использованы при создании и совершенствовании МСС. К ним относятся метод расчета последовательно-параллельных структур, метод структурного анализа и структурных преобразований, метод с использованием математической логики (булевой алгебры). Целесообразность использования того или иного метода определяется в основном характером структуры рассматриваемой МСС. В качестве практического примера рассмотрен расчет структурной надежности формализованной схемы магистральной части МСС Московского филиала ОАО «ЦентрТелеком». Указанный метод может использоваться для расчета структурной надежности наложенной корпоративной сети.

Литература

1. Гадасин В.А. Методы расчета структурной надежности сети связи / В.А. Гадасин. – М., 1986.
2. Концепция развития рынка телекоммуникационных услуг РФ от 26.07.200г. №1072-Р.
3. Надежность технических систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 606 с.
4. Научный отчет: Исследование и разработка методов оценки и прогнозирования структурной надежности мультисервисных сетей связи (для компании ОАО «ЦентрТелеком») ВИМА. 468 363.006, Инв. № 6787, ОАО «НИИ супер ЭВМ», 2006 г.
5. Руководящий документ Министерства связи РФ РД.45.128-2000. Сети и службы передачи данных – 65с.
6. Тютин Н.Н. Возможные методы оценки прогнозирования и надежности мультисервисных систем связи / Н.Н. Тютин, В.Н. Цуников. – М.: Вестник МАРТИТ. – 2006. – №13 (35). – С. 117-125.
7. Федеральный закон РФ от 20.01.1995 г. «Закон о связи».
8. Филин Б.П. Методы анализа структурной надежности сетей связи / Б.П. Филин. – М.: Радио и связь, 1988.

METHODS OF STRUCTURAL TRANSFORMATIONS WITH USE OF MEANS OF MATHEMATICAL LOGIC.

N.N. Tjutin

The brief contents: in materials of article some approaches to an estimation of efficiency and reliability of multiservice systems of communication (MSC) are considered in view of features of their construction of functioning. The examples of use of means of mathematical logic (Boolean's algebra) allowing are given to formalize conditions of serviceability of complex structures and to receive the analytical formulas for account of reliability.

Keywords: multiservice systems, vehicle of mathematical logic (boole algebra), method of direct surplus of the states, method of structural transformations, structural reliability of the multiservice system.