Ситник С.М. /Воронеж/

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА РЯДА ТЭЙЛОРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим остаточный член ряда Тэйлора для экспоненты

$$R_n(x) = \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \geqslant 0.$$

Недавно Horst Alzer доказал неравенство

$$R_{n-1}(x) R_{n+1}(x) > \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \left(R_n(x) \right)^2; \; x > 0, \, n \in \mathbb{N}$$

с наилучшей возможной постоянной в правой части.

Автором получены следующие результаты. Показано, что приведённое неравенство есть эквивалентная перезапись одного ранее известного результата У. Гаучи. Приведены некоторые другие эквивалентные неравенства в терминах вырожденной гипергеометрической функции Гаусса, неполной гамма-функции, дробного интеграла Римана-Лиувилля. Доказаны многочисленные обобщения неравенства Гаучи-Алзера, указывающие на глубокие связи этого замечательного неравенства с различными, часто весьма удалёнными друг от друга разделами Анализа: мажоризацией рядов по Бору, неравенствами Коши-Буняковского и Чебышёва, теоремой Бернштейна о рядах с положительными коэффициентами, выпуклостью и логарифмической выпуклостью некоторых последовательностей, со- и антимонотонностью функций, интегральным неравенством о средних, теорией интерполяции и теоремой Адамара о трёх прямых, преобразованием Лапласа, характеризацией положительных операторов, неравенствами А.М.Финка, теорией мажоризации Мюрхеда, неравенствами Кимберлинга, аппроксимациями Паде, формулой Обрешкова, средними Чезаро, оценками для экспаненты/ Паде-аппроксимациями экспоненты/ преобразованием Эйткена, проблемой Бибербаха и неравенствами типа Аски-Вильсона для гипергеометрических полиномов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ситник С.М. Неравенства для остаточного члена ряда Тэйлора экспоненциальной функции: Препринт. Владивосток: Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской Академии наук. 1993, 30 с.