

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕГО ПЕРЕМЕННОГО ПОЛЯ НА ДИНАМИКУ ОДНООСНЫХ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

М.Ю. Ковалевский<sup>1)</sup>, Л.В. Логвинова<sup>1)</sup>, В.Т. Мацкевич<sup>2)</sup>, А.Н. Швец<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14,

<sup>2)</sup> ННЦ Харьковский физико-технический институт, 61108, г. Харьков, ул. Академическая, 1

<sup>3)</sup> Харьковский национальный университет им. Каразина, 61077, Харьков, Свободы 4  
*mikov@kharkov.ua*

Получены динамические уравнения одноосных нематических жидких кристаллов с молекулами стержне- и дископодобной формы во внешнем переменном поле. Вычислены низкочастотные асимптотики двухвременных функций Грина одноосных нематиков. Выяснено, что их структура существенно зависит от характера пространственной анизотропии рассматриваемой конденсированной среды и формы молекул. Исследованы поляризационные особенности акустических волн одноосных нематиков. Показано, что первый и второй звуки являются суперпозицией продольной и поперечной компонент. Установлено отношение амплитуд этих компонент как функции угла между волновым вектором и осью анизотропии.

**Ключевые слова:** гамильтонов подход, скобки Пуассона, одноосный нематик, низкочастотные асимптотики функций Грина, поляризации.

### Введение

В настоящее время большой интерес вызывает изучение жидкокристаллических сред. Такие конденсированные состояния обладают свойством жидкости – текучестью и анизотропией – свойством, характерным для твердого тела [1-4]. Общими их особенностями являются наличие внутренней структуры мезоскопических или наноскопических размеров, которые проявляются на макроуровне в виде определенных физических явлений и процессов. Основным признаком жидких кристаллов является наличие макроскопического ориентационного упорядочения, обусловленного анизотропией молекул. Физической величиной, которая отражает эту особенность для одноосных нематических жидких кристаллов, является единичный вектор пространственной анизотропии (директор) [5-9]. Эта величина становится дополнительным макроскопическим параметром, существенным при формулировке второго начала термодинамики и получении уравнений динамики. Ранее рассматривались также более общие схемы динамического поведения жидких кристаллов, которые учитывают вид параметра порядка [10-12] и форму структурных элементов среды [13-15].

Математической основой нашего исследования выбран гамильтонов подход, являющийся эффективным методом получения и исследования нелинейных динамических уравнений, описывающих явления переноса в различных конденсированных средах. Ключевым в таком подходе является установление явного вида скобок Пуассона для всего набора параметров сокращенного описания. Следует иметь в виду, что, в отличие от параметров сокращенного описания, связанных со свойствами симметрии гамильтониана, для которых скобки Пуассона хорошо известны (см. [2,8]), скобки Пуассона для дополнительных динамических параметров, отражающих особенности формы и размера молекул, имеют нетривиальную структуру и их нахождение представляет собой основную проблему. Для ее решения использована идея представления всех дополнительных параметров сокращенного описания в терминах тензора дисторсии [8], которая была ранее реализована в этих работах для одноосных нематиков без учета деформации молекул.

### 1. Гамильтонова механика сплошных сред

В соответствии с общим подходом механики сплошных сред структура лагранжиана произвольной физической системы представима в виде [8]:

$$L = L_k(\varphi, \dot{\varphi}) - H(\varphi) = \int d^3x F_\alpha(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}')) \dot{\varphi}_\alpha(\mathbf{x}) - H(\varphi),$$

где  $L_k(\varphi, \dot{\varphi})$  – кинематическая часть лагранжиана,  $H(\varphi) = \int d^3x \varepsilon(\mathbf{x}, \varphi)$  – гамильтониан системы. Плотность энергии среды  $\varepsilon(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}'))$  и величины  $F_\alpha(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}'))$  – некоторые определенные функционалы динамических переменных  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ . Величины  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$  макроскопически полно задают термодинамику и описывают динамические процессы неравновесных состояний. Из принципа стационарного действия следуют уравнения движения для величин  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ :

$$\dot{\varphi}_\alpha(\mathbf{x}) = \int d^3x' J_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \varphi) \frac{\delta H(\varphi)}{\delta \varphi_\beta(\mathbf{x}')} \equiv \{\varphi_\alpha(\mathbf{x}), H\}. \quad (1.1)$$

Матрица  $J_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \varphi)$  определяется равенством

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \varphi) \equiv \frac{\delta F_\beta(\mathbf{x}'; \varphi)}{\delta \varphi_\alpha(\mathbf{x})} - \frac{\delta F_\alpha(\mathbf{x}; \varphi)}{\delta \varphi_\beta(\mathbf{x}')} \quad (1.2)$$

и связана со скобкой Пуассона величин  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$  соотношением

$$\{\varphi_\alpha(\mathbf{x}), \varphi_\beta(\mathbf{x}')\} = J_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \varphi).$$

Учитывая определение (1.2), эти скобки антисимметричны относительно перестановки  $\alpha \leftrightarrow \beta$ ,  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$  и удовлетворяют тождествам Лейбница и Якоби

$$\begin{aligned} \{\varphi_\alpha(\mathbf{x}), \varphi_\beta(\mathbf{x}')\} &= -\{\varphi_\beta(\mathbf{x}'), \varphi_\alpha(\mathbf{x})\}, \\ \{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\varphi_\beta(\mathbf{x}'), \varphi_\gamma(\mathbf{x}'')\} &= \varphi_\alpha(\mathbf{x})\{\varphi_\beta(\mathbf{x}'), \varphi_\gamma(\mathbf{x}'')\} + \varphi_\beta(\mathbf{x}')\{\varphi_\alpha(\mathbf{x}), \varphi_\gamma(\mathbf{x}'')\}, \\ \{\varphi_\alpha(\mathbf{x}), \{\varphi_\beta(\mathbf{x}'), \varphi_\gamma(\mathbf{x}'')\}\} &+ \{\varphi_\beta(\mathbf{x}'), \{\varphi_\gamma(\mathbf{x}''), \varphi_\alpha(\mathbf{x})\}\} + \{\varphi_\gamma(\mathbf{x}''), \{\varphi_\alpha(\mathbf{x}), \varphi_\beta(\mathbf{x}')\}\} = 0. \end{aligned}$$

Определим скобки Пуассона произвольных функционалов  $A(\varphi), B(\varphi)$  равенством

$$\{A, B\} \equiv \int d^3x \int d^3x' \frac{\delta A}{\delta \varphi_\alpha(\mathbf{x})} J_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta B}{\delta \varphi_\beta(\mathbf{x}')}.$$

В набор параметров сокращенного описания для классических сплошных сред входят плотности импульса  $\pi_k(\mathbf{x})$ , энтропии  $\sigma(\mathbf{x})$  и вектор смещения  $u_i(\mathbf{x})$ :  $\varphi_\alpha \equiv \{\pi_k(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), u_i(\mathbf{x})\}$ . Вектор смещения  $u_i(\mathbf{x})$  связывает лагранжеву координату  $\xi_k$  с эйлеровой координатой  $x_k$ :  $x_k \equiv \xi_k + u_k(\mathbf{x})$ . Тензор дисторсии определим равенством

$$b_{ki}(\mathbf{x}) = \nabla_i \xi_k(\mathbf{x}) \equiv \delta_{ik} - \nabla_i u_k(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера. Тензор дисторсии  $b_{ki}(\mathbf{x})$  играет фундаментальную роль при описании деформаций сплошных сред. Он задает ориентационные и трансляционные состояния равновесия, устанавливает основные геометрические характеристики среды и определяет группу движений неравновесного состояния для твердого тела, жидкостей и жидких кристаллов. Введем в рассмотрение плотность массы вещества сплошной среды  $\rho(\mathbf{x}) = m n(\mathbf{x})$ , где  $m$  – масса частицы и  $n(\mathbf{x})$  – плотность числа частиц. Плотность массы вещества  $\rho(\mathbf{x})$  связана с тензором дисторсии  $b_{ki}(\mathbf{x})$  равенством:

$$\rho(\mathbf{x}) = \underline{\rho} \det \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$



где  $\rho$  – плотность массы вещества в недеформированном состоянии. Известно, что нетривиальные скобки Пуассона для плотностей импульса, энтропии и вектора смещения имеют вид [2,8]:

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}')\} &= -\sigma(\mathbf{x})\nabla_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), & \{u_i(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{x}')\} &= b_{ik}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{x}')\} &= \pi_j(\mathbf{x})\nabla'_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \pi_i(\mathbf{x}')\nabla_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величина  $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$  представляет собой  $\delta$ -функцию Дирака. Следствием этих формул и определений (1.3), (1.4) являются скобки Пуассона для плотности импульса с тензором дисторсии и плотностью числа частиц

$$\{\pi_i(\mathbf{x}), b_{ij}(\mathbf{x}')\} = -b_{ij}(\mathbf{x})\nabla'_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad \{\pi_i(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}')\} = \rho(\mathbf{x})\nabla'_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (1.6)$$

Выписанные скобки Пуассона (1.5), (1.6) служат основой построения нелинейных уравнений динамики классических сплошных сред. Различные особенности динамического описания жидких кристаллов в рамках гамильтонова подхода проявляются в разной зависимости плотности энергии от тензора дисторсии.

Рассмотрим бесструктурную конденсированную среду, которая описывается пятью аддитивными интегралами движения  $\gamma_a \equiv H, P_k, N$ ,  $\{H, \gamma_a\} = 0$ . Здесь  $P_k = \int d^3x \pi_k(\mathbf{x})$  – импульс системы,  $N = \int d^3x n(\mathbf{x})$  – число частиц системы. Свойство инвариантности гамильтониана сплошной среды относительно поворотов в пространстве имеет вид

$$\{L_i, \varepsilon(\mathbf{x})\} = \varepsilon_{ik} x_k \nabla_i \varepsilon(\mathbf{x}), \quad L_i = \int d^3x \varepsilon_{ik} x_k \pi_i(\mathbf{x}), \quad (1.7)$$

где  $L_i$  – орбитальный момент. Для плотности энергии также справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \{P_i, \varepsilon(\mathbf{x})\} &= \nabla_i \varepsilon(\mathbf{x}), & P_i &= \int d^3x \pi_i(\mathbf{x}), \\ \{M, \varepsilon(\mathbf{x})\} &= 0, & M &= \int d^3x \rho(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

отражающие фазовую и трансляционную инвариантность гамильтониана рассматриваемой конденсированной среды. Свойства симметрии плотности энергии позволяют получить дифференциальные уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x}) = -\nabla_k \zeta_{ak}(\mathbf{x}), \quad (1.9)$$

здесь  $\zeta_a(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{x}), n(\mathbf{x})$  – плотности аддитивных интегралов движения. В правые стороны уравнений (1.9) входят величины  $\zeta_{ak}(\mathbf{x}) \equiv q_k(\mathbf{x}), t_{ik}(\mathbf{x}), j_k(\mathbf{x})$ , являющиеся плотностями потоков аддитивных интегралов движения:  $\zeta_{0k}(\mathbf{x}) \equiv q_k(\mathbf{x})$  – плотность потока энергии,  $\zeta_{ik}(\mathbf{x}) \equiv t_{ik}(\mathbf{x})$  – плотность потока импульса,  $\zeta_{4k}(\mathbf{x}) \equiv j_k(\mathbf{x})$  – плотность потока числа частиц. В терминах скобок Пуассона от плотностей аддитивных интегралов движения в работе известны выражения для этих плотностей потоков [8]

$$\begin{aligned} j_k(\mathbf{x}) &= \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{n(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}')\}, \\ t_{ik}(\mathbf{x}) &= -\varepsilon(\mathbf{x})\delta_{ik} + \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{\pi_i(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}')\}, \\ q_k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{\varepsilon(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}')\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Далее мы всюду полагаем, что гамильтониан системы  $H = H_0 + V(\sigma(\mathbf{x}'), \rho(\mathbf{x}'), b_y(\mathbf{x}'))$  обладает свойством галилеевской инвариантности и имеет вид

$$H_0 = \int d^3x \frac{\pi^2(\mathbf{x})}{2\rho(\mathbf{x})}, \quad V = \int d^3x' \Phi(\rho(\mathbf{x}'), \sigma(\mathbf{x}'), b_y(\mathbf{x}')).$$

Для галилеево-инвариантных сред плотность потока массы совпадает с плотностью потока импульса  $m j_k(\mathbf{x}) = \pi_k(\mathbf{x})$ .

В случае бесструктурной конденсированной среды гамильтониан является функционалом набора гидродинамических параметров, к которым относятся плотность энтропии, плотность импульса и плотность массы  $H = H(\sigma(\mathbf{x}'), \pi_i(\mathbf{x}'), \rho(\mathbf{x}'))$ . Отсюда следует, что для дифференциала плотности энергии справедливо соотношение

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_i} d\pi_i + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\rho \equiv T d\sigma + v_k d\pi_k + \mu d\rho.$$

Здесь  $T$  – температура,  $v_k$  – макроскопическая скорость,  $\mu$  – химический потенциал, которые связаны с термодинамическими силами  $Y_a$  равенствами

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = \frac{1}{Y_0} \equiv T, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} = -\frac{Y_k}{Y_0} \equiv v_k, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = -\frac{Y_s}{Y_0} \equiv \mu.$$

Введем в рассмотрение плотность термодинамического потенциала  $\omega(Y_a) \equiv Y_a \zeta_a - \sigma$ . Термодинамические силы  $Y_a$  связаны с плотностями аддитивных интегралов движения соотношениями

$$\partial \omega / \partial Y_a = \zeta_a. \tag{1.11}$$

Используя представление плотностей потоков (1.10) и формулы (1.5), (1.6), найдем выражения плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах термодинамического потенциала

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a} \left( \frac{\omega Y_k}{Y_0} \right). \tag{1.12}$$

Соотношения (1.11) и (1.12) показывают, что плотности аддитивных интегралов движения и соответствующие им потоки представлены в терминах плотности термодинамического потенциала и тем самым замыкают уравнения (1.9), приводя к уравнениям идеальной гидродинамики Эйлера. Линеаризация уравнений (1.9)(1.12) ведет к акустическому спектру

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 c^2, \quad c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s}, \tag{1.13}$$

здесь  $\mathbf{k}$  – волновой вектор,  $c$  – скорость звука,  $P$  – давление и  $s \equiv \sigma / \rho$  – плотность энтропии единицы массы. Этот спектр линеен и изотропен.



## 2. Динамика одноосных нематиков с молекулами стержнеподобной формы во внешнем переменном поле

Значительная часть жидких кристаллов состоит из молекул стержнеподобной формы. В нематической фазе жидких кристаллов наряду с динамическими переменными, описывающими состояние изотропной жидкости – плотностями массы, импульса и энтропии, вводят в рассмотрение дополнительный параметр – единичный вектор пространственной анизотропии (директор)  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , связанный с нарушением вращательной симметрии. В работе [8] показано, что этот вектор анизотропии может быть представлен в терминах тензора дисторсии  $b_{ij}(\mathbf{x})$ . При этом существуют две возможности. Одна из них соответствует нематику с молекулами стержнеобразной формы, другая – нематику с дискообразными молекулами. Рассмотрим частицы среды, состоящие из молекул стержнеобразной формы (нематики каламитного типа). В недеформированном состоянии можно задать некоторое семейство линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением стержней. Пусть  $\xi_i = \xi_i(\alpha)$  – параметрические уравнения одной из линий этого семейства. Направление стержней в каждой точке характеризуется вектором с координатами  $l_i \equiv d\xi_i/d\alpha$ . Этот вектор описывает ориентационный и конформационный порядок недеформированного жидкого кристалла и имеет смысл лагранжевой переменной. Модуль этого вектора  $l \equiv \sqrt{l_i^2}$  задает длину стержнеподобной молекулы в недеформированном состоянии. Единичный вектор  $\underline{n}_i \equiv l_i/l$  определяет направление оси анизотропии молекулы в недеформированном состоянии. При деформации среды линии семейства также деформируются, происходит изменение направления оси анизотропии и длины стержня. Пусть  $x_i = x_i(\alpha)$  – новые параметрические уравнения уже рассмотренной линии семейства после деформации, которые характеризуются вектором  $l_i(\mathbf{x}) = dx_i/d\alpha$ . Легко видеть, что векторы  $l_i$  и  $l_i(\mathbf{x})$  связаны соотношением

$$l_i(\mathbf{x}) = b_{ij}^{-1}(\mathbf{x})l_j. \quad (2.1)$$

Введем единичный вектор и модуль деформированного вектора  $l_i(\mathbf{x})$  для произвольного деформированного состояния

$$n_i(\mathbf{x}) = l_i(\mathbf{x})/l(\mathbf{x}), \quad l(\mathbf{x}) \equiv (l_i^2(\mathbf{x}))^{1/2}. \quad (2.2)$$

Используя скобку Пуассона (1.8), легко найти скобки Пуассона для величин  $\pi_i(\mathbf{x})$  и  $n_j(\mathbf{x}')$ :

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), n_j(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_k n_j(\mathbf{x}) - \delta_{ij}^+(\mathbf{n}(\mathbf{x}')) n_k(\mathbf{x}') \nabla_k' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \delta_{ij}^+(\mathbf{n}(\mathbf{x})) &\equiv \delta_{ij} - n_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В изучаемой среде возможно введение упругой (конформационной) степени свободы путем включения в набор параметров сокращенного описания дополнительной переменной – модуля вектора  $l(\mathbf{x}) = |\mathbf{l}(\mathbf{x})|$  (2.2). В процессе эволюции неравновесного состояния вследствие упругих деформаций длина структурного элемента изменяется. В соответствии с этим определением и учитывая связь деформированного и недеформированного векторов (2.1), получим скобку Пуассона для величин  $\pi_i(\mathbf{x})$  и  $l(\mathbf{x}')$ :

$$\{\pi_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \delta_{ij}^+(\mathbf{n}(\mathbf{x}')) \nabla_j' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.4)$$

Скобки Пуассона (1.5), (1.6) совместно с (2.3), (2.4) образуют замкнутую алгебру динамических переменных нематика со стержнеподобными молекулами при наличии

конформационной степени свободы и позволяют получить нелинейные уравнения динамики в адиабатическом приближении. В соответствии с введенным набором гидродинамических параметров, плотность энергии является функцией параметров  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\rho(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}))$ . В рассматриваемой конденсированной среде плотность термодинамического потенциала  $\omega = \omega(Y, \mathbf{n}, \nabla \mathbf{n}, l)$  зависит теперь также от оси анизотропии и конформационного параметра. Поэтому

$$d\omega = \zeta_a dY_a + \frac{\partial \omega}{\partial n_i} dn_i + \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_i} d\nabla_j n_i + \frac{\partial \omega}{\partial l} dl. \quad (2.5)$$

Обратимся теперь к нахождению плотностей потоков аддитивных интегралов движения. Можно показать, что плотности потоков аддитивных интегралов движения приобретут вид в терминах термодинамического потенциала:

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k n_j} \nabla_j n_i - n_k \delta_{ik}^+(\mathbf{n}) \left( \frac{\partial \omega}{\partial n_k} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_k} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial l} l \delta_k^+(\mathbf{n}) \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0}. \quad (2.6)$$

В этой формуле первое слагаемое в правой части представляет собой вклад в плотность потока аддитивных интегралов движения, который аналогичен плотности потока в изотропной фазе конденсированной среды. Второе слагаемое в правой части представляет собой вклад в плотность потока аддитивных интегралов движения, обусловленный деформацией оси анизотропии и длины молекулы. Формулы (2.5), (2.6) позволяют сформулировать замкнутые уравнения гидродинамического типа для рассматриваемой конденсированной среды. Для различного рода приложений часто удобно использовать модельное выражение плотности энергии взаимодействия в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})) + \varepsilon_f(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})),$$

где  $\varepsilon_f(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} K_{ijkl}(\rho, \sigma) \nabla_j n_i \nabla_l n_k + \frac{1}{2} M(\rho, \sigma) (l(\mathbf{x}) - l)^2$  (2.7)

– энергия Франка и  $K_{ijkl}$  – тензор модулей упругости, который, в силу свойств симметрии плотности энергии  $\varepsilon_f(\mathbf{n}) = \varepsilon_f(-\mathbf{n})$ , упрощается и приобретает вид [9]

$K_{ijkl}(\rho, \sigma) \equiv K_1(\rho, \sigma) \delta_{ij}^+(\mathbf{n}) \delta_{kl}^+(\mathbf{n}) + K_2(\rho, \sigma) [\delta_{ji}^+(\mathbf{n}) \delta_{ik}^+(\mathbf{n}) - \delta_{jk}^+(\mathbf{n}) \delta_{il}^+(\mathbf{n})] + K_3(\rho, \sigma) n_j n_l \delta_{ik}^+(\mathbf{n})$ ,  
здесь  $K_1(\rho, \sigma), K_2(\rho, \sigma), K_3(\rho, \sigma)$  – модули упругости Франка, которые являются функциями плотности массы и энтропии. Величина  $M(\rho, \sigma)$  является модулем упругости, связанным с деформацией длины стержнеподобной молекулы и  $l$  – длина молекулы в состоянии равновесия. Для устойчивости однородного состояния равновесия требуется, чтобы  $\varepsilon_f > 0$ . Отсюда получим соотношения  $K_1 > 0, K_2 > 0, K_3 > 0, M > 0$ .

Обращаясь к формулам (1.1), (2.3), найдем уравнение движения для единичного вектора  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$

$$\dot{n}_j(\mathbf{x}) = -v_i(\mathbf{x}) \nabla_i n_j(\mathbf{x}) + \delta_{ij}^+(\mathbf{n}(\mathbf{x})) n_k(\mathbf{x}) \nabla_k v_i(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Аналогичным образом получим уравнение движения для конформационной степени свободы  $l(\mathbf{x})$

$$\dot{l}(\mathbf{x}) = -v_i(\mathbf{x}) \nabla_i l(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x}) \delta_{ij}^+(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \nabla_j v_i(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

Формулы (1.9), (2.6), (2.8), (2.9) представляют собой полный набор уравнений идеальной гидродинамики одноосного нематика, состоящего из стержнеподобных молекул с учетом деформаций молекулы среды.

Исследуем спектры коллективных возбуждений на основе полученных уравнений одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы. Полагаем, что состояние равновесия такой среды однородно и среда как целое покоится:  $\pi_k = v_k = 0$ . Кроме того, учтем, что выражение для энергии является четной функцией вектора  $\mathbf{n}$ :  $\varepsilon(\mathbf{n}) = \varepsilon(-\mathbf{n})$  и, в соответствии с видом энергии Франка (2.7), энергия в простейшем случае является квадратичной функцией по градиентам этого вектора. Учтем также, что в недеформированном состоянии при  $l = l_0$  реализуется минимум плотности энергии  $\varepsilon$ :  $(\partial\varepsilon/\partial l)_{l=l_0} = 0$ ,  $(\partial^2\varepsilon/\partial l^2)_{l=l_0} > 0$ . Кроме того, слагаемое  $\partial^2\varepsilon/\partial l\partial\mathbf{n}$  полагалось малым по сравнению с  $\partial^2\varepsilon/\partial l^2$ . В результате приходим к системе линейных и однородных уравнений

$$D_y(\mathbf{k}, \omega)\delta v_j(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (2.10)$$

$$D_y(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 \delta_{ij} - k_i k_j \frac{\partial P}{\partial \rho} - T_i(\mathbf{k})T_j(\mathbf{k}),$$

где величина  $T_i(\mathbf{k})$  определяется равенством:  $T_i(\mathbf{k}) \equiv c\sqrt{\lambda}\delta_{ij}^+(\mathbf{n})k_j$ , безразмерная величина  $\lambda \equiv \frac{l^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial l^2} > 0$  представляет собой отношение упругой энергии деформации стержня к кинетической энергии,  $c$  – скорость акустических волн в изотропной фазе (1.13). Уравнения (2.10) имеют нетривиальное решение при обращении в нуль детерминанта

$$\det\left[\omega^2 \delta_{ij} - k_i k_j c^2 - T_i(\mathbf{k})T_j(\mathbf{k})\right] = \omega^6 + \omega^4 I_1 + \omega^2 I_2 = 0. \quad (2.11)$$

Здесь

$$I_1 = -\mathbf{k}^2 c^2 - c^2 \lambda (\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{n})^2) < 0, \quad I_2 = c^2 \lambda (\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{n})^2) (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 > 0.$$

Таким образом, видим, что в одноосном нематике каламитного типа в бездиссипативном приближении существует решение  $\omega = 0$  и возможно распространение двух акустических ветвей колебаний  $\omega_{\pm}^2(\mathbf{k}) = c_{\pm}^2(\mathbf{k}/k)\mathbf{k}^2$ , соответствующих первому и второму звуку. Решение со знаком (+) отвечает ветви, аналогичной первому звуку, который имеется и в изотропной жидкости. Решение со знаком (-) представляет собой новую ветвь возбуждений, обусловленную учетом конформационного фактора жидкого кристалла – длины стержнеподобной молекулы. В сферической системе координат  $\mathbf{k}\mathbf{n} = k \cos \theta$ , где  $\theta$  – полярный угол, задающий направление волнового вектора  $\mathbf{k}$ . В терминах этого угла скорости  $c_{\pm}$  имеют вид [16]

$$c_{\pm}(\theta) = \frac{c}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \lambda \sin^2 \theta \pm \left[ (1 + \lambda \sin^2 \theta)^2 - \lambda \sin^2 2\theta \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (2.12)$$

Компьютерная графика раскрывает характер анизотропии спектров (2.12) (см. Рис. 2.1 (а, б), на которых фронт распространения волн приведен в виде среза вдоль оси пространственной анизотропии).

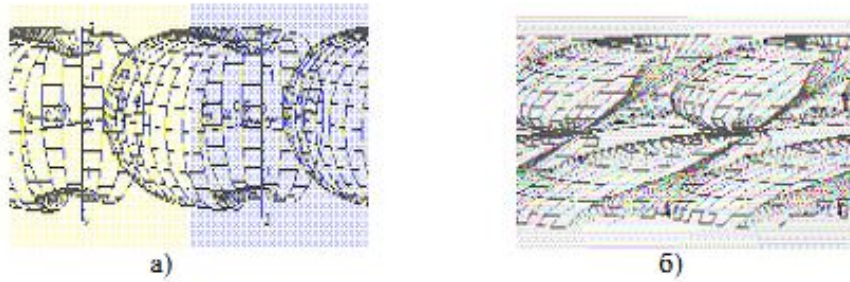


Рис. 2.1. а), б) Зависимость скоростей  $c_{\pm}$  от полярного угла при  $\lambda = 1$

Увеличение параметра  $\lambda$  приводит к определенному уменьшению скорости  $c_{\pm}$  вблизи значений полярного угла  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Для звука  $c_{\pm}$  изменение термодинамического параметра  $\lambda$  не приводит к качественному изменению вида фронта распространения этого звука. Расчетные угловые значения точек экстремума ( $\theta = \pi/4$ ) для скорости звука  $c_{\pm}$  совпадают с данными выполненных экспериментов для этого звука [17,18]. Выпишем выражения скоростей звуков  $c_{\pm}$  в области малых значений параметра  $\lambda \ll 1$ :

$$c_{\pm} \approx c \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \theta \right), \quad c_{\pm} \approx \frac{c}{2} \sqrt{\lambda} |\sin 2\theta|. \quad (2.13)$$

Малая добавка в скорости первого звука приводит к слабой его анизотропии. Скорость второго звука существенно анизотропная и при стремлении параметра  $\lambda \rightarrow 0$  исчезает:  $c_{\pm} \rightarrow 0$ . В этой области значений параметра легко проанализировать на экстремум выражения для скоростей первого и второго звуков (2.13). Для первого звука получим  $\min c_{\pm} = c$  при  $\theta_0 = 0, \pi$  и  $\max c_{\pm} = c(1 + \lambda/2)$  при  $\theta_0 = \pi/2$ . Аналогично для второго звука имеем  $\min c_{\pm} = 0$  при  $\theta_0 = 0; \pi/2; \pi$  и  $\max c_{\pm} = c\sqrt{\lambda}/2$  при  $\theta_0 = \pi/4; 3\pi/4$ .

Исследуем поляризационную структуру полученных акустических спектров. Рассмотрим решение для вектора  $\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k})$ , соответствующее моде  $\omega = 0$ . Для этого разложим этот вектор по тройке ортогональных векторов

$$\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k}) = k_j \delta v_{\parallel}^{(0)}(\mathbf{k}) + [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]_j \delta v_{\perp 1}^{(0)}(\mathbf{k}) + \frac{[[\mathbf{k} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{k}]_j}{k} \delta v_{\perp 2}^{(0)}(\mathbf{k}). \quad (2.14)$$

Учитывая явный вид вектора  $T_i(\mathbf{k})$  и формулу (2.10), видим, что в этом случае  $\delta v_{\parallel}^{(0)} = \delta v_{\perp 2}^{(0)} = 0$ , и, следовательно, вектор  $\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k}) = [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]_j \delta v_{\perp 1}^{(0)}(\mathbf{k})$  представляет собой поперечно поляризованный звук с нечетной поляризацией по волновому вектору  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ .

Рассмотрим теперь решения уравнения (2.10), соответствующие модам  $\omega = kc_{\pm}$ . Выражение  $\delta v_j^{(\pm)}(\mathbf{k})$  ищем в виде, аналогичном (2.14). Из (2.10) найдем, что  $\delta v_{\perp 1}^{(\pm)}(\mathbf{k}) = 0$ . Откуда

$$\delta v_j^{(\pm)}(\mathbf{k}) = k_j \delta v_{\parallel}^{(\pm)}(\mathbf{k}) + \frac{[[\mathbf{k} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{k}]_j}{k} \delta v_{\perp 2}^{(\pm)}(\mathbf{k}).$$

Эти решения, соответствующие первому и второму звукам, являются суперпозицией продольной и поперечной компонент, причем связь этих амплитуд колебаний имеет вид



$$\frac{\delta v_{\pm}^{(z)}(\mathbf{k})}{\delta v_{\pm}^{(z)}(\mathbf{k})} = \frac{-\mathbf{k}^4(c_{\pm}^2 - c^2) + \lambda c^2 k k_{\pm}^2}{\lambda c^2 k_{\parallel} k_{\perp}^2} = f_{\pm}(\theta), \quad (2.15)$$

где  $k_{\parallel} \equiv \mathbf{k}\mathbf{n}$ ,  $k_{\perp} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 - k_{\parallel}^2}$ . Используя определение скоростей  $c_{\pm}$  (2.12) и учитывая, что в сферической системе координат  $k_{\parallel} \equiv \mathbf{k}\mathbf{n} = k \cos \theta$ ,  $k_{\perp} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 - k_{\parallel}^2} = k \sin \theta$ , где  $\theta$  – полярный угол, перепишем отношение амплитуд (2.15) в терминах полярного угла

$$f_{\pm}(\theta) = \frac{1}{\lambda \sin 2\theta \sin^3 \theta} \left( 1 - \lambda \sin^2 \theta \cos 2\theta \mp \sqrt{(1 + \lambda \sin^2 \theta)^2 - \lambda \sin^2 2\theta} \right). \quad (2.16)$$

При  $\lambda \ll 1$ , с учетом формул (2.13), отношение амплитуд для первого звука  $f_{+}(\theta)$  упрощается и приобретает следующий вид

$$f_{+}(\theta) = -\frac{\lambda \sin^4 \theta}{4 \cos \theta}. \quad (2.17)$$

Из формулы (2.17) видно, что при  $\theta \rightarrow 0$  функция  $f_{+}(\theta) \rightarrow 0$ . Следовательно, в этой области значений полярного угла звук является продольным. При  $\theta \rightarrow \pi/2$  отношение амплитуд  $f_{+}(\theta) \rightarrow \infty$ , откуда найдем, что при таком значении полярного угла звук является поперечным. Приведем также значения  $f_{+}$  при некоторых углах  $\theta$

$$f_{+}\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\lambda}{32\sqrt{3}}, \quad f_{+}\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\lambda\sqrt{2}}{4}, \quad f_{+}\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{9\lambda}{8}. \quad (2.18)$$

При  $\lambda \ll 1$  звук в основном является продольным. Для второго звука отношение амплитуд  $f_{-}(\theta)$  имеет вид

$$f_{-}(\theta) = \frac{1 - \lambda \sin^2 \theta \cos 2\theta}{\lambda \cos \theta \sin^4 \theta}. \quad (2.19)$$

Видно, что при  $\theta \rightarrow 0$  и при  $\theta \rightarrow \pi/2$  отношение амплитуд  $f_{-}(\theta) \rightarrow \infty$ , что означает, что при таких значениях угла второй звук является поперечным. Выпишем значения  $f_{-}$  при некоторых других углах  $\theta$

$$f_{-}\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4(8-\lambda)}{\lambda\sqrt{3}}, \quad f_{-}\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{\lambda\sqrt{2}}, \quad f_{-}\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4(8+3\lambda)}{9\lambda}. \quad (2.20)$$

Отсюда можем заключить, что при  $\lambda \ll 1$  звук в основном является поперечным.

Рассмотрим влияние внешнего переменного поля на динамику изучаемой среды. Гамильтониан системы в этом случае  $H = H + V$  состоит из гамильтониана среды  $H$  и взаимодействия с внешним полем

$$H = \int d^3x \varepsilon(\zeta_a(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})), \quad V = \int d^3x \xi(\mathbf{x}, t) b(\zeta_a(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})), \quad (2.21)$$

здесь  $\xi(\mathbf{x}, t)$  – внешнее поле, достаточно медленно изменяющееся в пространстве и времени,  $b(\zeta_a, n_i, \nabla n_i, l)$  – произвольная локальная физическая величина, которая в области больших времен становится функцией параметров сокращенного описания. Используя гамильтонов подход, нами получены уравнения динамики одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы во внешнем переменном поле [16]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\nabla_i \pi_i + \eta_{\rho}, & \dot{\pi}_i &= -\nabla_k t_{ik} + \eta_{\pi_i}, & \dot{\sigma} &= -\nabla_k (\sigma v_k) + \eta_{\sigma}, \\ \dot{l} &= -v_s \nabla_s l - l \delta_y^{\pm}(\mathbf{n}) \nabla_j v_j + \eta_l, & \dot{n}_j &= -v_s \nabla_s n_j + \delta_y^{\pm}(\mathbf{n}) n_k \nabla_k v_i + \eta_{n_j}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $\eta$  – источники, обусловленные внешним полем. Используя явный вид скобок Пуассона (1.5), (1.6), (2.3), (2.4) и структуру гамильтониана (2.21), найдем явный вид этих источников

$$\begin{aligned} \eta_\rho &= -\rho \frac{\partial b}{\partial \pi_1} \nabla_i \xi, & \eta_{n_i} &= n_k \delta_{ij}^+(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial \pi_1} \nabla_k \xi, \\ \eta_l &= -l \delta_{ji}^+(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial \pi_1} \nabla_j \xi, & \eta_\sigma &= -\sigma \frac{\partial b}{\partial \pi_1} \nabla_i \xi, \\ \eta_{\pi_i} &= -\zeta_a \frac{\partial b}{\partial \zeta_a} \nabla_j \xi - l \delta_{jk}^+(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial l} \nabla_k \xi + \left( \frac{\partial b}{\partial n_i} - \nabla_\lambda \frac{\partial b}{\partial \nabla_\lambda n_i} \right) \delta_{ji}^+(\mathbf{n}) n_k \nabla_k \xi. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что отклонение от состояния равновесия произвольной локальной динамической величины  $a_\xi$ , линейное по полю  $\xi$ , имеет вид [19]

$$\delta a_\xi(\mathbf{x}, t) = \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \xi(\mathbf{x}', t') G_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t').$$

Здесь  $G_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$  – двухвременная функция Грина. Переходя к Фурье – компоненте по формуле

$$a(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3} \int d^3 k \int d\omega e^{-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{x})} a(\mathbf{k}, \omega),$$

получим равенство

$$\delta a_\xi(\mathbf{k}, \omega) = G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) \delta \xi(\mathbf{k}, \omega). \tag{2.23}$$

С другой стороны, величину  $\delta a_\xi(\mathbf{x}, t)$  в области достаточно больших времен ( $t \gg \tau_r$ ,  $\tau_r$  – время релаксации) можно представить в виде

$$\delta a_\xi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial a}{\partial \zeta_a} \delta \zeta_a(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial a}{\partial n_k} \delta n_k(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial a}{\partial l} \delta l(\mathbf{x}, t), \tag{2.24}$$

где  $\delta \zeta_a \equiv \delta \sigma, \delta \pi_k, \delta \rho$  и  $\delta l, \delta n_k$  – отклонения величин  $\sigma, \pi_k, \rho, l, n_k$  от их равновесных значений. Отклонения  $\delta \zeta_a, \delta l, \delta n_k$  находятся из линеаризованных уравнений (2.22). Далее, сравнивая формулы (2.23) с (2.24), найдем Фурье – компоненты функций Грина  $G_{ab}(\mathbf{k}, \omega)$  в области малых волновых векторов и частот. Выполняя указанные действия, нами получен вид низкочастотных асимптотик функций Грина

$$G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = -L_i^a(\mathbf{k}, \omega) \frac{D_j^b(\mathbf{k}, \omega)}{\rho} L_j^b(-\mathbf{k}, -\omega) - \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} \frac{\partial b}{\partial \pi_i}, \tag{2.25}$$

где введены следующие обозначения

$$L_i^a(\mathbf{k}, \omega) = \zeta_a \frac{\partial a}{\partial \zeta_a} k_i + l \frac{\partial a}{\partial l} \delta_{ji}^+(\mathbf{n}) k_j + \omega \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} + \left( \frac{\partial a}{\partial n_j} - ik_\lambda \frac{\partial a}{\partial \nabla_\lambda n_j} \right) \delta_{ij}^+(\mathbf{n}) n_k k_k. \tag{2.26}$$

Выпишем в явном виде некоторые асимптотики функций Грина

$$\begin{aligned} G_{\rho\rho} &= \rho \frac{\omega^2(k^2 + k_\perp^2) - \lambda c^2 k^2 k_\perp^2}{\omega^4 - c^2 \omega^2((k^2 + k_\perp^2) + \lambda k_\perp^2) + \lambda c^4 k^2 k_\perp^2}, \\ G_{ll} &= \frac{l^2}{\rho} \frac{k_\perp^2(\omega^2 - c^2 k^2)}{\omega^4 - c^2 \omega^2((k^2 + k_\perp^2) + \lambda k_\perp^2) + \lambda c^4 k^2 k_\perp^2}, \\ G_{n_i n_j} &= \frac{k^2}{\omega^2(\omega^4 - c^2 \omega^2((k^2 + k_\perp^2) + \lambda k_\perp^2) + \lambda c^4 k^2 k_\perp^2)} \times \\ &\times \left\{ \delta_{ij}^+ \omega^2(\omega^2 - c^2(k^2 + k_\perp^2) - \lambda c^2 k_\perp^2) + \omega^2 c^2(1 + \lambda)(k_i - n_i k)(k_j - n_j k) + \lambda c^4 k_\perp^2(\mathbf{k} \times \mathbf{n})_i(\mathbf{k} \times \mathbf{n})_j \right\} \end{aligned} \tag{2.27}$$



При переходе к изотропной жидкости для функции Грина “плотность – плотность” получим известные выражения, приведенные в [19]. Для функций Грина получены асимптотические выражения в случаях малых волновых векторов и частот  $k_+, k_-, \omega$ . Отметим, что в виду сильной пространственной анизотропии рассматриваемой конденсированной среды вид этих асимптотик функций Грина будет зависеть от порядка предельных переходов. Проиллюстрируем это утверждение на примере некоторых функций Грина

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_- \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= -\frac{\rho}{c^2}, & \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{k_- \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= 0, \\ \lim_{k_- \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= -\frac{\rho}{c^2(1+\lambda)}, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{k_- \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{II} &= -\frac{l^2}{\rho c^2 \lambda}, & \lim_{k_- \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} G_{II} &= -\frac{l^2}{\rho c^2(1+\lambda)}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{k_- \rightarrow 0} G_{II} &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Приведенные низкочастотные асимптотики (2.28) не содержат расходимости типа  $1/k^2, 1/k$  [20]. Причина этого связана с тем, что, в отличие от рассмотренных случаев сверхтекучих и магнитных систем (см., например, [21]), в набор параметров сокращенного описания не входит плотность генератора нарушенной симметрии. В данном случае этой величиной является орбитальный момент, являющийся сопряженным по отношению к оси пространственной анизотропии. В указанных работах набор гидродинамических параметров содержал как плотность генератора нарушенной симметрии (плотности массы или спина), так и соответствующую сопряженную величину, что и приводило в конечном итоге к вышеуказанным расходимостям.

### 3. Динамика одноосных нематиков с молекулами дископодобной формы во внешнем переменном поле

Хорошо известны жидкие кристаллы, состоящие из молекул дископодобной формы и также обладающие одноосной симметрией. Направление ориентации таких жидких кристаллов определяется единичным вектором нормали к плоскости таких молекул. Изучение динамического поведения конденсированной среды с дископодобной формой молекул мы проведем аналогично ранее рассмотренному случаю среды со стержнеподобными молекулами. Для этого введем семейство поверхностей, касательные поверхности к которым в каждой точке совпадают с плоскостями дисков. Два неколлинеарных вектора  $l_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{x})$ , определяющих деформированное положение плоскости, могут быть представлены в виде

$$l_i(\mathbf{x}) = b_{ij}^{-1}(\mathbf{x}) l_j, \quad f_i(\mathbf{x}) = b_{ij}^{-1}(\mathbf{x}) f_j \quad (3.1)$$

где  $l_i, f_i$  – постоянные неколлинеарные векторы, определяющие положение плоскости недеформированного состояния. Тогда вектор нормали к плоскости, натянутой на векторы  $l_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{x})$ , равен

$$d_i(\mathbf{x}) = d_k \partial \xi_k / \partial x_i \equiv d_k b_{ki}(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

здесь  $\mathbf{d} = \mathbf{l} \times \mathbf{f}$  – вектор, определяющий направление пространственной анизотропии

$n_i = d_i / d$  и диаметр дископодобной молекулы  $d = \sqrt{d_i^2}$  в недеформированном состоянии. Единичный вектор нормали к плоскости дископодобной молекулы и модуль

вектора  $d_i(\mathbf{x})$ , имеющий физический смысл диаметра дископодобной молекулы в деформированном состоянии, определим формулой

$$n_i(\mathbf{x}) = d_i(\mathbf{x})/d(\mathbf{x}), \quad d(\mathbf{x}) = (d_i^2(\mathbf{x}))^{1/2}. \quad (3.3)$$

Используя определение вектора анизотропии  $n_i(\mathbf{x})$  (3.3) и формулы (1.6), (3.1), (3.2) для величин  $\pi_i(\mathbf{x}), n_j(\mathbf{x}), d(\mathbf{x}) \equiv |\mathbf{d}(\mathbf{x})|$ , получим скобки Пуассона

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), n_j(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_j n_i(\mathbf{x}) + \delta_{jk}^+ (\mathbf{n}(\mathbf{x}')) n_i(\mathbf{x}') \nabla_k' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), d(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_j d(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}') n_i(\mathbf{x}') n_j(\mathbf{x}') \nabla_j' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Видим, что скобки Пуассона (2.3), (2.4), найденные для одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы, отличаются от скобок Пуассона (3.4), полученных для одноосного нематика с молекулами дископодобной формы. Плотность энергии взаимодействия в рассматриваемом случае является функцией плотностей аддитивных интегралов движения, ориентационного и конформационного параметров  $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), d(\mathbf{x}))$ . Приведем выражение для плотности потоков аддитивных интегралов движения:

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k n_j} \nabla_j n_j + n_i \delta_{ik}^+ (\mathbf{n}) \left( \frac{\partial \omega}{\partial n_i} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_i} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial d} dn_i n_k \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0}. \quad (3.5)$$

Уравнения, отражающие законы сохранения числа частиц, импульса и энергии в дифференциальной форме имеют вид (1.9), (3.5). Получим уравнение движения для единичного вектора  $n_j(\mathbf{x})$ . Обращаясь к уравнению (1.1), имеем

$$\dot{n}_j(\mathbf{x}) = -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s n_j(\mathbf{x}) - n_i(\mathbf{x}) \delta_{jk}^+ (\mathbf{n}(\mathbf{x})) \nabla_k v_i(\mathbf{x}).$$

Аналогичным образом получим уравнение движения для конформационной степени свободы  $d(\mathbf{x})$

$$\dot{d}(\mathbf{x}) = -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}) \nabla_k v_l(\mathbf{x}).$$

Исследуем спектры коллективных возбуждений на основе полученных уравнений одноосного нематика с молекулами дископодобной формы. Легко видеть, что дисперсионное уравнение имеет вид (2.11), в котором

$$\begin{aligned} I_2 &= -\mathbf{k}^2 c^2 - c^2 \lambda (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 \leq 0, & I_2 &= c^4 \lambda (\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{n})^2) (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 \geq 0, \\ T_1(\mathbf{k}) &\equiv c \sqrt{\lambda} (\mathbf{k}\mathbf{n}) n_i, & \lambda &= \frac{d^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial d^2} > 0. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к акустическим спектрам  $\omega_{\pm}(\mathbf{k}) = c_{\pm}(\mathbf{k}/k)k$ . В этом случае также получаются две анизотропные скорости акустических волн [16]

$$c_{\pm}(\theta) = \frac{c}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \lambda \cos^2 \theta \pm \left[ (1 + \lambda \cos^2 \theta)^2 - \lambda \sin^2 2\theta \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (3.6)$$

Видим, что аналитическое выражение (3.6) для скоростей двух акустических волн в случае дископодобных молекул отличается от соответствующего выражения (2.12), справедливого для стержнеподобных молекул. Характер анизотропии спектров (3.6) представлен на Рис. 3.1, где, как и в предыдущем случае одноосных стержнеподобных нематиков, фронт распространения волн приведен в виде среза вдоль оси пространственной анизотропии. Дополнительная мода обусловлена деформацией площадки дис-

коподобного жидкого кристалла. Сравнивая формулы (2.12), (3.6) с результатами работы [2], отметим, что в последних дополнительные моды в одноосных нематических жидких кристаллах, связанные с нарушенной симметрией относительно поворотов в конфигурационном пространстве, имели чисто диссипативный характер. Учет конформационной степени свободы, как мы увидели, приводит к возможности распространения второго звука у обоих типов одноосных нематиков уже в адиабатическом приближении. При этом анизотропия второго звука имеет гораздо более резкий характер по сравнению с первым звуком. Ситуация в некоторой степени аналогична той, которая имеет место в смектических жидких кристаллах, где возникновение второго звука связано с появлением в наборе гидродинамических параметров дополнительной смектической переменной.

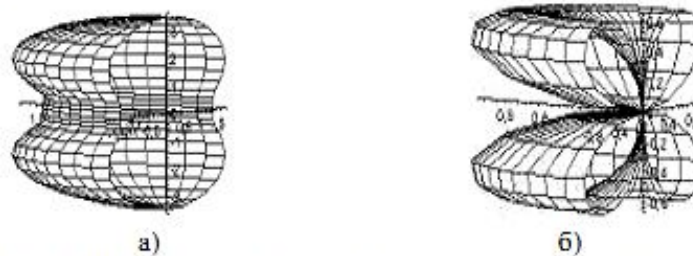


Рис. 3.1. а), б) Зависимость скоростей  $c_{\pm}$  от полярного угла при  $\lambda = 1$

Как видно из приведенных рисунков, вблизи углов  $\theta = \pi/2$  скорость  $c_{\pm}$  уменьшается с ростом безразмерного термодинамического параметра  $\lambda$ . Для скорости  $c_{\pm}$  качественно рисунки подобны аналогичным рисункам для стержнеподобных нематических жидких кристаллов, приведенным в разделе 2.

Рассмотрим поведение скоростей звука при малых значениях термодинамического параметра  $\lambda \ll 1$ . В соответствии с формулой (3.6), имеем

$$c_{\pm} \approx c \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \cos^4 \theta \right), \quad c_{\pm} \approx \frac{c}{2} \sqrt{\lambda} |\sin 2\theta|. \quad (3.7)$$

Видим, что малая добавка приводит к слабой анизотропии скорости первого звука  $c_{\pm}$ . Скорость второго звука  $c_{\pm}$  анизотропная. Как следует из формул (2.13) и (3.7), при малых значениях параметра  $\lambda \ll 1$  вид скорости второго звука  $c_{\pm}$  в изучаемых одноосных нематиках не зависит от формы молекул. Согласно (3.7) при  $\lambda \ll 1$ , для первого звука получим  $\min c_{\pm} = c$  при  $\theta_0 = \pi/2$ ;  $\max c_{\pm} = c(1 + \lambda/2)$  при  $\theta_0 = 0; \pi$ . Для второго звука имеем  $\min c_{\pm} = 0$  при  $\theta_0 = 0; \pi/2; \pi$ ;  $\max c_{\pm} = c\sqrt{\lambda}/2$  при  $\theta_0 = \pi/4; 3\pi/4$ , совпадающие с аналогичными формулами для одноосных стержнеподобных нематиков.

Изучим поляризационную структуру спектров коллективных возбуждений для нематиков с дископодобными молекулами. Для Фурье – компонент отклонений скорости от состояния равновесия получены равенства

$$\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k}) = [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]_j \delta v_{\perp}^{(0)}(\mathbf{k}), \quad \delta v_j^{(\pm)}(\mathbf{k}) = k_j \delta v_{\parallel}^{(\pm)} + k [ [\mathbf{k} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{k} ]_j \delta v_{\perp}^{(\pm)},$$

причем связь амплитуд колебаний выглядит следующим образом

$$\frac{\delta v_{\perp}^{(\pm)}}{\delta v_{\parallel}^{(\pm)}} = \frac{-\mathbf{k}^2 (c_{\pm}^2 - c^2) + \lambda c^2 k k^2}{\lambda c^2 k^3 k^2} = g_{\pm}(\theta). \quad (3.8)$$

Сравнивая формулы (2.15) и (3.8), видим, что выражения для соотношения амплитуд продольной и поперечной компонент различны для нематиков с молекулами стержне- и дископодобной формы. Как и в ранее рассмотренном случае одноосного нематика с

молекулами стержнеподобной формы, перепишем отношение амплитуд (3.8) в терминах модуля волнового вектора и полярного угла

$$g_{\pm}(\theta) = \frac{1}{\lambda \sin 2\theta \sin \theta \cos^2 \theta} \left( 1 + \lambda \cos^2 \theta \cos 2\theta \mp \sqrt{(1 + \lambda \cos^2 \theta)^2 - \lambda \sin^2 2\theta} \right). \quad (3.9)$$

При  $\lambda \ll 1$ , с учетом формул (3.7), отношение амплитуд для первого звука  $g_{\pm}(\theta)$  имеет следующий вид

$$g_{\pm}(\theta) = -\frac{\lambda \cos^2 \theta}{4 \sin^2 \theta}. \quad (3.10)$$

Из формулы (3.10) видно, что при  $\theta \rightarrow 0$  функция  $g_{\pm}(\theta) \rightarrow \infty$ , следовательно, в этом случае звук является поперечным. При  $\theta \rightarrow \pi/2$  отношение амплитуд  $g_{\pm}(\theta) \rightarrow 0$ , откуда следует, что звук является продольным. Приведем также значения  $g_{\pm}(\theta)$  при некоторых других углах  $\theta$

$$g_{\pm}\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\lambda 9\sqrt{3}}{32}, \quad g_{\pm}\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\lambda\sqrt{2}}{16}, \quad g_{\pm}\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\lambda}{96}. \quad (3.11)$$

Из этих формул можно заключить, что при  $\lambda \ll 1$  звук в основном является продольным. Сравнивая формулы (2.13) с (3.7), видим, что при малых  $\lambda$  выражение для второго звука  $c_{\pm}$  не зависит от формы молекул.

Динамическое поведение нематика с дископодобной формой молекул во внешнем переменном поле изучено аналогично ранее рассмотренному случаю. Уравнения динамики такой среды в этом поле имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\nabla_i \pi_i + \eta_{\rho}, & \dot{\pi}_i &= -\nabla_k t_{ik} + \eta_{\pi_i}, & \dot{\sigma} &= -\nabla_k (\sigma v_k) + \eta_{\sigma}, \\ \dot{d} &= -v_s \nabla_s d - dn_k n_i \nabla_k v_i + \eta_d, & \dot{n}_j &= -v_s \nabla_s n_j - n_i \delta_{jk}^+(\mathbf{n}) \nabla_k v_i + \eta_{n_j}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $d$  – диаметр диска, а источники выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \eta_{\rho} &= -\rho \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_i \xi, & \eta_{n_i} &= -n_k \delta_{ij}^+(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_k \xi, \\ \eta_d &= -dn_i n_j \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_j \xi, & \eta_{\sigma} &= -\sigma \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_i \xi, \\ \eta_{\pi_i} &= -\zeta_a \frac{\partial b}{\partial \zeta_a} \nabla_j \xi - dn_i n_j \frac{\partial b}{\partial d} \nabla_i \xi - \left( \frac{\partial b}{\partial n_i} - \nabla_k \frac{\partial b}{\partial \nabla_k n_i} \right) \delta_{ij}^+(\mathbf{n}) n_k \nabla_k \xi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

С помощью системы уравнений (3.12), (3.13) получен общий вид низкочастотных асимптотик функций Грина

$$G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = -L_i^a(\mathbf{k}, \omega) \frac{D_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega)}{\rho} L_j^b(-\mathbf{k}, -\omega) - \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} \frac{\partial b}{\partial \pi_i}, \quad (3.14)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} L_i^a(\mathbf{k}, \omega) &= \left( \zeta_a \frac{\partial a}{\partial \zeta_a} \right) k_i + d \frac{\partial a}{\partial d} n_i n_j k_j + \omega \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} + \left( \frac{\partial a}{\partial n_j} - ik_{\lambda} \frac{\partial a}{\partial \nabla_{\lambda} n_j} \right) \delta_{ij}^+(\mathbf{n}) n_k k_k, \\ D_{ij} &= \omega^2 \delta_{ij} - c^2 k_i k_j - c^2 \lambda (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 n_i n_j, \end{aligned}$$

которые отличаются от соответствующих выражений (2.26) для стержнеподобных молекул. Поступая аналогично предыдущему случаю, приведем в явном виде некоторые функции Грина динамических переменных

$$G_{\rho\rho} = \rho \frac{\omega^2(k^2 + k_{\perp}^2) - \lambda c^2 k^2 k_{\perp}^2}{\omega^4 - \omega^2(c^2(k^2 + k_{\perp}^2) + \lambda c^2 k^2) + \lambda c^4 k^2 k_{\perp}^2},$$

$$G_{dd} = \frac{d^2}{\rho} \frac{k_{\perp}^2 (\omega^2 - k^2 c^2 (1 + \lambda))}{\omega^2 - \omega^2 (c^2 (k^2 + k_{\perp}^2) + \lambda c^2 k^2) + \lambda c^4 k^2 k_{\perp}^2}, \quad (3.15)$$

$$G_{nn_j} = \frac{k^2}{\omega^2 (\omega^4 - c^2 \omega^2 ((k^2 + k_{\perp}^2) + \lambda k^2) + \lambda c^4 k^2 k_{\perp}^2)} \times \\ \times \left\{ \delta_{ij}^+ \omega^2 (\omega^2 - c^2 (k^2 + k_{\perp}^2) - \lambda c^2 k^2) + \omega^2 c^2 (k_i - n_i k_j) (k_j - n_j k_i) + \lambda c^4 k^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{n})_i (\mathbf{k} \times \mathbf{n})_j \right\}.$$

В рассматриваемом случае также имеет место зависимость асимптотик функций Грина (3.14) от порядка предельных переходов

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{\rho\rho} = -\frac{\rho}{c^2}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} G_{\rho\rho} = \rho \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - c^2 k_{\perp}^2}, \quad \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} = \rho \frac{k^2}{\omega^2 - k^2 c^2 (1 + \lambda)}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0, k \rightarrow 0} G_{\rho\rho} = -\frac{\rho}{c^2}, \quad \lim_{k \rightarrow 0, k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0, k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} = -\frac{\rho}{c^2 (1 + \lambda)}, \\ \lim_{k \rightarrow 0, k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} = 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dd} = -\frac{d^2}{\rho} \frac{1 + \lambda}{\lambda c^2}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} G_{dd} = \frac{d^2}{\rho} \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2}, \quad \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{dd} = 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0, k \rightarrow 0} G_{dd} = -\frac{d^2}{\rho c^2}, \quad \lim_{k \rightarrow 0, k_{\perp} \rightarrow 0} G_{dd} = 0. \quad (3.16)$$

Сравнивая формулы (2.28) и (3.16), видим, что низкочастотные асимптотики функций Грина имеют различный вид в случае одноосных нематиков с молекулами стержнеподобной и дископодобной формы. Также легко видеть, что и в данном случае не выполняется теорема Боголюбова об особенности типа  $1/k^2, 1/k$ , поскольку в набор параметров сокращенного описания не входит орбитальный момент.

#### Литература

1. de Gennes P.G.J., Prost J. The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Oxford University Press, 1995. 400 p.
2. Лебедев В.В., Кац Е.М. Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988. 144 с.
3. Chaikin P.M., Lubensky T.C. Principles of Condensed Matter Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 699 p.
4. Аверьянов Е.М. Эффекты локального поля в оптике жидких кристаллов. Новосибирск: Наука, 1999. 552 с.
5. Ericksen J.L. // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1960. V. 4. P. 231.
6. Leslie F.M. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1966. V. 19. P. 357-370.
7. Dzyaloshinsky I.E., Volovick G.E. // Ann. Phys. 1980. V. 125. P. 67-97.
8. А.А. Исаев, М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27, вып. 2. С. 431.
9. Pleiner H., Brand H.R. // Chapt. 2 Pattern Formation in Liquid Crystals / eds. A. Buka and L. Kramer. N.Y.: Springer, 1996. P. 15.
10. Olmsted P.D., David Lu C.Y. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 4397.
11. Stark H., Lubensky T.C. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 061709.
12. Qian T., Sheng P. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58, № 6. P. 7475.
13. Воловик Г.Е. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31. С. 297.
14. Ковалевский М.Ю., Кузнецов В.В. // ДАН Украины. 1999. № 12. С. 90.
15. Kovalevsky M.Y., Shishkin A.L. // J. of Molecular Liquids. 2003. V. 105/2-3. P. 197.
16. Kovalevsky M.Y., Logvinova L.V., Matskevich V.T. // Вопросы атомной науки и техники. 2007. № 3. С. 380.
17. Selinger J.V., Spector M.S., Greanya V.A., Weslowski B.T., Shenoy D.K., Shashidhar R. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 051708/1.

18. Greanya V.A., Malanovsky A.P., Weslowski B.T., Spector M.S., Selinger J.V. // *Liquid Crystals*. 2005. V. 32, № 7. P. 933.
19. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. 377 с.
20. N.N. Bogolubov – *Physica*. 1960. V. S26. P. 1.
21. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский. Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов. М.: Физматлит, 2006. 368 с.
22. Liu M. // *Phys. Rev. A*. 1979. V. 19. P. 2090-2094.
23. Bhattacharya S., Sarma B.K., Ketterson J.B. // *Phys. Rev. Lett.* 1978. V. 40, № 40. P. 1582.

## INVESTIGATION OF UNIAXIAL NEMATIC LIQUID CRYSTAL DYNAMICS UNDER INFLUENCE OF EXTERNAL ALTERNATING FIELD

M.Y. Kovalevsky<sup>1)</sup>, L.V. Logvinova<sup>1)</sup>, V.T. Matskevich<sup>2)</sup>, A.N. Schvets<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia,

<sup>2)</sup> National Science Center "Kharkov Institute of Physics & Technology"  
Academicheskaya, 1, Kharkov, 61108, Ukraine

<sup>3)</sup> Kharkiv Karazin National University 4 Svobody sq, Kharkiv, 61077, Ukraine 4  
*mikov@kharkov.ua*

The dynamic equations of uniaxial nematic liquid crystals with rod-like and disc-like molecules in alternative external field are obtained. The low-frequency asymptotics of two-temporary Green functions are calculated. It is clarified that their structure depends essentially on the character of spatial anisotropy of considered condensed matter and on molecules shape. The polarization features of acoustic waves in uniaxial nematics are investigated. It is shown that the first and second sounds are superpositions of longitudinal and transversal components. The relation between the amplitudes of these components as the function of an angle between wave vector and anisotropy axis is established.

**Key words:** Hamiltonian approach, Poisson brackets, uniaxial nematic, low-frequency asymptotics of Green functions, polarizations.