УДК 519.27

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ТРАЕКТОРИЙ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Ю.П. Вирченко**, *Н.Н. Витохина

Белгородский государственный университет

В работе рассматривается задача о вычислении плотности распределения случайных значений аддитивного функционала от траекторий стандартного винеровского процесса. Получена формула для плотности в виде равномерно сходящегося на каждом отрезке, включающем x = 0, разложения. При этом сходимость является экспоненциально быстрой.

1. В работе рассматривается задача о вычислении плотности распределения вероятностей случайной величины $J_T[w]$, где

$$J[u] = \int_0^T |u(t)|^2 dt \tag{1}$$

– функционал в пространстве $\mathbf{L}_2[0,T]$. Пусть $w(t); t \in [0,T], T > 0$ – траектории стандартного винеровского процесса на [0, T] с математическим ожиданием $\mathbf{E}\, w^2(t) = t$. Эта задача, как и другие задачи о вычислении плотностей распределений вероятностей случайных значений аддитивных квадратичных функционалов от траекторий гауссовских случайных процессов, является классической. Для гауссовских процессов принципиально решается задача о вычислении характеристических функций для случайных величин такого рода. На основе этого метода к настоящему времени получено большое число решений конкретных задач, имеющих различные приложения (см. [1], [2]). Например, первый такого рода результат для простейшего стационарного гауссовского процесса (процесса Орнштейна-Уленбека) был получен ещё в [3]. Однако задача восстановления плотностей f распределения на основе получающихся формул для характеристических функций остается все еще мало исследованной в смысле получения приближений с гарантированной точностью, пригодных для использования во всем диапазоне изменения случайной величины. Обычный подход к решению этой задачи (см., например, [4]) приводит к приближённым формулам для плотностей распределения $f(x)$, $x \in [0,\infty)$, пригодным для оценки вероятностей больших уклонений, т.е. в асимптотической области $x \to \infty$ изменения значений случайной величины.

* E-mail: virch@bsu.edu.ru

Здесь нами исследуется задача вычисления последовательных аппроксимаций плотности распределения вероятностей $f(x)$ для случайных значений функционала (1) в любом отрезке $[0, M]$, $\infty > M > 0$.

2. Так как траектории стандартного винеровского процесса $\{w(t);\ t \geq 0\}$, $\mathbf{E}w^2(t) = t$ с вероятностью 1 непрерывны, то почти наверное для каждой из них определена случайная величина $J_T[w]$.

Мы будем исходить [1] из следующей формулы для производящей функции случайной величины (1)

$$Q_T(\lambda) = \mathbf{E}\exp(-\lambda J_T[w]) = \left(ch\left(\lambda^{1/2}T\right)\right)^{-1/2},$$

$Q_T(\lambda) = Q_1(\lambda T^2)$.

Плотность распределения $f(x)$ случайной величины $J_T[w]$ определяется обратным преобразованием Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{\lambda x}\left(ch\left(\lambda^{1/2}T\right)\right)^{-1/2} d\lambda, \qquad (2)$$

где $c > 0$, и разрез в плоскости λ произведен по отрицательной части действительной оси.

Введем плотность $g(x) = T^2 f(T^2 x)$ при $x \in [0, \infty)$, для которой заменой переменной интегрирования в (2) получаем

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{\lambda x}\left(ch\left(\lambda^{1/2}\right)\right)^{-1/2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi i}\int_{-i\infty+c}^{i\infty+c}\left(\frac{\exp\left(2\lambda x - \lambda^{1/2}\right)}{1 + \exp\left(-2\lambda^{-1/2}\right)}\right)^{1/2} d\lambda. \qquad (3)$$

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. Плотность g(x) представляется следующим абсолютно сходящимся рядом

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}\left(l + \frac{1}{4}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\left(l + \frac{1}{4}\right)^2\right), \qquad (4)$$

для которого N-й остаток

$$g_N(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\sum_{l=N}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}\left(l + \frac{1}{4}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\left(l + \frac{1}{4}\right)^2\right)$$

оценивается величиной

$$|g(x) - g_{N-1}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\frac{(2N)!}{4^N(N!)^2}\left(N + \frac{1}{4}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\left(N + \frac{1}{4}\right)^2\right). \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в (3) c=0, так как имеющиеся особенности лежат на отрицательной полуоси. Деформируем контур интегрирования в контур C, состоящий из последовательного прохождения путей $\{s - i\varepsilon;\ s \in (-\infty; 0]\}$, $\{\varepsilon e^{is};\ s \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\}$,

$\{-s+i\varepsilon;\ s\in(0;+\infty]\}$. Такая деформация возможна, т.к.

$$\left|ch\left(\lambda^{1/2}\right)\right|^2=ch\left(\lambda^{1/2}\right)ch\left(\left(\lambda^*\right)^{1/2}\right)=\frac{1}{2}\left(ch\left(2\operatorname{Re}\left(\lambda^{1/2}\right)\right)+ch\left(2i\operatorname{Im}\left(\lambda^{1/2}\right)\right)\right)>$$

$$>\frac{1}{2}\left(ch\left(2R^{1/2}\cos(\varphi/2)\right)-1\right)=sh^2\left(R^{1/2}\cos(\varphi/2)\right),$$

где $\lambda=Re^{i\varphi}$ и на дуге окружности $\left\{\lambda;\varphi\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)\right\}$ выполняется оценка для модуля подынтегрального выражения в (3),

$$\left|\frac{\exp(\lambda x)}{\left(ch\left(\lambda^{1/2}\right)\right)^{1/2}}\right|\leq\frac{\exp(xR\cos\varphi)}{\left(sh\left(R^{1/2}\cos(\varphi/2)\right)\right)^{1/2}},$$

гарантирующая при $x>0$, $R^{1/2}\cos(\varphi/2)<\varepsilon$ выполнение условия Жордана на этой дуге при сколь угодно малом $\varepsilon>0$, т.к. $\cos\varphi<0$. То же самое имеет место для дуги $\left\{\lambda;\varphi\in\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

В (3) произведем замену переменной интегрирования $\lambda^{1/2}=q$, тогда $\lambda=q^2, d\lambda=2qdq$. При этом контур C в плоскости λ после перехода к пределу $\varepsilon\to 0$ превратиться в прямую $\{q=is,\ s\in \mathrm{R}\}$ в плоскости q. После этих преобразований имеем

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}q\left(\frac{\exp\left(2q^2x-q\right)}{1+\exp(-2q)}\right)^{1/2}dq.$$

Перейдем к интегрированию по переменной s, $q=is$, $dq=ids$. Получаем

$$g(x)=i\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}s\left(\frac{\exp\left(-2xs^2-is\right)}{1+\exp(-2is)}\right)^{1/2}ds \tag{6}$$

В последнем интеграле произведем сдвиг $s+i(4x)^{-1}\Rightarrow s$ переменной интегрирования, в результате чего получим

$$g(x)=i\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}s\left(\frac{\exp\left(-2x\left(s-i(4x)^{-1}\right)^2-(8x)^{-1}\right)}{1+\exp\left(-2i\left(s+i(4x)^{-1}\right)-(2x)^{-1}\right)}\right)^{1/2}ds=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp\left(-(16x)^{-1}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(is+(4x)^{-1}\right)\left(\frac{\exp\left(-2xs^2\right)}{1+\exp(-1/(2x))}\exp(-2is)\right)^{1/2}ds. \tag{7}$$

Знаменатель подынтегрального выражения в (7) разложим в сходящийся при любом $x>0$ и любом $s\in\mathrm{R}$ ряд

$$\left(1+\exp\left(-\frac{1}{2x}\right)\exp(-2is)\right)^{-1/2}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l-1)!!}{2^l l!}\exp\left(-\frac{l}{2x}\right)\exp(-2ils)$$

Его сходимость равномерна в любой полосе $[0, M]\times\mathrm{R}$ плоскости (x, s), $M>0$.

Подставляя последнее выражение в (7), получим

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp\left(-(16x)^{-1}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(is+(4x)^{-1}\right)\exp\left(-xs^2\right)\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}\exp(-2ils)\exp\left(-\frac{l}{2x}\right)ds=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp\left(-(16x)^{-1}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(is+(4x)^{-1}\right)\exp\left(-xs^2\right)\times$$

$$\times\exp\left(-x\left(s+\frac{il}{x}\right)^2-\frac{l(l+1/2)}{x}\right)ds.$$

Перестановка операторов суммирования и интегрирования основана на равномерной сходимости ряда по s при любом фиксированном x.

В каждом слагаемом суммы произведем сдвиг $s+\frac{il}{x}\Rightarrow s$ по переменной интегрирования, получим

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp\left(-(16x)^{-1}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}\left(is+\frac{l+1/4}{x}\right)\exp\left(-xs^2-\frac{l(l+1/2)}{x}\right)ds. \quad (8)$$

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов в соответствии с выражением, стоящим в предэкспоненциальной скобке. Интеграл, соответствующий слагаемому is, обращается в нуль

$$i\int_{-\infty}^{+\infty}s\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}\exp\left(-xs^2\right)\exp\left(-\frac{l(l+1/2)}{x}\right)ds=0$$

ввиду нечетности подынтегральной функции. Интеграл, соответствующий слагаемому $\frac{l+1/4}{x}$, преобразуется следующим образом

$$\frac{1}{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-xs^2\right)ds\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}\left(l+\frac{1}{4}\right)\exp\left(-\frac{l(l+1/2)}{x}\right).$$

Подстановка этого выражения в (8) с учетом значения интеграла Пуассона приводит к формуле (4).

Так как ряд (4) знакопеременный, то остаток ряда g_N не превосходит первого слагаемого из числа отброшенных. Следовательно, имеет место оценка (5).

$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l a_l h_l(x),$$

где $a_l=\frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}\left(l+\frac{1}{4}\right)$, $h_l(x)=x^{-3/2}\exp\left(-\frac{(l+1/4)^2}{x}\right)$, и найдем максимум по x функции $h_N(x)$. Приравнивая к нулю производную по x этой функции

$$h'_N(x)=\frac{1}{x^2}h_N(x)\left(\left(N+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3x}{2}\right)=0,$$

находим решение x_* этого уравнения – точку единственного максимума функции $h_N(x)$

$$x_*=\frac{2}{3}\left(N+\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$h_N(x_*)=\left(\frac{3}{2e}\right)^{3/2}\left(N+\frac{1}{4}\right)^{-3}.$$

Следовательно, оценка N-го остатка

$$|g(x)-g_{N-1}(x)|\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a_N\,h_N(x_*)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi e}}\left(\frac{(2N)!}{4^N(N!)^2}\right)\left(N+\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Оценим сверху коэффициент a_N, сделав полученную оценку более прозрачной,

$$a_N=\frac{(2N-1)!!}{2^N N!}=\prod_{l=1}^{N}\left(\frac{2l-1}{2l}\right)=\prod_{l=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2l}\right)=\exp\left(\sum_{l=1}^{N}\ln\left(1-\frac{1}{2l}\right)\right)<$$

$$<\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{l}\right)<\exp\left(-\frac{1}{2}(1+\ln N)\right)=\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{N}},$$

ввиду справедливости неравенств $\ln(1-x)<x$ при $x>0$ и

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{l}>1+\int_1^N\frac{dx}{x}=1+\ln N.$$

Тогда, так как $\sqrt{\frac{3}{\pi}}<1$, то имеет место (9).

3. Оценим теперь точность аппроксимаций вероятности $\Pr\{J_T[w]>c\}$, получаемых на основе функций g_N, $N=1,.2,\ldots$ Так как $f(x)=T^{-2}g(T^{-2}x)$, то

$$\Pr\{J_T[w]>c\}=1-T^{-2}\int_0^c g(T^{-2}x)dx\equiv 1-R(c),$$

где $R(c)=\int_0^{c/T^2}g(x)dx.$

Обозначив правую часть неравенства (5) посредством $Q_N(x)$, имеем

$$|g(x)-g_{N-1}(x)|\le Q_N(x).$$

Определим теперь функцию

$$P_N(c)\equiv 1-R_N(c),\ R_N(c)=\int_0^{c/T^2}g_{N-1}(x)dx.$$

Нашей задачей является получение верхней оценки для уклонения $|\Pr\{J_T[w]>c\}-P_N(c)|$. Из неравенства (5) следует, что $-Q_N(x)\le g(x)-g_{N-1}(x)\le Q_N(x)$. Интегрируя в пределах от 0 до c/T^2, получаем

$$-\int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx \le R(c)-\int_0^{c/T^2} g_{N-1}(x)dx \le \int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx .$$

Следовательно,

$$|R(c)-R_N(c)| = \left|\int_0^{c/T^2}(g(x)-g_{N-1}(x))dx\right| \le \int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx,$$

что дает искомую оценку

$$|\Pr\{J_T[w]>c\}-P_N(c)| = |R(c)-R_N(c)| \le \int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx . \tag{10}$$

Наконец, для того, чтобы сделать оценку (10) явной, вычислим интеграл, стоящий в правой части,

$$\int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx = a_N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{c/T^2}\exp\left(\frac{(N+1/4)^2}{x}\right)\frac{dx}{x^{3/2}} .$$

Замена переменной интегрирования $y=x^{-1/2}, dy=-\dfrac{dx}{2x^{3/2}}$ приводит к формуле

$$\int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{a_N}{N+1/4}\int_{\frac{T(N+1/4)}{\sqrt{c}}}^{\infty}\exp(-y^2)dy = \frac{\sqrt{2}a_N}{N+1/4}Erfc\left[\frac{T(N+1/4)}{c^{1/2}}\right].$$

Отсюда, используя $\mathrm{Erfc}(x)<1$, находим равномерную по параметрам c и T оценку

$$\int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx \le \sqrt{\frac{2}{eN^3}} .$$

Более тонкая оценка, учитывающая величину параметров c и T, получается использованием стандартного неравенства $\mathrm{Erfc}(x)<\dfrac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}x}$,

$$\int_0^{c/T^2} Q_N(x)dx \le \sqrt{\frac{2c}{\pi}}\frac{a_N}{T(N+1/4)^2}\exp\left(-\frac{T^2(N+1/4)^2}{c}\right) <$$

$$< \sqrt{\frac{2c}{\pi e}}\left(TN^{5/2}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{(TN)^2}{c}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазманишвили, А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / А.С. Мазманишвили. К.: Наук. думка, 1987.

2. Arato M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach*. Springer-Verlag. Berlin. 1982. (пер. на рус. яз. М. Арато *Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами*. М.: Наука, 1989.)

3. Ziegert A.J.F. *A systematic approach to a class problems in the theory of noise and other random phenomena. part II, examples* // Trans. IRE. 1957. IT-3. P. 38-44.

4 Золотарев, В.М. Об одной вероятностной задаче / В.М. Золотарев // Теория вероятностей и ее применение. 1961. Т. 6, № 2. С. 219-222.

PROBABILITY DISTRIBUTION DENSITY OF RANDOM VALUES CONNECTED WITH THE QUADRATIC FUNCTIONAL OF WIENER PROCESS TRAJECTORIES

Yu.P. Virchenko, N.N. Vitokhina

Belgorod State University

The problem of probability distribution density calculation connected with random values of the quadratic functional on standard Wiener process trajectories is considered in the paper. The formula which represents the density in the form of expansion uniformly converged in each finite interval including the point **x = 0**. This convergence is exponential.