

А.М.Трофимов, В.М.Московкин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ГЕОМОРФОЛОГИИ СКЛОНОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1983

В течение последних 10 – 15 лет нами было создано и опубликовано множество математических моделей развития различных по типу склонов, склоноформирующих процессов и других форм рельефа. Для этих целей использовался различный математический аппарат. Дело в том, что не все математические методы могут быть реально используемы для описания развития тех или иных по типу склонов и их процессов. Оказывается, что каждый из типов склонов допускает описание их развития определенными математическими методами. Поэтому у нас возникла мысль создания общей единой теории описания развития склонов, где каждому их сочетанию соответствовал бы свой круг моделей склоновых систем. Опыт наших исследований показывает, что в геоморфологии склонов следует выделить общую теорию детерминированных балансовых моделей развития склонов (отдельно для одномерных (плоских) и двумерных (пространственных) задач), а также новый (созданный нами) круг динамических моделей склоновых систем, основанных по качественной теории динамических систем. Эти модели описывают процесс взаимодействия различных элементов и воздействующих факторов в склоновых системах. Проблема взаимодействия в геоморфологии вообще стоит остро, а проблема взаимодействия элементов в склоновой системе является определяющей при описании развития последних. В отличие от концепции балансовых, динамические модели не дают непосредственно развития профилей склонов и их пространственной формы. Здесь исследуется физическая сущность процесса, строятся теории развития. Таким образом, теория динамического равновесия рельефа описывается концепцией динамических моделей. Кроме того, возникает круг задач, описывающих граничные условия, которые следует ставить, чтобы задача решалась для того или иного типа склонов.

Может показаться несколько странным, что 3 часть книги описывает склоновые процессы; они вроде бы должны предшествовать описанию форм. Дело в том, что эта часть книги по нашему замыслу должна представлять собой вариант практической реализации математических методов в геоморфологии склонов. Поскольку реализация в настоящее время выборочна, то и 3 часть носит фрагментарный характер. В первых двух частях склоны рассматриваются как закрытые, так и открытые системы. Однако в последую-

щем вводится моделирование на границах (например, с гидрологическими системами и др.).

Ввиду ограниченности объема книги методы решения краевых задач приводятся только в тех случаях, когда они носят нестандартный характер.

Авторы глубоко благодарны профессору Симонову Ю.Г., доценту Борсуку О.А., заведующему лабораторией математического моделирования при кафедре геоморфологии МГУ Зейдису И.М. за ценные замечания и советы, сделанные при просмотре рукописного варианта книги, а также научному редактору профессору Ступишину А.В.

Часть I

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ СКЛОНОВ

Известно два наиболее крупных класса детерминированных моделей развития склонов: балансовые диффузионные модели типа моделей Каллинга (Culling, 1960, 1963; Девдариани, 1966, 1967 а, б и др.) и кинематические типа моделей Лемана и Шайдеггера (Lehmann, 1933; Шайдеггер, 1964; Девдариани, 1966, 1967 а; Трофимов, 1974 и др.).

Мы считаем, что эти два класса моделей следует рассматривать с некоторых общих позиций взаимодействия и балансового подхода.

Механизм взаимодействия в закрытых склоновых системах моделируется следующей системой уравнений (одномерные задачи)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = f(x, z, t, -\frac{\partial z}{\partial x}), \quad (I)$$

где z - высота профиля в каждой точке склона,
 q - твердый расход материала.

Абстрагируясь от реального склонового процесса можно видеть, что эта система уравнений описывает основное (общее) взаимодействие: форма склона \rightleftharpoons склоновый процесс. Это взаимодействие является причиной саморазвития склона. Действительно, первое уравнение (уравнение баланса) говорит о воздействии потока материала на форму склона, а второе - о воздействии формы склона на поток материала. Простейший вид зависимости $q = f = \frac{\partial z}{\partial x}$ требует использование диффузионных балансовых моделей, а конкретизация характера взаимодействия (I) - геомеханических (гл.2). Последние, в зависимости от характера склонового процесса, дви-

жения грунта или потока воды, имеют весьма различный вид и обычно представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Эндогенные (внешние воздействия на склоновую систему) процессы могут влиять на характер взаимодействия (I) посредством изменения формы склона, и их следует учитывать в правой части уравнения баланса. Взаимодействие экзогенных и эндогенных процессов происходит посредством самого рельефа (его формы). Оно является основным в геоморфологии.

При изучении кинематических моделей развития крутых денудационных склонов нами было показано, что модели Шайдеггера можно рассматривать с тех же позиций взаимодействия и балансового подхода (I). В этом случае $q = f(x, t, z)$. Эти модели описывают односторонние изменения склонов (отступление).

При рассмотрении склона как открытой системы, имеющей границы, необходимо моделировать процесс взаимодействия с веществом (материалом) через эти границы. В системе уравнений (I) это учитывается посредством постановки граничных условий. Например, условие $q(x=0, t) = 0$ соответствует водораздельной точке, $q(x=0, t) = \lambda(t)$ — поступлению материала с вышележащего склона. Это так называемые краевые условия второго рода для диффузионных моделей. Другого типа условия задаются у основания склона, где может происходить интенсивное взаимодействие с гидрологической системой (речной, морской и др.). Здесь, например, условие $y(x=l, t) = 0$ (краевое условие первого рода) соответствует стабильному базису денудации и установившемуся взаимодействию на границе склоновой и гидравлической систем. Обычно, однако, происходит более сложный процесс основания склона. В этом случае имеет смысл говорить о сложном взаимодействии: форма склона — склоновый процесс — абразия (или боковая эрозия реки). Вначале процесс подрезания основания склона моделируется нами постановкой граничного условия первого рода на подвижной границе. Впервые в рамках концепции диффузионных моделей (гл. I) получена аналогия с краевыми задачами третьего рода (развитие педиментов и структурных склонов).

При моделировании склонов, находящихся в различных условиях (пологий склон и уступ; надводный и подводный профиль бе-

регового склона) используются комплексные диффузионно-кинематические модели. Указанные выше краевые задачи третьего рода для уравнения диффузии можно рассматривать и как диффузионно-кинематические модели, в которых кинематические подмодели тривиальны — параллельное отступление уступа с постоянной скоростью. Наконец, отметим, что некоторые геомеханические модели (гл. II) строятся на основе уравнения деформации склона, которое также как и уравнение типа Шайдеггера описывает однонаправленное изменение склона и может рассматриваться как частный случай уравнения баланса (I).

Г л а в а I. ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ СКЛОНОВ

Диффузионные модели стали применяться в геоморфологии одними из первых. Их следует считать универсальными, так как они хорошо описывают различные геоморфологические процессы, связанные с денудацией и аккумуляцией материала. Использовать эти модели для описания развития склонов начал 20 лет назад В.Е.Каллинг (Culling, 1960, 1963, 1965). Основу их составляет уравнение баланса материала (I), которое выводится из баланса материала в элементарном объеме подвижного слоя грунта или потока воды. Предполагая, что расход материала пропорционален градиенту высот (уклону) $q = -k(x, z, t) \frac{\partial z}{\partial x}$, приходим к известной диффузионной модели. В.Е.Каллинг рассматривал диффузионное уравнение с постоянным коэффициентом k , которое хорошо описывает долговременную эволюцию рельефа, его выполаживание, снос на выпуклых и аккумуляцию на вогнутых участках. В ряде работ (Souchez, 1964; Девдариани, 1967 а), хотя и довольно грубо, обосновывался линейный характер зависимости расхода материала от уклона для вязкого, вязко-пластичного течения и потока воды. В.Е.Каллингом (Culling, 1960, 1963) приведен широкий круг краевых задач для уравнения диффузии с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (I.1)$$

соответствующих определенным геоморфологическим ситуациям. Им также рассмотрен ряд пространственных задач. Решение всех этих

задач согласуется с данными, приведенными в одной фундаментальной работе по теории теплопроводности твердых тел (Карслоу, Егер, 1964). Диффузионные модели эволюции склонов развивались в работах советских (Девдариани, 1966, 1967 а, б, 1969; Трофимов, 1974; Есин, Дмитриев, 1975; Сергеева, Девдариани, 1976; Галкин и др. 1977) и зарубежных исследователей (Carson, Kirkby, 1977; Higano, 1971, 1972; Grenander, 1975 и др.). Используя широкий круг работ по этой тематике, мы сделали попытку создать общую единую концепцию диффузионных моделей в геоморфологии склонов.

§ I. Концепция теории поля в геоморфологии склонов

К изучению и моделированию эволюции рельефа (склонов) целесообразно подходить с позиции теории поля. Такой подход наилучшим образом вписывается в концепцию балансовых моделей рельефа. В геоморфологии, начиная с работы П.К.Соболевского (1932), утвердилось представление о рельефе, как о скалярном поле высот. Такое представление, хотя и оказалось очень плодотворным, ничего не сообщало о сущности развития рельефа - взаимодействии формы рельефа с рельефоформирующими процессами - и являлось лишь формой проявления этого взаимодействия. В связи с этим у нас появилась мысль о необходимости рассмотреть векторные поля потоков материала. Такие поля отражают динамику рельефоформирующих факторов и формируют искомый рельеф, т.е. приводят к тому или иному скалярному полю высот $z(x, y, t)$ (Куценко, Московкин, 1980). Рассмотрим в пространственном случае векторное поле расхода материала $\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j}$, где q_x и q_y - расходы материала по осям x, y на единицу их линейных размеров; \vec{i}, \vec{j} - орт-векторы. В общем случае, для больших территорий, векторное поле негладкое и разрывное, поэтому его следует рассматривать для локальных участков или осредненно для больших участков (фактически так и рассматривается твердый расход материала в системе уравнений (I)). Исследуя векторное поле расхода материала и анализируя баланс материала в элементарном объеме, придем к известному уравнению баланса материала, записанному в операторной форме (в терминах теории поля)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = 0. \quad (\text{I.I.I-I})$$

В общем случае, когда известны дивергенция и ротор вектора \vec{q} , последний по теореме разложения Гельмгольца представляется в виде суммы безвихревого (потенциального) и соленоидального (бездивергентного) полей $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = -\text{grad}\Psi + \text{rot}\vec{A}$ где $\text{rot}\vec{q}_1 = 0$, $\text{div}\vec{q}_2 = 0$.

При известных $\text{div}\vec{q}$ и $\text{rot}\vec{q}$ существуют эффективные методы отыскания функций \vec{q}_1 , \vec{q}_2 , а следовательно \vec{q} . Важный частный случай имеет место при $\text{div}\vec{q} = \text{rot}\vec{q} = 0$, тогда $\vec{q} = -\text{grad}\Psi$ и $\Delta\Psi = 0$, где Δ - лапласиан. В том случае, когда физические свойства потока материала и подстилающей поверхности постоянны, в качестве Ψ можно взять функцию $\Psi = -\kappa z$, $\kappa = \text{const}$, что фактически и делается при выводе линейного диффузионного уравнения для эволюции рельефа. В этом случае при $\vec{q}_2 = 0$ векторное поле расхода материала назовем потенциальным, а при условии $\text{div}\vec{q} = 0$ - лапласовым. Говорить о рельефе как о потенциальном поле (Сергеева, Девдариани, 1976) не совсем правильно. Рассматривая рельеф и его динамику, следует говорить о скалярном нестационарном поле высот $z(x, y, t)$ и о векторном поле расхода материала \vec{q} , которые взаимодействуют друг с другом и связаны уравнением (I.I.I-1). Вектор \vec{q}_2 , в случае $\Psi = -\kappa z$, $\kappa = \text{const}$, может обуславливаться, например, кориолисовыми и центробежными силами, но заметим, что этот вектор не влияет на уравнение (I.I.I-1), т.к. $\text{div}\vec{q}_2 = 0$. Кроме того, твердые расходы потоков материала, обусловленных силой Кориолиса, ничтожны по сравнению с градиентными потоками, обусловленными силой тяжести. Так как расходы потоков пропорциональны силам, то получим следующую оценку для отношения указанных расходов: g/a , где g - ускорение силы тяжести, a - ускорение силы Кориолиса. Для крипа, где скорости порядка 1 мм/год, это отношение очень велико ($g \gg a$).

Если физические свойства движущегося потока и подстилающей поверхности переменны $\kappa(x, y, t)$, то рассматривая потоки, обусловленные только силой тяжести, запишем вектор \vec{q} в виде:

$$\vec{q} = -\kappa(x, y, t) \text{grad} z. \quad (\text{I.I.I-2})$$

В плоском случае ($\kappa(x, y, t) = \kappa(x, t)$; $\text{grad} z = -\frac{\partial z}{\partial x}$) $\text{rot}\vec{q} = 0$, но уже в пространственном случае поле вектора \vec{q} перестает быть по-

тенциальным, т.к. $\operatorname{rot} \vec{q} = J(\kappa, z) = \frac{\partial \kappa}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial \kappa}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \neq 0$, где функция $J(\kappa, z)$ называется Якобианом. Подставляя выражение (I.I.I-2) в уравнение (I.I.I-1) приходим к уравнению диффузии с переменным коэффициентом.

Назовем поле вектора \vec{q} , удовлетворяющего выражению (I.I.I-2), квазипотенциальным, а при дополнительном условии $\operatorname{div} \vec{q} = 0$ — квазилапласовым (Куценко, Московкин, 1980).

Для последнего случая в Харьковском университете разработан эффективный аналоговый метод решения уравнения Лапласа с переменным коэффициентом с помощью аналоговой установки ЭГДА 9/60. При этом первоначально были выведены аналогии, необходимые для моделирования рельефа (Куценко, 1979; Куценко, Московкин, 1980 и др.).

Так как при выводе диффузионных уравнений развития рельефа (склонов) расход материала предполагается пропорциональным градиенту высот, то нестационарное непрерывное скалярное поле высот должно рассматриваться при моделировании достаточно гладким (дважды дифференцируемым).

Выражение (I.I.I-2) справедливо для изотропной среды (физические свойства материала не зависят от направления). В противном случае вместо скалярного коэффициента κ следует рассматривать тензорную величину и представить уравнение баланса материала в тензорной форме по аналогии с уравнением диффузии для анизотропной среды. Если главные оси тензора κ можно совместить с осями координат ($\kappa_{xy} = \kappa_{yx} = 0$), то может быть записано следующее уравнение (Лут, 1978)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{xx} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{yy} \frac{\partial z}{\partial y} \right). \quad (\text{I.I.I-3})$$

Вектор \vec{q} в этом случае представим в виде следующего выражения

$$\vec{q} = -\kappa_{xx} \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \kappa_{yy} \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}. \quad (\text{I.I.I-4})$$

Из последнего выражения видим, что вектор \vec{q} не направлен по градиенту при $\kappa_{xx} \neq \kappa_{yy}$. В противном случае ($\kappa_{xx} = \kappa_{yy}$) приходим к изотропной среде.

Рассмотрим для этого случая вывод двумерного уравнения диффузии для склонов, развивающихся под действием поверхностного стока (Трофимов, Московкин, 1980). Вектор расхода твердого стока запишем в виде

$$\vec{q} = \rho \vec{Q}, \quad (I.I.I-5)$$

где ρ — мутность потока, \vec{Q} — вектора жидкого расхода. Считая, что мутность пропорциональна уклону в направлении обратном градиенту, то есть производной по направлению, запишем ее в виде скалярного произведения градиента на единичный вектор в направлении стока (\vec{e})

$$\rho = -k \frac{\partial z}{\partial e} = -k (g \text{grad } z \cdot \vec{e}). \quad (I.I.I-6)$$

Используя свойство изотропности (направление стока (\vec{Q}) совпадает с направлением обратным направлению градиента), запишем единичный вектор в двух формах

$$\vec{e} = \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|} = -\frac{g \text{grad } z}{|g \text{grad } z|}, \quad (I.I.I-7)$$

где прямые скобки означают абсолютные величины (модули) векторов. Используя выражение (I.I.I-6; I.I.I-7), выведем выражение для \vec{q} в нужном нам виде

$$\vec{q} = k \vec{Q} |g \text{grad } z| = k |\vec{Q}| \vec{e} |g \text{grad } z| = -k |\vec{Q}| g \text{grad } z. \quad (I.I.I-8)$$

Подставляя конечное выражение для \vec{q} в уравнение баланса (I.I.I-1), получим искомое уравнение в операторной и обычной формах

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \text{div}(k |\vec{Q}| g \text{grad } z), \quad (I.I.I-9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k |\vec{Q}| \frac{\partial z}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k |\vec{Q}| \frac{\partial z}{\partial y}). \quad (I.I.I.10)$$

В первом приближении (особенно для задач долговременной эволюции склонов) можно записать модуль вектора \vec{Q} через площадь водосбора по известной формуле

$$|Q| = \delta IF, \quad (I.I.I-II)$$

где δ , I - коэффициент стока и интенсивность осадков, F - площадь водосбора в горизонтальной проекции (в проекции на плоскость Q_{xy}).

Таким образом, при решении уравнений (I.I.I-10; I.I.I-II) встает проблема построения локальных водосборов в каждой точке (x, y) области решения задачи развития рельефа. Она принципиально решается с помощью построения алгоритма, позволяющего в каждой точке проводить две градиентные линии до пересечения с границей общего водосбора, и подсчета площади, заключенной между этими линиями и границей общего водосбора. Два других, более точных приближения будут рассмотрены в главе, посвященной геомеханическим моделям развития склонов (ч. I, гл. 2, § 2). Перейдем теперь к рассмотрению аналитических решений двумерных краевых задач в передвижных областях.

§ 2. Краевые двумерные задачи I и II рода в неподвижных областях

Как указывалось ранее, в пространственной балансовой диффузионной модели (I.I.I-1; I.I.I-2) фактор тектонических движений может быть учтен в правой части уравнения баланса (как и в плоском случае) (Девдариани, 1967 б). Приведем решение стационарной модели (I.I.I-1; I.I.I-2) при $k(x, y, t) = \text{const}$ с учетом тектонического фактора постоянной интенсивности ($v > 0$). В этом случае получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{v}{k}. \quad (I.I.2-1)$$

Делая замену переменных

$$z = -\frac{v}{4k}(x^2 + y^2) + f(x, y), \quad (I.I.2-2)$$

придем к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (I.I.2-3)$$

Граничное условие обычного типа $z(x,y)|_{\Gamma} = 0$, соответствующее базису денудации, перейдет в ненулевое граничное условие для функции f : $f(x,y)|_{\Gamma} = \frac{\nu}{4k} (x^2 + y^2)|_{\Gamma}$. Так, если $\Gamma = \gamma = \lambda(x)$, то

$$f(x,y)|_{\Gamma} = \frac{\nu}{4k} (x^2 + \lambda^2(x)). \quad (I.I.2-4)$$

Методы решения задачи (I.I.2-3; I.I.2-4) хорошо разработаны. Например, когда граница Γ является окружностью радиуса R т.е. $x^2 + y^2 = R^2$, тогда из (I.I.2-4) следует, что

$$f(x,y)|_{\Gamma=x^2+y^2=R^2} = \frac{\nu}{4k} R^2. \quad (I.I.2-5)$$

Задача (I.I.2-4; I.I.2-5) заменой $\theta = f - \frac{\nu}{4k} R^2$ сводится к следующей задаче

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0; \quad \theta|_{\Gamma} = 0, \quad (I.I.2-6)$$

решение которой по одному из свойств гармонической функции имеет тривиальный вид $\theta(x,y) = 0$. Таким образом, задача (I.I.2-4; I.I.2-5) имеет решение

$$f = \frac{\nu}{4k} R^2. \quad (I.I.2-7)$$

Подставляя решение (I.I.2-7) в выражение (I.I.2-2), получим решение исходного уравнения (I.I.2-1) при нулевом граничном условии на окружности $x^2 + y^2 = R^2$:

$$z(x,y) = \frac{\nu}{4k} (R^2 - x^2 - y^2). \quad (I.I.2-8)$$

Это решение аналогично плоскому решению стационарной задачи $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{k}$, имеющему вид $z = \frac{\nu}{2k} (l^2 - x^2)$ (Девдариани, 1967 б).

Форма рельефа (склона) по уравнению (I.I.2-8) имеет куполообразный вид, представляющий собой параболоид вращения с максимальной высотой формы в начале координат, равной $z_{\max} = \nu R / 4k$.

Нестационарные аналитические решения для модели (I.I.1-1; I.I.1-2) могут быть получены только в редких случаях. Так, В.Е.Каллинг (Culling, 1963) было приведено решение неста-

ционарной задачи при $k = \text{const}$ с произвольным начальным условием $z(x, y, 0) = \psi(x, y)$ и с нулевыми граничными условиями первого рода на сторонах прямоугольника $0 < x < l$; $0 < y < a$. Приведем решение такой задачи с граничными условиями

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=a} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=l} = z(0, y, t) = 0. \quad (\text{I.I.2-9})$$

Здесь первые два условия соответствуют линиям днищ (тальвегов) балок (оврагов) или долин; два последних условия соответствуют базису денудации (линия берега) и водоразделу. Решая задачу методом разделения переменных, получим

$$z(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{n,m} \exp\left[-k\pi^2 t \left(\frac{(\frac{1}{2}+n)^2}{l^2} + \frac{m^2}{a^2}\right)\right] \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2}+n\right)x \cos \frac{\pi}{a} my, \quad (\text{I.I.2-10})$$

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \eta) \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2}+n\right)\xi \cos \frac{\pi}{a} m\eta \, d\xi \, d\eta. \quad (\text{I.I.2-11})$$

В стадии регулярного режима, когда члены ряда, начиная со второго, пренебрежимо малы, решение примет вид

$$z_{\text{рег.}}(x, y, t) = C_{0,0} \exp\left[-\frac{k\pi^2}{4l^2} t\right] \sin \frac{\pi}{2l} x, \quad (\text{I.I.2-12})$$

$$C_{0,0} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \eta) \sin \frac{\pi}{2l} \xi \, d\xi \, d\eta, \quad (\text{I.I.2-13})$$

т.е. решение (I.I.2-10) со временем перестает зависеть от y и поверхность рельефа приобретает цилиндрическую форму.

Для более сложных областей (границ) получить аналитические решения затруднительно и не всегда возможно, поэтому здесь целесообразно строить численные алгоритмы. Такой алгоритм для задачи расчета твердого стока с бассейна р.Шартлы в оз.Байкал был приведен в одной из работ (Галкин и др., 1977). Здесь область решения задачи при постоянном коэффициенте k аппроксимировалась симметричной грушевидной формой, состоящей из четырех прямолинейных отрезков. При таких конкретных расчетах встает проблема количественной оценки коэффициента денудации k (о чем речь пойдет в заключении рассмотрения балансовых диффузионных моделей).

В рамках пространственных задач развития рельефа существует специфичный круг осесимметричных задач. Рассматривая эволюцию пространственных осесимметричных форм на примере округлых холмов, В.Е.Каллинг (Culling, 1963) пришел к уравнению развития рельефа в цилиндрических координатах при $\kappa = \text{const}$

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (I.1.2-I4)$$

Им, к примеру, приведено решение этого уравнения при $z(r, 0) = \psi(r)$, $z(a, t) = 0$, $0 < r < a$.

Некоторые новые аналитические решения для эволюции осесимметричных форм рельефа в бесконечной области $0 < r < \infty$ могут быть получены как с учетом эндогенного фактора $F(r, t)$, так и без него на основе известных математических решений (Будак и др., 1972).

§ 3. Краевые одномерные задачи I и II рода в неподвижных областях

Как уже говорилось выше, коэффициент κ в уравнении диффузии в общем случае зависит от пространственных координат и времени. Изменчивость его во времени регулирует скорость выполаживания склона, что обуславливается изменением притекающей извне энергии на поверхность склона, другими словами зависимость $\kappa(x, y, t)$ служит регулятором экзогенного (склонового) процесса. Так, для склонов, формирующихся плоскостным смывом, изменение κ во времени может означать изменение, в среднем, интенсивности выпадения осадков при осушении или увлажнении климата. Например, зависимость $\kappa(x, t) = \kappa_1(x) \exp(-\lambda t)$ может означать постепенный переход от влажного климата к сухому. Заметим, что эта зависимость с учетом квадратичного задания функции $\kappa_1(x)$ не приводит к полному выравниванию склона, благодаря затухающей по времени экспоненте (Московкин, Трофимов, Бабанов, 1975).

Процесс развития геосистем, протекающий согласно свойствам ее вещества, под действием или с участием неизменного внешнего источника энергии называют саморазвитием (Арманд, 1975). Согласно этому определению, диффузионная модель при коэффициентом

те k , не зависящем от времени, описывает процесс саморазвития склона. При этом, конечно, полагаем, что взаимодействия на границах склона происходят с постоянной интенсивностью. Отметим, что мы здесь не отождествляем приток энергии извне на поверхность склона с интенсивностью склонового (экзогенного) процесса, т.к. последняя существенно зависит от формы склона (уклонов).

Саморазвитие, в указанном выше понимании, приводит к старению и смерти формы (Арманд, 1975). В диффузионной модели это соответствует предельному профилю склона.

Ранее был решен большой круг плоских задач эволюции склонов при постоянном коэффициенте уравнения диффузии (Девдариани, 1966, 1967а; Culling, 1963). При решении этих задач методом разделения переменных (метод Фурье) развитие рельефа представлялось в виде ряда Фурье по тригонометрическим функциям. При различных коэффициентах уравнения диффузии, зависящих от пространственных переменных, могут получаться различные ряды Фурье. Они могут иметь значение и в картографии при аппроксимации рельефа различными функциями. Обратим внимание, что всюду далее в одномерных задачах вместо z будем писать y .

При решении плоских задач развития склонов на ограниченном отрезке, с переменным по x коэффициентом, нами было получено два типа рядов Фурье: 1. Ряды Фурье-Бесселя возникали при $k(x) = ax + b$ и $k(x) = ax^n$, $n \neq 2$; 2. Ряды Фурье-Лежандра возникали при $k(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

В одной из наших работ (Трофимов, Московкин, 1976а) было дано решение краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_0 x \frac{\partial y}{\partial x}) = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad y(l, t) = 0, \quad y(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (I.I.3-I)$$

которая соответствует случаю развития склона под действием плоскостного смыва, когда при выпадении на склон осадков расходы воды возрастают линейно вниз по склону. Здесь предположено, что при одинаковых физических свойствах поверхности склона, твердый расход пропорционален жидкому при каждом уклоне. Значение уклона влияет только на величину мутности потока: $q = \rho Q$

$$Q = \omega I x, \quad \rho \sim \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{где } \omega - \text{средний коэффициент стока, } I \cdot$$

средняя интенсивность осадков (здесь и всюду: если это специально не оговорено, подразумевается осредненная климатическая ситуация).

Решение задачи (I.I.3-I) имеет вид

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\kappa_0 \mu_n^2 t}{4e}\right) J_0(\mu_n \sqrt{x/e}), \quad (I.I.3-2)$$

$$c_n = \left\{2/[J_1(\mu_n)^2]\right\} \int_0^1 z \varphi(\ell z^2) J_0(\mu_n z) dz,$$

$$J_0(z) = 0,$$

где μ_n — корни уравнения Бесселя, Регулярное решение при больших t получается из последнего уравнения

$$y(x,t)_{\text{рег.}} = c_1 \exp\left(-\frac{\kappa_0 \mu_1^2 t}{4e}\right) J_0(\mu_1 \sqrt{x/e}). \quad (I.I.3-3)$$

Последнее показывает, что профиль склона со временем, сохраняя выпуклую форму бесселевой функции, понижается и выполаживается; в дальнейшем все более замедленное стремится к горизонтальной поверхности.

Более сложной для решения и интерпретации является следующая модель

$$\frac{\partial}{\partial x} [(ax^2 + bx + c) \frac{\partial y}{\partial x}] = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (I.I.3-4)$$

$y(x,0) = f(x)$, $x_1 < x < x_2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a < 0$. В точках x_1, x_2 требуется ограниченность функции y , т.к. они являются особыми точками обыкновенного дифференциального гипергеометрического уравнения, получающегося из (I.I.3-4) с помощью разделения переменных. Решение задачи (I.I.3-4) получено в виде разложения в ряд Фурье-Лежандра (Московкин, Трофимов, Бабанов, 1975, : Трофимов, Московкин, 1976б)

$$y(z,t) = \sum_{n=0,1}^{\infty} c_n P_n(z) \exp[a(n+1)nt], \quad (I.I.3-5)$$

$$c_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 f(z) P_n(z) dz,$$

где $x = x_1 + (x_2 - x_1) \left(\frac{1-z}{2}\right)$, $P_n(z)$ — полиномы Лежандра. Из послед-

него получим регулярное и предельное решения

$$Y_{\text{рег.}}(x, t) = C_0 + C_1 \left[1 - \frac{2(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \exp(2at) \right], \quad (\text{I.I.3-6})$$

$$Y_{\text{пр.}} = C_0. \quad (\text{I.I.3-7})$$

Таким образом, профиль склона в данной модели в стадии регулярного режима имеет прямолинейную форму и, все более выполаживаясь, стремится к горизонтальной поверхности (Трофимов, Московкин, 1976а). В этой модели квадратичная функция аппроксимировала нарастание расхода воды в верхней части склона во время выпадения осадков и дальнейший спад расхода в его нижней части за счет инфильтрации (Трофимов, Московкин, 1976а). С помощью выражения для C_n (I.I.3-5) при $n=0$ можно определить высоту поверхности предельного выравнивания

$$Y_{\text{пр.}} = C_0 = \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (\text{I.I.3-8})$$

Она является средней высотой начального профиля склона. Таким образом, последнее выражение показывает, что по мере эволюции профиля склона площадь криволинейной трапеции под кривой профиля $y(x, t)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ остается постоянной. Для реального склона это будет говорить о равенстве величины сноса материала с верхней части величине аккумуляции в нижней. Так как при рассмотрении одного склона точка его основания передвигается за счет разрастания делювиального шлейфа и не является закрепленной, то данная задача с закрепленными границами ($x_1, x_2 = \text{const}$), естественно, описывает развитие системы двух симметрично-сопряженных выпукло-вогнутых склонов (рис. I). Происходит как бы засыпание ложбины (Московкин, Трофимов, 1980а).

Диффузионное уравнение может применяться и для решения прикладных задач расчета деформации склона, эрозии за конкретный паводок (дождь). Для этого необходимо детализировать коэффициент уравнения для конкретной ситуации. Временная зависимость в этом коэффициенте $k(x, t) = k_1(x)k_2(t)$ будет соответствовать характеру изменения жидкого расхода во времени (гидрографу). Расчет эрозии может быть сделан по относительному понижению поверхности склона: $V = \int_0^{x_1} [y(x, \tau) - y(x, 0)] dx$, где $y(x, \tau)$ — решение диффу-

зионной модели на момент окончания паводка ($t = \tau$) ; $y(x, 0)$ – начальный профиль склона; x_1 – точка пересечения профилей $y(x, \tau)$ и $y(x, 0)$, т.е. решение уравнения $y(x, \tau) = y(x, 0)$.

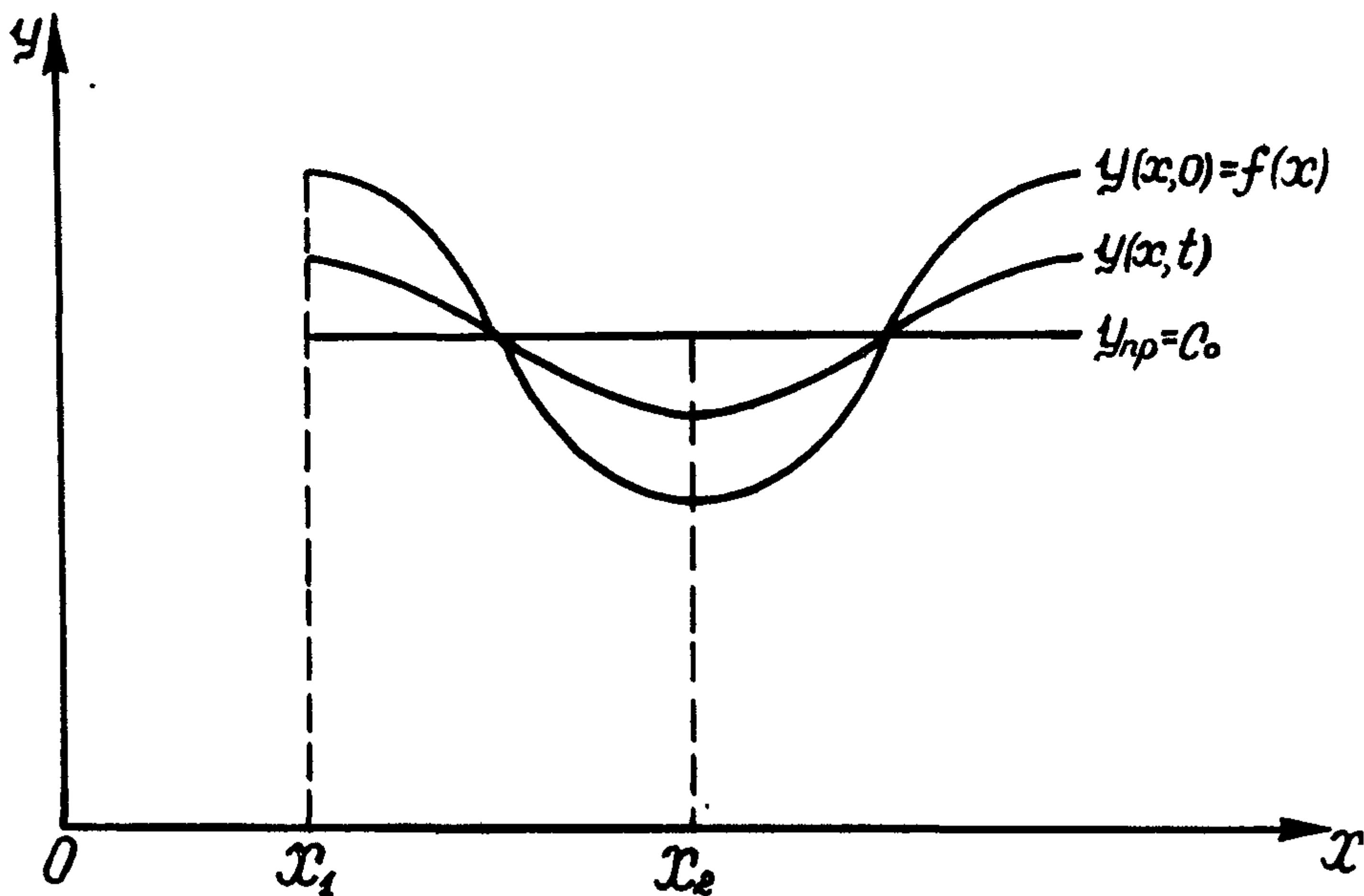


Рис. I. К задаче развития двух симметрично сопряженных выпукло-вогнутых склонов.

Так же, как и в случае долговременной эволюции таких склонов, когда коэффициент денудации k принимается осредненным ($k_2(t) = \text{const}$) или сглаженным по времени ($k_2(t)$ – непрерывная слабоизменяющаяся функция времени), может рассматриваться и стохастический подход, когда $k_2(t)$ представляет собой случайную функцию времени (Трофимов, Московкин, Хайрутдинов, 1980). Последнее соответствует, например, случайному воздействию на склон фактора водной эрозии (дождевых и снежных паводков). Зная закон распределения функции $k_2(t)$, можно говорить о законе распределения решения уравнения диффузии (последнее может быть получено методом Фурье). Так, воздействие ливней на рельеф можно рассматривать как дискретный процесс, где вероятность наступления дискретных событий подчинена распределению Пуассона (Хьюит, 1976).

Другой подход к заданию функции $k_2(t)$ может быть связан с заданием жидкого расхода, рассматриваемого как вход в систему: жидкий сток-эрозия, в виде $X_t = \bar{X}_t + \alpha_t$, где \bar{X}_t - детерминированная периодическая компонента, α_t - стационарная стохастическая компонента, \bar{X}_t и α_t статистически независимы друг от друга (Sharma, Hines, Dickinson, 1979).

Теперь, опираясь на уравнение баланса (I) и уравнение диффузии (I.I), рассмотрим основные пути развития первоначально прямолинейного склона (Московкин, Трофимов, 1980а). Если основание такого склона не подрезается потоком (боковая эрозия или абразия), то материал, сносимый с верхних частей склона, аккумулируется у его основания и происходит его выполаживание. Это следует также из решения диффузионной модели на полубесконечном отрезке $(0, \infty)$. При жестко закрепленном водоразделе и базисе денудации $y(0, t) = H, y(\ell, t) = 0$, решение уравнения диффузии с постоянным коэффициентом (I.I) дает тот же первоначальный прямолинейный профиль (Culling, 1963). В действительности это соответствует случаю транзитного склона, когда материал поступает на него с вышележащего склона и удаляется с той же интенсивностью (потоком) из точки $x = \ell$.

Если задать граничные условия в виде $\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, y(\ell, t) = 0$, соответствующие нулевому расходу на водоразделе и нулевому базису денудации, то, как известно, решение уравнения (I.I) приведет к выпуклому профилю (Девдариани, 1967а). Здесь выпуклость образуется в верхней части склона за счет того, что весь сносимый со склона материал уносится потоком и нет условий для формирования вогнутого аккумулятивного шлейфа.

Если точка основания склона подрезается потоком и перемещается в сторону водораздела, то также образуется выпуклый склон, однако здесь выпуклость формируется у основания склона (случаи изменяющегося базиса денудации будут рассмотрены ниже в §§ 4 - 6 этой главы).

В связи с анализом основных случаев развития прямолинейного склона возникает вопрос, может ли первоначально прямолинейный пологий склон отступать параллельно себе и в каких случаях это возможно. Качественно этот вопрос рассмотрен А.В. Поздняковым (1976), показавшим, что в этой ситуации интенсивность

сноса материала должна увеличиваться сверху вниз по склону, т.к. процессы денудации должны удалять как сносимый в нижнюю точку материал, так и материал, находящийся в этой точке. Более строго, при решении этого вопроса, следует исходить из уравнения баланса (I). Из последнего следует, что для параллельного отступления прямолинейного склона необходимо линейное нарастание расхода материала $q(x) = ax + q_0$. Действительно, подставляя это выражение для расхода в уравнение (I), решая его, получим:

$$y(x,t) = -at + H(1 - [x/l]), \quad (I.I.3-9)$$

где $y(x,0) = H(1 - [x/l])$ — начальный профиль склона. Как видно из выражения (I.I.3-9), первоначально прямолинейный профиль склона отступает параллельно себе.

В природе подобный случай для всего склона (от его водо-раздела до базиса денудации) реализуется довольно редко, т.к. для этого необходимо линейное нарастание расхода материала на всем протяжении склона. Это может иметь место для ограниченно-го отрезка времени и только для области сноса пологого склона. Подобное утверждение справедливо чаще всего для делювиального склона, для которого во время дождя имеет место линейное нарастание жидкого расхода, начиная от точки образования стока; отсюда вполне вероятно и линейное нарастание твердого расхода при одинаковом уклоне и не изменяющихся по профилю физических свойств поверхности склона. Рассматривая балансовые диффузионные модели делювиальных склонов, необходимо прежде всего проанализировать полученные М.Карсоном и М.Киркби (Carson, Kirkby, 1972) результаты, которые к тому же требуют некоторого пересмотра и уточнения. Эти авторы для случая воздействия на склон водного потока используют наиболее общий вид для твердого расхода

$$q = ax^m \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \right)^n \quad (I.I.3-10)$$

и рассматривают "характеристическое решение" уравнения (I) при выражении (I.I.3-10)

$$-\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ax^m \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \right)^n \right], \quad (I.I.3-11)$$

и граничных условиях $y(0,t) = H, y(\ell,t) = 0$. Под характеристическим решением они понимают решение, которое перестает зависеть от начальной формы склона и от времени, т.е. под ним следует понимать предельное решение $\lim_{t \rightarrow \infty} y(x,t)$. Разделяя переменные, приближенно интегрируя уравнение, зависящее от x , выбирая параметр разделения так, чтобы выполнялись граничные условия, при этом, однако, учитывая решение уравнения, зависящего от времени t . В процессе такой процедуры, по их мнению, получается приближенное решение задачи. Однако такая процедура, на наш взгляд, не может считаться удовлетворительной, так как предельное решение правильнее находить из уравнения (I.I.3-II) как стационарное, положив $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$. Проведем это, получим

$$y(x) = H \left[1 - \left(\frac{x}{\ell} \right)^{1 - \frac{m}{n}} \right]. \quad (\text{I.I.3-I2})$$

В анализируемой выше работе решение имело аналогичный вид, но с показателем степени $(-m/n)$.

При $m = 0, n = 1$ уравнение (I.I.3-II) переходит в линейное уравнение диффузии и выражение (I.I.3-I2) дает следующее решение

$$y(x) = H (1 - [x/\ell]), \quad (\text{I.I.3-I3})$$

которое совпадает с предельным решением уравнения (I.I), полученным при переходе к пределу при $t \rightarrow \infty$ в общем решении задачи (Culling, 1963).

Анализ уравнения (I.I.3-I2) дает следующие результаты (Есин, Московкин, 1980):

1. Прямолинейные профили склонов развиваются при $m = 0$ и любом n (по физическому смыслу $n > 0$).

2. Выпуклый профиль возникает при $(1 - \frac{m}{n}) > 1$ или $m < 0$, что соответствует убыванию расхода воды вниз по склону (малореальный случай для склонов).

3. Вогнутый профиль формируется при $(1 - \frac{m}{n}) < 1$ или $m > 0$. Здесь надо иметь в виду, что решение (I.I.3-I2) справедливо только при $n > m$, поэтому, например, при $n = 1$ это решение не охватывает реальные случаи при $m > 1$, т.к. в этих случаях

$y(x=0) = -\infty$ не удовлетворяет граничному условию. Вполне возможно, что здесь $\lim_{t \rightarrow \infty} y(x,t) = 0$ везде на отрезке $[0, \ell]$, кроме точки $x=0$.

§ 4. Краевые одномерные задачи I рода в подвижных областях (концепция подрезаемых с постоянной скоростью склонов)

Концепцию подрезаемых с постоянной скоростью склонов (моделей взаимодействия: склоновый процесс - абразия (или боковая эрозия реки)) будем строить на основе диффузионной модели; взаимодействие же на границе склона, где он подрезается потоком в результате абразии или боковой эрозии реки, будем моделировать граничными условиями первого рода на подвижной границе.

Здесь следует вести речь о сложном взаимодействии: форма склона - склоновые процессы - абразия (боковая эрозия).

При качественном рассмотрении развития подрезаемых склонов Крикмей (Crickmay, 1959) исходил из неравноценности факторов абразии (боковой эрозии) и денудации склонов. Ведущую роль он отводил первому фактору, что и определяло процесс параллельного отступления склона по его концепции. В общем случае следует учитывать совместное действие обоих факторов. А.Е.Шайдеггер (1964), при построении подрезаемой кинематической модели крутого денудационного склона, учитывал фактор подрезания в численном алгоритме. В.Е.Каллинг (Culling, 1963), при рассмотрении развития склонов медленного течения материала, пришел к диффузионной модели отступающего со скоростью c всего склона полностью

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c \frac{\partial y}{\partial x} \quad (I.I.4-I)$$

Аналогичное уравнение впоследствии рассматривал и М.Хирано (Hirano, 1972).

В.Е.Каллинг решил это уравнение для конечной области $0 < x < \ell$, движущейся с постоянной скоростью c при краевых условиях $y(0,t) = 0$, $y(\ell,t) = H$, $y(x,0) = f(x)$.

Наши исследования показывают, что наиболее предпочтительным является учет подрезания только основания склона. Этот эффект следует учитывать через нулевое граничное условие на подвижной границе; в таком случае приходим к следующей краевой задаче (Трофимов, Moskovkin, 1976)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \forall t \leq x < +\infty, \quad y(\forall t, t) = 0, \quad y(x, 0) = f(x), \quad (I.I.4-2)$$

где \forall — постоянная скорость отступления точки основания склона.

Решение (I.I.4-2) получим методом Фурье в виде (Трофимов Moskovkin, 1976)

$$y(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{\forall^2}{4\kappa}t - \frac{\forall}{2\kappa}x\right)}{2(\pi\kappa t)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(z) \exp\left(\frac{\forall z}{2\kappa}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(z-x+\forall t)^2}{4\kappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(z+x-\forall t)^2}{4\kappa t}\right] \right\} dz. \quad (I.I.4-3)$$

Теперь рассмотрим случай развития первоначально прямолинейного склона. Для этого подставим начальное условие $y(x, 0) = f(x) = ax$ в общее решение (I.I.4-3) и приходим к следующему результату (Есин, Московкин, 1980)

$$y(x, t) = \frac{a}{2} \left\{ 2\left(\frac{\kappa t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) + x \left[1 + \theta\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right] - \exp\left[-\frac{\forall}{\kappa}(x - \forall t)\right] \left[2\left(\frac{\kappa t}{\pi}\right)^{1/2} \chi \right. \right. \\ \left. \left. \chi \exp\left[-\frac{(2\forall t - x)^2}{4\kappa t}\right] + (2\forall t - x) \left(1 - \theta\left(\frac{x - 2\forall t}{2\sqrt{\kappa t}}\right)\right) \right] \right\}, \quad (I.I.4-4)$$

где $\theta(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-z^2) dz$.

Асимптотическое решение (при больших x) имеет тот же первоначальный вид $y(x, t) \approx ax$. Из (I.I.4-4) уже можно получить уклон профиля склона в его основании (при $x = \forall t$)

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=\forall t} = \frac{a}{2} \left\{ \frac{\forall^2}{\kappa} t \left[1 + \theta\left(\frac{\forall}{2}\sqrt{\frac{t}{\kappa}}\right) \right] + \frac{\forall t}{\sqrt{\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{\forall^2}{4\kappa}t\right) + 2 \left(1 + \theta\left(\frac{\forall}{2}\sqrt{\frac{t}{\kappa}}\right) \right) \right\}, \quad (I.I.4-5)$$

откуда следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=\forall t} = \infty$.

Решение показывает, что образуется выпуклость в основании склона, уклон которого со временем возрастает (чем больше скорость

подрезания v , тем быстрее идет нарастание уклона), и со временем склон может потерять устойчивость в своей нижней части. Заметим, что не существует частного решения задачи (I.I.4-2) $y(x,t) = a(x - vt)$, соответствующего стадии параллельного отступления прямолинейного склона, т.к. это частное решение не удовлетворяет условию задачи (I.I.4-2) ни при каких параметрах a , v и k . Отсюда следует, что все склоны, отступающие строго параллельно себе, сохраняя при этом свою прямолинейность, не могут удовлетворить диффузионной модели с постоянным коэффициентом. Ранее (§ 3) мы показали, что для параллельного отступления прямолинейного склона необходимо линейное нарастание расхода материала вниз по склону, что приведет к диффузионной модели с переменным по x коэффициентом денудации. Заметим, что решение $a(x - vt)$ является основным в кинематических моделях А.Е.Шайдегера, описывающих развитие крутых денудационных склонов (ч. I, гл.3).

Для аналитического решения уравнения (I.I.4-4) и получения конкретных результатов по описанию характера развития подрезаемых склонов нами проведены численные расчеты на ЭВМ М-220. Расчеты велись при трех параметрах v : $v_1 = 0,001$ м/год; $v_2 = 0,01$ м/год; $v_3 = 0,1$ м/год и одном коэффициенте денудации $k = 0,1$ м²/год. Все параметры соответствуют возможным действительным вариантам. Начальный профиль склона задавался в виде $y(x, 0) = 0,4x$.

Полученные результаты (рис.2) показывают на образование выпуклой нижней части склона, что следовало и ранее из выражения для уклона (I.I.4-5). Подрезание со скоростью $v_1 = 0,001$ м/год оказывает свое влияние на профиль склона при $t_1 = 20000$ лет примерно на $90 \text{ м} - 20 \text{ м} = 70 \text{ м}$, а при $x > 90 \text{ м}$ прямолинейный начальный профиль практически остался без изменения. При $t_2 = 40000$ лет область воздействия подрезания увеличивается до 120 м . При $v_2 = 0,01$ м/год аналогичные цифры для моментов времени $t_1 = 2000$ лет и $t_2 = 4000$ лет уменьшаются до 20 и 30 метров, а при $v_3 = 0,1$ м/год очень быстро образуется клиф и уже через несколько метров по горизонтали от основания склона его профиль совпадает с первоначальным. Заметим, что скорость роста крутизны в основании склона со временем затухает и клиф стремится к вертикальному положению.

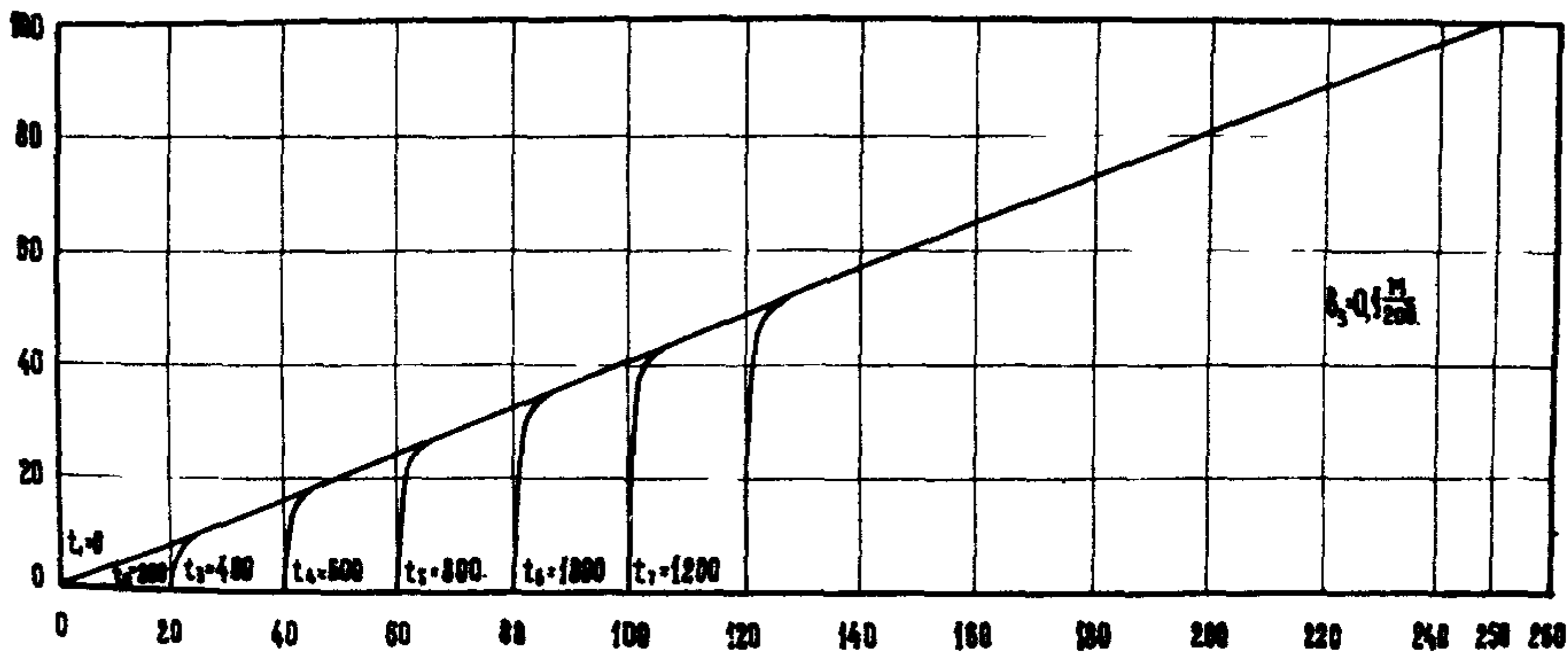
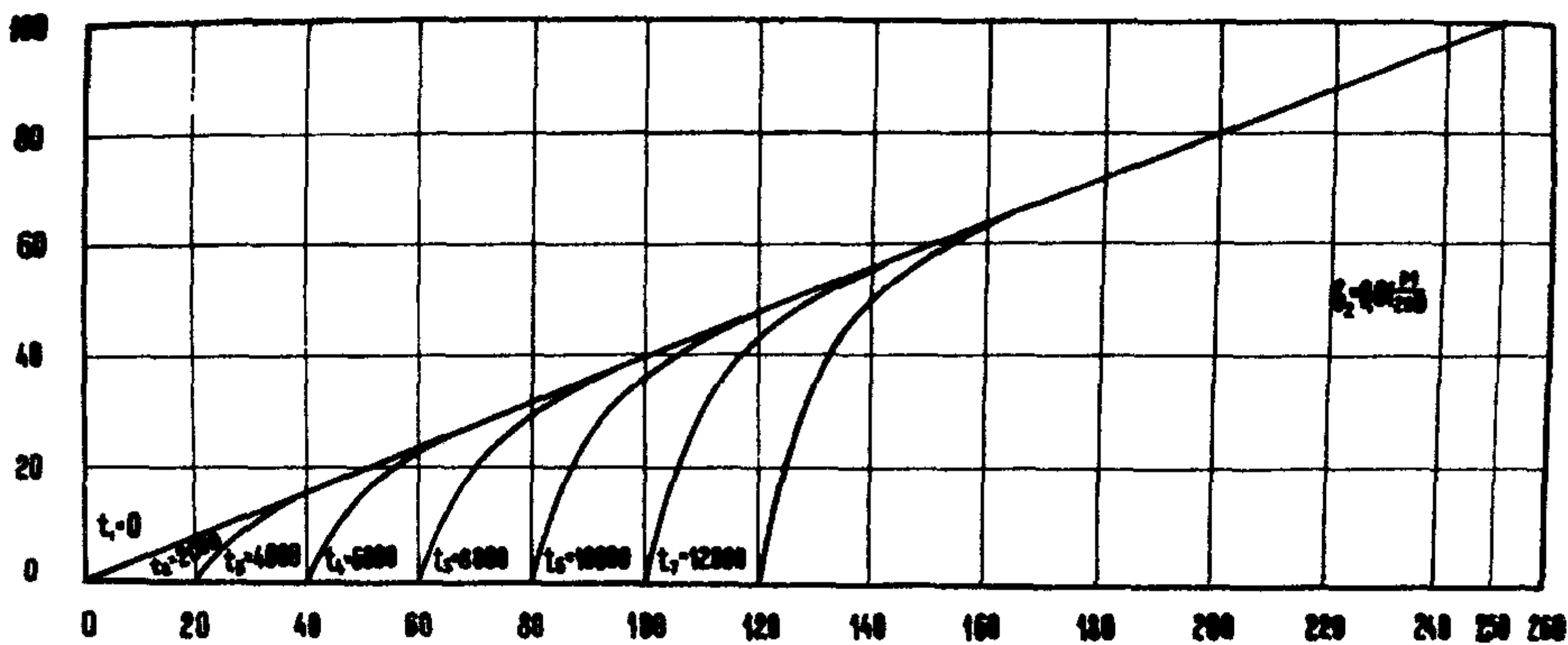
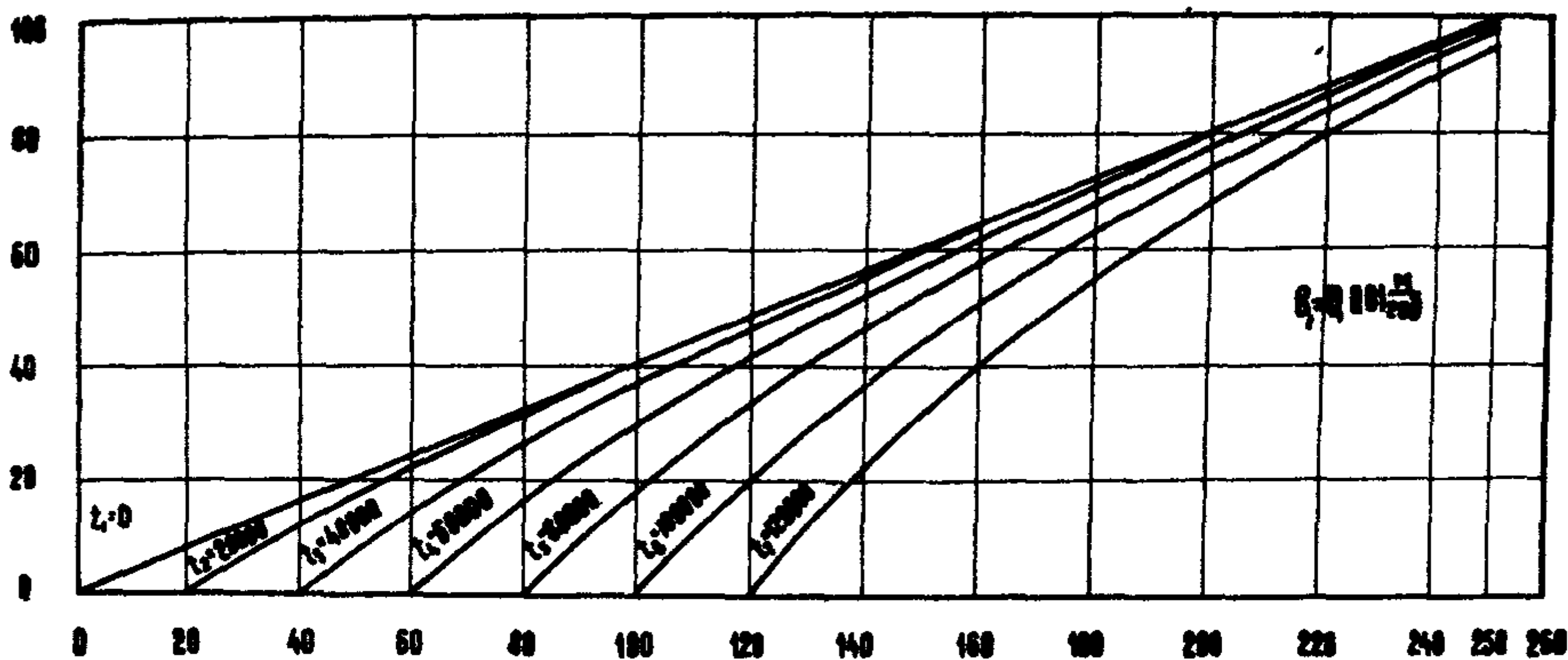


Рис. 2. Развитие первоначального прямолинейного подрезаемого склона по диффузионной модели.

Наряду с горизонтальным перемещением базиса денудации рассмотрим случай его вертикального перемещения.

В.Е.Каллинг (Culling, 1963) было приведено решение следующей задачи:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad y(l, t) = \Phi(t), \quad y(x, 0) = f(x). \quad (I.I.4-6)$$

На частный случай стационарного решения этой задачи при эрозионном врезе с постоянной скоростью β в первоначально горизонтальную поверхность $y(x, 0) = 0$ указывают М.Карсон и М.Киркби (Carson, Kirkby, 1972)

$$y = -\beta t + \frac{\beta(x^2 - l^2)}{2k}. \quad (I.I.4-7)$$

Ф.Анерт (Ahner, 1973), при машинном моделировании этого процесса, исходя из своей комплексной модели (она будет рассмотрена подробнее в ч.2, гл.2, § 4) для случая вязкопластичного течения материала, также приходит к установившемуся выпуклому профилю. Эти авторы полемизируют здесь с В.Пенком (1961), который предполагал, что в случае понижения базиса денудации с постоянной скоростью образуется прямолинейный профиль склона. Здесь мы имеем ту же ситуацию, что и при рассмотрении горизонтального перемещения базиса денудации. Ясно, что положение В.Пенка хотя и не универсально, но вполне реально, например, при образовании и развитии крутого денудационного (осыпного) склона.

Рассмотрим наиболее общую задачу понижения двух базисов денудации с различными, но постоянными скоростями ($\beta, \gamma = \text{const}$)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y(0, t) = -\beta t, \quad y(l, t) = -\gamma t, \quad y(x, 0) = 0. \quad (I.I.4-8)$$

Проанализируем случай $\beta > \gamma$, когда скорость понижения левого базиса денудации больше, чем правого (случай $\beta < \gamma$ рассматривается аналогично). Делая серию замен, решение задачи (I.I.4-8) получим в виде (Есин, Московкин, 1980)

$$y(x, t) = \frac{(\beta - \gamma)tx}{l} + \frac{(\beta - \gamma)x(x^2 - l^2)}{6kl} + \frac{\beta lx}{2k} - \frac{\beta x^2}{2k} - \beta t +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 k t}{\ell^2}\right) \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

$$a_n = \int_0^{\ell} \left[\frac{\beta}{k\ell} \xi(\xi - \ell) - \frac{(\beta - \gamma)\xi(\xi^2 - \ell^2)}{3k\ell^2} \right] \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi, \quad (\text{I.I.4-9})$$

отсюда установившееся решение имеет вид

$$y(x, t) = \frac{(\beta - \gamma)}{\ell} t x + \frac{(\beta - \gamma)x(x^2 - \ell^2)}{6k\ell} + \frac{\beta \ell x}{2k} - \frac{\beta x^2}{2k} - \beta t. \quad (\text{I.I.4-10})$$

Рассмотрим два случая

$$\text{I. При } \gamma = \beta, \quad y = \frac{\beta x}{2k}(\ell - x) - \beta t. \quad (\text{I.I.4-11})$$

В этом случае образуется выпуклая параболическая форма с высотой $h = \beta \ell^2 / 8k$. Таким образом, чем выше скорость понижения базиса денудации и размер формы (ℓ), а также, чем меньше коэффициент денудации, тем больше устанавливается высота этой формы.

2. $\beta > \gamma$. В этом случае водораздел формы перемещается вправо до момента достижения точки $x = \ell$ (при $\beta < \gamma$ водораздел перемещается влево). Найдем закон перемещения точки водораздела ($\frac{\partial y}{\partial x} = 0$)

$$x_{1,2} = \frac{\ell \beta}{\beta - \gamma} \pm \left(\frac{\gamma \ell^2 \beta}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{\ell^2}{3} - 2kt \right)^{1/2}. \quad (\text{I.I.4-12})$$

Так как $\beta > \gamma$, то $\frac{\beta}{\beta - \gamma} > 1$ и в формуле (I.I.4-12) выбирается знак минус. Исчезновение локального максимума (I.I.4-10) (когда водораздел достигает точки $x = \ell$) на отрезке $[0, \ell]$ произойдет через время

$$t^* = \frac{\ell^2}{6k} \left(\frac{2\gamma + \beta}{\beta - \gamma} \right), \quad (\text{I.I.4-13})$$

т.е. чем больше размер формы, а также меньше коэффициент денудации и разность между скоростями понижения базисов денудации, тем больше времени необходимо для исчезновения этого локального максимума (время t^* отсчитывается с момента установления решения (I.I.4-10), а время установления этого решения может оцениваться по общему решению (I.I.4-9)).

Аналогичное перемещение водораздела вправо получил Ф.Анерт (Ahner, 1973) при машинном моделировании такого процесса по

своей модели для случая сложного смыва: $R = k \sin \alpha (1 + d^m), m < 1$;

d – расстояние от водораздела вниз по склону. По его модели устанавливаются слабоогнутый профиль с резким переломом водораздела.

Рассмотрим теперь задачу с понижающимся базисом денудации на полубесконечной области (Есин, Московкин, 1980)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y(0, t) = -\beta t, \quad y(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (\text{I.I.4-I4})$$

Решение этой задачи имеет вид (Будак и др., 1972)

$$y(x, t) = -\frac{\beta x}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^t \frac{\tau \exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (\text{I.I.4-I5})$$

Разбивая полученный интеграл на два и взяв их с помощью замены $u = x / 2\sqrt{k(t-\tau)}$, получим

$$y(x, t) = \frac{\beta x}{2k} \left(\frac{4kt}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) - \left[1 - \theta\left(\frac{x}{(4kt)^{1/2}}\right)\right] \left(\beta t + \frac{\beta x^2}{2k}\right). \quad (\text{I.I.4-I6})$$

Таким образом, крутизна в основании склона возрастает по закону

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta \left(\frac{t}{k}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right). \quad (\text{I.I.4-I7})$$

Итак, в случае вреза, происходящего с постоянной скоростью в первоначально горизонтальную поверхность, по выражению (I.I.4-I8) получим выпуклый профиль, стремящийся к горизонтальной начальной поверхности $\lim_{t \rightarrow \infty} y(x, t) = 0$

В заключение остается рассмотреть случай одновременного вертикального и горизонтального перемещения базиса денудации. Задача в случае вреза в первоначальную поверхность ставится в виде:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y(\beta t, t) = -\beta t, \quad y(x, 0) = 0, \quad \beta t \leq x < +\infty. \quad (\text{I.I.4-I8})$$

Наиболее общее решение, при произвольных начальном условии и скоростей перемещения границы, соответствующей базису денудации, приведено ранее (Будак и др., 1972). Основываясь на нем, получим решение задачи (I.I.4-18)

$$y(x,t) = - \frac{\exp\left[-\frac{b}{2k}(x-bt) - \frac{b^2}{4k}t\right](x-bt)}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^t \frac{\beta t \exp\left(\frac{b^2\tau}{4k\ell}\right) \exp\left[-\frac{(x-bt)^2}{4k(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (I.I.4-19)$$

Это уравнение (I.I.4-19) указывает на выпуклый профиль развивающегося склона. При количественной оценке параметров k , b , β , γ , рассмотренных выше моделей, можно решать задачи прогноза развития эрозионно-дефлюкционного рельефа, задачи палеогеоморфологии и неотектоники.

Ниже рассмотрим подробно только одну модель – модель подрезаемого склона с горизонтальным перемещением базиса денудации.

Получим вначале одно частное автомодельное решение задачи (I.I.4-2), которое в дальнейшем будет использовано при анализе устойчивости склонов и асимметрии склонов речных долин. Для получения этого решения привлечем анализ инвариантности дифференциальных уравнений относительно группы непрерывных преобразований. Метод решения с помощью этого анализа называют методом отыскания симметричных решений, который состоит в отыскании решений инвариантных относительно группы G , в предположении инвариантности относительно этой группы системы дифференциальных уравнений (Биркгоф, 1954). В качестве такой группы выберем группу непрерывных линейных преобразований (Московкин, Трофимов, 1980б)

$$t_1 = t + \frac{\alpha}{\beta}, \quad x_1 = x + \alpha, \quad y_1 = y, \quad (I.I.4-20)$$

состоящую из однопараметрической подгруппы переносов начала отсчета времени, однопараметрической подгруппы параллельного переноса и тождественного преобразования искомой функции, где α – параметр.

Из группы преобразований (I.I.4-20) видим, что величина y и $x - bt$ инвариантны относительно этой группы, из чего следует,

что любое решение задачи (I.I.4-2), инвариантное относительно группы (I.I.4-20), будет иметь вид

$$y(x,t) = \psi(x - vt). \quad (I.I.4-21)$$

Граничное условие, соответствующее продвижению точки основания склона с постоянной скоростью ($y(vt, t) = 0$) должно быть инвариантно относительно группы (I.I.4-20). Это можно увидеть переписав рассматриваемое граничное условие в виде

$$y=0, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{y=0} = v. \quad (I.I.4-22)$$

Теперь, подставляя выражение (I.I.4-21) в исходное уравнение задачи (I.I.4-2), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$k \psi''(v) + v \psi'(v) = 0, \quad (I.I.4-23)$$

где $v = x - vt$. Решение этого уравнения, с учетом основного граничного условия $\psi(0) = 0$ и дополнительного $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = \lim_{v \rightarrow \infty} \psi(v) = h = \text{const}$, соответствующего стремлению поверхности склона к горизонтальной плоскости по мере удаления от основания склона, получим в виде

$$y(x,t) = h \left[1 - \exp\left(-\frac{v}{k}(x - vt)\right) \right]. \quad (I.I.4-24)$$

Если скорость подрезания склона зависит от времени, то инвариантности граничного условия (I.I.4-22) относительно второго преобразования группы (I.I.4-20) не будет, а значит не будет и частного решения типа "бегущей волны"; такого решения не будет и для $v = \text{const}$ при переменном коэффициенте $k(x, t)$. Заметим, что группа преобразований (I.I.4-20) использовалась также при исследовании уравнений почвенной влаги с граничным условием типа (I.I.4-22) (Кулик, 1972).

Поясним термин "автомодельное решение". Л.И.Седов (1970), говоря об автомодельных решениях, указывает, что важное значение имеют решения, в которых уменьшение числа аргументов искомых функций достигается за счет существенности только некоторых комбинаций независимых переменных. Так, в нашем случае пло-

'ской задачи, имеющей две независимые переменные, найдена комбинация из этих переменных $(x - bt)$, позволяющая свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого намного проще исходного.

Рассмотрим теперь обобщение модели (I.I.4-2) на пространственный случай. Линейное двумерное уравнение диффузии имеет вид (I.I.1-1; I.I.1.-2 при $K(x, y, t) = \text{const}$). Считая, что склон с одной стороны ограничен морем, а с другой - рекой, рассмотрим это уравнение в области прямого угла. Считаем, что подрезания склона морем (абразия) и рекой (боковая эрозия) происходят с постоянными скоростями, т.е. с этими скоростями перемещаются границы области (стороны прямого угла). На границах этой области функция имеет нулевое значение. На основании этого приходим к следующей краевой задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), & bt < y < +\infty, at < x < +\infty, \\ z(x, y, 0) = f(x, y), & 0 < y < +\infty, 0 < x < +\infty, \\ z(at, y, t) = 0, & z(x, bt, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.I.4-25})$$

От задачи с подвижными границами перейдем к задаче с неподвижными границами сделав для этого замену

$$\begin{aligned} \xi &= x - at, \quad t = t, \\ \eta &= y - bt, \quad t = t, \end{aligned} \quad (\text{I.I.4-26})$$

тогда (I.I.4-25) перейдет в следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial z}{\partial \xi} + k \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + b \frac{\partial z}{\partial \eta}, & 0 < \xi < +\infty, 0 < \eta < +\infty, \\ z(\xi, \eta, 0) &= f(\xi, \eta), \quad z(0, \eta, t) = z(\xi, 0, t) = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.I.4-27})$$

Если в задаче (I.I.4-27) начальная функция представляется в виде $f(\xi, \eta) = f_1(\xi) f_2(\eta)$, то решением ее будет функция $z(\xi, \eta, t) = z_1(\xi, t) z_2(\eta, t)$, где $z_1(\xi, t)$, $z_2(\eta, t)$ - решения соответствующих одномерных задач:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z_1}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial z_1}{\partial \xi}, \quad z_1(\xi, 0) = f_1(\xi), \quad z_1(0, t) = 0, \quad (\text{I.I.4-28})$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z_2}{\partial \eta^2} + b \frac{\partial z_2}{\partial \eta}, \quad z_2(\eta, 0) = f_2(\eta), \quad z_2(0, t) = 0. \quad (\text{I.I.4-29})$$

Справедливость утверждения проверяется непосредственной подстановкой функции $Z(\xi, \eta, t) = Z_1(\xi, t)Z_2(\eta, t)$ в уравнение задачи (I.I.4-25). Решение одномерных задач (I.I.4-28; I.I.4-29) приведено выше (I.I.4-3).

§ 5. Приложение концепции подрезаемых склонов

Как видно из структуры частного автомодельного решения (I.I.4-24), оно соответствует стадии стационарно-динамического режима развития подрезаемого склона (стадия параллельного отступания). Из (I.I.4-24) следует, что чем больше интенсивность подрезания склона по сравнению с денудацией, тем круче склон. Основываясь на частном автомодельном решении (I.I.4-24), перейдем к вопросу анализа устойчивости подрезаемого склона (Московкин, 1979; Трофимов, 1980б): 1) под устойчивым режимом развития склона понимаем те состояния склона, при котором крутизна его не возрастает при дальнейшей эволюции (стадия выполаживания склона); 2) под неустойчивым режимом развития склона понимаем те его состояния, когда крутизна непрерывно нарастает, что в конечном итоге может привести к неустойчивому состоянию склона. Стационарно-динамический режим соответствует параллельному отступанию склона и разделяет два рассмотренных выше режима.

Для анализа устойчивости развития подрезаемого склона исследуем характер общего решения задачи (I.I.4-2) вблизи стационарно-динамического режима (I.I.4-24). Для этого зададим начальный профиль склона в виде, близком по структуре к решению (I.I.4-24)

$$\gamma(x, 0) = f(x) = h [1 - \exp(-cx)]. \quad (\text{I.I.5-1})$$

Подставляя выражение (I.I.5-1) в общее решение (I.I.4-3) задачи (I.I.4-2) и вычисляя интегралы, получим

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) = & \frac{h}{2} \left\{ 1 + \theta\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - \exp\left(-\frac{b}{k}(x-bt)\right) \left[1 - \theta\left(\frac{x-2bt}{2\sqrt{kt}}\right) \right] + \right. \\ & + \exp\left(\frac{(ck-b)((ck-b)t+x)}{k}\right) \left[1 - \theta\left(\frac{2t(ck-b)+x}{2\sqrt{kt}}\right) \right] - \\ & \left. - \exp(c(ckt-x)) \left[1 - \theta\left(\frac{2ckt-x}{2\sqrt{kt}}\right) \right] \right\}. \quad (\text{I.I.5-2}) \end{aligned}$$

Необходимо обратить внимание на тот факт, что при $c = \frac{b}{k}$ общее решение (I.I.5-2) задачи (I.I.4.2) с начальным условием (I.I.5-1) переходит в автомодельное решение (I.I.4-24), соответствующее параллельному отступанию склона.

Аналитический и численный анализы решения (I.I.5-2) показывают, что значение $b = ck$ является критерием, разделяющим два различных режима развития: при $b > ck$ происходит увеличение крутизны в основании склона, а при $b < ck$ — его выполаживание.

Проанализируем численные результаты:

При начальном профиле склона $y(x, 0) = f(x) = 40 \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{100}\right) \right]$

брались следующие значения для коэффициента денудации и скорости подрезания:

1. $k_1 = 0,05 \text{ м}^2/\text{год}$; $b_1 = 0$; $b_2 = 0,00025 \text{ м/год}$; $b_3 = 0,0005 \text{ м/год}$ (соответствует автомодельному стационарно-динамическому режиму); $b_4 = 0,001 \text{ м/год}$.

2. $k_2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$; $b_1 = 0$; $b_2 = 0,0005 \text{ м/год}$; $b_3 = 0,001 \text{ м/год}$ (соответствует автомодельному стационарно-динамическому режиму); $b_4 = 0,01 \text{ м/год}$; $b_5 = 0,1 \text{ м/год}$; $b_6 = 1,0 \text{ м/год}$.

Эти две серии расчетов по 4 из 6 вариантов в каждой были проделаны по аналитическому решению (I.I.5-2) на ЭВМ М-220 и представлены в виде графиков (рис.3). Видим, что при всех параметрах b меньших критических (b_3 — в двух сериях) происходит выполаживание склона, а при всех больших b — происходит нарастание уклонов, причем тем более интенсивно, чем больше b . При больших сверхкритических значениях b (b_5, b_6) крутизна очень быстро достигает значительных величин, приводящих к разрушению устойчивости склона. Заметим, что, когда крутизна достигает величин, при которых уже несправедливо линейное диффузионное уравнение задачи, развитие склона начинает идти по нелинейному уравнению, которое для развития склонов медленного течения материала имеет следующий вид (Девдариани, 1967 а):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} / \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (\text{I.I.5-3})$$

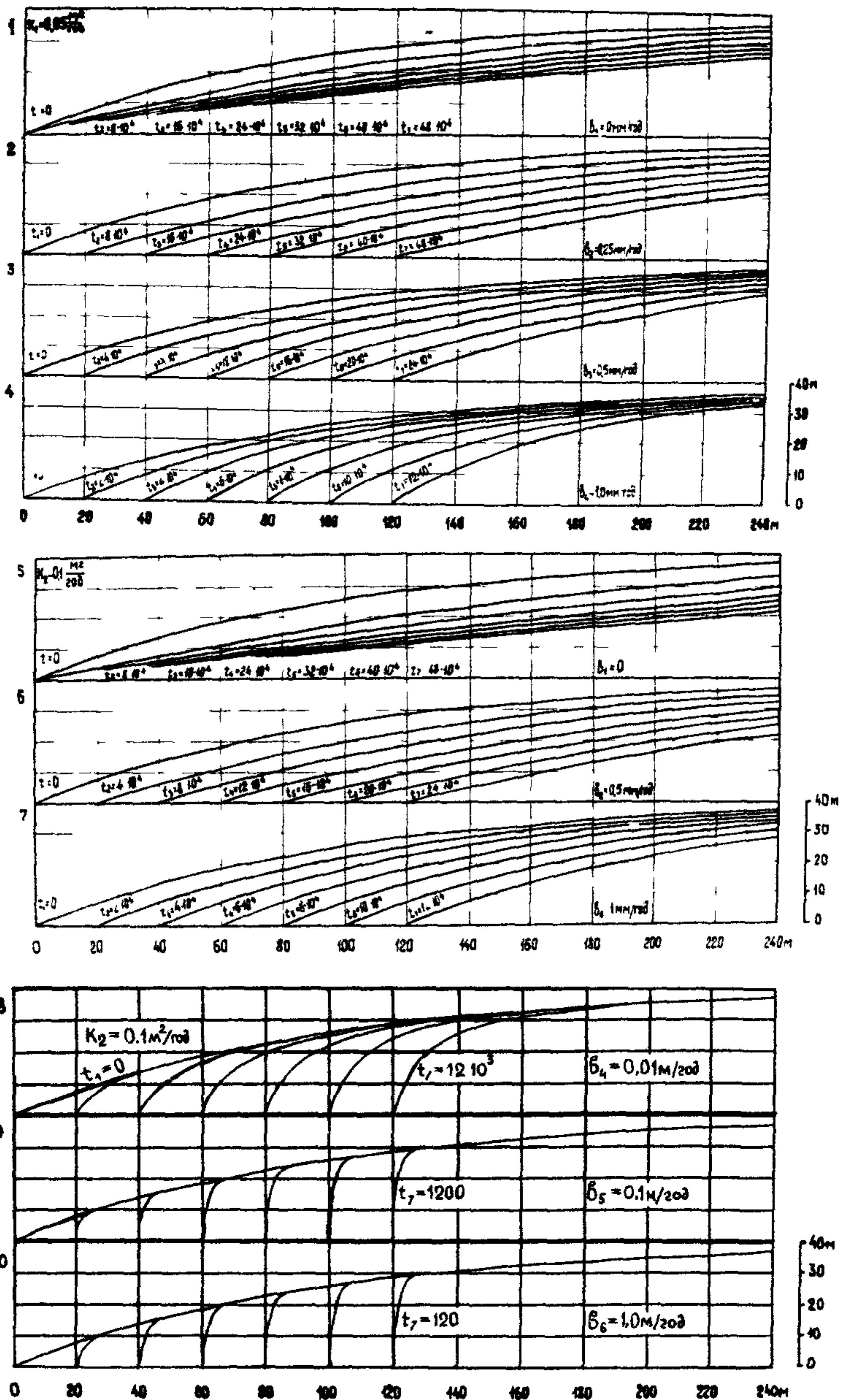


Рис. 3. Развитие подрезаемого склона при различных параметрах диффузионной модели (к анализу устойчивости развития подрезаемых склонов).

Можно видеть, что это уравнение, по сравнению с линейным, уменьшает интенсивность выполаживания склона (так как в знаменателе стоит величина больше единицы), т.е. крутизна еще больше будет возрастать при сверхкритических значениях скорости подрезания, по сравнению с расчетными профилями, и неустойчивые состояния будут возникать значительно раньше. Анализ графиков показывает, что при сверхкритических скоростях подрезания, выполаживание не успевает к нему приспособиться, и происходит очень сильное увеличение крутизны у самого основания склона (первые несколько метров). Далее профиль близок к первоначальному. Таким образом, образуется бровка (перегиб) склона, отделяющая крутую часть склона у его основания (на которой сказывается влияние подрезания) от более пологой привершинной части, на которой подрезание основания склона не сказывается. При развитии склона бровка продвигается вверх по склону, и она тем более выражена, чем больше скорость подрезания. Обобщая сказанное, развитие склона при постоянной скорости подрезания можно представить следующим образом:

1. При значениях скорости подрезания менее критической ($v < c_k$) происходит выполаживание склона.

2. При критическом значении скорости подрезания ($v = c_k$) происходит параллельное отступление склона.

3. При сверхкритических скоростях подрезания дело обстоит сложнее. При небольших сверхкритических скоростях нарастание крутизны идет медленно, и склон достаточно долго развивается по линейной модели (I.I.4-2), а далее — по нелинейной модели. Так, при $k_2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ и $v_ч = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{год}}$ (в десять раз больше критической скорости) крутизна склона у основания достигает 47° через 2000 лет (начальная крутизна склона равнялась 22°). При достижении достаточной крутизны склона диффузионная модель перестает работать (смена склоноформирующего процесса), и развитие склона начинает идти, например, по осыпной модели типа Шайдеггера, и если $v > k$, где k — денудация осыпного склона ($\frac{\text{м}}{\text{год}}$), то склон со временем теряет устойчивость и его развитие идет по обвально-оползневому типу.

В реальных случаях скорость подрезания имеет тенденцию уменьшаться за счет увеличения абразионной (волноприбойной) тер-

расы, но часто неустойчивость возникает раньше, чем скорость подрезания успеет достаточно понизиться, а также неустойчивость часто возникает при локальном возрастании скорости подрезания, что связано с изменчивостью климатического фактора (волнового режима). Другая картина получается при больших сверхкритических значениях v . Так, при $K_2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ и $v_с = 1,0 \text{ м/год}$ (в тысячу раз больше критической скорости) крутизна склона основания достигает 50° уже через 10 лет и 67° — через 20 лет. То есть практически через несколько лет устойчивость склона может нарушиться (50° соответствует 5 м точки высоты профиля при заложении 4 м, при $x > 4$ уклоны близки к уклонам начального профиля).

Аналогичные расчеты могут быть полезны для прогнозирования развития склонов будущих водохранилищ, на которых идут интенсивные процессы смыва или течения материала (K — большое по величине), для этого необходимо уметь оценивать K и, задавая возможные сверхкритические скорости подрезания, определять по расчетным графикам ориентировочное время наступления неустойчивых состояний (методы оценки коэффициента денудации будут рассмотрены ниже в § 10 этой главы). Как видим, при скоростях v порядка метра в год и довольно большом коэффициенте денудации $K_2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ неустойчивые состояния возникают очень быстро, что находит свое подтверждение при рассмотрении реальных быстро-развивающихся склонов водохранилищ.

Заметим, что зависимость $2K_1 = K_2$ в двух сериях расчетов при одинаковых v , дала подобные профили (развитие склона при K_2 идет в два раза быстрее, чем при K_1). Это легко можно понять приведя уравнение задачи (I.I.4-2) к безразмерному виду и выделив из него критерий подобия

$$k = KT/L^2, \quad (\text{I.I.5-4})$$

где L — характерный размер по горизонтали, T — характерное время. Критерий (I.I.5-4) с учетом $v = L/T$ целесообразно записать в виде

$$k = K/Lv. \quad (\text{I.I.5-5})$$

Аналогичный критерий был получен в работе М.Хирано (Hirano, 1972) для уравнения (I.I.4-1).

Введем теперь в плоскую подрезаемую модель (I.I.4-2) фактор тектонических опусканий ($v = \text{const} > 0$), тогда уравнение задачи (I.I.4-2) запишется в виде

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - v. \quad (\text{I.I.5-6})$$

Как и ранее, получим автомодельное решение, соответствующее установившейся стадии развития

$$y(x, t) = \frac{Ak}{b} \left(1 - \frac{v}{Ab}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{k}(x - vt)\right)\right] + \frac{v}{b}(x - vt), \quad (\text{I.I.5-7})$$

где $y'(vt, t) = A$, $y(vt, t) = 0$.

В зависимости от знака множителя, стоящего в круглых скобках, будут возникать выпуклые ($1 - \frac{v}{Ab} > 0$), вогнутые ($1 - \frac{v}{Ab} < 0$) или прямолинейные ($1 - \frac{v}{Ab} = 0$) равновесные формы. Здесь в процессе установившегося режима тектоника и подрезание должны поддерживать постоянный угол в основании склона (граничное условие $y'(vt, t) = A$) (только в этом случае можно получить разумное решение). По крайней мере это решение полностью совпадает с приведенными ниже решениями Гербера и дает физическую интерпретацию его физическим параметрам.

При $v = 0$ решение (I.I.5-7) переходит в (I.I.4-24) при условии $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = h$ вместо $y'(vt, t) = A$.

Полученное ранее частное автомодельное решение (I.I.4-24) вполне применимо к анализу асимметрии склонов речных долин. Вначале, однако, покажем, как это решение согласуется с другими теоретическими решениями и натурными исследованиями. Так, первые попытки математического представления профилей склонов речных долин были сделаны Гербером (Scheidegger, 1970). Вывод уравнений профилей основывался на представлении двумя различными способами элементарного объема снесенного материала через приращения высоты (y) и горизонтальной координаты (x), что позволило записать обыкновенное дифференциальное уравнение пер-

вого порядка для определения профиля $y(x)$. Одно из наиболее совершенных уравнений такого подхода имело вид (Scheidegger, 1970):

$$y(x) = a_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{a} x\right)\right] + x \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (\text{I.I.5-8})$$

Оно указывает на асимптотическое стремление к прямой $y(x) = x \operatorname{tg} \alpha_2 + a_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}\right)$. Причем, при $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0$, когда кривая

профиля асимптотически стремится к постоянной высоте $h = a_1$, приходим к следующему выражению для профиля

$$y(x) = h \left[1 - \exp\left(-\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{h} x\right)\right]. \quad (\text{I.I.5-9})$$

Последнее согласуется с полученным нами решением (I.I.5-9) для фиксированного момента времени.

Кроме того, массовое профилирование подрезаемых склонов долины р. Волги (Куйбышевское, Саратовское, Волгоградское и другие водохранилища), долин р. Камы, р. Вятки и их притоков также привело к уравнению (I.I.5-9) (Трофимов, Бабанов, 1968).

Асимметрию склонов речных долин объясняют часто или фактором преимущественного подрезания одного из берегов (из-за силы Кориолиса) или инсоляционной теорией (Дедков, 1970). Для учета совместного воздействия обоих факторов, привлечем частное автомодельное решение (I.I.4-24) (Трофимов, Московкин, 1981 б). Будем считать, что склоны находятся в стадии устойчивого режима параллельного отступления (I.I.4-24), и асимметрию будем характеризовать разностью между уклонами их оснований. Из решения (I.I.3-24) следует, что уклон в основании склона определяется величиной

$$\operatorname{tg} \alpha = h \frac{b}{k}. \quad (\text{I.I.5-10})$$

Исследуем теперь, каким образом процессы асимметрии изменяют эту величину.

1. Случай течений: 1. юг-север; 2. север-юг. Характеристики восточного склона обозначим индексами "1", а западного — индексами "2". Считаем, что высота склонов по мере удаления от основания стремится к постоянному одинаковому значению h .

В первом случае подрезание правого берега (восточного склона западной экспозиции) идет интенсивнее ($v_1 > v_2$) из-за силы Кориолиса. Склоны западной экспозиции получают столько же радиации, сколько и склоны восточной экспозиции (Симонов, 1956), но прогреваются сильнее, что обуславливает более интенсивное проявление на них дефлюкционных (солифлюкционных) процессов (Дедков, 1970). Это запишем неравенством $k_1 > k_2$. Асимметричность будет зависеть от характера неравенств

$$h \frac{v_1}{k_1} \geq h \frac{v_2}{k_2}; \quad (I.I.5-II)$$

откуда следует, так как $h = \text{const}$, что $\frac{v_1}{k_1} \geq \frac{v_2}{k_2}$. В первом случае вероятней всего, что отношение скоростей подрезаний преобладает над отношением коэффициентов денудации (коэффициенты денудации не очень отличаются друг от друга). Таким образом, $\text{tg} \alpha_1 > \text{tg} \alpha_2$, т.е. правый берег круче левого.

Во втором случае $v_2 > v_1$; $k_1 > k_2$ и из (I.I.5-II) получим $\text{tg} \alpha_1 < \text{tg} \alpha_2$, т.е. при течении север-юг склон восточной экспозиции круче. Здесь инсоляционная причина и сила Кориолиса действуют согласованно в сторону увеличения крутизны склона восточной экспозиции по сравнению со склоном западной экспозиции.

2. Случай течений: 1. запад-восток; 2. восток-запад. Здесь преобладание интенсивности дефлюкционных процессов на более затененных и увлажненных склонах северной экспозиции проявляется сильнее, чем в предыдущих двух случаях, т.е. k_1 и k_2 больше отличаются друг от друга. Из последнего замечания следует, что при одинаковых скоростях подрезания в случаях I.I. и 2.I асимметричность будет больше выражена в случае I.I. Аналогично в случае 2.2 асимметричность будет выражена больше, чем в случае I.2. Таким образом, почти всегда, исключая случай 2.I, правый берег круче левого в рамках рассматриваемой модели. В случае 2.I возможны варианты, когда $\frac{k_1}{k_2} > \frac{v_1}{v_2}$; в таком случае возникает аномальная асимметрия (левый берег круче правого). Обобщая сказанное, можно сделать следующий вывод; наибольшая асимметрия склонов речных долин должна проявляться при течениях восток-запад (случай 2.2.), а наименьшая, а также аномальная

при течениях запад-восток (случай 2.1). Данные заключения справедливы для северного полушария.

§ 6. Отрицательная обратная связь в диффузионной модели подрезаемого склона

При характеристике развития подрезаемого склона возникает задача определения изменяющейся во времени скорости подрезания ($v(t)$). В этом случае граничное условие в уравнении (I.I.4-2) запишется в виде $Y(s(t), t) = 0$, (I.I.6-1), где $s(t) = \int_0^t v(t) dt$.

Аналитические решения (I.I.4-2) при данном наиболее общем граничном условии получить невозможно. Даже при наиболее простом законе передвижения границы:

$$s(t) = S_{\infty} (1 - \exp(-\lambda t)), \quad (I.I.6-2)$$

не удастся получить приближенного решения задачи методом совместного применения преобразования в пространство малого времени и преобразования переводящего подвижную границу в неподвижную (Огибалов, Мирзаджанзаде, 1976), который является наиболее эффективным для рассматриваемого типа задач. Дело в том, что замены переменных $z = x/s(t)$, $\tau = 1 - \exp(-\lambda t)$ (преобразование в пространство малого времени $[0, \infty] \rightarrow [0, 1]$) в исходной задаче и поиск решения в виде степенного ряда по τ не приводят к успеху в связи с невозможностью удовлетворения граничным условиям (условию (I.I.6-1)) и дополнительному, например, как при поиске частного автомодельного решения (I.I.4-24). Таким образом, решение подобных задач может быть получено, вероятно, только численными методами.

Движение границы по закону (I.I.6-2) следует из зависимости, описывающей чисто затухающий характер скорости подрезания (Московкин, Трофимов, 1978),

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{v_0}{S_{\infty}} (S_{\infty} - s). \quad (I.I.6-3)$$

Параметр λ в выражении (I.I.6-2) в этом случае равен $\lambda = v_0/S_{\infty}$, v_0 - начальная максимальная скорость подрезания, S_{∞} - наи -

большее расстояние, на которое отступает основание склона. Из выражения (I.I.6-1) и (I.I.6-2) получим зависимость скорости v от времени

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{v_0}{S_\infty} t\right). \quad (\text{I.I.6-4})$$

Такой экспоненциально затухающий характер скорости подрезания будет иметь место, приближенно, при отсутствии колебаний уровня водоема и тектонических движений. Механизм затухания отрицательной обратной связи скорости подрезания связан с удлинением и выполаживанием волноприбойной террасы (Мушкетов, 1926). В природе чаще всего наблюдается колебательно-затухающий характер скорости подрезания (Широков, 1963; Трофимов, 1974), который осредненно аппроксимировался нами функцией (Московкин, Трофимов, 1978)

$$v(t) = v_0 \exp(-\rho_0 t) - v_1 \exp(-\rho_1 t) \sin \Omega t. \quad (\text{I.I.6-5})$$

С помощью выражения (I.I.6-5) можно найти S_∞ , как $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_\infty$, которое будет равно $S_\infty = \frac{v_0}{\rho_0} - \frac{v_1 \Omega}{\rho_1^2 + \Omega^2}$ и т.к. $\frac{v_0}{\rho_0} \gg \frac{v_1 \Omega}{\rho_1^2 + \Omega^2}$, то $S_\infty = v_0 / \rho_0$, как и в случае чисто экспоненциального затухания.

Учитывая отмеченный колебательно-затухающий характер скорости подрезания, соответствующий климатическим (гидрологическим) циклам, запишем уравнение (I.I.6-3) в виде (Московкин, Трофимов, 1978)

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{v_0 + A \sin \Omega t}{S_\infty}\right)(s_\infty - s), \quad (\text{I.I.6-6})$$

решение которого покажет на колебательно-затухающее стремление к S_∞

$$S = S_\infty \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{A}{S_\infty \Omega} + \frac{v_0}{S_\infty} t\right)\right] \exp\left(\frac{A}{S_\infty \Omega} \cos \Omega t\right) \right\}, \quad (\text{I.I.6-7})$$

из которого для скорости подрезания, по выражению $v(t) = \frac{ds}{dt}$, получится более сложная аппроксимационная функция, чем (I.I.6-5). Вместо детерминированной синусоидальной функции в уравнении

(I.I.6-6) имеет смысл рассматривать, по аналогии с работой (Sharma, Hines, Dickinson, 1979), функцию $x_t = \bar{X}_t + \alpha_t$, где \bar{X}_t - детерминированная периодическая компонента, α_t - стационарная стохастическая компонента.

Для перехода от качественного уравнения (I.I.6-3) к более точной физической постановке задачи, необходимо получить связь между интенсивностью воздействия потока на основание склона и длиной (l), а также углом наклона (β) волноприбойной террасы. Если волноприбойная терраса сформирована, то от ее долины можно перейти к величине отступления основания склона (S) по формуле (рис.4):

$$l = (l_0^2 + S^2 + 2l_0 S \cos \beta)^{1/2}, \quad (I.I.6-8)$$

где l_0 - начальная длина волноприбойной террасы. В данном случае предполагается, что основание террасы стабильно и не перемещается вправо. Получив из физических соображений зависимость

$$\frac{ds}{dt} = \psi(l), \quad (I.I.6-9)$$

можно по формуле (I.I.6-8) перейти к окончательному обыкновенному дифференциальному уравнению (модели)

$$\frac{ds}{dt} = F(s). \quad (I.I.6-10)$$

Зависимость (I.I.6-9) через значения максимальных придонных скоростей воды, следуя работам Н.В.Есина, можно записать в виде

$$\frac{ds}{dt} = E [U^2(l) - U_{\text{пер.}}^2], \quad (I.I.6-11)$$

где $U(l)$ - максимальная придонная скорость в конце волноприбойной террасы, воздействующая на основания клифа.

Для полного окончательного решения поставленной проблемы, следовательно, следует понять, каким образом расходуется энергия волн при прохождении их по волноприбойной террасе, т.е. необходимо решить гидромеханическую задачу о расчете затухания

придонных скоростей волн при прохождении их по террасе (Трофимов, Московкин, 1979 б).

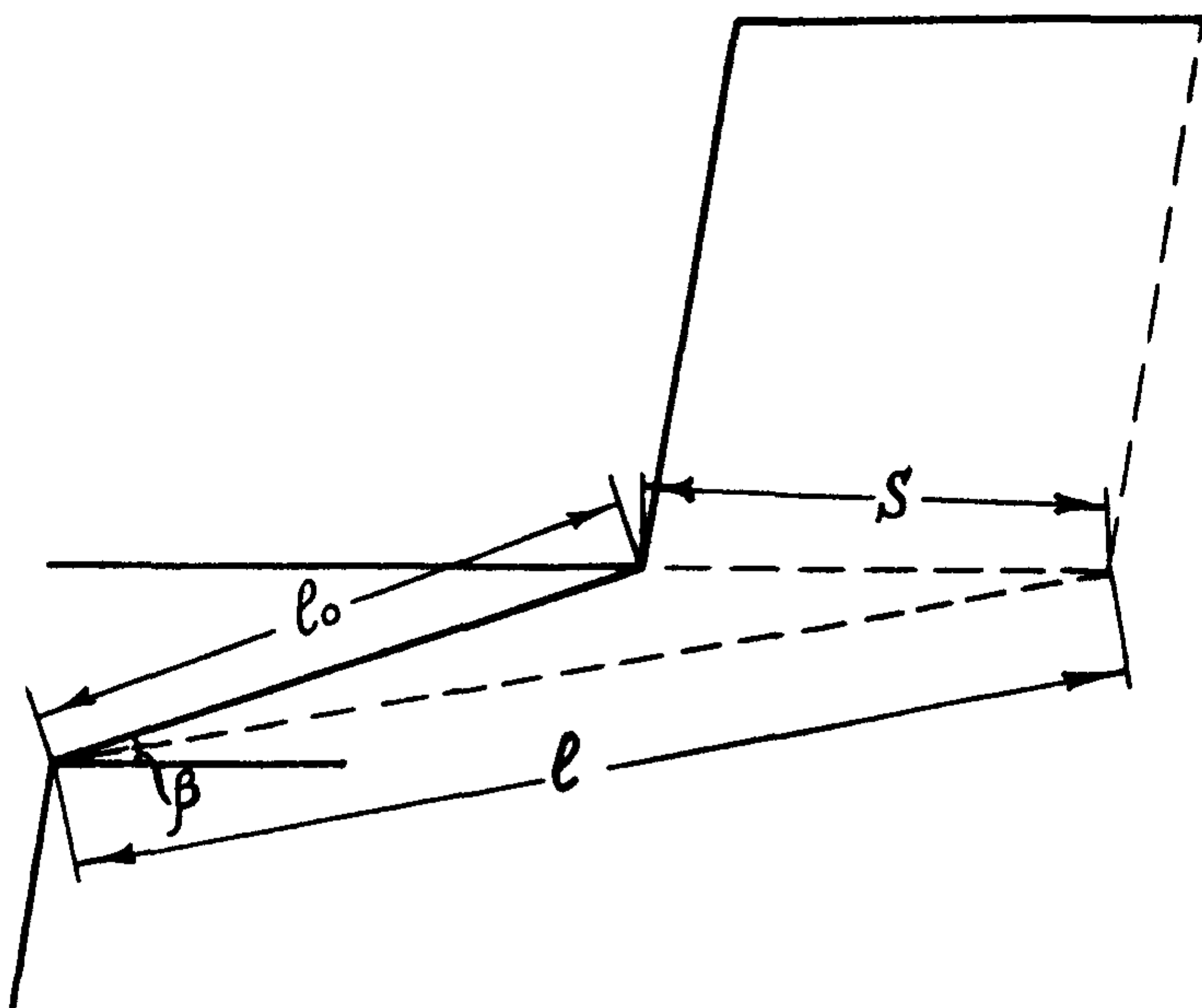


Рис. 4. Схема к задаче учета влияния волноприбойной террасы на скорость подрезания основания надводного склона.

Перспективными могут явиться также теретико-экспериментальные модели отступания клифов, разрабатываемые в Южном отделеении института океанологии АН СССР (Есин, Савин, 1971; Есин, Московкин, 1979), которые сводятся к моделям взаимодействия, описываемых системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{ds}{dt} = f_1(s, c, t), \\ \dot{c} = \frac{dc}{dt} = f_2(s, c, t), \end{cases} \quad (I.I.6-I2)$$

где c — глубина уреза. Такие модели строятся на основании экспериментально подтвержденных гипотез о пропорциональности скорости отступания клифа глубине перед клифом при штормовом уровне воды и пропорциональности скорости углубления приурезовой

отмели давлению волн или квадрату максимальных придонных скоростей волн.

Таким образом, при моделировании развития подрезаемых склонов и при попытке более точного описания скорости этого подрезания мы приходим к необходимости учета влияния подводного профиля склона. В связи с этим встает вопрос о моделировании всего берегового склона в целом (§ 4, гл.3).

Однако прежде чем перейти к этому вопросу нам необходимо рассмотреть более сложную, чем диффузионная, модель (I.I.4-2) с граничным условием (I.I.6-I).

Ранее, в общих чертах, был рассмотрен механизм отрицательной обратной связи, действующей в системе берегового склона за счет удлинения и выполаживания волноприбойной террасы. Другой механизм обратной связи имеет место в случае, когда скапливающийся в основании склона материал слабо перерабатывается волнами и прибрежными течениями и служит естественной защитой склона от воздействия абразии. Итак, считаем, что скорость подрезания основания склона есть функция скапливающегося у его основания материала W (этот материал также может формировать аккумулятивную отмель) $v = f(W)$. Судя по проведенным нами расчетами наиболее простыми и реальными являются следующие виды этих функций:

$$v = v_0 \exp(-\alpha W), v = \beta(W_0 - W), \quad (I.I.6-I3)$$

где W_0 - предельный объем материала, при котором заканчивается процесс подрезания основания склона. Объем материала W можно определить по изменению профиля надводного склона за время t (с учетом постоянной интенсивности переработки материала ($\lambda = \text{const}$)).

$$W = \int_0^{\infty} [y(x,0) - y(x,t)] dx - \lambda t; y(x,t) \equiv 0, 0 < x \leq s(t). \quad (I.I.6-I4)$$

Расчет профиля склона $y(x,t)$ проводился нами по диффузионной модели подрезаемого склона

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, y\left(\int_0^t v(t) dt, t\right) = 0, y(x,0) = f(x). \quad (I.I.6-I5)$$

Для решения поставленной задачи взаимодействия склоновых и абразионных процессов может быть предложен следующий алгоритм решения.

За небольшое время от нуля до t_1 считаем, что $v(t) = v_{01} = \text{const}$ и решаем задачу (I.I.6-I5) при простейшем граничном условии $\gamma(v_{01}, t, t) = 0$. Решение этой задачи было получено ранее в виде (I.I.4-3). Получив по этому решению профиль склона в момент времени t_1 , вычисляем объем снесенного со склона материала за это время с учетом его переработки с интенсивностью λ по формуле (I.I.6-I4): $W_{01} = \int_0^x [\gamma(x, 0) - \gamma(x, t_1)] dx - \lambda t_1$. В случае, если $W < 0$, то в формулах (I.I.6-I3) следует брать величину W равной нулю. Далее вычисляем новую скорость подрезания по одной из формул (I.I.6-I3), например, по первой $v_{12} = v_{01} \exp(-\alpha W_{01})$ и считаем, что на отрезке времени $[t_1, t_2]$ скорость $v_{12} = \text{const}$. Затем вновь решаем задачу (I.I.6-I5) при граничном условии $\gamma(v_{12}, t, t) = 0$ и начальном $\gamma(x, t_1)$ до момента времени t_2 . Далее вся процедура повторяется сначала.

Алгоритм и программа, записанная на языке ФОРТРАН, реализованы для ЭВМ ЕС 1020. Прделано восемь вариантов счета (рис. 5) при двух начальных профилях склона:

$$\gamma(x, 0) = 40 \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{100}\right) \right], \quad \gamma(x, 0) = 0,4x; \quad \text{двух типах}$$

$$v(w) \text{ (I.I.6-I3) при } v_0 = 1,0 \frac{\text{м}}{\text{год}}; \quad \alpha = \frac{1}{100}; \quad \beta = \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{\text{м} \cdot \text{год}};$$

$W_0 = 300 \text{ м}^2$ и двух интенсивностях переработки материала волновыми и прибрежными течениями ($\lambda = 0$; $\lambda = 10 \text{ м}^2/\text{год}$). Расчеты во всех вариантах по времени велись до 115 лет, что приблизительно соответствует стабилизации скорости подрезания основания склона (рис. 6).

Сравнение первых двух вариантов, при экспоненциальном задании функций $\gamma(x, 0) = f(x)$ и $v(w)$, которые отличаются только параметром λ , показало, что во втором варианте из-за большой интенсивности переработки материала ($\lambda = 10 \text{ м}^2/\text{год}$) склон отступает на 2,69 м дальше, чем в первом варианте. Постоянная скорость подрезания ($v(w) = 1,0 \text{ м/год}$) во втором варианте прослеживается до 00 м, так как весь сносимый материал перерабатывается потоком.

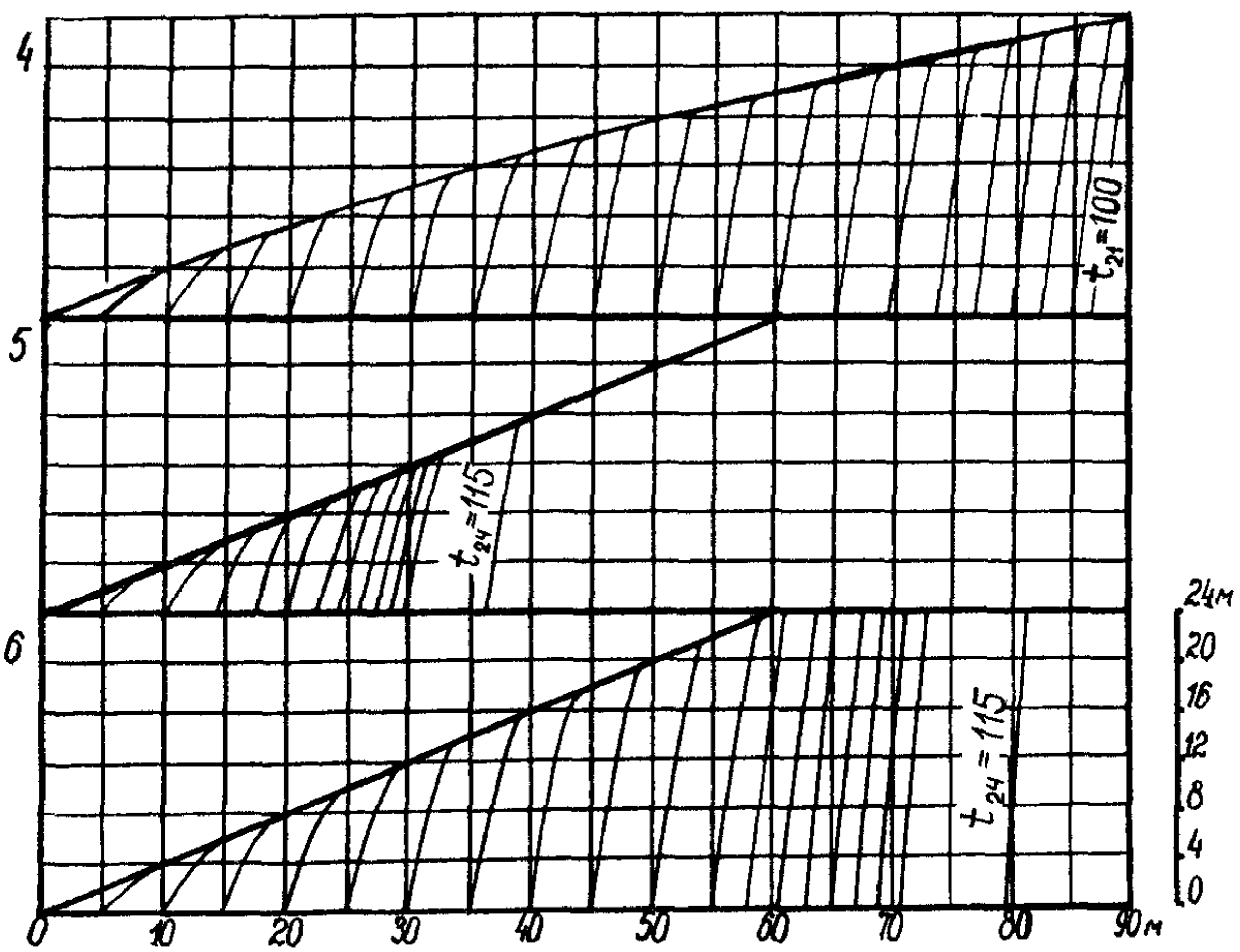
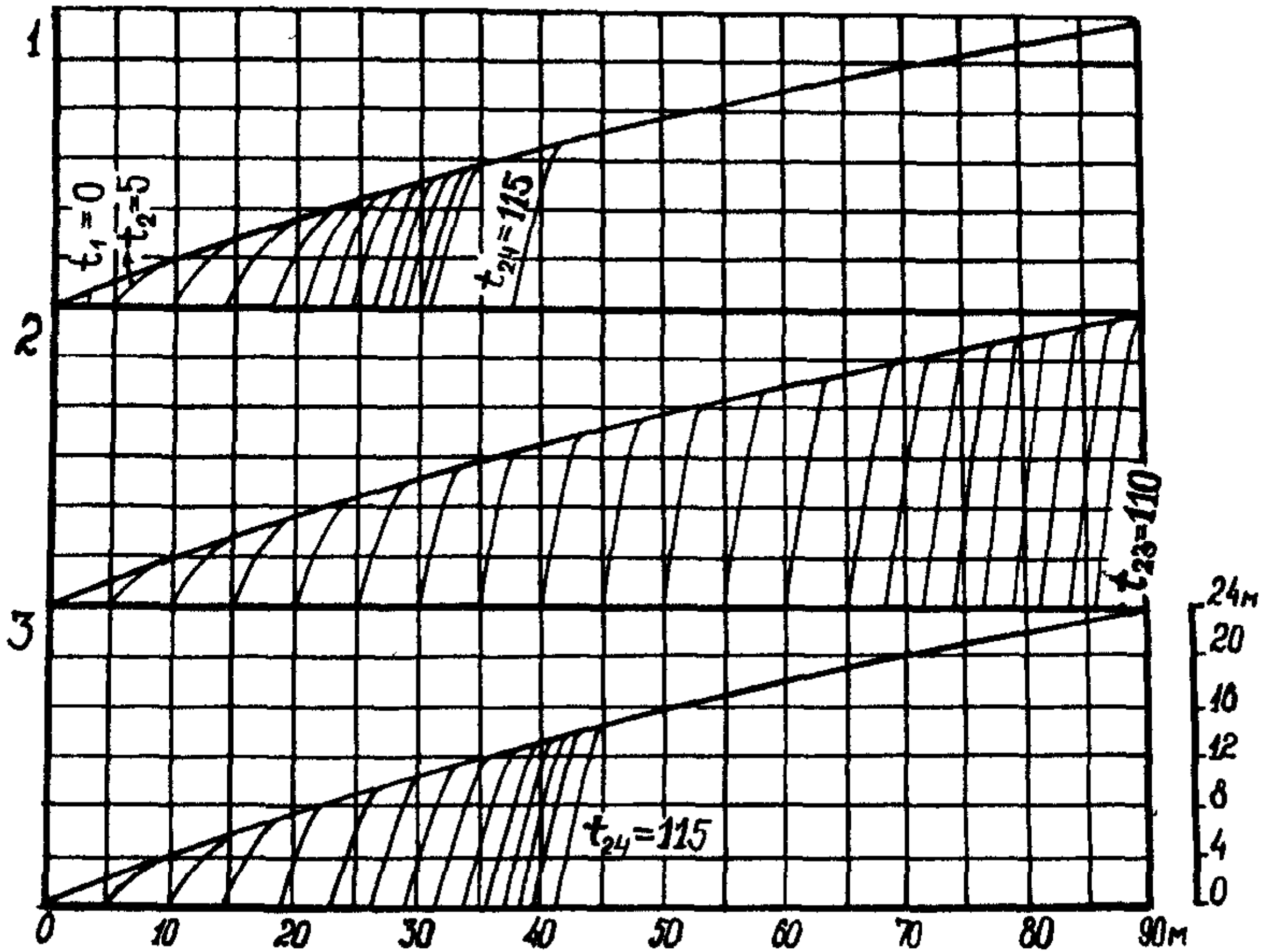


Рис. 5. Развитие подрезаемого склона по линии зрительной модели с учетом отрицательной обратной связи, обусловленной сносимым со склона материалом (I - 6 варианты).

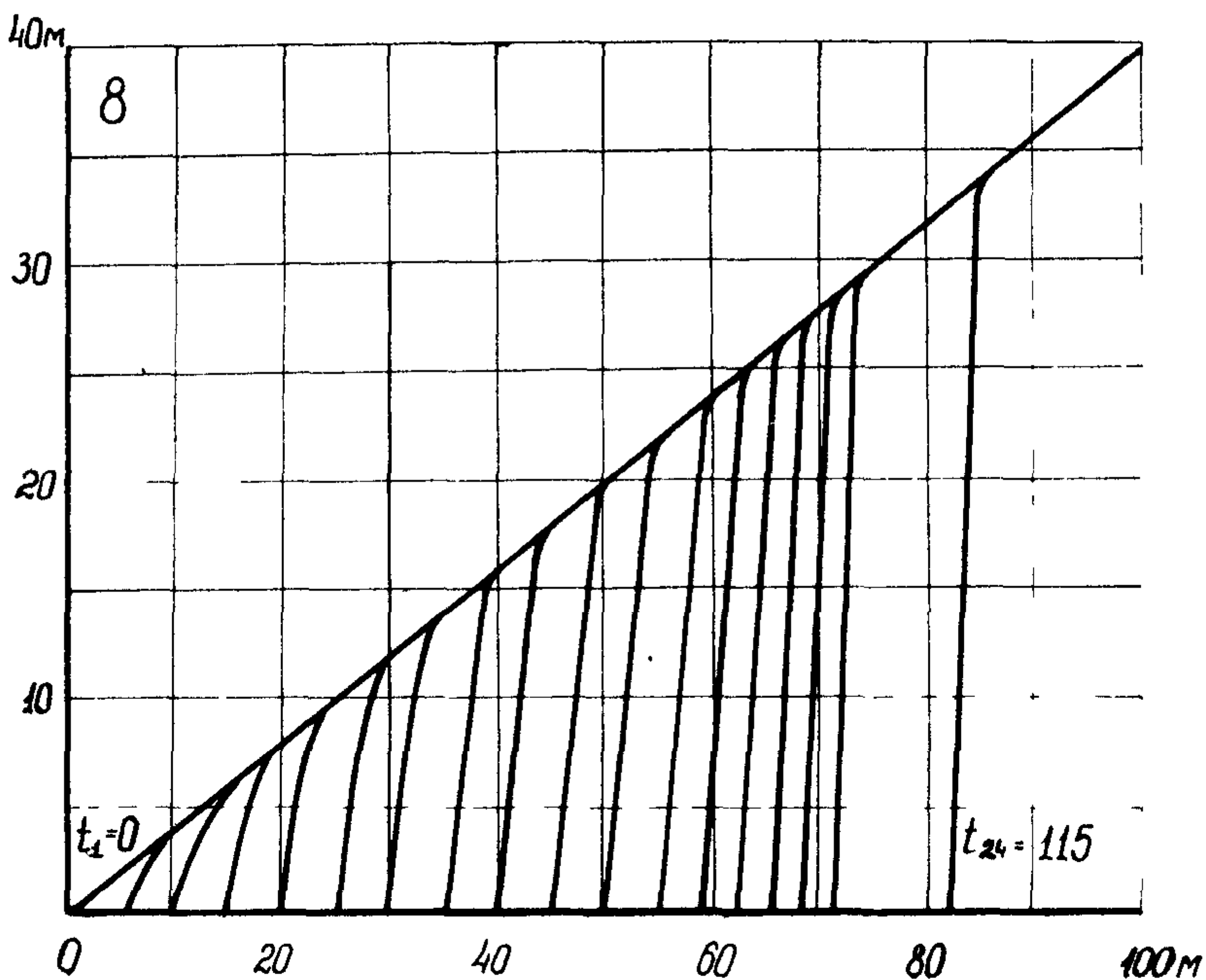
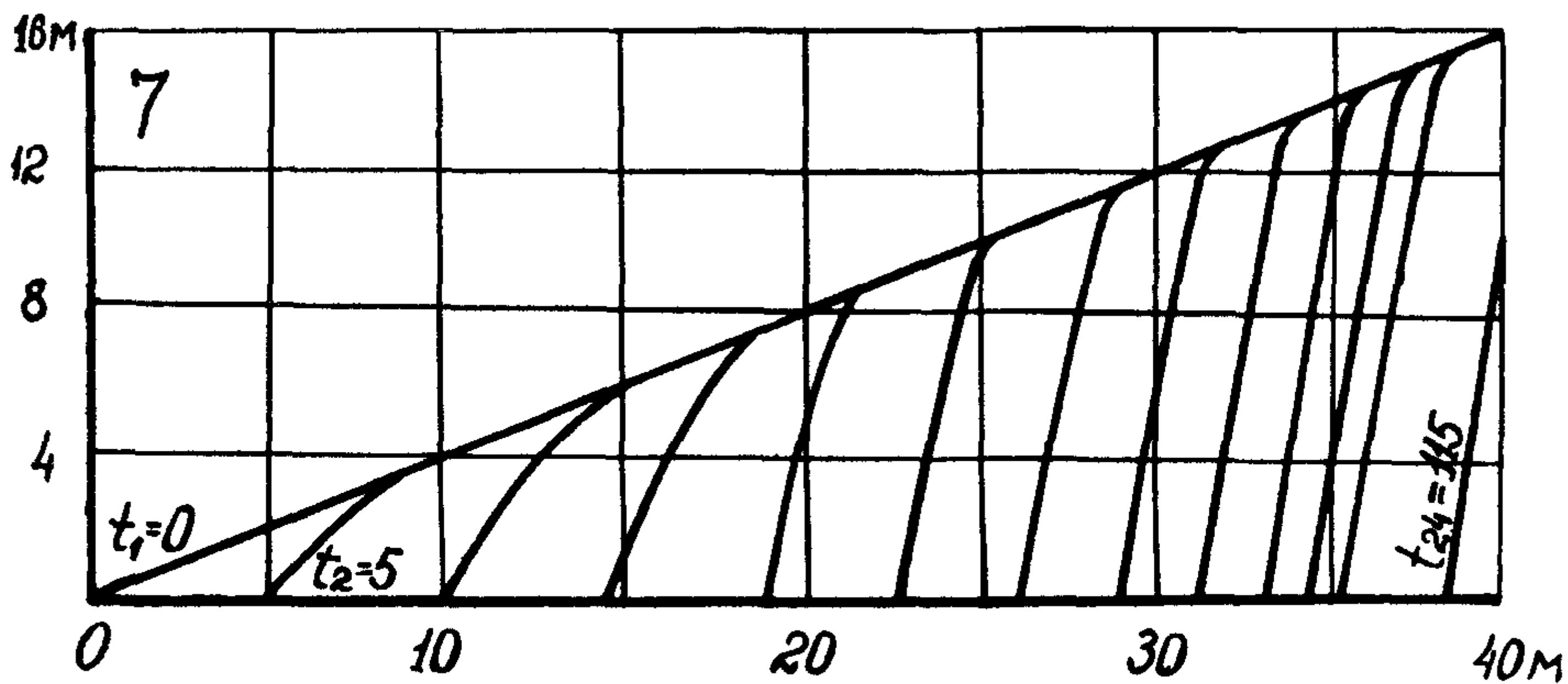


Рис. 5. Развитие подрезаемого склона по диффузионной модели с учетом отрицательной обратной связи, обусловленной сносимым со склона материалом (7-8 варианты).

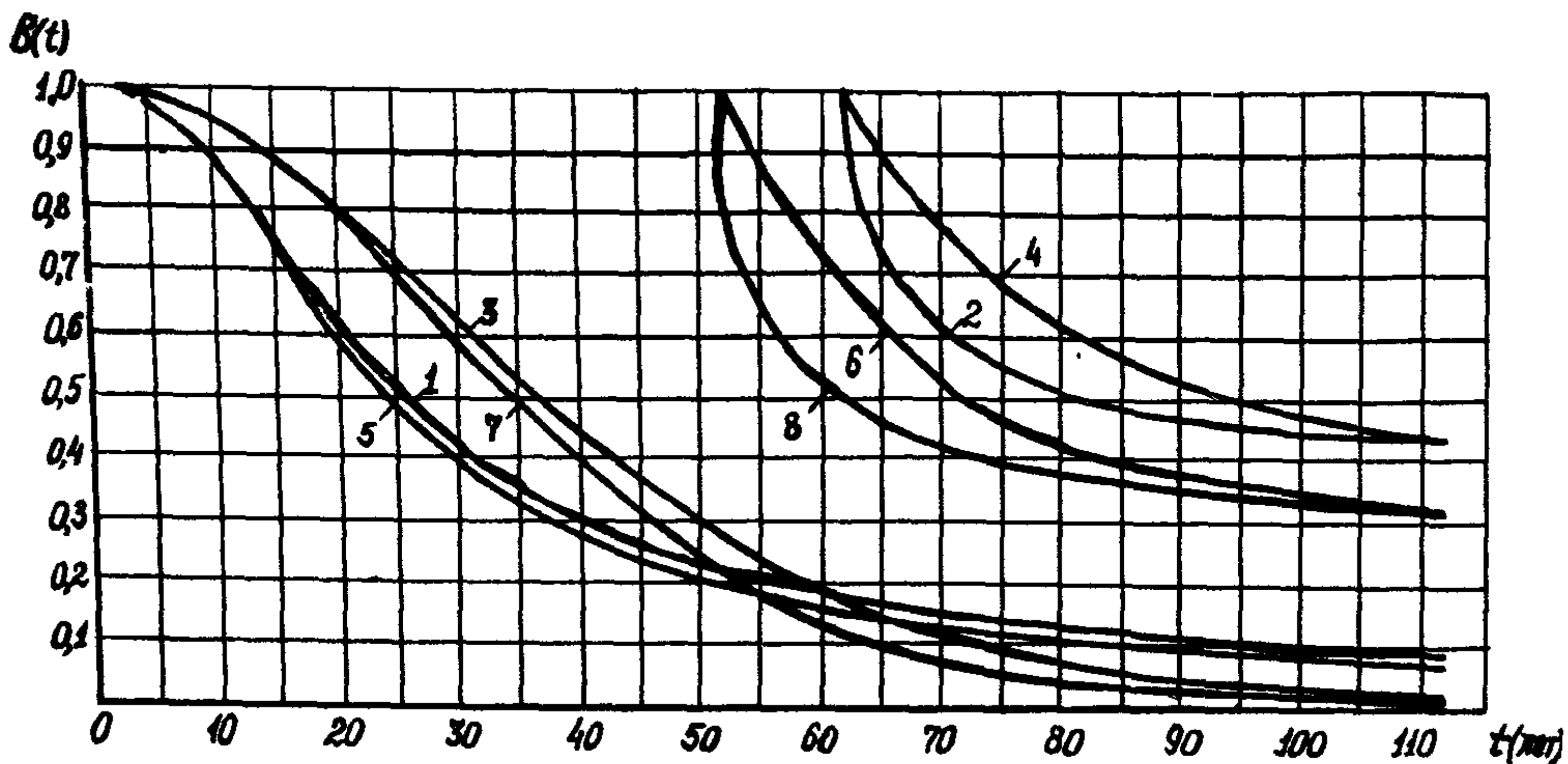


Рис. 6. Зависимость скорости подрезания основания склона от времени для восьми вариантов счета по диффузионной модели

Во всех вариантах, из-за большой начальной скорости подрезания, быстро образуется крутой склон (клиф). В первом варианте через 115 лет он достигает $77,3^\circ$, во втором — $82,8^\circ$.

В третьем и четвертом вариантах, по сравнению с первыми двумя, вместо экспоненциальной функции берется линейная функция затухания скорости подрезания от W . В четвертом варианте при наличии интенсивности переработки материала ($\lambda = 10 \text{ м}^2/\text{год}$) склон отступает на 52,77 м дальше, чем при отсутствии переработки ($\lambda = 0$). По сравнению с первыми двумя вариантами склоны отступают за 115 лет на $41,16 - 37,65 = 3,51$ (м) и $93,93 - 90,34 = 3,59$ (м) (табл. I) дальше, что обусловлено более быстрым экспоненциальным затуханием скорости подрезания основания склона от объема материала (W) в первых двух вариантах.

В вариантах 5 - 8 брался линейный начальный профиль склона; остальные все параметры и функция $B(w)$ оставались в том же порядке, как и в первых четырех вариантах.

Варианты 5 и 6 рассматривались при экспоненциальной зависимости $B(w)$ и двух параметрах λ : $\lambda = 0$; $10 \text{ м}^2/\text{год}$. Отступление склона за 115 лет в шестом варианте было на 43,22 м дальше, чем в пятом. Углы наклона в основании склонов для вариантов 5

и 6 на II5 год составили соответственно: 79° и 85° (с точностью до градуса).

В последних двух вариантах бралась линейная функция $v(w)$, что обусловило несколько большее отступление склона по сравнению с двумя предыдущими вариантами (5 и 6): $82,35 - 79,45 = 2,9$ (м) и $38,63 - 35,23 = 2,4$ (м). Углы наклона в основании склонов на II5 год для последних двух вариантов составили соответственно: 80° и 85° .

Все нечетные варианты ($\lambda = 0$) привели к выпукло-вогнутым кривым скорости подрезания от времени ($v(t)$) (рис. 6). Четные ($\lambda = 10 \text{ м}^2/\text{год}$) варианты приводят к постоянной функции ($v(t) = 1 \text{ м/год}$) до 55 - 65 лет, а далее - к вогнутой кривой.

После достаточного затухания скорости подрезания начнется процесс выполаживания склона. В настоящих расчетах этого не наблюдалось из-за небольшого промежутка времени моделирования и имело место нарастание крутизны склона. Скорость нарастания крутизны со временем уменьшалась. Ясно, что существует критическое время, когда скорость нарастания станет равной нулю и начнется процесс выполаживания склона. Возмущающее влияние естественных и антропогенных факторов на модель (систему подрезаемого склона) можно учесть с помощью параметра λ , изменение которого может соответствовать интенсификации или стабилизации процессов переработки материала, искусственному изъятию или отсыпки материала. Кроме того, анализ чувствительности модели может быть сделан и по отношению к остальным параметрам ($k, v_0, w_0, \alpha, \beta$).

В заключение отметим, что расчет интегралов по аналитическому решению (I.I.4-3) производился по методу Симпсона, а расчет интегралов (I.I.6-I4) - по Эрмиту, ввиду более быстрой сходимости. Среднее время счета одного варианта около двух минут. Программа была организована так, что кроме выдачи значений отметок высот склона с шагами $\Delta x = 3 \text{ м}$ и $\Delta t = 5 \text{ лет}$, выдавались массивы $v(t)$ (рис. 6) и $s(t)$ (табл. I).

Т а б л и ц а I

Перемещение точки основания подрезаемого склона
по времени для восьми вариантов расчетов по
диффузионной модели подрезаемого склона

$t, \text{год}$	$S(t), \text{м}$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	5	5	5	5	5	5	5	5
10	9,76	10	9,92	10	9,76	10	9,92	10
15	13,92	15	14,60	15	13,89	15	14,59	15
20	17,37	20	18,92	20	17,29	20	18,88	20
25	20,20	25	22,80	25	20,04	25	22,69	25
30	22,53	30	26,19	30	22,28	30	25,97	30
35	24,48	35	29,09	35	24,13	35	28,73	35
40	26,13	40	31,53	40	25,69	40	30,98	40
45	27,56	45	33,54	45	27,03	45	32,78	45
50	28,8	50	35,17	50	28,19	50	34,20	50
55	29,91	55	36,49	55	29,21	55	35,30	55
60	30,89	60	37,55	60	30,12	57,88	36,14	59,08
65	31,78	65	38,39	65	30,93	60,36	36,79	62,45
70	32,59	68,41	39,05	69,36	31,67	62,64	37,28	65,28
75	33,33	71,31	39,57	73,14	32,34	64,78	37,65	67,74
80	34,01	73,98	39,97	76,46	32,96	66,83	37,92	69,95
85	34,64	76,51	40,29	79,45	33,53	68,80	38,13	71,97
90	35,23	78,95	40,54	82,0	34,06	70,70	38,28	73,87
95	35,77	81,33	40,73	84,76	34,55	72,54	38,40	75,68
100	36,28	83,65	40,88	87,19	35,01	74,34	38,48	77,42
105	36,77	85,92	41,0	89,52	35,44	76,08	38,55	79,11
110	37,22	88,15	41,09	91,77	35,84	77,79	38,59	80,75
115	37,65	90,34	41,16	93,96	36,23	79,45	38,63	82,35

§ 7. Краевые одномерные задачи III рода в подвижных областях

Выше были рассмотрены краевые задачи I и II рода для диффузионного уравнения развития склонов.

При анализе формирования педиментов и некоторых других геоморфологических форм можно усмотреть аналогию и с III краевой задачей. Предположим, что в начальный момент времени ($t = 0$) образовался вертикальный уступ высоты H . Систему координат совместим с первоначальным уступом. В следующие моменты времени ($t > 0$) вертикальный уступ отступает с постоянной скоростью v и при этом у его подножия начинает формироваться аккумулятивный склон ($y(x, 0) = 0$). Постепенно этот склон сокращает высоту первоначального уступа, что уменьшает расход твердого материала поступающего с уступа на аккумулятивный склон (отрицательная связь, действующая в системе: аккумулятивный склон - уступ). Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}, & -vt \leq x \leq +\infty, \\ y(x, 0) = 0, & -k \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=-vt} = k_p \cdot v (H - y \Big|_{x=-vt}), \end{cases} \quad (\text{I.I.7-I})$$

где k_p - коэффициент разрыхления материала, смысл которого объясняется в третьей главе, посвященной кинематическим моделям.

Граничное условие в точке соприкосновения склона (аккумулятивного склона или эродируемого выпуклого цоколя коренных пород) с уступом, который отступает с постоянной скоростью v , является краевым условием III рода и описывает указанный выше механизм отрицательной обратной связи. Это условие аналогично теплообмену с окружающей средой по закону Ньютона в задачах теплопроводности.

Исследуем построенную модель. Анализ показывает, что автомодельного установившегося решения типа $y(x, t) = f(x + vt)$, удовлетворяющего граничному условию III рода и дополнительному условию $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = 0$, не существует, т.е. со временем уступ должен исчезнуть. Автомодельное установившееся решение, которое

выражалось бы сохранением постоянной высоты уступа, может иметь место только при подрезании основания аккумулятивного склона с постоянной скоростью, аналогично тому, как это имело место в модели (I.I.4-2). Из граничного условия видим, что уклон в точке ($x = -vt$) соприкосновения склона с уступом со временем уменьшается, стремясь к нулю.

Сделав замену переменных $\xi = x + vt$, $t = t$, приведем задачу (I.I.7-1) к задаче с неподвижной границей

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - v \frac{dy}{d\xi}, & 0 \leq \xi \leq +\infty, \\ y(\xi, 0) = 0, & (k \frac{\partial y}{\partial \xi} - k_p v y) \Big|_{\xi=0} = -k_p v H. \end{cases} \quad (\text{I.I.7-2})$$

Решение задачи (I.I.7-2) получим с помощью преобразования Лапласа $\bar{y} = \int_0^\infty \exp(-pt) y dt$ в виде

$$y(x, t) = \frac{H}{2} \left\{ \Phi^* \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) + \left(\frac{k_p}{k_p - 1} \right) \exp \left[\frac{v}{k} (x + vt) \right] \Phi^* \left(\frac{2vt + x}{2\sqrt{kt}} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{2k_p - 1}{k_p - 1} \right) \exp \left[\frac{k_p v}{k} (x + k_p vt) \right] \Phi^* \left(\frac{x + 2k_p vt}{2\sqrt{kt}} \right) \right\}, \quad (\text{I.I.7-3})$$

где $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\eta^2) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-\eta^2) d\eta$.

Решение (I.I.7-3) справедливо при $k_p > 1$ ($k_p \neq 1$), что всегда имеет место в действительности. Перекрытие уступа теоретически достигается в пределе $\lim_{t \rightarrow \infty} y(-vt, t) = H$. Анализ показывает, что

последний член в фигурных скобках быстро затухает по закону $t^{-1/2} \exp(-\frac{v^2}{4k} t)$ и стремление функции $y(x, t)$ к H происходит по закону $\Phi(\frac{v}{2\sqrt{k}} t^{1/2})$, т.е. по экспоненциальному закону $\exp(-\frac{v^2}{4k} t)$.

Решение (I.I.7-3) дает кроме эволюции склона и форму цоколя коренных пород, а также денудацию последнего. Рассмотренная модель может быть применима для прогноза развития осыпного склона, в предположении, что деформация осыпи подчиняется диффузионной модели, так как можно считать расход материала в каждой точке осыпи пропорциональным уклону в этой точке. Важно от-

метить, что модель справедлива только для вертикального уступа (в практических случаях для субвертикальных уступов), так как в противном случае невозможно записать граничное условия III рода.

Более детальный анализ модели был сделан при численном моделировании. По аналитическому решению (I.I.7-3) были проделаны расчеты при следующих значениях параметров модели: вариант I: $\kappa = 0,01 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$, $\nu = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{год}}$, $\kappa_p = 1,5$ (рис. 7а); вариант 2: $\kappa = 0,01 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$, $\nu = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{год}}$, $\kappa_p = 1,5$ (рис. 7б); вариант 3: $\kappa = 0,01 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$, $\nu = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{год}}$, $\kappa_p = 2,0$ (рис. 7в); вариант 4: $\kappa = 0,1 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$, $\nu = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{год}}$, $\kappa_p = 1,5$ (рис. 7г).

Первоначальная высота уступа во всех вариантах счета бралась постоянной ($H = 100$ м), так как функция $\gamma(x,t)$ линейно зависит от H .

Вариант I. В интервале времени от нуля до $16 \cdot 10^3$ лет намечаются следующие размеры характерных областей склона (под этим склоном понимаем склон, возникающий при отступании уступа): $x < -3$ - область денудации; $-3 < x < -1,6$ - область транзита; $x > -1,6$ - область аккумуляции (линейные размеры везде даются в метрах). При $t = 8 \cdot 10^3$ (время везде в годах) намечается выпуклость в верхней части склона (перегиб склона в точке $x = -5$). Это связано, по-видимому, с тем, что начинает эродироваться цоколь коренных пород. Слабая выпуклость не прогрессирует со временем, и склон в областях транзита и денудации близок к прямолинейному. Аккумулятивный шлейф имеет закономерно вогнутую форму с максимальной вогнутостью в начальный период его формирования. В целом формируется слабо выпукло-вогнутый склон, который со временем выполаживается (выпрямляется). Область денудации цоколя коренных пород постепенно распространяется вниз. Происходит как бы срезание цоколя. Интересно отметить, что область транзита является и областью переменного режима, где высота склона колеблется (попеременно происходит слабая денудация и аккумуляция).

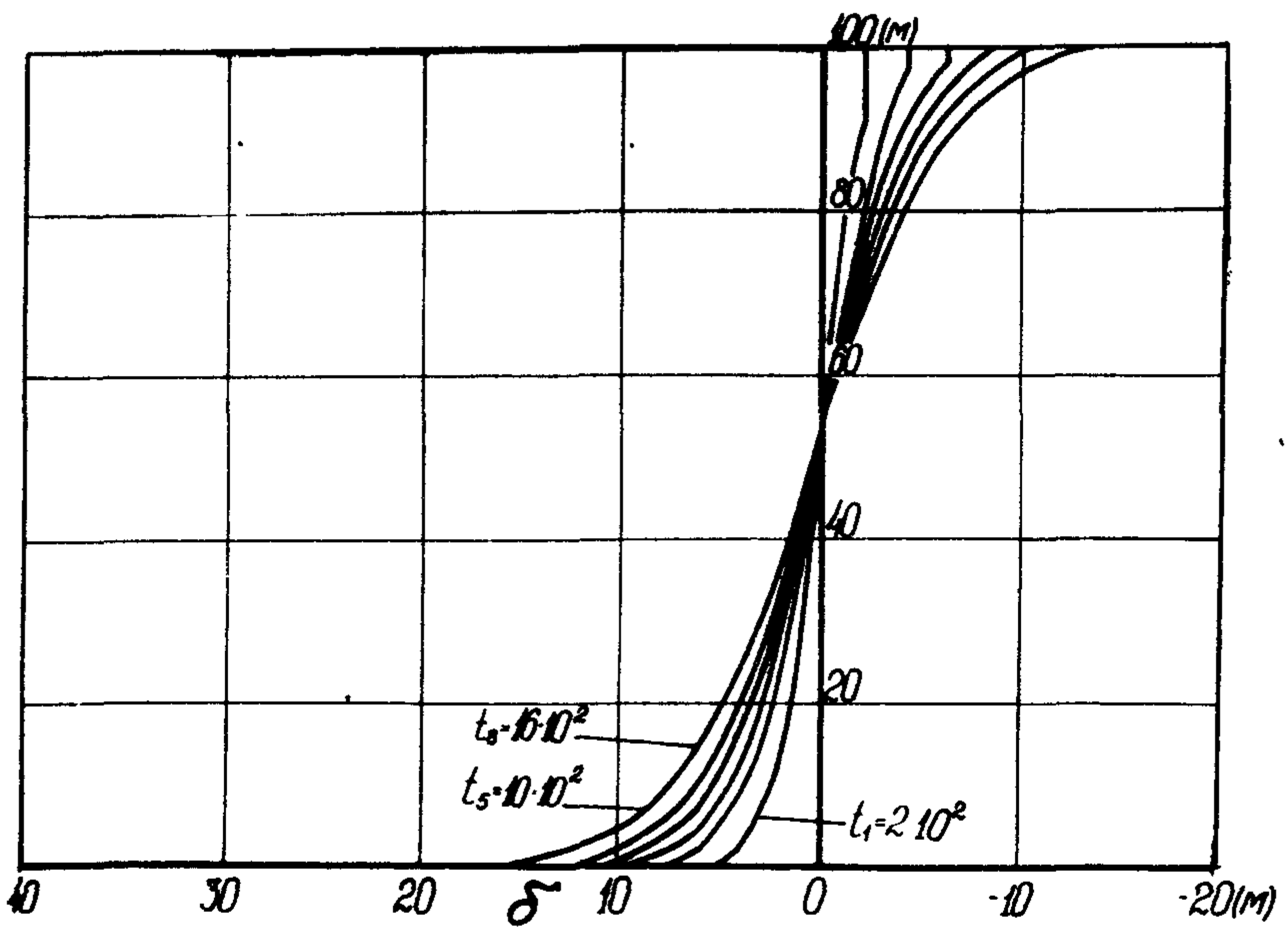
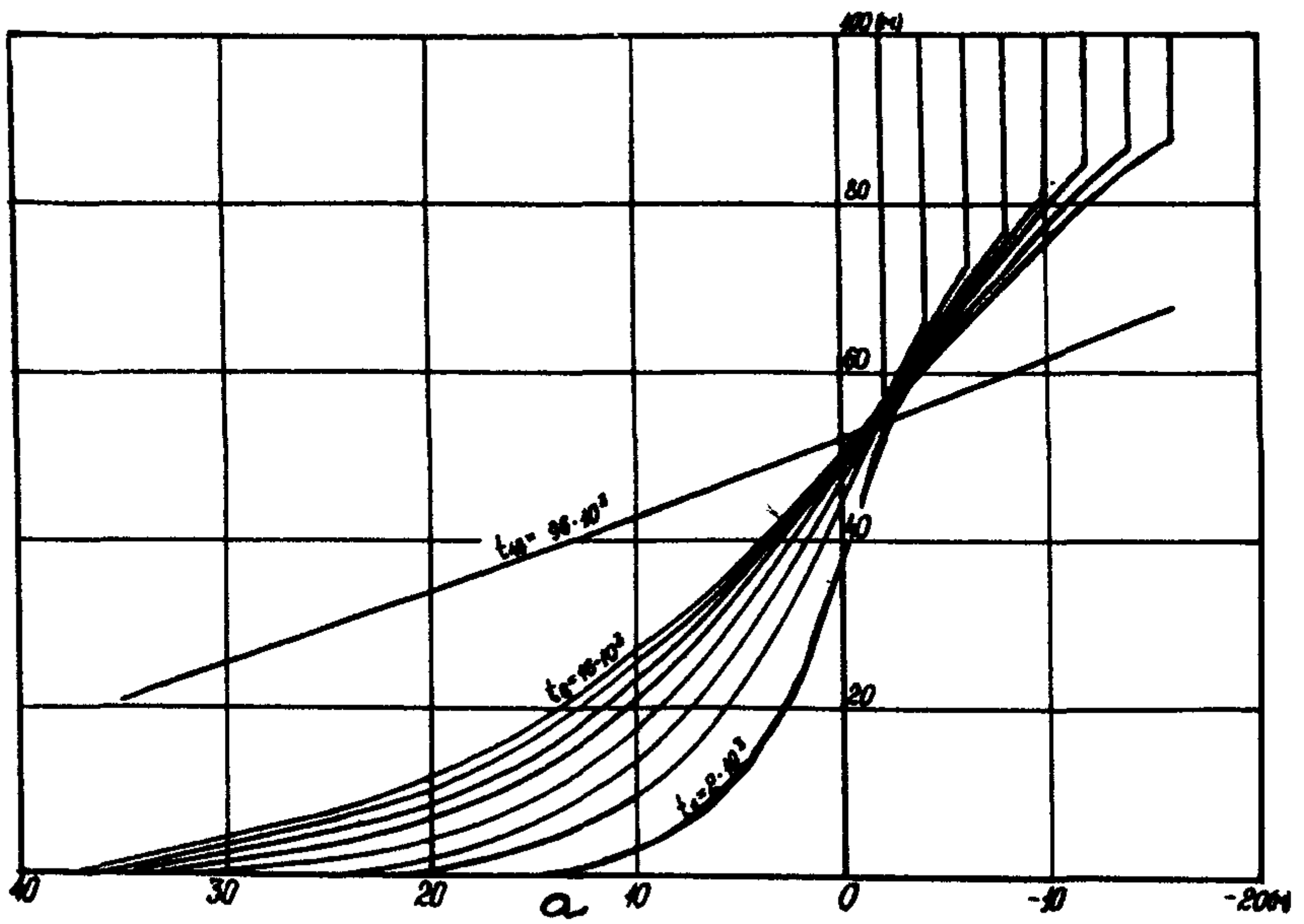


Рис. 7 (а,б). Развитие формы краевой задачи III рода при различных параметрах диффузионной модели (а, б соответственно вариантам I, 2).

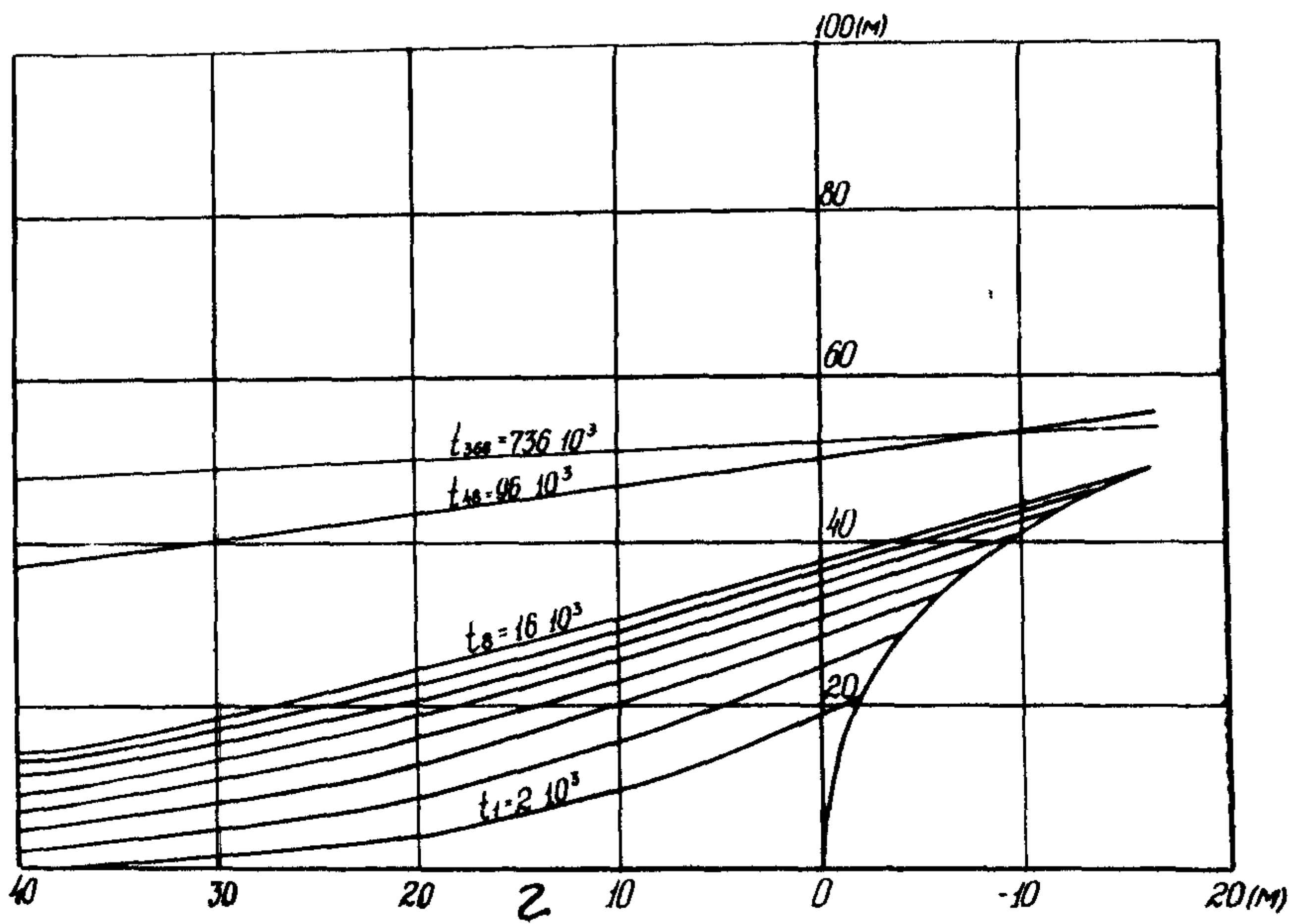
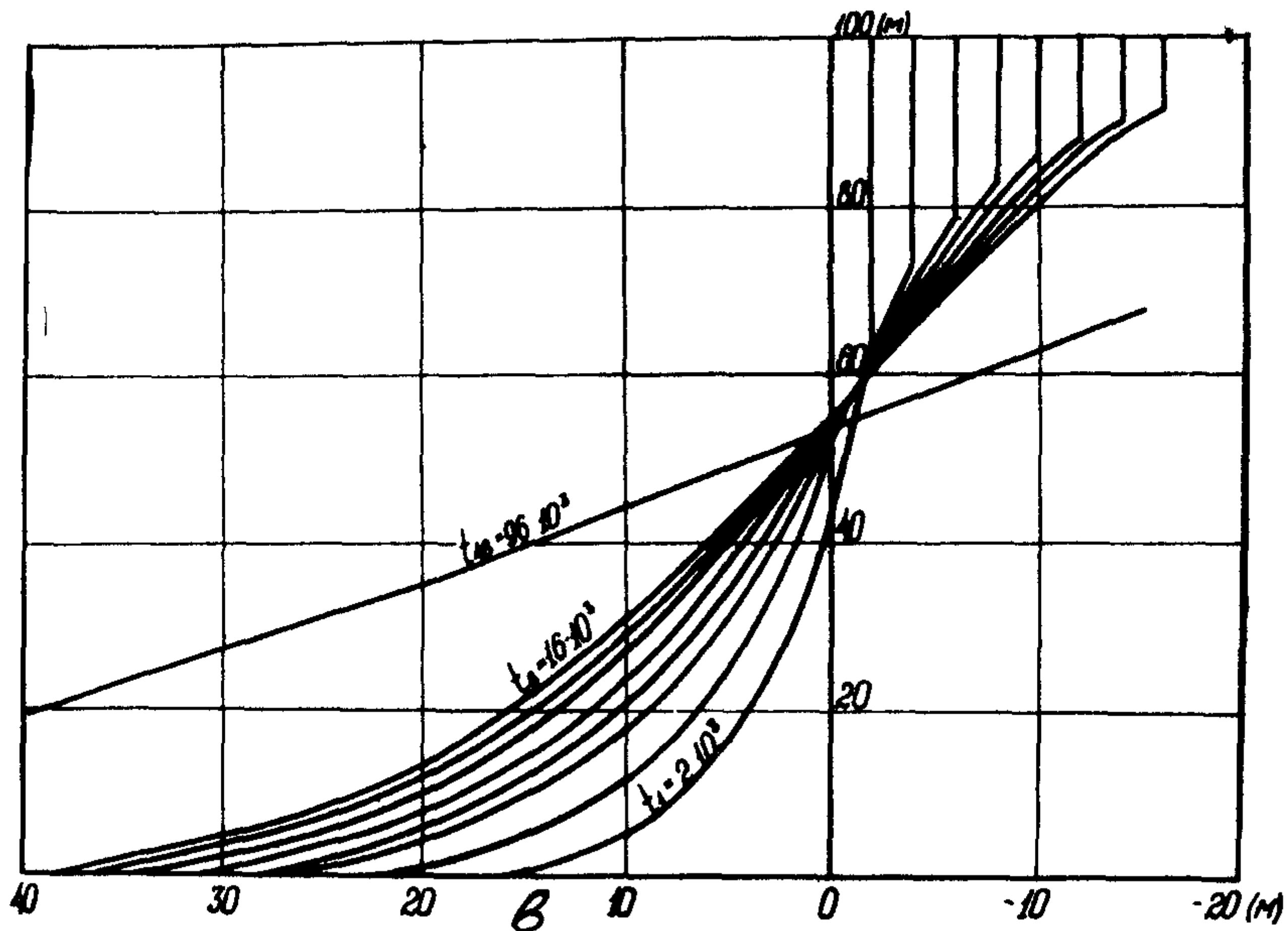


Рис. 7 (в, г). Развитие формы краевой задачи III рода при различных параметрах диффузионной модели (в, г соответствуют вариантам 3, 4).

В следующий расчетный интервал времени $16 \cdot 10^3 < t < 96 \cdot 10^3$ область денудации продвигается вниз по склону. То же самое происходит и с остальными зонами склона. Область транзита (переменного режима) занимает положение $-1 < x < 1$, область аккумуляции $-x > 1$. Наибольшая длина аккумулятивного шлейфа в момент времени $96 \cdot 10^3$ (отсчитывается от точки $x = 0$) равна $101,5$ м, а весь склон имеет длину $101,5 + 96 = 197,5$ (м). Скорость нарастания шлейфа (рис. 8) со временем затухает из-за общего выглаживания склона и меньшего поступления материала с уступа ввиду сокращения последнего. Максимальная денудация цоколя коренных пород за $96 \cdot 10^3$ лет составила $20 - 25$ м. На рисунке показана кривая для высоты сокращающейся части уступа вплоть до $16 \cdot 10^3$ лет, в следующие моменты времени имеем такие высоты сокращающегося уступа: $1,7$ м при $56 \cdot 10^3$ лет; $1,1$ м - $66 \cdot 10^3$ лет; $0,7$ м - $76 \cdot 10^3$ лет; $0,5$ - $86 \cdot 10^3$ лет; $0,4$ - $96 \cdot 10^3$ лет. Взяв за время полного цикла развития формы (до перекрытия уступа) время, при котором высота сокращающейся части уступа становится равной одному метру, получим значение этого времени приблизительно равным $70 \cdot 10^3$ лет.

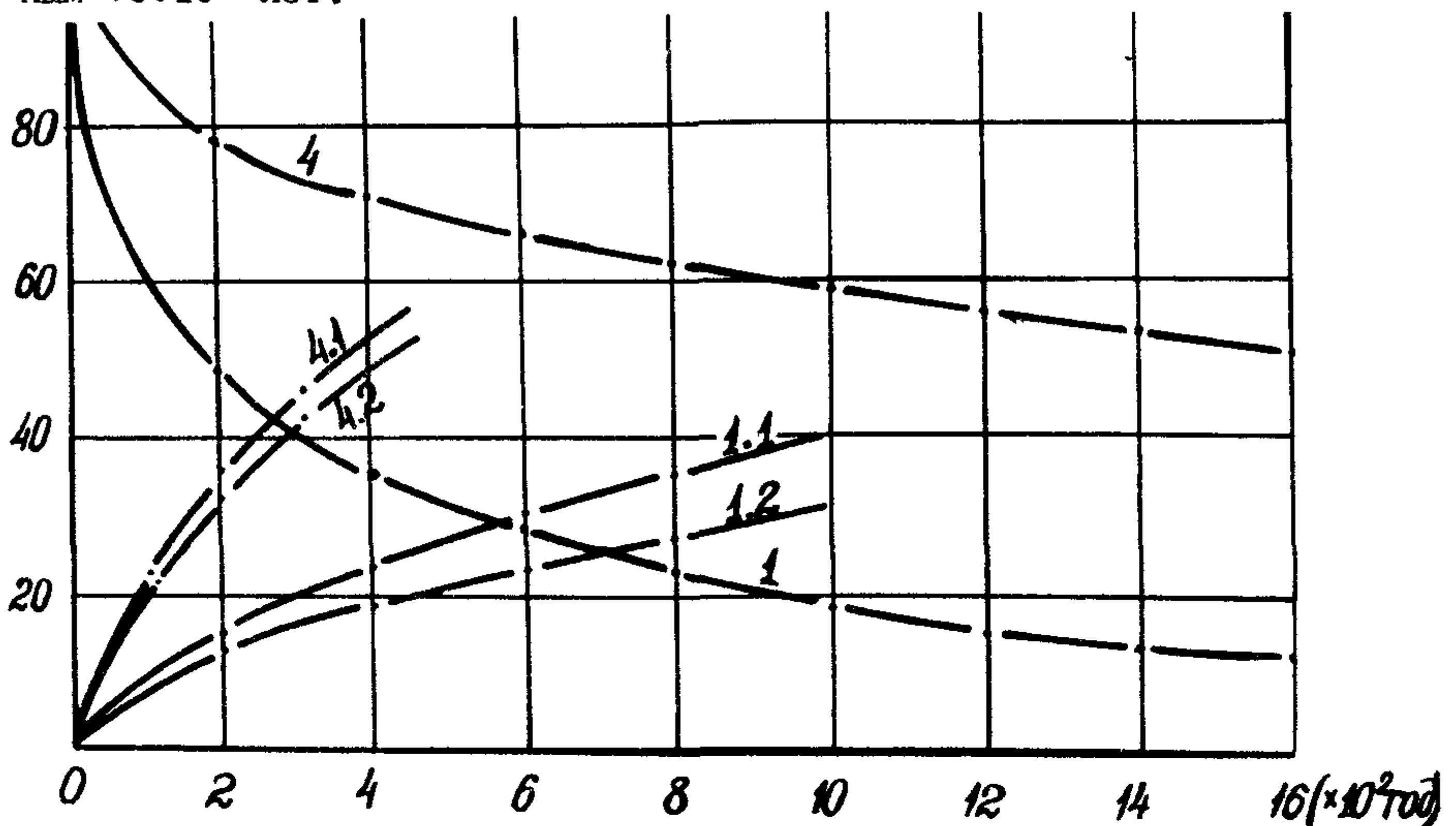


Рис. 8. Зависимость нарастания длин склона и аккумулятивного шлейфа и сокращения высоты уступа от времени. Кривые 1 - 4 - зависимости сокращения высоты уступа соответственно для вариантов 1 - и 4 от времени. Кривые 1.1 и 4.1 - зависимость нарастания длины склона соответственно для вариантов 1 и 4 от времени. Кривые 1.2 и 4.2 - зависимость нарастания аккумулятивного шлейфа соответственно для вариантов 1 и 4 от времени.

Вариант 2. Этот вариант отличается от предыдущего увеличением на порядок (в 10 раз) скорости отступления уступа. Сокращение уступа происходит очень быстро. За 100 лет уступ сокращается на 81,35 м, в первом варианте имели - 41 м за 1000 лет. Коэффициент денудации (коэффициент подвижности материала) очень мал, и при такой большой скорости отступления уступа и поступления с него материала последний не успевает быстро перераспределяться и образовывать пологий шлейф. Здесь имеем нереально крутой аккумулятивный склон (больше угла естественного откоса). Фактически тоже самое имело место и в первом варианте. Отсюда следует, что модель можно использовать не при всех параметрах, что достаточно очевидно. Реальные (природные) параметры естественно приведут к более правильной картине эволюции формы. Для оценки реальных значений коэффициента денудации, определим максимальный угол в начальный момент времени из граничного условия III рода (I.I.7-I) при $y = 0$: $\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k_p v H / k$. Отсюда следует, что при $k_p = 1 + 3$, $v = 10^{-3}$ м/год, $H = 100$ м для реальных пологих склонов необходимо, чтобы имело место неравенство $k > 0,1$ м²/год, а при $v = 10^{-2}$ м/год и тех же значениях k_p и H имеем $k > 1,0$ м²/год. В противном случае (при меньших k), чтобы имели место реальные небольшие уклоны, необходимо предположить, что расход материала в точке $x = 0$ на склоне не равен поступающему с уступа расходу материала (склон в точке $x = 0$ не может перемещать транзитом весь осыпавшийся материал и происходит его аккумуляция в этой точке). Возвращаясь к анализу второго варианта, отметим, что в точке $x = -1$ образуется перегиб (небольшая выпуклость) при $t = 200$ и далее со временем формируется четкая выпуклая денудационная область. Уже через 500 лет уступ сокращается до двух метров. Область транзита очень узкая (в горизонтальном положении) и уже при $x > 0$ идет однонаправленная аккумуляция. Точка $x = 0$ почти стабильна и область транзита как бы поворачивается вокруг этой точки.

Возрастные характеристики аккумулятивного склона согласуются с формулами для расчета возрастных характеристик осыпного склона (I.3.I-2; I.3.I-4). В них следует положить $\text{ctg } \beta = 0$ и брать некоторый средний угол (α) склона.

Выпуклый цоколь коренных пород является следствием того, что скорость сокращения уступа уменьшается из-за уменьшения области денудации уступа. Четкая выпуклая форма цоколя во втором варианте является следствием того, что он не успевает денудироваться из-за большой скорости отступления уступа (небольшое время эволюции формы).

Вариант 3. Этот вариант близок к первому и отличается от него только коэффициентом разрыхления ($K_p = 2$ вместо $K_p = 1,5$ в первом варианте). Выпуклость склона начинает образовываться через 6000 – 8000 лет. Анализ показывает, что в области $x > -0,4$ до времени $16 \cdot 10^3$ происходит только аккумуляция; $x < -2,4$ – область денудации; $-2,4 < x < -0,4$ – область переменного режима (транзита). За этот промежуток времени цоколь коренных пород эродировался на 7,5 м (в первом варианте имели 6,5 м за это же время). В следующий интервал расчетного времени ($16 \cdot 10^3 < t < 96 \cdot 10^3$) все три области смещаются: $x < 0$ – область денудации, $0 < x < 3$ – область транзита; $x > 3$ – область аккумуляции. Таким образом, как и в первом варианте, имеем картину смещения зон во времени и пространстве. Наибольшая длина аккумулятивного шлейфа в момент времени $96 \cdot 10^3$ равна 102,5 м (на один метр больше, чем в первом варианте), а весь склон имеет длину 198,5 м. Высоты сокращающегося уступа соответственно равны: 1,2 м при $56 \cdot 10^3$ лет; 0,7 м – $66 \cdot 10^3$ лет; 0,5 м – $76 \cdot 10^3$ лет; 0,3 м – $86 \cdot 10^3$ лет; 0,2 м – $96 \cdot 10^3$ лет. Время полного цикла развития формы находится в интервале $6 \cdot 10^3 + 65 \cdot 10^3$ лет.

За все время эволюции точка перегиба склона, отделяющая выпуклую часть склона от вогнутой и соответствующая области транзита, колеблется в узком интервале $(-2, -1)$.

Начальное засыпание уступа ($t_1 = 2 \cdot 10^3$) приблизительно на 9 м больше, чем в первом варианте, что является следствием большей пористости материала.

В дальнейшем был сделан детализованный расчет начальной стадии формирования склона с шагом по времени $\Delta t = 100$ лет до момента времени $t_8 = 800$ лет (рис.9). Склон в этом интервале времени развивался по типу аккумулятивного с образованием незэродируемого выпуклого цоколя коренных пород. Кривые нарастания длины склона и сокращения уступа показаны на рис.10.

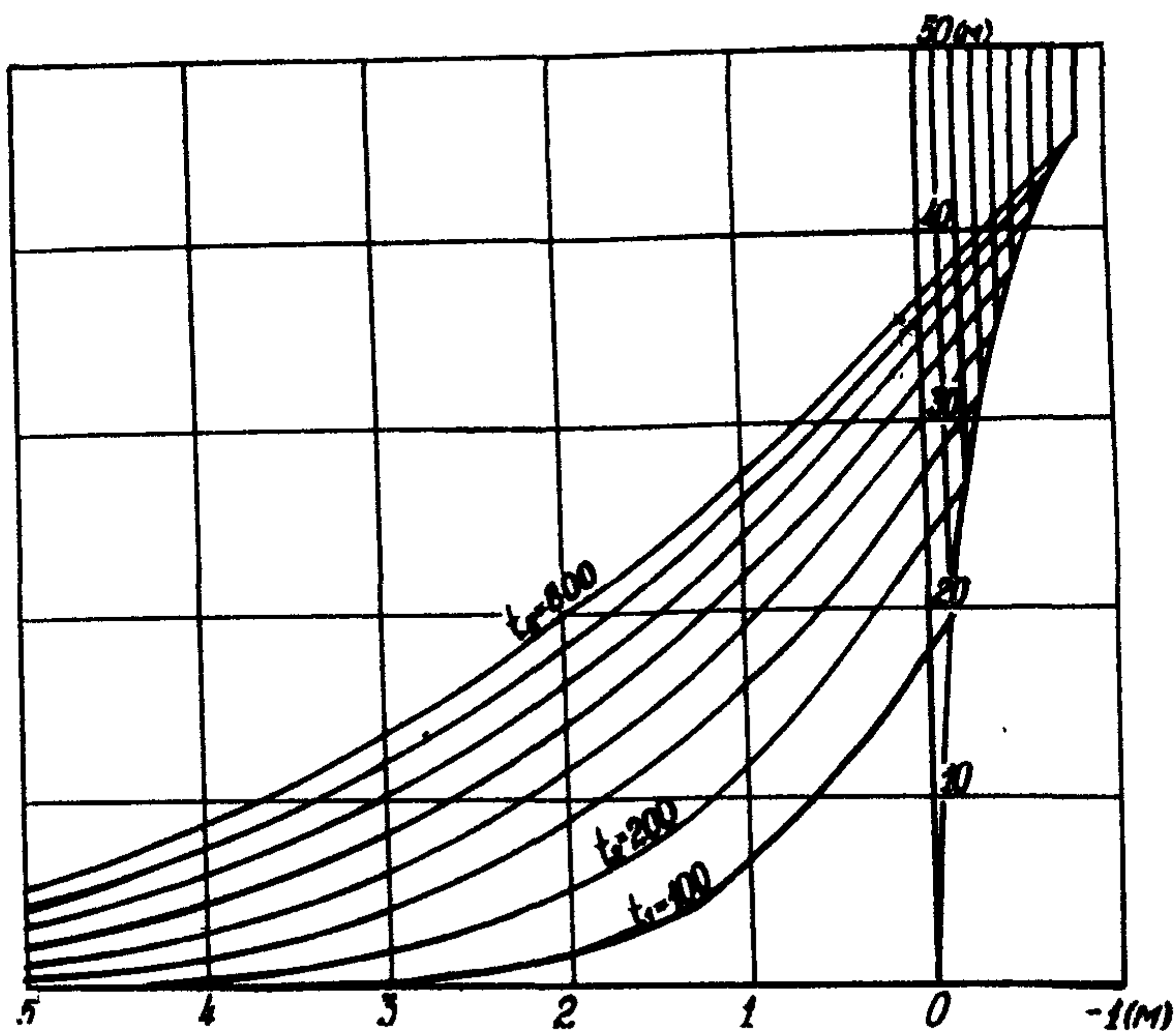


Рис. 9. Развитие формы по третьему детализированному варианту.

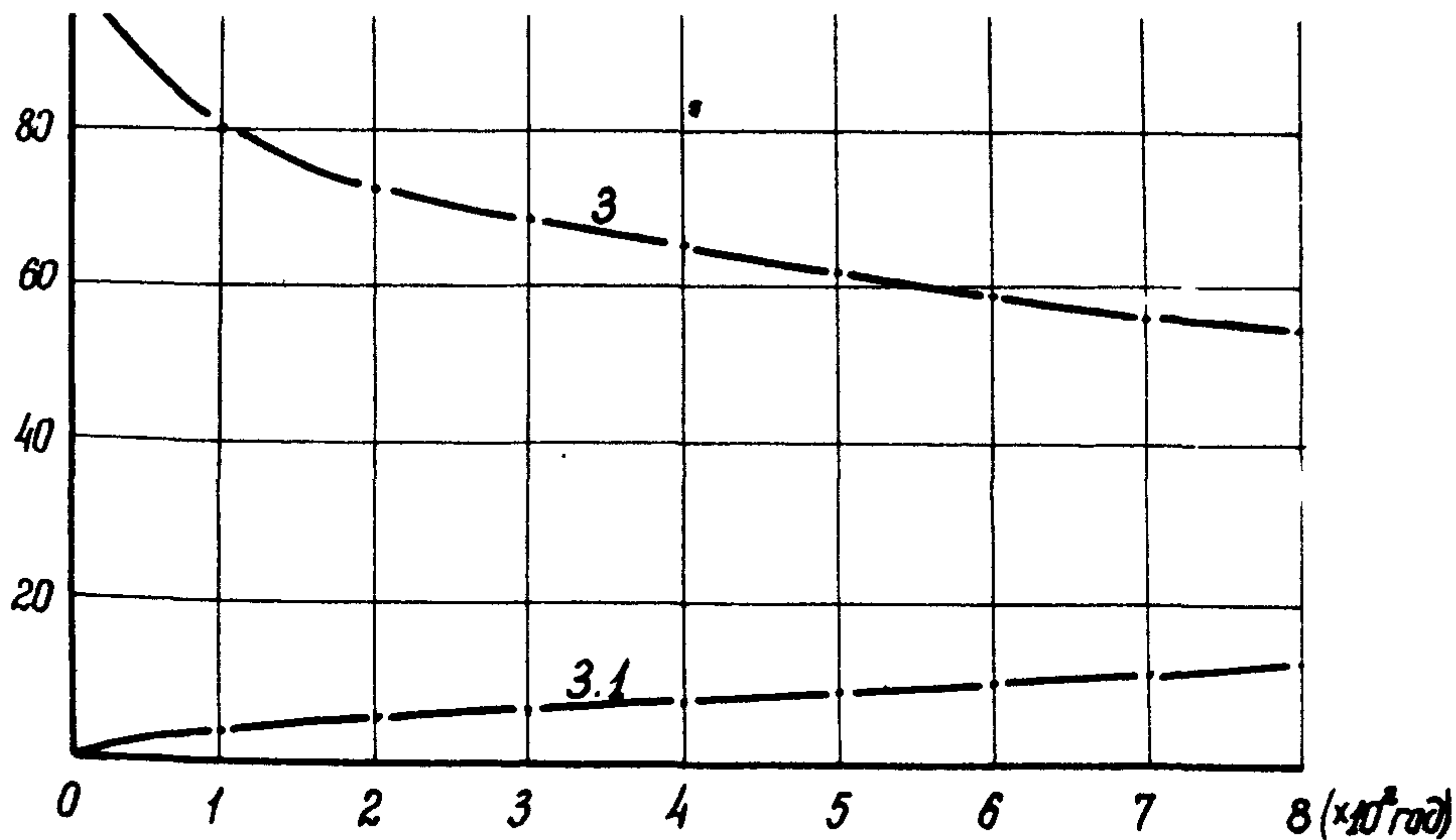


Рис. 10. Зависимости нарастания длины склона и сокращения высоты уступа от времени для третьего детализированного варианта. Кривая 3, — зависимость сокращения высоты уступа от времени. Кривая 3.1 — зависимость нарастания длины склона от времени.

Вариант 4. Этот вариант отличается от первого варианта увеличением на порядок коэффициента денудации и является по тенциально реальным вариантом. Действительно, максимальная крутизна склона в момент времени, равном 1000 лет, не превышает $51 \div 52^\circ$ со средней крутизной всего склона, не превышающей $26 \div 27^\circ$. Формируется слабоогнутый профиль склона. Постепенно склон почти полностью выпрямляется. Развитие склона близко к аккумулятивному типу с образованием сильно выпуклого слабоэродируемого цоколя коренных пород. В первый расчетный интервал времени $0 < t < 16 \cdot 10^3$ склон развивается по чисто аккумулятивному типу, во второй расчетный интервал $16 \cdot 10^3 < t < 96 \cdot 10^3$ формируется область переменного режима (транзита) $-31 < X < -25$. Денудация цоколя коренных пород незначительная и достигает 2 - 3 метров. В третий расчетный интервал времени $96 \cdot 10^3 \div 416 \cdot 10^3$ область переменного режима занимает положение $-21 < X < -4$ и максимальная денудация цоколя коренных пород достигает 12 - 13 метров. Расчеты для следующих отметок времени показали на следующие значения высот сокращающегося уступа: 2,2 м при $456 \cdot 10^3$ лет; 2,0 м - $496 \cdot 10^3$ лет; 1,7 м - $536 \cdot 10^3$ лет; 1,4 м - $576 \cdot 10^3$ лет; 1,2 м - $616 \cdot 10^3$ лет; 1,0 м - $656 \cdot 10^3$ лет; 0,9 м - $696 \cdot 10^3$ лет; 0,7 м - $736 \cdot 10^3$ лет. Время полного цикла формирования склона определенное по формуле (I.3.I-4) $t^* = \frac{H \operatorname{ctg} \alpha}{2k_p \cdot v} = \frac{100 \cdot 16,24}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 540 \cdot 10^3$ лет согласуется с настоящими расчетами.

Угол выровненного склона на конечный расчетный интервал времени равен около $\alpha \approx 3,5^\circ$, который и брался при расчете времени t^* по формуле (I.3.I-4)

Наибольшая длина аккумулятивного шлейфа равна 888 м, а всего склона - $888 + 736 = 1624$ (эта величина использовалась при определении $\operatorname{ctg} \alpha$ в формуле (I.3.I-4)). Кривые нарастания длин склона и шлейфа, а также сокращения уступа показаны на рисунке 8. Сокращение уступа происходит намного медленнее, чем в первом варианте, в то же время нарастание шлейфа происходит быстрее, из-за более высокого коэффициента денудации K .

Сделаем следующие критические замечания по рассмотренной модели. Характер развития склона существенно зависит от двух безразмерных параметров (критериев подобия) $k_1 = \frac{vH}{K}$, $k_2 = Kp$.

Первый, наиболее существенный критерий, изменяется в больших пределах $0 < k_1 < +\infty$, второй - в малых $1 < k_2 < 10$ (верхняя граница взята ориентировочно). При равенстве критериев подобия $k_1 = \text{const}$, $k_2 = \text{const}$ у нескольких форм их развитие идет подобным образом. В области (v, k) уравнение $k_1 = \text{const}$ представляет собой пучок (семейство) прямых линий, выходящих из начала координат. Как показали вышепроведенные расчеты, большие значения k_1 соответствуют малореальным случаям: при $k_2 = k_p = 1,5$, $k_1 = 10$ соответствует первому варианту, $k_1 = 100$ - второму варианту, $k_1 = 1,0$ - четвертому варианту. Преимущественно аккумулятивный тип развития (со слабой денудацией цоколя коренных пород) имеет место при малых значениях критерия k_1 ($0 < k_1 < 1$). Развитие модели (I.I.7-I) может идти по пути построения моделей развития структурного рельефа. Одна из простейших таких моделей может состоять в учете двух горизонтальных слоев пород имеющих разную прочность. Пусть вертикальный уступ высоты H состоит из двух слоев, причем верхний слой высоты H_1 сильнее поддается денудации, чем нижний слой высоты H_2 ($H_1 + H_2 = H$). Скорости денудации этих слоев соответственно равны v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). В процессе развития такой формы будет образовываться структурная терраса на уровне слоев разной прочности. Системную модель развития этой формы представим в виде (индексы 1 и 2 соответствуют верхнему и нижнему уровню рассматриваемой формы)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & -v_1 t < x < -v_2 t, \\ y(-v_2 t, t) = H_2, & -k_1 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=-v_1 t} = k_{p1} v_1 (H - y \Big|_{x=-v_1 t}), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & -v_2 t \leq x < +\infty, \\ y(x, 0) = 0, & -k_2 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=-v_2 t} = k_{p2} v_2 (H_2 - y \Big|_{x=-v_2 t}) - k_1 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=-v_2 t}. \end{cases} \quad (\text{I.I.7-4})$$

Член $k_1 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=-v_2 t}$ в граничном условии для нижнего склона

указывает на поступление материала с вышележащего полого склона. По типу (I.I.7-4) могут строиться и другие, более сложные модели развития структурного рельефа.

§ 8. Системная диффузионная модель оврагоформирования

Как отмечается в работе Б.Ф.Косова и В.П.Любимова (1979), вопрос взаимосвязи склоновых и русловых (эрозионных) процессов при оврагоформировании разработан слабо. Каких-либо системных математических моделей взаимодействия склоновых и русловых процессов при оврагоформировании до сих пор не было построено.

Нами предлагаются два типа теоретических балансовых моделей взаимодействия при оврагоформировании. Второй тип моделей будет рассмотрен во второй части (§ 2, гл. 2).

Будем рассматривать два типа склонов оврага: 1. пологие делювиальные или дефлюкционные (солифлюкционные); 2. крутые осыпные. При моделировании наиболее сложен первый случай, так как здесь трудно оценить количество поступающего в русло материала со склонов. В этом случае общая диффузионная балансовая модель эволюции оврага и его склонов должна строиться по пространственному типу. Такая модель учитывает поступление материала со склонов и дальнейшее его перераспределение русловым процессом. Для выположенной формы (балка), при предположении постоянного коэффициента денудации, такая задача аналитически решена во втором параграфе этой главы. В реальных случаях следует учитывать анизотропность коэффициента денудации (склоновая и русловая составляющие коэффициента денудации).

Несколько проще для моделирования второй случай (осыпные склоны), так как здесь достаточно построения одномерной (плоской) диффузионной балансовой модели. При этом поступление материала с осыпных склонов (бортов оврага) будет учитываться дополнительным членом в уравнении баланса. При симметричном поперечном профиле оврага с учетом двух осыпных склонов, получим склоновую составляющую уравнения баланса в виде $2v_k r_c$, где v — скорость денудации бортов оврага по нормали к ним, k_r — коэффициент разрыхления, r_c — размер области денудации (см. также § 2, гл. 2, ч. 2). Общее уравнение баланса материала для моделирования развития продольного профиля оврага получим в виде

$$\frac{\partial G}{\partial x} - 2v_k r_c = - \frac{\partial(yb)}{\partial t}, \quad (I.I.8-I)$$

где G - полный твердый расход ($\text{м}^3/\text{год}$), b - ширина дна оврага.

Первый член слева - русловая составляющая уравнения баланса, второй - склоновая. Твердый расход запишем, как обычно, в виде $G = -\kappa(x,t) \frac{\partial y}{\partial x}$, а величину l_c найдем, зная продольный профиль склона, в который врезался овраг ($\psi(x)$); тогда $l_c = \frac{\psi(x) - y}{\sin \psi}$, где ψ - угол наклона осыпного склона (бортов оврага). Будем считать, что основание оврага стабильно и он растет только вершиной вверх. Помещая начало координат в основании оврага и принимая линейный закон нарастания жидкого расхода по руслу оврага, приходим к следующей постановке задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [(a(\lambda(t) - x) + Q_0)^\beta \frac{\partial y}{\partial x}] + \frac{2\sigma_{кр}(\psi(x) - y)}{\sin \psi} = \frac{\partial (y b)}{\partial t}, \\ 0 \leq x \leq \lambda(t), y(x, 0) = f(x), y(0, t) = 0, \\ y(\lambda(t), t) = h(t) = \psi(\lambda(t)), \\ Q_0 = b I B (\angle_{\text{прол.}} - \lambda(t)), \end{cases} \quad (\text{I.I.8-2})$$

где $a, \beta = \text{const}$; b, I - осредненные значения коэффициента стока и интенсивности осадков; B - средняя ширина привершинного водосбора; $\angle_{\text{прол.}}$ - горизонтальное проложение от основания оврага до наиболее удаленной точки привершинного водосбора оврага; Q_0 - жидкий расход в вершину оврага; $\lambda(t)$ - горизонтальная координата движущейся вершины оврага.

Рассматривая прямолинейный профиль склона, на котором развивается овраг ($\psi(x) = \gamma x$), и полагая $\beta = I$, что справедливо во многих случаях, приходим к следующей модели (рис. II)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [(a(\lambda(t) - x) + Q_0) \frac{\partial y}{\partial x}] + \frac{2\sigma_{кр}(\gamma x - y)}{\sin \psi} = \frac{\partial (y b)}{\partial t}, \\ 0 \leq x \leq \lambda(t), y(x, 0) = f(x), y(0, t) = 0, \\ y(\lambda(t), t) = h(t) = l(t) \sin \alpha, \lambda(t) = l(t) \cos \alpha, \text{tg} \alpha = \gamma, \\ Q_0 = b I B \cos \alpha [L - l(t)], \end{cases} \quad (\text{I.I.8-3})$$

В этой модели можно учесть и поступление материала за счет разрушения уступа регрессивной эрозии: $\kappa_p h_{уст.} \frac{dl(t)}{dt}$, где $h_{уст.}$ - высота уступа регрессивной эрозии. Модель для перемещения вер-

шины оврага ($\ell(t)$ или $\lambda(t)$) рассматривается в третьей части (§ 3, гл. I).

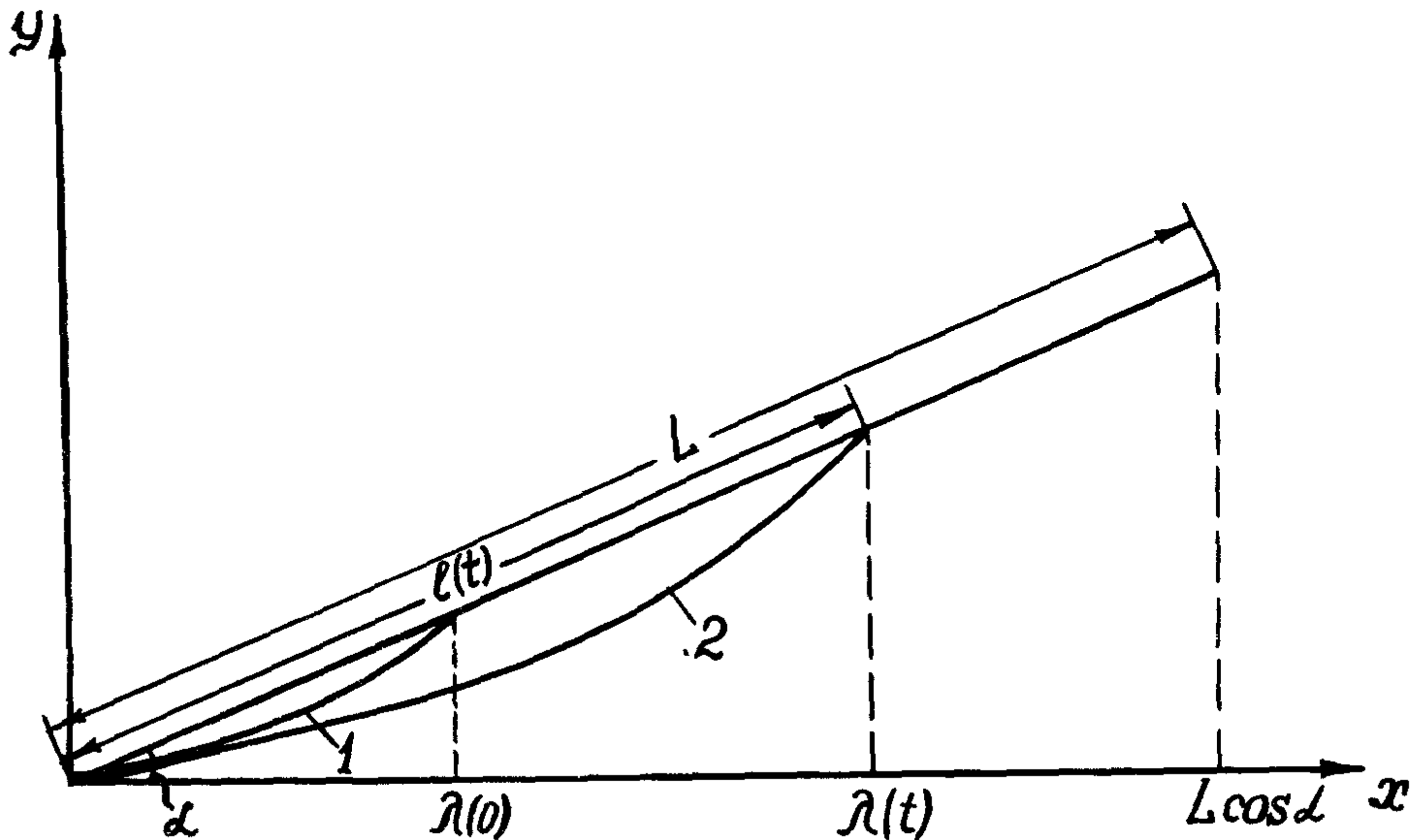


Рис. II. Схема к системной модели оврагоформирования.

Для окончательной постановки задачи необходимо знать зависимость функции \mathbf{b} от x , t , y .

Перейдем теперь от рассмотрения прогнозных диффузионных моделей к ретроспективному анализу этих моделей.

§ 9. Ретроспективный анализ диффузионных моделей

Кроме решения задач вперед по времени (прогноз), существует более сложный аспект анализа балансовых диффузионных моделей. Он состоит в восстановлении предыдущих состояний рельефа (ретроспективный анализ), то есть в решении задач назад во времени. Специфика необратимых процессов, описываемых уравнением диффузии, не дает возможности восстанавливать предыдущие состояния на большое время назад, но такое восстановление возможно на небольшое время (чем больше времени прошло с начального момента, тем уравнение диффузии быстрее "забывает на-

чальные условия"). Однако при этом необходимо как можно точнее знать настоящее состояние, так как небольшие флуктуации дадут большую неточность в определяемом предыдущем состоянии (из-за роста флуктуации по экспоненте при решении в обратном времени) (Трофимов, Московкин, 1976; Трофимов, Московкин, Хайрутдинов, 1980). Отметим, что решение диффузионного уравнения назад во времени является некорректной задачей (Зельдович, Мышкис, 1973), аппарат решения которой хорошо разработан.

Следует иметь в виду, что при восстановлении предыдущего состояния рельефа по уравнению диффузии его крутизна будет возрастать (процесс обратный выравниванию рельефа при обычном решении уравнения диффузии вперед во времени), а само уравнение диффузии наиболее строго получено для достаточно пологого склона рельефа. Если задан профиль рельефа (склона) $y(x, t_0) = \psi(x) > 0$, то решение назад во времени может быть продолжено не дальше, чем на временной интервал (Зельдович, Мышкис, 1973)

$$\Delta t = \frac{I|_{t=t_0}}{2\kappa V}, \quad (I.I.9-1)$$

где $I|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \psi(x) dx$, $V = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x, t) dx = \text{const}$; a — координата центра тяжести криволинейной фигуры под профилем $\psi(x)$; $I|_{t=t_0}$ — аналог момента инерции.

Для примера возьмем типичную выпукло-вогнутую симметричную форму рельефа ($a = 0$)

$$y(x, t_0) = \psi(x) = H_0 \exp(-\alpha^2 x^2), \quad (I.I.9-2)$$

$$\text{тогда } V = 2H_0 \int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) dx = \frac{H_0}{\alpha} \sqrt{\pi}; \quad I|_{t=t_0} = 2H_0 \int_0^{\infty} x^2 \exp(-\alpha^2 x^2) dx = (H_0/2\alpha^3) \sqrt{\pi}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (I.I.9-1), получим

$$\Delta t = 1/4\kappa\alpha^2. \quad (I.I.9-3)$$

Таким образом, Δt не зависит от высоты исходной формы H_0 , а зависит от степени ее выположенности (α^2). Анализ показывает, что чем больше коэффициент денудации κ , тем меньше Δt , и, чем меньше α^2 (чем сильнее выположенность формы), тем больше Δt .

Например, при реальных параметрах K и α^2 : $K = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$, $\alpha = 10^{-3}$ временной интервал, на который может быть продолжено назад во времени решение уравнения диффузии, т.е. форма поверхности склона, будет равен: $\Delta t = 2,5 \cdot 10^6$ лет, а при $\alpha = 10^{-2}$ - $\Delta t = 2,5 \cdot 10^4$ лет (Трофимов, Московкин, Хайрутдинов, 1980).

В заключение рассмотрения балансовых диффузионных моделей обсудим важный вопрос количественной оценки коэффициента денудации, что пока и сдерживает использование этих моделей на практике.

§ 10. Подходы к определению коэффициента денудации диффузионных моделей

Рассмотрим два подхода к оценке коэффициента денудации (Есин, Московкин, 1980).

1. Определение коэффициента K из физических зависимостей для расхода материала (например, $q = \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \sin \alpha$ (Souchez, 1964; Девдариани, 1976 а)) или твердого расхода склонового стока. При этом существенно могут использоваться данные натуральных измерений.

2. Определение коэффициента K с помощью специальных стационарных измерений или других имеющихся натуральных данных из самого уравнения диффузии.

Для оценки коэффициента K по первому пути может быть предложена, например, следующая процедура (для крипа):

$$q = K \cdot \sin \alpha, \quad q = \bar{v} h, \quad (I.I.10-1)$$

откуда

$$K = \bar{v} h / \sin \alpha, \quad (I.I.10-2)$$

где \bar{v}, h - средние значения скорости и мощности (толщины) движущегося грунта.

По данным А.П.Дедкова и В.А.Дуглава (1967), для одного склона северной экспозиции $\bar{v} = 1,73 \text{ мм/год} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{год}$, $h = 0,38 \text{ м}$, $\alpha = 22^\circ$, тогда по формуле (I.I.10-2) получим $K_c =$

$1,76 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{год}$. По этим же данным для характеристик склона южной экспозиции $\bar{v} = 0,62 \text{ м}/\text{год}$, $h = 0,845 \text{ м}$, $\alpha = 22^\circ$ имеем $K_{ю} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{год}$. Эти расчеты согласуются с тем, что процессы денудации интенсивнее протекают на более затененных и увлажненных склонах северной экспозиции ($K_c > K_{ю}$).

Более высокие скорости крипа, происходящего в гранитах и песчаниках, получены Койяном (Kojan, 1967): $\bar{v} = 10 \div 50 \text{ мм}/\text{год}$, $h = 0,2 \text{ м}$, $\alpha = 19^\circ$, что соответствует коэффициенту денудации на два порядка выше предыдущих $0,1 \text{ м}^2/\text{год}$.

В обзорной статье А.Янга (Young, 1974) приведены данные 21 измерения скоростей крипа в различных климатических и литологических условиях и при разных уклонах, которые позволяют заключить, что коэффициент денудации находится в пределах ($0,001 \text{ м}^2/\text{год} - 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$). Предельные значения этого ряда соответствуют предыдущим расчетам.

Для определения коэффициента K по второму пути, находим его из разностного аналога уравнения (I.I)

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x}{(\text{tg} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1)}, \quad (\text{I.I.IO-3})$$

где $\text{tg} \alpha_1$, $\text{tg} \alpha_2$ - уклоны в двух выбранных близлежащих, на расстоянии Δx по горизонтали, точках; Δy - определяются за время Δt по понижению первой точки склона, например, с помощью репера.

Можно произвести измерения и вычислить ряд значений K по профилю склона и, если эти значения мало отличаются друг от друга, это будет говорить о развитии склона по линейной диффузионной модели. В качестве искомого коэффициента следует взять среднее арифметическое.

Ко второму пути оценки коэффициента K можно отнести метод, основанный на интегрировании уравнения (I.I.I-I) и измерении аккумулярованного материала в экспериментальной лотке (V) (Галкин и др., 1977): $K = V / \text{tg} \alpha \cdot L \cdot T$, где L - длина открытой части лотка, $\text{tg} \alpha$ - его уклон, T - время аккумуляции материала.

Для больших водосборных бассейнов оценка коэффициента денудации K может вестись приближенно по модулю твердого стока и среднему уклону водосборного бассейна (второй подход). В дру-

В этих областях хорошо известны методы определения коэффициентов диффузионных уравнений с помощью решения обратных краевых задач, когда заданы краевые условия. Здесь трудности часто связаны с математической некорректностью таких задач. Этот метод также можно отнести ко второму подходу.

Таким образом, мы закончили концепцию диффузионных моделей в геоморфологии склонов. Показали их возможности для той или иной склоновой системы и возникающие трудности при использовании. Следующая наша цель — построение концепции следующего класса моделей склонов, которые мы назвали геомеханическими.

Г л а в а 2. ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ СКЛОНОВ

При решении конкретных геоморфологических и инженерных задач развития склонов для коротких промежутков времени, не всегда приемлемо основываться на уравнениях (I), а тем более на линейном диффузионном уравнении (I.I). Здесь требуется более точный учет характера взаимодействия вышележащего подвижного слоя грунта (или потока воды) с коренной поверхностью склона, что приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных. Такие модели, которые мы назовем геомеханическими, в зависимости от характера склонового процесса движения грунта или потока воды, в отличие от балансовых диффузионных моделей развития склонов, имеют весьма различный вид.

Нами исследуются геомеханические модели склонов двух типов: развивающихся под действием течения грунта и поверхностного (склонового) стока.

Уравнение деформации следует рассматривать как частный случай уравнения баланса (I), описывающего развитие эродируемых потоком грунта или воды склонов. Совместное использование этих уравнений в первом типе моделей (§ I) обусловлено несколько отличным от (I) представлением уравнения баланса (I.2.I-I), которое позволит замыкание (I.2.I-I) уравнением деформации. К этому типу моделей относится эрозионная модель, построенная в работе Г.Ш.Читишвили (1974) и разработанная нами в § I. От-

метим, что геомеханические модели второго типа для волнового потока (модели абразионных подводных склонов) успешно разрабатываются и используются в Южном отделении Института Океанологии АН СССР Н.Е.Есиным и др.

§ I. Геомеханические модели развития склонов, основанные на уравнениях баланса материала, деформации и расхода материала

Запишем вначале в несколько более общем виде исходное уравнение баланса материала (I) (Есин, 1968)

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (I.2.I-I)$$

где h - мощность (глубина) движущегося слоя грунта. Расход материала находится с помощью уравнения движения грунта (уравнение реологии) по выражению $q = \bar{v} h$, где средняя скорость течения грунта определяется по формуле $\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v(z) dz$, а $v(z)$ - по уравнению движения. Наличие дополнительной функции h требует замыкания уравнения баланса и выражения для расхода материала третьим уравнением. Для процессов солифлюкции, когда вовлечение грунта в поток происходит после его оттаивания, в качестве третьего Н.В.Есин и Н.А.Скоркин (1970) использовали уравнение теплопроводности и получили приближенное решение задачи при произвольном начальном очертании склона. Работа этих авторов была первой, приведшей к выделенному нами классу геомеханических моделей.

В отличие от этой модели, мы полагали, что вовлечение материала подстилающей коренной поверхности (породы) происходит в результате действия силы трения на контакте движущегося слоя с коренной поверхностью и в качестве третьего уравнения использовали уравнение деформации коренной поверхности (Трофимов, Московкин, 1979 а).

$$- \frac{\partial y}{\partial t} = E(\tau - \tau_{пр}), \quad (I.2.I-2)$$

где E - некоторый коэффициент эродированности коренной поверхности склона, $\tau = - \rho g h \frac{\partial y}{\partial x}$ - напряжение трения, $\tau_{пр}$ - предель -

ное напряжение трения, при котором происходит вовлечение в движущийся поверхностный слой грунта материала коренной поверхности.

В качестве уравнения для расхода материала бралось соотношение для трения вязкого грунта

$$q = - \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (I.2.I-3)$$

Уравнения (I.2.I-1; I.2.I-3) приведем к замкнутой системе дифференциальных уравнений в частных производных (Трофимов, Московкин, 1979а)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial y}{\partial x}), \\ -\frac{\partial y}{\partial t} = E(-\rho g h \frac{\partial y}{\partial x} - \tau_{пр}). \end{cases} \quad (I.2.I-4)$$

Из системы уравнений (I.2.I-4) следует, что незеродируемый профиль склона динамического равновесия может возникнуть только при $h, \frac{\partial y}{\partial x} = const$. Стационарное решение имеет вид $h = H_0 = const$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\tau_{пр}}{\rho g H_0}$. Систему уравнений (I.2.I-4) будем рассматривать при начальных условиях $h(x,0) = h_0(x), y(x,0) = y_0(x)$ и на деформируемом участке склона ($\tau > \tau_{пр}$).

Приближенное решение будем искать в окрестности начальных условий

$$y(x,t) = y_0(x) + y'(x,t); \quad h(x,t) = h_0(x) + h(x,t). \quad (I.2.I-5)$$

Система уравнений (I.2.I-4), с учетом (I.2.I-5), после упрощений примет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} (h_0^3 \frac{\partial y}{\partial x}); \quad -\frac{\partial y}{\partial t} = E(-\rho g h_0 \frac{\partial y}{\partial x} - \tau_{пр}). \quad (I.2.I-6)$$

Решение второго уравнения системы (I.2.I-6) получим в виде

$$y(x,t) = y_0 \left[\Phi^{-1} \left(\int \frac{dx}{h_0(x)} + E \rho g t \right) \right] + E \tau_{пр} t, \quad (I.2.I-7)$$

где $\Phi(x) = \int \frac{dx}{h_0(x)}$ и знак "-1" у функции Φ означает знак обратной функции. Подставляя решение (I.2.I-7) в первое уравне-

ние системы (I.2.I-6), найдем h . В случае прямолинейного начального профиля $y(x,0) = -\lambda x + c$ и постоянной начальной мощности движущегося слоя грунта $h(x,0) = h_0(x) = a = \text{const}$ получим решение

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x,t) = -\lambda x + c - E(\lambda \rho g - \tau_{\text{пр}})t, \quad (\text{I.2.I-8}) \\ h(x,t) = a + E(\lambda \rho g - \tau_{\text{пр}})t. \quad (\text{I.2.I-9}) \end{array} \right.$$

Таким образом, при $\tau = \lambda \rho g > \tau_{\text{пр}}$ происходит параллельное отступление склона коренной поверхности. На недеформируемом участке склона, где $\partial y / \partial t = 0$, получим из системы (I.2.I-4) квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (\text{I.2.I-10})$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}$ — известная функция. Делая замены $h^3 \frac{\partial y}{\partial x} = z^3$ и $\psi(x) = \frac{\rho g}{3\eta} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{1/3}$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x) z^2 \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (\text{I.2.I-11})$$

которое допускает решение при начальном условии $z(x,0) = z_0(x)$ (определяемом через начальное условие для функции h : $h(x,0) = h_0(x)$ по выражению $z(x,0) = z_0(x) = h_0(x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{1/3}$) в виде:

$$z(x,t) = z_0 \left[\Omega^{-1} \left(\int \frac{dx}{\psi(x)} + z^2 t \right) \right], \quad (\text{I.2.I-12})$$

где знак "-I" у функции Ω означает знак обратной функции. В решениях (I.2.I-7) и (I.2.I-12) функции y_0 и z_0 являются функциями от аргументов, заключенных в квадратные скобки.

Приняв $\psi(x) = \nu = \text{const}$, что соответствует течению грунта по наклонной плоскости, по выражению (I.2.I-12) получим неявное решение

$$z(x,t) = z_0 (\nu t z^2 + x). \quad (\text{I.2.I-13})$$

В рассмотренной модели для расхода q бралось выражение (I.2.I-3), полученное из рассмотрения равномерного установив-

шегося движения вязкого грунта. Теперь построим геомеханиче - скую модель, в которой движение грунта носит установившийся, но неравномерный характер.

Расчет такого движения для селевого (грязекаменного) потока был сделан В.П.Тевзадзе (1976). Им были получены следующие выражения для скорости и напряжения трения:

$$v_x = \frac{h}{\eta} \left[(\sin\psi - \frac{dh}{dx} \cos\psi) \rho g h F_1(\kappa) + \rho \frac{dh}{dx} v_{max}^2 F_2(\kappa) - \tau_0 \kappa \right], \quad (I.2.I-I4)$$

где $\kappa = z/h$, τ_0 - начальное сопротивление сдвигу в уравнении Шведова-Бингама, $F_1(\kappa) = \kappa(1-0,5\kappa)$, $F_2(\kappa) = \kappa(0,33\kappa^2 - 0,2\kappa^4 + 0,03\kappa^5 - 0,53)$,

$$\tau_{zx} = (1-\kappa) \left(\rho g h \sin\psi - \rho g h \cos\psi \frac{dh}{dx} \right) - \rho \frac{dh}{dx} v_{max}^2 F(\kappa), \quad (I.2.I-I5)$$

где $F(\kappa) = \kappa^3(1,33 - \kappa + 0,2\kappa^2) - 0,53 < 0$.

Исходя из выражения (I.2.I-I4), найдем расход грунта при малых уклонах

$$q = h\bar{v} = \int_0^h v_x dz = \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \left(\sin\psi - \frac{dh}{dx} \right) + \rho \frac{dh}{dx} \cdot \frac{h^4}{\eta^3} \left(\frac{h}{2} \rho g \sin\psi - \tau_0 \right)^2 A - \frac{\tau_0}{2\eta} h^2 \quad (I.2.I-I6)$$

где $A = \frac{0,33}{4} - \frac{0,2}{6} + \frac{0,03}{7} - \frac{0,53}{2} = -18,07$. При этом расчете максимальная поверхностная скорость (v_{max}), соответствующая равномерному движению в рассматриваемом сечении при глубине h , бралась в виде $v_{max} = \frac{h}{\eta} \left(\frac{h}{2} \rho g \sin\psi - \tau_0 \right)$. Напряжение трения у коренной поверхности можно найти из выражения (I.2.I-I5) при $\kappa = 0$ ($z = 0$)

$$\tau_{zx} = \tau = \rho g h \sin\psi - \rho g h \frac{dh}{dx} + \rho \frac{dh}{dx} \cdot \frac{h^2}{\eta^2} \left(\frac{h}{2} \rho g \sin\psi - \tau_0 \right)^2 0,53. \quad (I.2.I-I7)$$

Подставляя (I.2.I-I6) и (I.2.I-I7) в уравнение (I.2.I-I; I.2.I-2) и учитывая $\sin\psi = -\frac{\partial y}{\partial x}$, приходим к следующей геомеханической модели развития склона (селевого русла)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = -\partial \left[\frac{\rho g}{3\eta} h^3 \left(-\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{h^4}{\eta^3} \left(-\frac{h}{2} \rho g \frac{\partial y}{\partial x} - \tau_0 \right)^2 A - \frac{\tau_0 h^2}{2\eta} \right] / \partial x, \\ -\frac{\partial y}{\partial t} = E \left[-\rho g h \frac{\partial y}{\partial x} - \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{h^2}{\eta^2} \left(-\frac{h}{2} \rho g \frac{\partial y}{\partial x} - \tau_0 \right)^2 0,53 - \tau_{np.} \right]. \end{cases} \quad (I.2.I-18)$$

Рассмотрим два случая модели (I.2.I-18) при $\tau_0 \neq 0$ и $\tau_0 = 0$.

I. $\tau_0 \neq 0$. Пренебрегая малыми членами, приходем к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = -\partial \left[\frac{\rho g}{3\eta} h^3 \left(-\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{h^4}{\eta^3} \tau_0^2 A - \frac{\tau_0 h^2}{2\eta} \right] / \partial x, \\ -\frac{\partial y}{\partial t} = E \left(-\rho g h \frac{\partial y}{\partial x} - \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{h^2}{\eta^2} \tau_0^2 0,53 - \tau_{np.} \right). \end{cases} \quad (I.2.I-19)$$

Линеаризация системы (I.2.I-19) в окрестности начальных условий

$$y(x,t) = y'(x,t) + y_0(x); \quad h(x,t) = h'(x,t) + h_0(x), \quad (I.2.I-20)$$

при замене $z = h + y$ приведет к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \cdot \partial \left[h_0^3 \frac{\partial z}{\partial x} + \rho \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\tau_0^2}{\eta^3} A - \frac{\tau_0}{2\eta} h_0 (2h - h_0) \right] / \partial x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t} = -E \left(\rho g h_0 \frac{\partial z}{\partial x} + \rho \frac{\partial h}{\partial x} h_0^2 \frac{\tau_0^2}{\eta^2} 0,53 - \tau_{np.} \right). \end{cases} \quad (I.2.I-21)$$

2. $\tau_0 = 0$. После упрощения системы (I.2.I-18) при замене $z = h + y$ получим

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t} = -E \left(-\rho g h \frac{\partial z}{\partial x} - \tau_{np.} \right). \end{cases} \quad (I.2.I-22)$$

Если в выражениях (I.2.I-14; I.2.I-15) положить $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ (равномерное движение грунта), то приходем к модели (I.2.I-4). Из модели (I.2.I-22) формально следует модель (I.2.I-4), если положить в ней $\partial h / \partial x = 0$.

Линеаризация системы уравнений (I.2.I-22) в окрестности начальных условий (I.2.I-20) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial z}{\partial x}), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -E (-\rho g h_0 \frac{\partial z}{\partial x} - \tau_{np}). \end{cases} \quad (I.2.I-23)$$

Первое уравнение системы (I.2.I-23) представляет собой диффузионное уравнение. Если найдено его решение $z = \psi(x, t)$, тогда, подставляя во второе уравнение системы (I.2.I-23), получим:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -E (-\rho g h_0 \frac{\partial y}{\partial x} - \tau_{np}). \quad (I.2.I-24)$$

Обозначая правую часть уравнения (I.2.I-24), которая является уже известной функцией, через $\theta(x, t)$ получим решение (I.2.I-24) в виде:

$$y(x, t) = \int \theta(x, t) dt + \xi(x), \quad (I.2.I-25)$$

где $\xi(x)$ — произвольная функция, находящаяся из начального условия $y(x, 0) = y_0(x)$. Функция h находится как $h = z - y$.

К геомеханическим моделям рассматриваемого типа можно отнести эрозионную модель Г.Ш.Читишвили (1974), состоящую из уравнения неразрывности (баланса) для твердого стока с учетом интенсивности дождя и инфильтрации, уравнения деформации типа (I.2.I-2) формул Шези и Маннинга для расчета средней скорости потока и соотношения между донной допускаемой скоростью и средней скоростью потока. Система уравнений Г.Ш.Читишвили была сведена нами к более простой (Ногуманов, Московкин, Трофимов, 1977)

$$\begin{cases} -\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \omega_0 d \left[\left(\frac{22,2 m_0}{V_{\Delta_{дон}}} \right)^2 \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \right) h^{-1} \right], \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{m_0}{n} h^{5/3} \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{1/2} \right] = \epsilon I, \end{cases} \quad (I.2.I-26)$$

где $\alpha = 11 \cdot 10^{-7}$, ω_0 — частота пульсаций донных скоростей, d — средний диаметр агрегатов грунта, n — параметр шероховатости, m_0 — поправка на изборозденность склона, $V_{\Delta_{дон}}$ — донная допускаемая скорость, ϵ — коэффициент стока, I — интенсивность дождя.

Система уравнений (I.2.I-26) может быть решена приближенно рассматриваемым ранее методом (линеаризация в окрестности начальных условий) и справедлива на эрозионном участке склона. Устойчивый незэродируемый профиль склона получается при $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$; тогда из первого уравнения системы получим $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$. Решая эту систему с учетом независимости h и y от времени при граничных условиях $-\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = \beta$, $y(x=x_1) = H$, получим вогнутый незэродируемый профиль

$$y(x) = A - B [C(x-x_1) + D]^{1/2}, \quad (I.2.I-27)$$

где A , B , C , D - некоторые, положительные постоянные, зависящие от граничных условий и постоянных задач.

Таким образом, нами рассмотрен тип геомеханических моделей, состоящий из уравнений баланса и деформации поверхности и выражения для расхода материала; и на примере установившихся равномерных и неравномерных движений грунта рассмотрены принципы получения приближенных решений. Конечно, наиболее строгим будет учет в этих моделях неустановившихся движений грунта, особенно для быстрых внезапных подвижек грунта, но решение таких сложных моделей потребует их численной реализации. Здесь большие трудности уже возникают при расчете нестационарных движений. Так, нами (Трофимов, Переведенцев, Московкин, 1976) приведен расчет нестационарного равномерного движения, моделирующего внезапные подвижки вязких переувлажненных грунтовых масс постоянной мощности по прямолинейному коренному склону. Задача ставилась в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g \sin \alpha, \\ u(z, 0) = 0, k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (I.2.I-28)$$

где u , h - скорость и мощность движущегося слоя, $h = \text{const}$, k - коэффициент кинематической вязкости, α - угол наклона склона, z - координата, нормальная к склону. Граничные условия соответствуют обычным условиям прилипания на границе с поверхностью склона и отсутствия напряжения трения на свободной

границе. Начальное условие говорит о том, что в начальный момент времени слой грунта покоится.

Решение задачи (I.2.I-28) находится в виде $u = U + v$, U — решение известной стационарной задачи, имеющей вид:

$$U(z) = \frac{g \sin \alpha}{2k} (2h - z)z, \quad (\text{I.2.I-29})$$

и используемое ранее при нахождении выражения для расхода

$$q = \int_0^h \frac{g \sin \alpha}{2k} (2h - z)z \, dz, \quad \text{приводящего к виду (I.2.I-3)}.$$

Для функции v получим задачу.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad v(0, t) = 0, \quad k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad v(z, 0) = - \frac{g \sin \alpha}{2k} z(2h - z), \quad (\text{I.2.I-30})$$

решение которой методом Фурье находится в виде

$$\begin{cases} v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left\{ - \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^2 kt \right\} \sin \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) z \right], \\ C_n = \frac{2}{h} \int_0^h \frac{g \sin \alpha}{2k} \xi (\xi - 2h) \sin \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \xi \right] d\xi. \end{cases} \quad (\text{I.2.I-31})$$

Подсчет интегралов дает

$$C_n = - \frac{g \sin \alpha}{hk} / \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^3. \quad (\text{I.2.I-32})$$

Равномерную оценку для остаточного члена ряда получим, отметив, что $\sin \frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) z$ не превышает по абсолютной величине единицу

$$\begin{aligned} |R_n(z, t)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{g \sin \alpha}{kh} / \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^3 \right\} \sin \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) z \right] \right| < \\ &< \frac{g \sin \alpha}{2k} \exp \left\{ - \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^2 kt \right\} / \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{I.2.I-33})$$

При $z = h$ получим знакпеременный ряд. По теореме Лейбница об этих рядах остаток ряда не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов, т.е.

$$|R_n(h, t)| \leq \frac{g \sin \alpha}{hk} \exp \left\{ - \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^2 kt \right\} / \left[\frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^3. \quad (\text{I.2.I-34})$$

Оценим, наконец, отношение суммы всех членов знакопеременного ряда, начиная со второго к первому члену этого ряда

$$|R_1(h,t)| \leq \frac{1}{27} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{h^2} kt\right). \quad (I.2.I-35)$$

Зная параметры задачи, по последним трем формулам можно оценивать погрешности, допускаемые при замене суммы ряда его частичной суммой. Решение (I.2.I-28) запишем окончательно в виде

$$u = \frac{g \sin \alpha}{2k} (2h-z)z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g \sin \alpha}{hk} \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]^2 kt\right\} \sin\left[\frac{\pi}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right)z\right] / \left[\frac{\pi}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]^3. \quad (I.2.I-36)$$

Поскольку (в связи с приведенными оценками) сходимость ряда быстрая, то следует полагать, что нестационарное движение быстро переходит в стационарное, определяемое выражением (I.2.I-29).

§ 2. Геомеханические модели развития склонов, основанные на уравнениях баланса материала, деформации и гидродинамики потока

Рассмотрим два типа моделей: 1. Модели, основанные на уравнениях деформации и гидродинамики потока (второй тип геомеханических моделей); 2. Модели, основанные на уравнениях баланса материала и гидродинамики потока (третий тип геомеханических моделей).

Второй тип моделей берет свое начало от работы Н.В.Есина и Н.А.Скоркина (1970), в которой предложена модель плоскостной эрозии при вязком безынерционном течении воды с переменным расходом. В работе предполагалось, что поверхность склона сложена связанным грунтом, размыв которого идет по уравнению деформации типа (I.2.I-2); при этом вместо вертикальной скорости деформации склона ($\partial y / \partial t$) рассматривается нормальная скорость, которая по Е.А.Шайдеггеру и Н.В.Есину записывается в виде

$$V_n = \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} / \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}. \quad (I.2.2-I)$$

Напряжение трения в уравнении деформации определяется выражением $\tau = A \rho \frac{\partial w}{\partial n}$, где n — расстояние по нормали к мгновенной

поверхности склона; $w^2 = u^2 + v^2$; u, v – составляющие скорости потока по осям x и y ; A – коэффициент турбулентности ; ρ – плотность потока. Для описания движения воды, авторы использовали уравнения Навье–Стокса, уравнение неразрывности и уравнение изменения жидкого расхода вдоль склона. Предполагалось, что продукты разрушения уносятся вниз по склону и не оказывают существенного влияния на распределение скоростей потока. В такой постановке задача свелась к решению системы шести дифференциальных уравнений и было получено приближенное ее решение. Анализ этого решения показал, что при постоянном расходе воды происходит параллельное отступление склона, а при его нарастании образуется выпуклость в верхней части склона.

Уравнение деформации в аналогичных задачах может использоваться и в виде

$$V_n = - \varepsilon (v^2 - v_{\text{крит.}}^2), \quad (1.2.2-2)$$

где v – скорость потока, $v_{\text{крит.}}$ – критическая неразмывающая скорость, ε – некоторый коэффициент. Эта зависимость установлена с помощью экспериментальных исследований для достаточно большого числа различных пород (Григорьева, 1959; Есин, 1965; Бастраков, 1977 и др.) и широко используется для построения геомеханических моделей развития подводных профилей абразионных склонов (Есин, Московкин, 1979). Здесь следует заметить, что для водных потоков зависимость (1.2.2-2) приводится к зависимости (1.2.1-2), так как, например, при турбулентном установившемся равномерном течении жидкости напряжение трения имеет вид (Чугаев, 1975) $\tau = \frac{\lambda \gamma}{4} \cdot \frac{v^2}{2g}$, где $\lambda/4$ – эмпирический коэффициент, γ – удельный вес жидкости. Таким образом, рассматриваемый тип геомеханических моделей развития эрозионных склонов состоит из уравнения деформации и замыкающих его уравнений движения и неразрывности для водного потока. В связи с существованием критических неразмывающих скоростей можно заключить, что плоскостной смыв не может выравнять рельеф до горизонтальной поверхности и предельными формами должны быть пологие склоны (холмы), причем тем более крутые, чем больше $v_{\text{крит.}}$ для данной породы. Дальнейшее выглаживание эрозионного рельефа может происходить под

воздействием других факторов денудации (процессов), например, капельно-дождевой эрозии. В целом, форма и закономерности развития склона под воздействием на него потока определяются характером течения воды (обратное также справедливо): если течение инерционное, тогда уклоны склона во времени возрастают и плоскостная эрозия может выродиться в регрессивную. При вязком безынерционном течении воды все участки склона разрушаются более или менее равномерно (Есин, Скоркин, 1970).

Построим эрозионную модель рассматриваемого типа с учетом инерционного (неравномерного) течения воды по криволинейному склону.

Уравнения гидродинамики для течения тонкой пленки воды по криволинейному склону в гидравлическом аспекте в натуральных координатах записываются следующей системой уравнений (Григорян, 1965)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{g}{2h} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (h^2 \cos \alpha) + g \sin \alpha - \frac{\kappa v^2}{h}, & (1.2.2-3) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial s} = 0. & (1.2.2-4) \end{cases}$$

Анализ уравнения (1.2.2-3) показал, что первым членом правой части можно пренебречь (Григорян, 1965). Данные уравнения были выведены применительно к прибойному волновому потоку. Здесь

$\kappa = \frac{s C_x}{2a^2}$, где s - площадь поперечного сечения гальки, участвующая в формировании гидродинамического сопротивления и равная $s = \frac{1}{4} \pi a c \xi$; a, c - наибольший и наименьший размеры гальки;

$\xi < 1$ - коэффициент, учитывающий, что галька не полностью выступает над соседними частицами; C_x - коэффициент гидродинамического сопротивления.

При рассмотрении склонового стекания изменится структура силы трения. Так, в гидравлическом аспекте при постоянной или мало изменяющейся по склону мощности потока может быть получено уравнение

$$v \frac{dv}{ds} = g \sin \alpha - \frac{gh^2}{h^{4/3}} v^2, \quad (1.2.2-5)$$

которое следует из уравнения для турбулентного установившегося неравномерного движения жидкости (Чугаев, 1975): $v \frac{dv}{ds} = g \sin \alpha - g \frac{dh}{ds} - \frac{v^2}{c^2 R}$, где c - коэффициент Шези, R - гидравлический радиус (с учетом формул Шези и Маннинга и $\sin \alpha \gg \frac{dh}{ds}$ имеем уравнение (I.2.2-5), в котором g - ускорение силы тяжести, n - параметр шероховатости).

При учете выпадающих на склон осадков, уравнение неразрывности в стационарном случае можно записать как

$$\frac{\partial(vh)}{\partial s} = I \zeta \cos \alpha, \quad (I.2.2-6)$$

где I - интенсивность выпадения осадков, ζ - коэффициент стока, h - мощность потока по нормали к склону.

Таким образом, мы пришли к замкнутой системе уравнений (I.2.2-2; I.2.2-5; I.2.2-6). Переходя к обычной координате x посредством соотношений типа

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\psi}{dx} \cos \alpha = \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{1}{(1 + (\partial y / \partial x)^2)^{1/2}},$$

с учетом выражения для (I.2.2-1) получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon (v^2 - v_{\text{пер}}^2) [1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2]^{1/2}, \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{gn^2}{h^{4/3}} v^2 [1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2]^{1/2} = -g \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{d(vh)}{dx} = I \zeta. \end{cases} \quad (I.2.2-7)$$

При малых уклонах эта система переписется в виде

$$\begin{cases} -\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon (v^2 - v_{\text{пер}}^2), \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{gn^2}{h^{4/3}} v^2 = -g \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{d(vh)}{dx} = I \zeta. \end{cases} \quad (I.2.2-8)$$

После решения уравнения неразрывности: $vh = I \zeta x + Q_0$ (Q_0 - расход воды в начальной точке склона, которую можно выбрать так, чтобы Q_0 равнялась нулю) системы уравнений (I.2.2-7; I.2.2-8) сводятся к системам двух уравнений, которые следует

решать численно следующим образом. При начальном профиле склона $y(x,0) = \psi(x)$ решается второе уравнение любой из систем относительно v ; найденное решение для скорости потока подставляется в первое уравнение, которое решается на небольшом промежутке времени t_1 . Полученный профиль склона $y(x,t_1)$ подставляется во второе уравнение и все повторяется сначала. Здесь так же, как и в модели Н.В.Есина и Н.А.Скоркина (1970), предполагается, что продукты эрозии уносятся вниз по склону.

Следует заметить, что системы уравнений (I.2.2-7; I.1.2-8) наиболее подходят для моделирования долговременной эволюции склонов, а при прогнозе кратковременных деформаций склонов, связанных с воздействием на них конкретных паводков, целесообразно пользоваться нестационарными уравнениями движения и неразрывности в моделях (I.2.2-7; I.2.2-8). Последнее обусловлено двумя причинами: 1. нестационарностью стока в начальной и конечной фазах на фоне относительной кратковременности воздействия паводка на склон; 2. нестационарностью стока, вносимой изменением профиля склона. Учет этой нестационарности с помощью членов $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial h}{\partial t}$ соответственно в левых частях второго и третьего уравнения рассматриваемых моделей значительно усложнит решение задачи. Следует отметить, что в рассмотренных системах уравнение движения воды для простоты было записано в наиболее приближенном виде. При постановке конкретных задач в нем следует учитывать члены, зависящие от интенсивности осадков, инфильтрации и капельно-ударного воздействия. Следует сказать еще об одном упрощении рассматриваемой модели, когда вместо уравнений движения и неразрывности записывается одно кинематико-волновое уравнение (о чем подробнее будет сказано ниже при рассмотрении третьего типа геомеханических моделей).

Одномерную геомеханическую модель третьего типа можно поставить в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ q = sQ = svh, \\ s = f(v, h), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = I - r, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{gn^2}{h^{4/3}} v^2 - \frac{1}{h} (v - v_{\text{ноб.}}) + \frac{\tau \tau}{h}, \end{cases} \quad (\text{I.2.2-9})$$

где q, Q – твердый и жидкий расходы; s – мутность потока; I, Γ – интенсивность осадков и инфильтрации; g – ускорение силы тяжести; n – параметр шероховатости; $v, v_{\text{пов.}}$ – средняя и поверхностная скорости потока; h – глубина потока.

В качестве третьего уравнения, при рассмотрении аналитической системы уравнений, в работе Г.И.Дизенгофа и В.Г.Судобигера (1979) использована эмпирическая зависимость $s = s_0 + \rho Fr^2$, где $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ – число Фруда. Величина $v_{\text{пов.}}$ согласно экспериментальной зависимости может быть записана как $v_{\text{пов.}} = 1.25 v$ (Emmett, 1970). В работе Г.И.Дизенгофа и В.Г.Судобигера (1979) не ставилась задача моделирования развития склона, поэтому отметки высот склона y считались неизменными во времени. Их численные эксперименты показали, что квадрат числа Фруда линейно зависит от уклона; следовательно, и мутность линейно зависит от уклона. Это согласуется с нашими предположениями, сделанными в первой главе (Г.И.1-6; Г.И.3-1).

Последние два члена в правой части уравнения движения рассматриваемой системы уравнений взяты по В.Г.Соколову (1973). Следует отметить, что различные авторы приводят существенно различные члены, зависящие от интенсивностей осадков и инфильтрации в уравнении движения воды по склону (Демидов, Кучмент, 1975; Соколов, 1973; Chen, Chow, 1971; Chow, Ben-Zvi, 1973 и др.). В уравнениях указанных авторов по-разному учитывается и эффект капельно-ударного воздействия на динамику склонового потока. А это воздействие очень существенно, по крайней мере, для случая стекания с гладких поверхностей. Экспериментальные исследования по оценке для стекания с таких поверхностей (Voon, Wenzel, 1971) показали, что в ряде случаев скорость на поверхности потока приближается к нулю (эпюра скоростей в потоке загибается и имеет максимум скорости на какой-то глубине потока). Капли дождя существенно увеличивают сопротивление для течений, характеризующихся числами Рейнольдса меньшими 2000 (Voon, Wenzel, 1971). В этом случае, при расчете эпюры скоростей потока из уравнения Навье-Стокса (движение вязкой жидкости) для напряжения трения следует ставить не нулевое граничное условие на поверхности потока, как это имеет место для обычных условий отсутствия напряжения трения на свободной поверхности. Это же на-

напряжение трения может быть учтено в усредненных уравнениях гидродинамики склонового стока, но уже в качестве дополнительного члена. Нами приведена попытка оценки этого напряжения (сопротивление, оказываемое каплями дождя). На основании второго закона Ньютона определим силу удара отдельной капли, полагая, что за время удара (Δt) скорость капли уменьшается до нуля

$$F_k = \frac{m_k V_k}{\Delta t}, \quad (1.2.2-10)$$

где m_k , V_k - масса и скорость капли во время удара. Считая дождь однородным, определим количество капель, выпадающих на поверхность $I \text{ м}^2$ потока воды за время Δt ,

$$N = \frac{I \Delta t}{\frac{1}{6} \pi d_k^3}, \quad (1.2.2-11)$$

где I - интенсивность осадков, d_k - диаметр капель. По формулам (1.2.2-10; 1.2.2-11), с учетом выражения для массы капли

$m_k = \frac{1}{6} \pi \rho_k d_k^3$, найдем

$$\tau_{\text{сопр.}} = \sum_{i=1}^N F_i = F_k N = \rho_k I V_k, \quad (1.2.2-12)$$

где ρ_k - плотность воды.

Формулу (1.2.2-12) можно рассматривать и как давление, создаваемое каплями на верхней границе, и, следовательно, вводить его в градиент давления в уравнениях гидродинамики склонового стока. Анализ показывает, что этим градиентом можно пренебречь

($\partial(\rho_k I V_k) / \partial x \approx 0$) (Демидов, Кучмент, 1975). В то же время, мы

считаем, что для стекания воды по склону в виде тонкого слоя, когда воздействие капель сказывается почти на всю глубину потока, можно рассматривать член (1.2.2-12) как сопротивление, оказываемое всему потоку каплями дождя. В этом случае в уравнении движения (типа пятого уравнения) системы (1.2.2-9) он будет

иметь вид $-\frac{I V_k}{h}$. Другой подход к определению этого сопротивления изложен в работе В.Н.Демидова и Л.С.Кучмента (1975).

Упрощение геомеханической модели (1.2.2-9) может идти путем рассмотрения кинематико-волнового уравнения вместо полных,

осредненных уравнений гидродинамики склонового стока. Наиболее полный обзор таких кинематико-волновых уравнений изложен в работе В.А.Румянцева и С.А.Кондратьева (1979).

Предполагая, что мутность склонового стока пропорциональна квадрату числа Фруда и подчиняется зависимости $s = A \frac{v^2}{h}$, где $A = \text{const}$ (Зубкова, 1976), получим следующую геомеханическую модель в кинематико-волновом приближении

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{n^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[h^2 \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{3/2} \right] = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[h^{5/3} \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{1/2} \right] = 1 - \gamma. \end{cases} \quad (1.2.2-13)$$

При выводе этой модели скорость бралась по формуле Шези-Маннинга и жидкий расход в уравнении неразрывности записывался в виде

$$Q = v h = \frac{1}{n} h^{5/3} \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{1/2}.$$

Стационарное решение $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = 0$ модели (1.2.2-13) (предполагая $h(x=0) = 0$) можно получить в виде

$$y(x) = C_1 (\delta \ln)^{-4/3} \cdot x^{-1/3} + C_2, \quad (1.2.2-14)$$

где C_1, C_2 - константы интегрирования, $1 - \gamma = \delta$.

Отметим, что подход к составлению двумерных геомеханических моделей по типу модели (1.2.2-9) изложен в работе Г.И.Швебса и А.А.Светличного (1979).

Рассмотрим теперь двумерную диффузионную балансовую модель (1.1.1-10). Ранее было дано первое приближение двумерной задачи развития склона под действием склонового стока. Сейчас приведем второе - кинематико-волновое приближение этой задачи. Оно справедливо для прикладных задач кратковременной эволюции склонов. В качестве замыкания уравнения (1.1.1-10) возьмем двумерное кинематико-волновое уравнение склонового стока, приведенное в работе Л.С.Кучмента и И.А.Трубикина (1977)

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 1 - \gamma, \\ Q_x = \frac{1}{n} h^{5/3} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{1/2}, \quad Q_y = \frac{1}{n} h^{5/3} \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{1/2}, \end{cases} \quad (1.2.2-15)$$

где Q_x, Q_y – расходы воды через единичную ширину соответственно вдоль осей x, y .

С учетом соотношения между модулями вектора расхода воды и его составляющими

$$|Q| = (Q_x^2 + Q_y^2)^{1/2}, \quad (I.2.2-16)$$

приходим к замкнутой системе уравнений (I.I.I-10; I.2.2-15; I.I.I-16).

Третьим приближением назовем замыкание уравнения (I.I.I-10) полными осредненными двумерными уравнениями гидродинамики склонового стока. Целесообразность его использования в решении конкретных задач требует дополнительных исследований из-за сложностей численной реализации.

В принципе использование моделей последних двух приближений может осуществляться следующим образом. Для первого паводка сток рассчитывается по начальному рельефу $z(x, y, 0) = f(x, y)$. Рассчитанный по уравнению (I.I.I-10) новый рельеф служит начальным условием для следующего паводка. Если во время одного продолжительного паводка изменения в рельефе значительны, то в уравнениях движения воды составляющие вектора градиента высот следует считать переменными во времени так же, как и в уравнении (I.I.I-10). Наряду с расчетом координат топографической поверхности (эволюции склона) должны строиться алгоритмы для определения расхода материала (твердого стока) через заданную границу, что необходимо в задачах расчета выноса материала в водный объект и эрозии с водосбора (склона).

Зная требования к заилению водоемов и качеству их воды, а также предельные нормы выноса почвы с сельскохозяйственных водосборов, на основании использования моделей всех трех рассмотренных приближений можно будет оптимальным образом планировать противоэрозионные мероприятия на водосборах. Эта задача может решаться следующим образом. Если при наиболее интенсивном ожидаемом (прогнозируемом) паводке расчетный вынос почвы (наносов) по модели превосходит предельно допустимую величину (прямая задача), то следует изменить коэффициент денудации k таким образом, чтобы получить в итоге предельно допустимый вынос почвы (обратная задача). Этот коэффициент можно изменить, например, путем уменьшения расчетных расходов воды, так как $k = k|Q|$. Таким

образом определится величина жидкого стока, который необходимо будет перехватить с помощью проведения противоэрозионных мероприятий. Уменьшения твердого стока можно добиться и с помощью изменения формы рельефа. При всех случаях проведения различных противоэрозионных мероприятий (особенно требующих больших затрат) необходимо по возможности учитывать их экономическую эффективность, для чего следует проводить сравнительные исследования на идентичных участках (водосборах) на одних из которых проводятся такие мероприятия, а на других нет.

Г л а в а 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ СКЛОНОВ

Третьим классом моделей развития склонов следует считать кинематические. В кинематических моделях развития склонов динамика (физика) склоновых процессов обычно не рассматривается, а эволюция склонов описывается либо с помощью геометрических и балансовых соотношений (сколько материала сносится с крутой части склона, столько же и аккумулируется у его основания), либо с помощью определенных предположений (гипотез) о характере распределения на склоне вертикальной или нормальной скорости его изменения.

Первое направление возникло давно и представлено большим количеством работ, обзор которых на русском языке дан в монографиях А.Е.Шайдеггера (1961), А.С.Девдариани (1966) и А.М.Трофимова (1974).

Второе направление связано с работами А.Е.Шайдеггера. Обзор остальных работ изложен в цитируемых выше монографиях. Развитие основных идей этого направления будет дано в отдельных параграфах (§§ 2,3,4,5). Например, в четвертом параграфе исследовано сопряжение кинематических моделей Шайдеггера с диффузионными моделями (комплексные диффузионно-кинематические модели), а в пятом — проанализирована возможность доказать, что кинематические модели Шайдеггера можно рассматривать как частный случай общих балансовых моделей развития склонов, что и послужило основанием включения этих моделей в общую теорию балансовых моделей. Одновременное включение в эту теорию первого направления (моделей Лемана) оправдано тем, что их можно рассматривать как простейший частный случай моделей Шайдеггера.

§ I. Кинематические модели Лемана и их приложения

Работы первого направления связаны с описанием эволюции осыпных склонов с целью получения формы цоколя коренных пород. Суть их сводится к построению и решению обыкновенных дифференциальных уравнений, выведенных из геометрических и балансовых соотношений. Рассматриваемый тип кинематических моделей назовем моделями типа Лемана (по наиболее яркому представителю этого направления). Он же, как указывает А.С.Девдариани (1966), является родоначальником аналитического направления в геоморфологии склонов.

Вопрос о характере кривизны цоколя коренных пород, формирующегося под слоем снесенного материала, считался еще недавно дискуссионным (Трофимов, 1974), и модели по определению формы этого цоколя имеют важное теоретическое и геоморфологическое значение. Но до сих пор исследователи не обращали внимания на некоторые прикладные аспекты этих моделей. Кроме того, в этих схемах хорошо просматривается характер взаимодействия между денудационной и аккумулятивной частью осыпного склона, что будет подробно рассмотрено в § I, гл.2, ч.2 при построении и анализе динамической модели осыпного склона.

Рассмотрим возможности получения прикладных результатов. Представим себе осыпной склон, состоящий из крутого откоса и осыпи (денудационная и аккумулятивная части осыпного склона). Процесс постепенного осыпания индивидуальных обломков с откоса характерен для песчаников и других подобных пород, где силы сцепления в них обусловлены присутствием цементирующего материала. Выветривание в таких породах обычно происходит в форме медленного освобождения индивидуальных обломков с поверхности откоса посредством разрушения цементирующего материала. Основным видом выветривания является здесь морозное выветривание. Такой процесс характерен, например, для песчаников юго-запада США (клифообразующие песчаники на плато Колорадо (Carson, Kirkby, 1972)). В процессе развития осыпного склона вершина осыпи поднимается вверх по откосу, и осыпь постепенно покрывает откос. Под осыпью формируется выпуклый цоколь коренных пород, и при полном исчезновении откоса заканчивается полный цикл развития осыпного склона (Трофимов, 1974).

Полагая, что откос и осыпь, имеющие прямолинейные очертания, перемещаются с постоянными скоростями параллельно самим себе (Девдариани, 1967 а; Lehmann, 1933), Леман получил уравнение для формы выпуклого цоколя коренных пород

$$x = \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{1 - k_p} \right) y + \frac{k_p H}{(1 - k_p)^2} (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) \ln \left(1 - \frac{1 - k_p}{k_p H} y \right), \quad (I.3.I-1)$$

где α — угол наклона осыпи (рис. I2), β — угол наклона откоса, H — высота осыпного склона, k_p — коэффициент разрыхления (отношение объема рыхлой породы к объему той же массы материала в плотном теле).

Опираясь на уравнение (I.3.I-1) и зная горизонтальную скорость отступления откоса (δ), можно получить основные характеристики осыпного склона: возраст осыпи, время полного цикла развития осыпного склона и объем осыпи (Московкин, Трофимов, 1978).

Возраст осыпи можно найти по отступанию откоса (отрезок \overline{OB} на рис. I2). Непосредственно определить это отступление нельзя, так как основание цоколя коренных пород перекрыто осыпью. Пусть точка пересечения (D) осыпи с откосом находится на высоте $h(t)$. Подставляя это значение $y = h(t)$ в уравнение (I.3.I-1), получим длину отрезка \overline{OC} . Ее найдем приближенно, разлагая логарифмический член в степенной ряд и пренебрегая членами выше второго порядка:

$$x = \overline{OC} = h \operatorname{ctg} \beta + \frac{h^2}{2k_p H} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta).$$

Из последнего выражения найдем длину отрезка \overline{OB} :

$$\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = \frac{h^2}{2k_p H} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta).$$

Так как $\overline{OB} = \delta t$, то возраст осыпи определится по выражению

$$t = h^2 (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) / 2 \delta k_p H. \quad (I.3.I-2)$$

Наоборот, если из каких-то соображений возраст осыпи известен, то из формулы (I.3.I-2) можно определить горизонтальную скорость отступления откоса

$$\delta = h^2 (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) / 2 k_p H t. \quad (I.3.I-3)$$

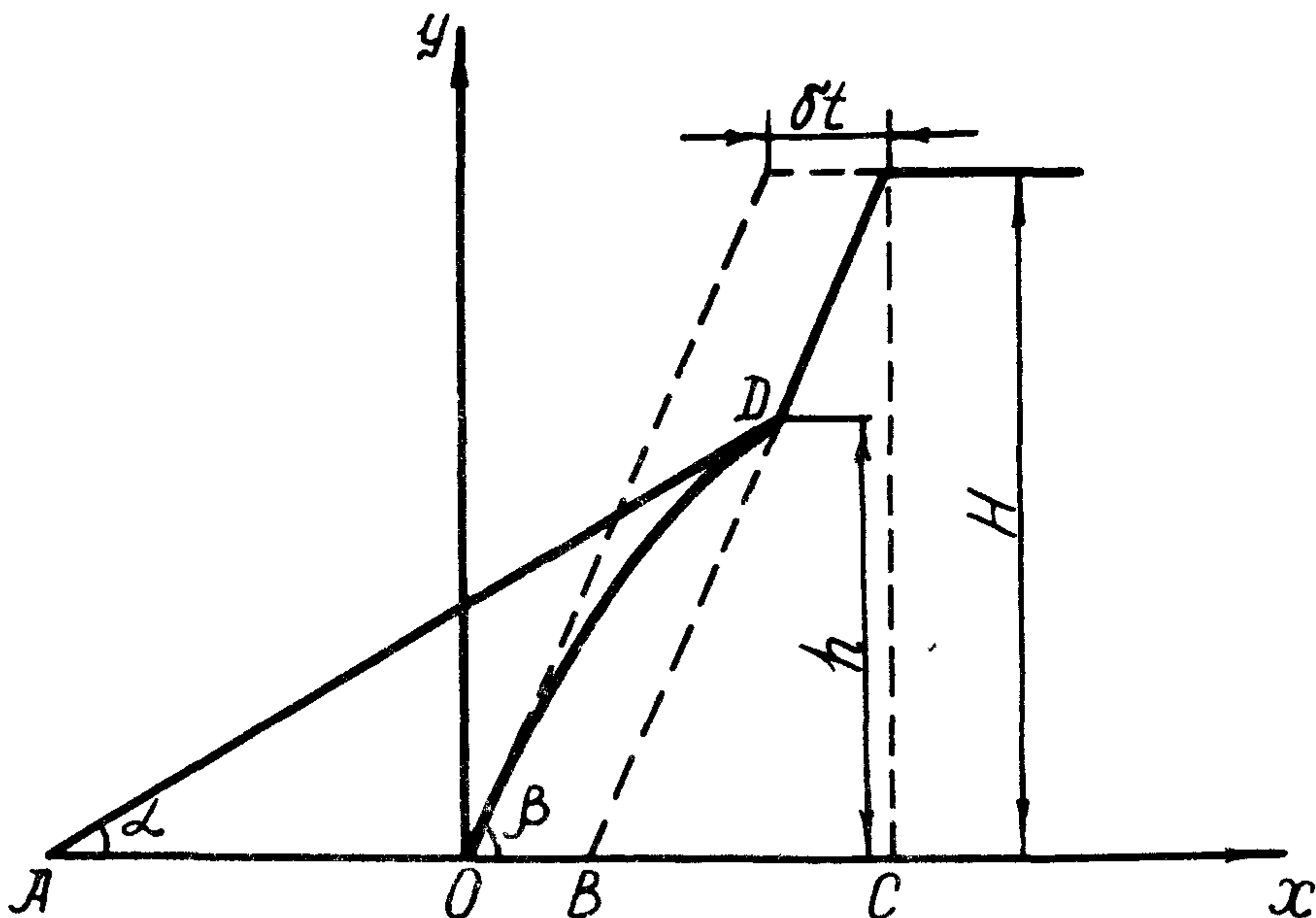


Рис. 12. Схема к развитию осыпного склона по Леману.

Из выражения (I.3.I-2) определяется также время полного цикла развития осыпного склона. Для этого подставим в выражение $h=H$ и получим

$$t^* = H(ctg\alpha - ctg\beta) / 2\delta k_p. \quad (I.3.I-4)$$

Если отсчитывать время от момента наблюдения, то осыпной склон с высотой откоса $H-h$ исчезнет через время

$$T = t^* - t = \left(\frac{ctg\alpha - ctg\beta}{2\delta k_p} \right) \left(H - \frac{h^2}{H} \right). \quad (I.3.I-5)$$

Время полного цикла развития осыпного склона может быть найдено и более точно по уравнению (I.3.I-1)

$$t^* = \frac{H(ctg\alpha - ctg\beta)}{(1 - k_p)^2 \delta} [1 + k_p(\ln k_p - 1)]. \quad (I.3.I-6)$$

В пределе, когда k_p стремится к единице, выражение (I.3.I-6) переходит в выражение (I.3.I-4), так как по правилу Лопиталья

$\lim_{k_p \rightarrow 1} \frac{1 + k_p (\ln k_p - 1)}{(1 - k_p)^2} = \frac{1}{2}$. Формула (I.3.I-6), по сравнению с формулой (I.3.I-4), дает большие значения для времени полного цикла t^* . Так, при $k_p = 1,5$ по формуле (I.3.I-6) получим $t^* = 0,43 \frac{H(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)}{\delta}$, а по формуле (I.3.I-4) $t^* = 0,33 \frac{H(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)}{\delta}$.

При возрастании коэффициента k_p расхождения увеличиваются. Из формулы (I.3.I-2) следует, что, чем больше высота первоначального откоса и его уклон, а также, чем меньше скорость его отступления, угол наклона осыпи и коэффициент разрыхления, тем больше время полного цикла развития осыпного склона.

А.П.Дедков (1970) показал, что осыпные склоны в рыхлых песчано-глинистых неогеновых и четвертичных отложениях высотой порядка $H = 20 + 30$ м проходят полный цикл развития за 20 - 25 лет. Тогда, учитывая данные, по формуле (I.3.I-4) можно оценить скорость отступления откоса (δ), которая приблизительно равняется $1 \frac{\text{м}}{\text{год}}$.

Заметим, что связь горизонтальной скорости (δ) с нормальной (v) (последняя обычно находится при натурных измерениях) имеет вид $\delta = v / \sin \beta$.

Объем осыпи будем искать через площадь криволинейного треугольника (рис. I2). Как и ранее, учитывая два члена ряда, придем к следующей формуле для объема:

$$\begin{aligned}
 V &= L \int_0^h \left[y \operatorname{ctg} \beta + \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{2 k_p H} \right) y^2 + h \operatorname{ctg} \alpha - b - y \operatorname{ctg} \alpha \right] dy = \\
 &= L h \left[\frac{H}{h} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) - \frac{h}{3 k_p H} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) \right], \quad (\text{I.3.I-7})
 \end{aligned}$$

где L - ширина осыпи.

При вычислении объема, мы перенесли начало координат из точки O в точку A , заменили $b = \overline{OC}$ на $h \operatorname{ctg} \beta + \delta t$ и t по формуле (I.3.I-2). При $h = H$ (полное перекрытие откоса осыпью), из последней формулы получим

$$V_{\max} = \frac{L H^2}{2} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) \left(1 - \frac{2}{3 k_p} \right). \quad (\text{I.3.I-8})$$

При $K_p = 1$ последняя формула перейдет в следующую

$$V_{\max} = \frac{\Delta H^2}{6} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta). \quad (I.3.I-9)$$

Таким образом, по простым формулам (I.3.I-2), (I.3.I-4 + I.3.I-6), (I.3.I-7 + I.3.I-9) можно оценивать возраст осыпи, время полного цикла развития осыпного склона и объем осыпи (согласованность этих формул с результатами расчетов по диффузионной модели была показана выше (§ 7, гл. I, ч. I)). Но решение первых двух вопросов возможно при знании скоростей отступания (денудации) крутых склонов осыпного типа, что является самостоятельной проблемой, находящейся на стадии разработки методик исследования и накопления эмпирических данных. О последнем можно судить из обзора А. Янга (Young, 1974). Изучение данной проблемы позволит решать не только вопросы определения возраста геоморфологических форм, но и вопросы прогноза развития рельефа, его реконструкции и эволюции с момента зарождения до современного состояния. В последних двух случаях необходимо знать протяженность эпох стабильного климата, в течение которых скорость денудации можно считать постоянной, и смену этих эпох (Есин, Московкин, 1980). Данные по скоростям денудации в этих эпохах следует брать из аналогичных им современных климатических условий (эргодическое свойство). Поэтому необходимы сравнимые измерения средних современных скоростей денудации во всех климатических зонах земного шара.

В работе А. Янга (Young, 1974) приведены шесть методов нахождения средних скоростей денудации, из которых наиболее прост и перспективен дендрохронологический, позволяющий получить средние скорости денудации за срок от нескольких десятков лет до нескольких тысячелетий. У нас в стране данный метод успешно применяется на осыпных склонах Крыма (Клюкин, 1977).

Для решения вопроса, связанного с определением скоростей денудации, наряду с традиционными методами следует построить физическую теорию денудации (все традиционные методы только фиксируют определенную скорость денудации, но не выясняют физическую сущность денудации, ее связь с литологией и климатом). Для построения такой теории следует привлечь аппарат механики разрушения, а на первых этапах целесообразен поиск корреляци-

онных связей между денудацией и метеорологическими характеристиками (например, переход температуры через ноль, колебания температур, циклы увлажнения и усушки и т.д.), а также проведение физического (экспериментального) моделирования с использованием методов подобия и размерностей.

§ 2. Кинематические модели Шайдеггера и их дальнейшее развитие

Вторым типом кинематических моделей являются модели интенсивности денудации Шайдеггера. Они непосредственно возникли из ранее рассмотренного типа моделей Лемана, но качественно отличаются от них, так как представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, предназначенных для описания эволюции крутых денудационных склонов.

В отличие от пологих склонов, моделируемых балансовыми диффузионными моделями, здесь факторы выветривания действуют непосредственно на коренной склон, и выветриваемые обломки сразу же сносятся вниз под действием силы тяжести, т.е. отсутствует слой выветрелого рыхлого материала.

Эти обстоятельства не дают возможности использовать балансовую диффузионную модель, и поэтому вводится некоторая функция распределения по склону вертикальной или нормальной скорости денудации (Φ), которая часто не отражает механизм физических процессов (в связи с чем это направление аналитических исследований развития склонов А.С.Девдариани (1966) относится к кинематическому).

А.Е. Шайдеггером (1964) рассмотрены три случая линейной (когда $(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \approx 0$) и нелинейной теории денудации при $\Phi = I$, $\Phi = y$, $\Phi = \frac{\partial y}{\partial x}$. Выбор этих функций довольно условен. А.В.Митин и А.М.Трофимов (1964) обобщили в одно уравнение три случая как линейной, так и нелинейной теории.

Обзор и развитие кинематических моделей рассматриваемого типа изложен в ряде работ (Шайдеггер, 1964; Девдариани, 1966; 1967а; Трофимов, 1974; Трофимов, Московкин, 1978 а; Scheidegger, 1970). Во втором издании своей монографии "Теоретическая геоморфология" А.Е.Шайдеггер (Scheidegger, 1970) приво-

дит ряд новых моделей для развития крутых склонов, состоящих из слоев различной литологии. Эти и другие модели строятся им по третьему случаю нелинейной теории, который он считает наилучшим вариантом. Однако следует отметить, что данный вариант становится нереальным при отступании вертикального уступа ($\beta = 90^\circ$) (так как в этом случае приходим к бесконечной скорости его отступания) (Трофимов, Московкин, 1978 а), что видно из третьего случая нелинейной теории денудации Шайдеггера

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -A \operatorname{tg} \beta, \quad (1.3.2-1)$$

где $\Phi = \frac{\partial y}{\partial x} = -\operatorname{tg} \beta$. Поэтому, положив в уравнении (1.3.1-1) вместо $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \sin \beta$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -A \sin \beta, \quad (1.3.2-2)$$

(что также более оправдано с точки зрения характеристики сноса материала составляющей силы тяжести), придем к его линейной модели, если $A = \text{const}$, или к квазилинейной при A , зависящем от y (Трофимов, Московкин, 1978 а)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A(y) \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (1.3.2-3)$$

Неявное решение этого уравнения

$$x = f^{-1}(y) + A(y)t \quad (1.3.2-4)$$

(где знак " -1 " у f обозначает знак обратной функции) показывает, что все точки склона отступают по горизонтали со скоростями $A(y)$. Решение (1.3.2-4) может быть получено наглядным способом, без привлечения уравнения (1.3.2-2) (Московкин, Трофимов, 1978). Для этого необходимо знать горизонтальную скорость отступания каждой точки крутого склона $A(y)$ (здесь $A(0)$ соответствует скорости отступания основания склона при его подрезании) и начальный профиль склона $y = f(x)$. Из выражения $y = f(x)$ выразим x : $x = f^{-1}(y)$. В момент времени t все точки оси абсцисс, соответствующие начальному профилю склона, сместятся вправо на расстояние $A(y)t$ и новое положение профиля склона в момент

времени t определится естественно выражением (I.3.2-4). Кроме того, вывод исходного уравнения (I.3.2-3) может быть получен следующим способом (Московкин, Трофимов, 1978). Пусть поверхность склона из положения n_1 перешла параллельно себе за время Δt в положение n_2 , тогда получим $\Delta x \sin \beta = -\Delta n$. Деля обе части равенства на Δt и переходя к производным, получим $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{dx}{dt} \sin \beta$ и т.к. $\frac{dx}{dt} = A(y)$; $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \cos \beta$, то придем к уравнению (I.3.2-3). Итак, мы от функции распределения нормальной скорости по склону пришли к распределению горизонтальной скорости $A(y)$. Зная эту скорость, однозначно можно судить о развитии склона во времени. Из решения (I.3.2-3) следует, что начальный прямолинейный профиль склона развивается, сохраняя свою прямолинейность, только при линейном виде функции $A(y)$: $A(y) = cy + d$. В этом случае при $y(x,0) = ax$ из уравнения (I.3.2-4) следует решение

$$y(x,t) = a(x - td) / (1 + act), \quad (I.3.2-5)$$

говорящее об отступании склона с одновременным выполаживанием (Трофимов, Московкин, 1978 а). В природе чаще всего имеет место параллельное отступление крутого склона ($A(y) = d = \text{const}, c = 0$) $y = a(x - td)$, но при этом также часто происходит закругление прибрежной области сноса, так как в этой области выветривание действует не только сбоку, но и сверху. Учесть этот процесс функцией $A(y)$ затруднительно. Принципиальная модель, описывающая данную ситуацию, будет построена в четвертом параграфе этой главы, а пока только отметим, что закругление (выполаживание) прибрежной области четко прослеживается у невысоких крутых склонов (уступов), когда не происходит раскрытие трещин бортового отпора и отседания (обваливания) больших масс. Этот процесс хорошо прослеживается в известняковых уступах куэстового рельефа Крымского Предгорья, когда при небольшом эрозионном врезе долин или достаточном удалении уступа от базиса происходит выполаживание его прибрежной части.

Возвращаясь к моделям нелинейной теории интенсивности денудации Шайдеггера, отметим, что первый случай его нелинейной теории

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} / \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} = -By, \quad (I.3.2-6)$$

пригоден для крутых склонов, когда выветриваемый материал сразу же сносится, и интенсивность этого сноса не зависит от составляющей силы тяжести ($\sin \beta$) (как это имело место в модели (I.3.2-2)). Фактически для очень крутых склонов, когда

$\frac{\partial y}{\partial x} \gg 1$, это последнее уравнение переходит в (I.3.2-3). Уравнение (I.3.2-6) заменой $y = \alpha(\xi)$, $\xi = at + bx$, где a, b - произвольные постоянные и $|a| + |b| > 0$ (Камке, 1966) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, и полный интеграл его запишется в виде (Трофимов, Московкин, 1978 а)

$$\pm \int \frac{(a^2 - b^2 B^2(y))^{1/2}}{B(y)} dy = at + bx + c. \quad (I.3.2-7)$$

Зная полный интеграл нелинейного уравнения (I.3.2-4), можно решать и задачу Коши (задачу на начальное условие). При $B(y) = \text{const}$, когда интенсивность выветривания не изменяется с высотой, из выражения (I.3.2-7) видим, что прямолинейный склон отступает параллельно себе. Численное решение А.Е.Шайдеггера (1964) для этого случая также показало на параллельное отступление склона, но он распространил свое решение и на горизонтальное плато, где эта модель уже теряет силу.

Задача дальнейших исследований в области развития рассматриваемых моделей должна состоять в определении степени влияния воздействующих внешних факторов и литологии на интенсивность выветривания. Например, функцию $A(y)$ можно представить в виде $A(y) = \frac{K(y)}{P(y)}$ (Трофимов, Московкин, 1978 а), где $K(y)$ - характеризует интенсивность воздействия климатического фактора, а $P(y)$ - прочность пород. Зависимость K от y следует учитывать для достаточно высоких уступов. Для определения указанных функций необходимы физические теории и стационарные исследования.

Рассмотрим один вариант плоской линейной модели осыпающегося откоса, основанный на реальных физических предпосылках.

В работе Г.Л.Фисенко и Г.В.Кагермазова (1971) было показано, что интенсивность осыпания в откосах возрастает с увеличением его угла наклона

$$m_{\beta} = m_{90} (\sin \beta - \operatorname{tg} \varphi \cos \beta), \quad (1.3.2-8)$$

где m_{90} — интенсивность осыпания вертикального откоса, φ — угол естественного откоса. Из соотношения (1.3.2-8) видим, что при $\beta = \varphi$ процесс осыпания отсутствует. Подставляя это соотношение в правую часть уравнения (1.3.2-6), приходим к линейной модели

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -m_{90} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \operatorname{tg} \varphi \right), \quad (1.3.2-9)$$

решение которой при начальном условии $y(x, 0) = f(x)$ имеет вид

$$y(x, t) = f(x - m_{90} t) + m_{90} t \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.3.2-10)$$

При прямолинейном начальном профиле склона $y(x, 0) = f(x) = ax$ из решения (1.3.2-10) получим

$$y(x, t) = a \left[x - m_{90} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} \right) t \right]. \quad (1.3.2-11)$$

Последнее решение показывает на параллельное отступление откоса, но в отличие от модели (1.3.2-3), решение которой при $y(x, 0) = ax$, $A(y) = A = \operatorname{const}$ имеет вид $y(x, t) = a(x - At)$, горизонтальная скорость отступления зависит от начальной крутизны (a) склона.

Распространение модели (1.3.2-3) на пространственный случай (этот аспект не рассматривался А.Е.Шайдеггером) можно сделать с помощью уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -A(z) |g \operatorname{grad} z|, \quad (1.3.2-12)$$

где $g \operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j$. При $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ приходим к плоской модели (1.3.2-3). Для описания развития осесимметричных форм рельефа, переходя к цилиндрическим координатам, получим уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -A(z) \frac{\partial z}{\partial r}, \quad (1.3.2-13)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, решение которого аналогично решению уравнению (I.3.2-3)

$$z(r, t) = f(r - A(z)t), \quad z(r, 0) = f(r). \quad (I.3.2-14)$$

Познание физической сущности механизмов выветривания и денудации, а также точный учет их в рассматриваемом классе моделей позволит трактовать их не как кинематические.

Используя предложенные модели развития крутых склонов, рассмотрим задачу влияния на них подмыва, характеризуемого быстрыми периодическими колебаниями уровня водоема (задача на развитие берегов водохранилища).

§ 3. Учет быстрых периодических колебаний уровня водоема (моря) в модели подводного абразионного склона Шайдеггера

При построении моделей развития береговых склонов, которые будут рассмотрены в следующем параграфе, необходимо учесть эффект быстрых колебаний уровня водоема (Трофимов, Московкин, 1981). А.Е.Шайдеггер (Scheidegger, 1962) в рамках модели развития подводного склона

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \exp[-\alpha(Y-y)^2] \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (I.3.3-1)$$

где Y — высота уровня моря относительно подножия подводного склона, получил численное решение при достаточно медленном опускании или поднятии уровня моря. Аналогичные расчеты по модели типа (I.3.3-1) были сделаны в работе Н.В.Есина и М.Г.Савина (1971).

Предложенный ниже метод решения задачи является достаточно универсальным и может применяться при решении любых уравнений развития береговых склонов. Вначале рассмотрим колебания уровня моря, связанные с приливо-отливным эффектом.

Считаем колебания синусоидальными и записываем $Y(t)$ в виде

$$Y(t) = \frac{H_{\max} + H_{\min}}{2} + \left(\frac{H_{\max} - H_{\min}}{2} \right) \sin \left(\omega t + \left(I.3.3-2 \right) + \frac{\pi}{2} \right).$$

Рассматриваем суточный прилив ($\omega = \frac{\pi}{12}$) и начальный профиль склона задаем в виде

$$y(x, 0) = 0,5x \quad (1.3.3-3)$$

Решение уравнения (1.3.3-1) рассматриваем при $y \leq Y(t)$. Задачу (1.3.3-1; 1.3.2-2; 1.3.3-3) решаем при следующих параметрах: $\alpha = 0,001 \text{ м}^{-2}$, $b = 0,01 \text{ м/год}$, $H_{\max} = 90 \text{ м}$, $H_{\min} = 80 \text{ м}$. Непосредственный численный расчет по этой модели не может быть выполнен из-за нереально большого времени счета, поэтому проводилось усреднение уравнения (1.3.3-1) по периоду прилива $T = 24$ часа на интервале времени $[t, t+T]$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial y}{\partial t} dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, y) \frac{\partial y}{\partial x} dt, \quad (1.3.3-4)$$

где $f(t, y) = -b \exp[-\alpha(Y-y)^2]$. Будем рассматривать функцию $\bar{y} = \int_t^{t+T} y dt / T$ вместо y . Заметим, что $\bar{y} = y$, так как на интервале времени $\Delta t = T$ функция y почти постоянна. Уравнение (1.3.3-4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = \Phi(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (1.3.3-5)$$

где $\Phi(\bar{y}) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, \bar{y}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \bar{y}) dt$. При начальном условии $\bar{y} = \alpha x$ уравнение (1.3.3-5) имеет неявное решение

$$\bar{y} - \alpha x - \alpha t \Phi(\bar{y}) = 0. \quad (1.3.3-6)$$

Для решения уравнения (1.3.3-6) нами использовался один из итерационных алгоритмов. Решение считаем найденным, если $|y_{i+1} - y_i| < 10^{-19}$. Функцию $Y(t)$ можно записать в виде $Y(t) = H_1 + H_2 \cos(2\pi t/T)$, $H_1 = \frac{H_{\max} + H_{\min}}{2}$, $H_2 = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{2}$. Преобразуем интеграл $\Phi(\bar{y})$ к виду,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{(1-x^2)^{1/2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k); \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad (1.3.3-7)$$

$$\Phi(\bar{y}) = -\frac{b}{T} \int_0^t \exp[-\alpha(Y-\bar{y})^2] dt = -\frac{b}{T} \left\{ \int_0^{T/2} \exp[-\alpha(Y-\bar{y})^2] dt + \int_{T/2}^T \exp[-\alpha(Y-\bar{y})^2] dt \right\}. \quad (1.3.3-8)$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной $t = (T/2) + \tau$, тогда

$$\int_{T/2}^T \exp[-\alpha(Y-\bar{y})^2] dt = \int_0^{T/2} \exp[-\alpha(Y(\tau)-\bar{y})^2] d\tau, \quad Y(\tau) = H_1 - H_2 \cos \frac{2\pi\tau}{T},$$

и

$$\Phi(\bar{y}) = -\frac{b}{T} \int_0^{T/2} \left\{ \exp[-\alpha(H_1 + H_2 \cos \frac{2\pi t}{T} - \bar{y})^2] + \exp[-\alpha(H_1 - H_2 \cos \frac{2\pi t}{T} - \bar{y})^2] \right\} dt. \quad (I.3.3-9)$$

Выполнив замену переменных в выражении (I.3.3-9):

$$z = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad t = \frac{T}{2\pi} \arccos z, \quad dt = -\frac{T}{2\pi} \cdot \frac{dz}{(1-z^2)^{1/2}},$$

приведем его к виду (I.3.3-7), удобному для численного интегрирования. Численные расчеты, сделанные на ЭВМ М-220, приведены в виде графиков (рис. I3). Скорость отступления точки основания надводного склона на уровне H_{max} немного меньше, чем $b = 0,01 \text{ м/год}$ (т.е. меньше, чем при отсутствии колебаний уровня моря), что связано с периодичностью времени прибывания воды в этом уровне. Отступление склона на уровне H_{min} происходит приблизительно с той же скоростью, что и на уровне H_{max} . Развитие надводного склона, как говорилось выше, не моделировалось. Общий характер отступления подводного склона ниже уровня H_{max} почти не отличается от его развития при отсутствии колебаний уровня моря ($Y = \text{const}$) при тех же параметрах α и b (рис. I4). В обоих случаях образуется слабо вогнуто-выпуклый подводный профиль.

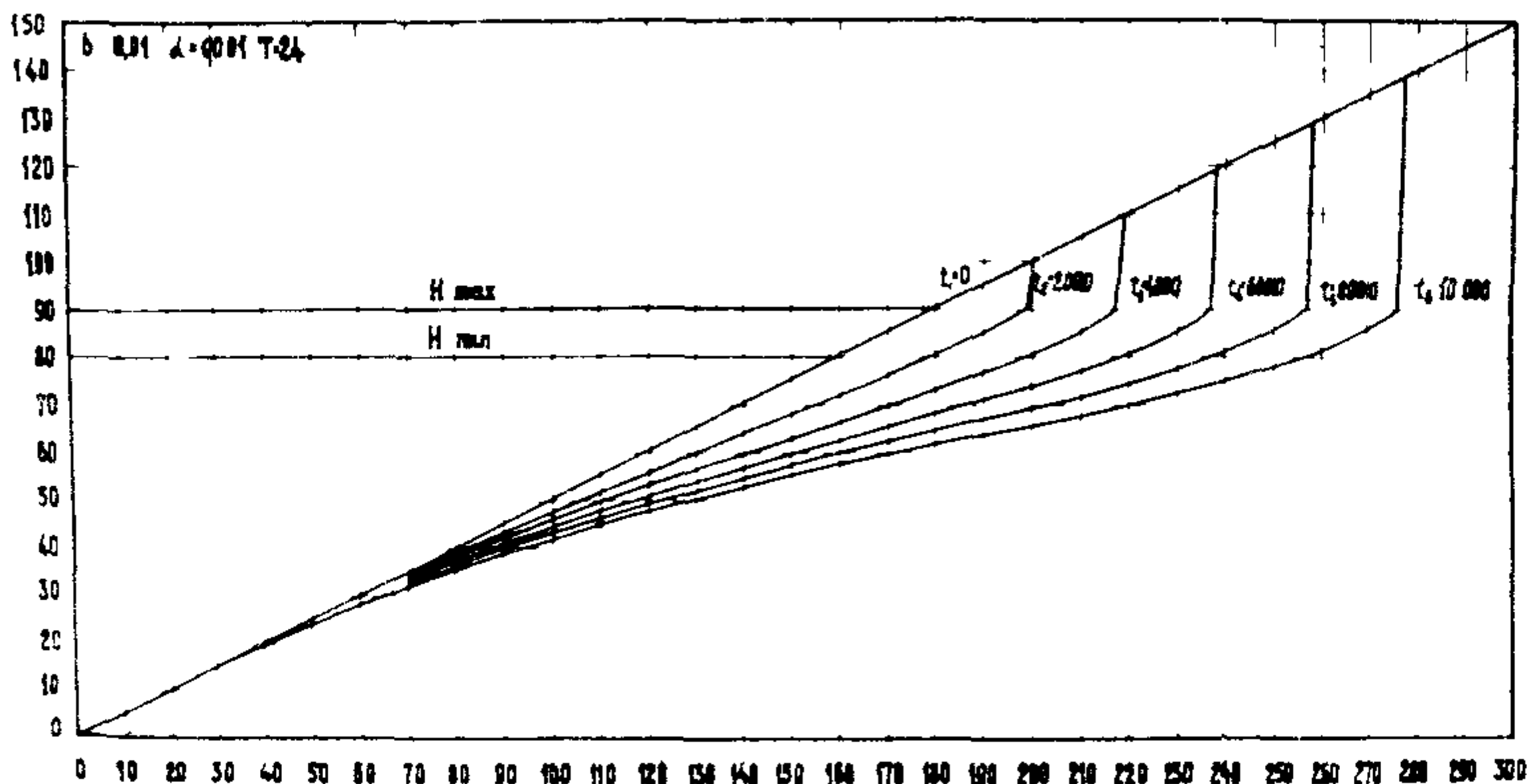


Рис. I3. Развитие подводного профиля берегового склона при периодических колебаниях уровня моря.

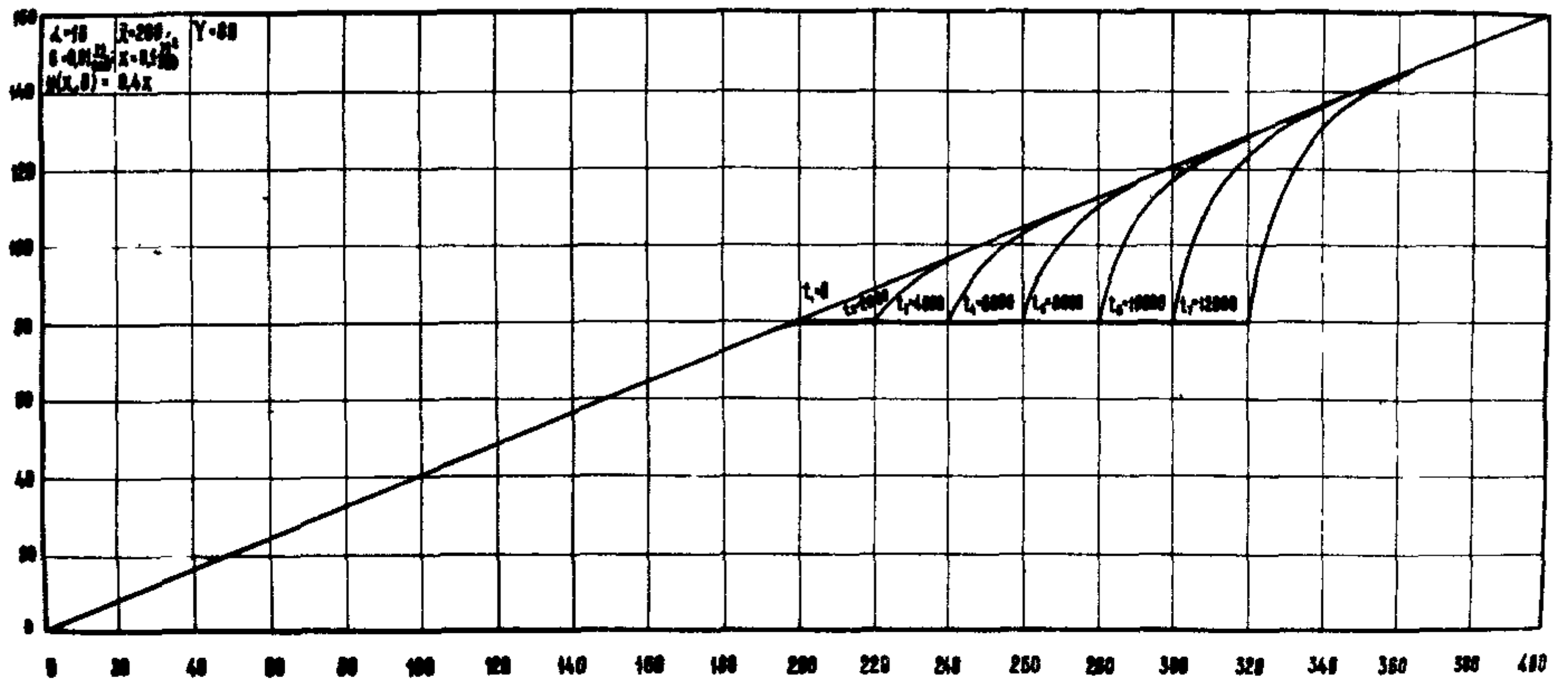
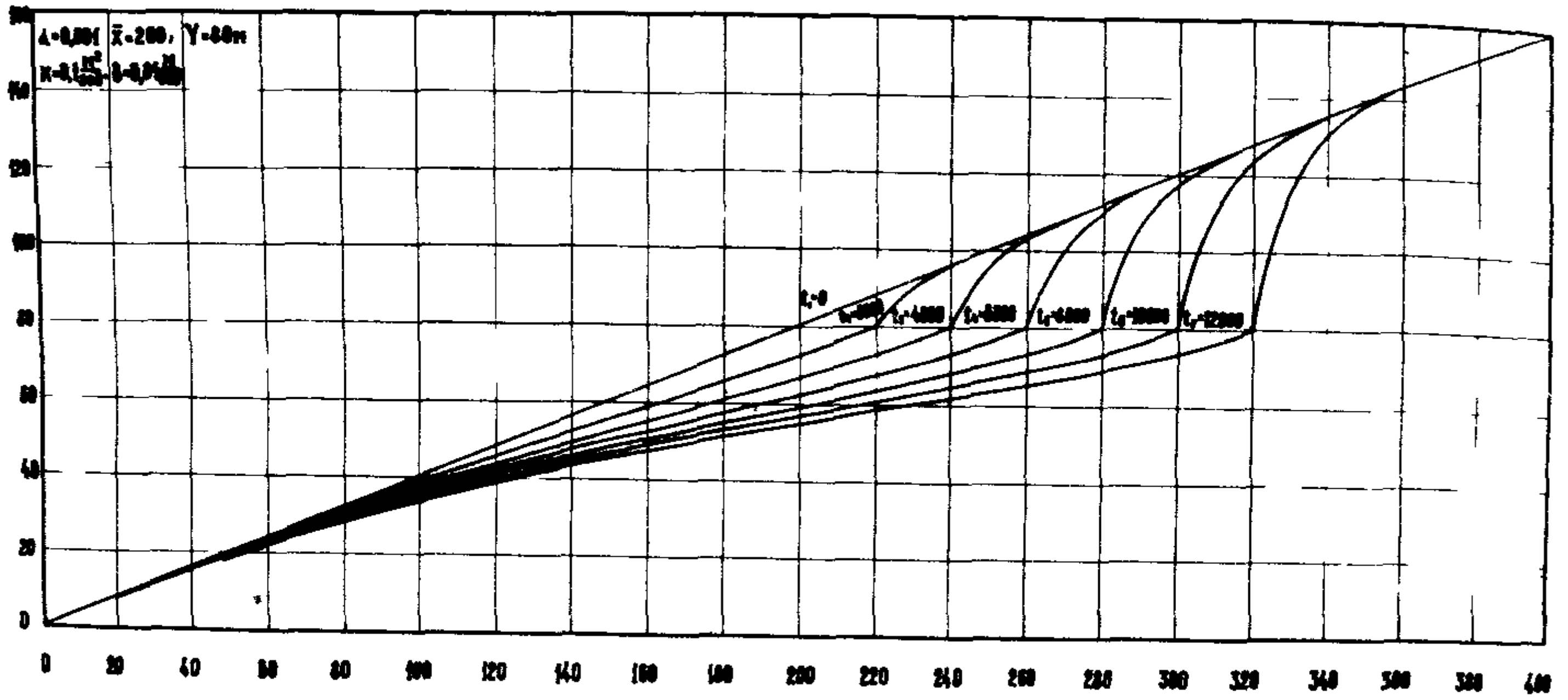


Рис. 14 (а, б). Развитие берегового склона при постоянном уровне моря ($Y = \text{const}$).

Теперь мы имеем основание для рассмотрения комплексных диффузионно-кинематических моделей.

§ 4. Комплексные диффузионно-кинематические модели развития склонов

В тех случаях, когда различные части одного склона развиваются под воздействием различных процессов, встает проблема построения комплексных (синтетических) моделей. Примером этого может служить процесс развития всего берегового склона в целом. Под береговым склоном понимаем склон, состоящий из надводной и подводной частей. До сих пор рассматривались модели развития отдельных частей берегового склона и таким образом встает проблема сопряжения (синтеза) таких моделей с помощью учета механизма взаимодействия на границе подводного и надводного профилей берегового склона. Рассмотренные выше (§ 6, гл. I) подходы по определению скорости подрезания основания надводного склона, отчасти, могут решить эту проблему. Мы не будем брать сложные физические модели развития подводных профилей склонов, а в качестве иллюстрации положим в основу кинематическую модель размываемого подводного склона по А.Е.Шайдеггеру (1964). В основе этой модели лежит нелинейное уравнение (см. § 2 этой главы)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \Phi \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (I.3.4-I)$$

Считая, что деформация подводного профиля склона зависит от глубины и уклона, А.Е.Шайдеггер записывает функцию Φ в виде

$$\Phi = b \sin \psi \exp [-\alpha (Y - y)^2], \quad (I.3.4-2)$$

и приходит к уравнению развития подводного профиля склона (I.3.3-I). Неявное решение уравнения (I.3.3-I) при прямолинейном начальном профиле $y(x, 0) = ax$ получается в виде

$$x = \frac{y}{a} + b t \exp [-\alpha (Y - y)^2]. \quad (I.3.4-3)$$

Численные расчеты А.Е.Шайдеггера (Scheidegger, 1962) по уравнению (I.3.3-I) при $Y = \text{const}$ показали на образование выпукло-

сти в прирезовой зоне склона. На его графиках показано также образование уступа в прирезовой зоне подводного склона, что нереально. На самом деле по этой модели происходит отступление верхней точки подводного склона на уровне моря $y = Y$ со скоростью v , и может образовываться только надводный уступ (клиф). Расчеты А.Е.Шайдеггера могут соответствовать только случаю, когда по линии $x = 100$ проходит вертикальная граница, разделяющая породы разной прочности (правее границы $x = 100$ подрезание отсутствует), что малореально. Этому несоответствия можно избежать, рассматривая дополнительно надводный профиль склона. Его развитие опишем диффузионной моделью (I.I.4-2). Тогда простейшая модель берегового склона может быть построена как синтез моделей (I.I.4-2) и (I.3.3-1). При начальном прямолинейном профиле берегового склона модель примет следующий вид (Трофимов, Московкин, 1979 б)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & y(\bar{x} + vt, t) = Y = \text{const}, & x > \bar{x} + vt, & y(x, 0) = ax, & x > \bar{x}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -v \exp[-\alpha(Y-y)^2] \frac{\partial y}{\partial x}, & & 0 < x < \bar{x} + vt, & y(x, 0) = ax, & 0 < x < \bar{x}. \end{cases} \quad (I.3.4-4)$$

Задача для уравнения диффузии сводится к задаче (I.I.4-2) преобразованием

$$y' = y - Y, \quad x' = x - \bar{x}. \quad (I.3.4-5)$$

Начальный профиль брался в виде $y = 0.4x$ и модель (I.3.4-4) решалась при двух параметрах α , сильно отличных друг от друга: $\alpha_1 = 0,001$, $\alpha_2 = 16$, а также при $k = 0,1 \text{ м}^2/\text{года}$ и $v = 0,01 \text{ м/год}$. Расчеты приведены в виде графиков (рис. I4). При очень большом параметре $\alpha_2 = 16$ профиль подводного склона почти не претерпевает изменений (интенсивность размыва с глубиной задавалась здесь с помощью очень быстро затухающей экспоненты), и на уровне моря образуется горизонтальная площадка. При $\alpha_1 = 0,001$ образуется слабо вогнуто-выпуклый подводный профиль склона (слабая вогнутость образуется в верхней части подводного склона).

Расчеты велись по аналитическому решению (I.I.4-4) и неявному решению (I.3.4-3). Заметим, что А.Е.Шайдеггер для решения уравнения (I.3.3-1) строил разностную схему, что значительно затрудняет решение.

Модель (I.3.4-4) является наиболее простой, и ее усовершенствование должно идти по пути установления скорости подрезания \dot{b} , что рассматривалось выше. Кроме того, предполагалось, что весь материал, сносимый с надводного склона, уносится за пределы подводного склона волновыми и вдольбереговыми течениями. Расчет скорости $\dot{b}(t)$ может являться самостоятельной задачей или рассматриваться в единстве с задачей развития берегового склона. Рассмотрим принципиальную постановку последней задачи (Трофимов, Московкин, Хайрутдинов, 1980).

Закон изменения границы $s(t)$ заранее не ищется из решения другой задачи, а определяется с решением дифференциальных уравнений, описывающих развитие берегового склона. Такая граница называется свободной (по аналогии с задачами теплопроводности и диффузии) и на ней ставится условие, определяющее скорость движения границы. Обозначая профиль подводного склона через y а профиль надводного — z , приходим к следующей модели

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} = \Phi(x, y, t, H, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad y(0, t) = -H = \text{const}, \quad t > 0, \\ y(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad y(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq s(t), \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \Psi(x, z, t, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}), \quad s(t) \leq x < +\infty, \quad t > 0, \\ z(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad z(x, 0) = f(x), \quad s(t) \leq x < +\infty, \\ \frac{ds}{dt} = \varphi [y_x(s(t), t), z_x(s(t), t)]. \end{array} \right. \quad (\text{I.3.4-6})$$

Последнее условие на свободной границе говорит о том, что скорость ее движения зависит от уклонов подводного и надводного профилей в точке их соединения $s(t)$. Таким образом, задача состоит в отыскании вида функции Φ, Ψ, φ . В качестве первых двух, в первом приближении, можно взять правые части уравнений диффузионно-кинематической (I.3.4-4) модели.

Модель (I.3.4-6) назовем двухфазной береговой задачей, по аналогии с двухфазной задачей Стефана (Фридман, 1968) известной в теории теплопроводности. Модель (I.3.4-6) переходит в двухфазную задачу Стефана при линейном виде функции и уравнениях диффузионного типа. В первом приближении в качестве гипотезы для функции φ можно взять: $\varphi = -k_1 y_x(s(t), t) - k_2 z_x(s(t), t)$,

которая говорит о том, что скорость подрезания основания надводного склона (скорость перемещения свободной границы) пропорциональна уклонам подводного и надводного профилей в точке их соединения. При решении этой модели, возможно, будет целесообразно использовать метод совместного использования двух преобразований, о котором говорилось выше (§ 6, гл. I, ч. I). При конкретном построении модели (I.3.4-6) большие трудности связаны с выбором функции или построением модели развития подводного склона. Модель типа Шайдеггера (I.3.4-4) - односторонняя, так как описывает только размываемые склоны, причем она очень схематична; другие физические модели, хотя и не являются схематичными, но также справедливы для абразионных подводных склонов. При учете как процессов размыва, так и аккумуляции следует строить модели на основе уравнения баланса материала, как это делалось для надводных склонов в первых двух главах, но оно здесь будет иметь свою специфику, связанную с другими условиями. Построим такую модель на основе результатов В.Л.Максимчука (1971).

Постановка задачи и попытка составления уравнения развития берега под действием волн и прибрежных течений принадлежит В.Л.Максимчуку (1971). Окончательное уравнение было получено В.М.Широковым, В.М.Московкиным, А.М.Трофимовым (1970)

$$\frac{\partial(S_x V_x Z)}{\partial x} + \frac{\partial(S_y V_y Z)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (I.3.4-7)$$

где выражения в скобках есть твердые расходы; V_x, V_y - скорости потоков в направлении осей x и y ; S_x, S_y - мутности потоков в тех же направлениях; z - величина, обратная глубине в данной точке подводного склона (вертикальная координата $z(x, y, t)$); ось x направлена по линии уреза, ось y - перпендикулярна урезу и лежит на уровне воды.

В случае, когда вдольбереговое течение отсутствует, либо его расход постоянный $q_x = S_x V_x Z = \text{const}$ из уравнения (I.3.4-7) получим

$$\frac{\partial(S_y V_y Z)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (I.3.4-8)$$

В случае, когда $S_y V_y = \text{const}$ при начальной форме подводного склона в виде наклонной плоскости $z(x, y, 0) = -ay$, из уравнения (I.3.4-8) получим параллельное отступление склона

$$z = -a(y + S_y V_y t). \quad (\text{I.3.4-9})$$

При $q_y = S_y V_y z = \text{const}$, $V_x S_x = \text{const}$ подводный склон стабилен (не изменяется во времени). Общее решение уравнения (I.3.4-8) (плоская задача) при $z(y, 0) = -ay$ и $S_y V_y = f(y)$ ($f(y)$ – произвольная дифференцируемая функция) получим методом характеристик

$$z(y, t) = -\frac{a}{f(y)} \Phi^{-1} \left(\int \frac{dy}{f(y)} + t \right) f \left[\Phi^{-1} \left(\int \frac{dy}{f(y)} + t \right) \right], \quad (\text{I.3.4-10})$$

где $\Phi(y) = \int \frac{dy}{f(y)}$, знак "-I" над Φ есть знак обратной функции.

Приведем некоторые примеры: 1. $f(y) = by$: тогда решение (I.3.4-10) запишется в виде

$$z(y, t) = -ay \exp(2bt), \quad (\text{I.3.4-11})$$

то есть происходит размыв склона при сохранении прямолинейной его формы и увеличении крутизны. Если функция $f(y)$ будет расти нелинейно, то будет образовываться выпуклый профиль. 2. $f(y) = \frac{b}{y}$; тогда получим

$$z(y, t) = -\frac{ay^3}{2abt + y^3}, \quad (\text{I.3.4-12})$$

то есть идет аккумуляция на береговом подводном склоне с образованием выпукло-вогнутого профиля. Таким образом, когда функция $f(y)$ убывает вниз по склону, идет аккумуляция.

Итак, проблема состоит в определении мутностей и скоростей потока в каждой точке подводного склона в зависимости от x, y, t , и, возможно, производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

В заключение рассмотрим синтетическую модель (объединяющую кинематическую и диффузионную модель) для моделирования надводного склона, различные части которого развиваются под действием

разных процессов. Как отмечалось во втором параграфе этой главы, часто в природе у невысоких уступов можно наблюдать пологую прирвовочную область, которая возникает из-за того, что выветривание на верхнюю часть уступа действует как сверху, так и сбоку. Этот процесс ускоряет отступление прирвовочной (привершинной) области по сравнению с остальным уступом, что приводит к ее выполаживанию. В дальнейшем она развивается под действием других процессов, например, под действием плоскостного смыва и капельно-дождевой эрозии. Здесь происходит специфичный вариант выравнивания склона как сверху, так и снизу (за счет образования аккумулятивной области).

Пусть при углах, меньших или равных углу естественного откоса (ψ), привершинная область, на которой происходит плоскостной смыв и капельно-дождевая эрозия, развивается по диффузионной модели, а остальной крутой уступ развивается по кинематической модели (I.3.2-6), тогда модель развития всего склона без учета формирования аккумулятивного склона, в наиболее общем случае, примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = -B(y) \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}, & -\frac{\partial y}{\partial x} > \operatorname{tg} \psi, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right], & 0 < -\frac{\partial y}{\partial x} \leq \operatorname{tg} \psi, \\ y(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (\text{I.3.4-13})$$

Эта модель справедлива в том случае, когда две отмеченные области, описанные неравенствами модели, уже сформированы, и мы хотим знать дальнейшее развитие склона. За точку $x=0$ можно взять водораздельную точку и на ней поставить граничное условие для диффузионного уравнения. Чтобы учесть формирование аккумулятивного склона у основания уступа, можно попытаться увязать эту модель с моделью (I.1.7-1). Такая модель будет состоять из трех подмоделей.

§ 5. Кинематические модели Шайдеггера как частный случай балансовых моделей

В заключение рассмотрения кинематических моделей осветим следующий принципиальный вопрос: можно ли распространить балансовую модель (I) на крутые денудационные склоны и считать модели Шайдеггера ее частным случаем?

По-видимому, можно. Для этого необходимо условно считать, что осыпавшийся материал образует некоторый поток материала с расходом q . Этот расход в большинстве случаев при постоянстве литологии и внешнего воздействия можно записать в виде $q = A(H-y)$, где $A = \text{const}$, H - высота крутого склона. При подстановке этого выражения для расхода материала в уравнение баланса (I) приходим к линейной кинематической модели (I.3.2-3). С другой стороны, сами кинематические уравнения типа Шайдеггера можно рассматривать как уравнение баланса (I), в котором вместо расхода материала (q) сразу же задается его градиент $\frac{\partial q}{\partial x}$ (или дивергенция для пространственных задач $\text{div } \vec{q}$), являющийся знакопостоянной функцией, что соответствует случаю только денудации склона. Таким образом, можно считать, что в основе рассмотренных в первой части трех классов моделей лежит уравнение баланса (I), в связи с чем эту часть рассматриваем как введение в общую теорию балансовых моделей развития склонов. Иерархия моделей такова. Вначале стоит широкий круг балансовых моделей, затем следуют более узкие классы диффузионных, геохимических и кинематических моделей, которые можно подразделять на типы.

Перейдем теперь к рассмотрению моделей совершенно иной структуры.

Часть 2

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СКЛОНОВЫХ СИСТЕМ (ПРИЛОЖЕНИЕ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ)

Первые математические модели природных процессов, основанные на качественной теории динамических систем, были построены в биохимической и биологической кинематике, в экологии (Lotka, 1925; Volterra, 1931) и сейчас интенсивно развиваются, особенно в области экологии (Алексеев, 1976; Смит, 1976 и др.). Эта теория может найти применение и при моделировании других природных процессов. Так, Ю.Г.Симонов (1976) указывает на перспективность построения моделей географического взаимодействия для прогноза эволюции окружающей среды.

В этой части книги нами предлагается новый для геоморфологии широкий круг моделей, основанных на качественной теории динамических систем и принципиально отличных от моделей, рассмотренных в первой части. Какое-то разделение моделей на классы пока делать нецелесообразно, и поэтому будем рассматривать эти модели как один класс динамических моделей склоновых систем. Разделение глав идет по виду склоновых систем; поэтому рассматриваются динамические модели береговых (глава 1) и небереговых (глава 2) склоновых систем.

Все рассматриваемые модели сводятся к динамическим системам максимум второго порядка (система двух обыкновенных автономных дифференциальных уравнений первого порядка). В математическом плане есть следующие различия в структуре моделей:

1. собственно динамические модели (системы), состоящие из системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (глава 1; § 3, глава 2); 2. динамические модели, состоящие из одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, когда замыкающие его дифференциальные уравнения вырож-

даются в алгебраические уравнения (§ 2, глава I; § 2, 4, глава 2). Последние упрощенные модели известны в химической кинетике, когда в одних из уравнений динамической системы скорости изменения ($\frac{dC_i}{dt}$) концентраций (C_i) реагирующих веществ пропорциональны друг другу и эти дифференциальные уравнения вырождаются в алгебраические, и вся динамическая система, в определенных случаях, сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка.

Динамические модели склоновых систем наиболее приемлемы при анализе устойчивости, прогноза и управления, а также при учете времени запаздывания и определении времени релаксации в системах. Под первым понимаем промежуток времени от некоторого внешнего воздействия на систему до ее реакции на это воздействие (изменения внешних условий) до приспособления системы к новым условиям (достижение динамического равновесия).

Благодаря действию отрицательных обратных связей в системах, последние имеют тенденцию стремления к некоторому устойчивому состоянию (динамическому равновесию) при стабильных внешних условиях. В связи с этим одна из задач оптимального уравнения может состоять в определении этих состояний и скорейшем переводе в них системы, что эквивалентно уменьшению времени релаксации в системе. В этой части ограничимся построением динамических моделей, аналитическим решением динамических систем и анализа их устойчивых состояний.

Г л а в а I. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БЕРЕГОВЫХ СКЛОНОВЫХ СИСТЕМ

В первом параграфе показан принцип построения и анализ модели взаимодействия областей сноса и аккумуляции через область транзита склона при подмыве области аккумуляции. Во втором параграфе строятся и анализируются сложные и упрощенные динамические модели абразионных склонов, а также учитывается фактор запаздывания в системе абразионного склона.

§ I. Модель взаимодействия областей сноса и аккумуляции через область транзита склона, с учетом подмыва области аккумуляции

Развитие склона (склоновой системы) можно моделировать динамической системой второго порядка, описывающей взаимодействие выветрелого материала областей сноса и аккумуляции через область транзита (Московкин, Трофимов, 1981 б)

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) - f_2(y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2) + f_3(y_2) - f_4(y_2), \end{cases} \quad (2.1.1-1)$$

где y_1, y_2 - количество выветрелого материала в областях сноса и аккумуляции; $f_1(y_1, y_2), f_3(y_2)$ - скорости образования выветрелого материала в областях сноса и аккумуляции; $f_2(y_1, y_2)$ - скорость поступления выветрелого материала в область аккумуляции из области сноса; $f_4(y_2)$ - скорость удаления выветрелого материала из области аккумуляции (при ее подмыве). В начальный момент можно положить $y_1(0) = a, y_2(0) = b$. Обычно в области аккумуляции мощность выветрелого материала значительная, поэтому в большинстве случаев можно считать, что $f_3(y_2) = 0$. Система (2.1.1-1) может быть исследована на устойчивость особых точек решения, которые соответствуют динамическому стационарному режиму $\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = 0$, свидетельствующему о равенстве образующегося материала в области сноса и поступающего в область аккумуляции; последний, в свою очередь, равняется количеству удаляемого материала из области аккумуляции ($f_4(y_2) = 0$).

При отсутствии подмыва ($f_4(y_2) = 0$) идет только накопление материала в области аккумуляции ($\frac{dy_2}{dt} > 0$). В первом уравнении системы (2.1.1-1) y_2 осуществляет обратную связь. Регулирование может происходить следующим образом: при увеличении материала в области аккумуляции начинается меньший приток его туда из области сноса через область транзита, благодаря уменьшению крутизны области транзита, и развитие склона со временем стабилизируется (при отсутствии подмыва). Такая

ситуации возможна при стабильной области транзита, когда не происходит уменьшение области сноса за счет продвижения на нее области аккумуляции, т.е. когда $f_1(y_1, y_2) = f_1(y_1)$. Но чаще всего в природе происходит сокращение области сноса, что обуславливает стабилизацию в развитии склона. В этом случае можно построить следующую модель. Скорость образования выветрелого материала в области сноса представим в виде

$$f_1(y_1, y_2) = \alpha (h_0 - h) \ell, \quad (2.1.1-2)$$

т.е. при нулевой мощности выветрелого слоя материала ($h = 0$) скорость его образования наибольшая и существует предельная мощность $h = h_0$, когда выветривание уже не воздействует на коренную породу. В формуле (2.1.1-2) ℓ обозначает длину области сноса. При достаточно прямолинейных очертаниях профилей областей сноса и аккумуляции длина области сноса зависит от объема области аккумуляции следующим образом: $\ell = \kappa (y_{2\max} - y_2)^{1/2}$ (2.1.1-3). При $y_2 = y_{2\max}$ об-

ласть сноса исчезает, т.е. область аккумуляции полностью перекрывает ее. Мощность h в формуле (2.1.1-2) представим как отношение количества выветрелого материала (y_1) к длине области сноса (рассматривается плоская задача)

$$h = \frac{y_1}{\ell} = \frac{y_1}{\kappa (y_{2\max} - y_2)^{1/2}}. \quad (2.1.1-4)$$

Предположим, что скорость поступления материала в область аккумуляции пропорциональна количеству материала в области сноса, т.е. $f_2 = \beta y_1$, а скорость удаления материала из области аккумуляции постоянная ($\lambda = \text{const}$). Учитывая сказанное (при $f_3 = 0$), приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -(\alpha + \beta)y_1 + \alpha h \kappa (y_{2\max} - y_2)^{1/2}, \\ \frac{dy_2}{dt} = \beta y_1 - \lambda. \end{cases} \quad (2.1.1-5)$$

Особая точка системы (2.1.1-5) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \lambda / \beta, \\ \bar{y}_2 &= y_{2\max} - \frac{(\alpha + \beta)^2 \lambda^2}{\beta^2 \alpha^2 h_0^2 \kappa^2}. \end{aligned} \quad (2.1.1-6)$$

При $\bar{y}_2 < 0$ будет происходить подмыв коренного склона (область аккумуляции исчезает). Это будет иметь место при $\lambda > \frac{\beta \alpha h_0 k}{\alpha + \beta} y_{2\max}^{1/2}$.

Для выяснения характера устойчивости особой точки (2.1.1-6) проделаем линеаризацию системы (2.1.1-5) вблизи особой точки

$$y_1 = \xi + \bar{y}_1; \quad y_2 = \eta + \bar{y}_2. \quad (2.1.1-7)$$

Подставляя (2.1.1-7) в систему (2.1.1-5) и пренебрегая членами порядка выше первого, получим

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -(\alpha + \beta)\xi - \frac{(\alpha h_0 k)^2 \beta}{2\lambda(\alpha + \beta)} \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = \beta \xi. \end{cases} \quad (2.1.1-8)$$

Решение линейной системы (2.1.1-8) в виде

$$\begin{cases} \xi = C_{11} \exp(\lambda_1 t) + C_{12} \exp(\lambda_2 t), \\ \eta = C_{21} \exp(\lambda_1 t) + C_{22} \exp(\lambda_2 t), \end{cases} \quad (2.1.1-9)$$

дает следующие значения для $\lambda_{1,2}$

$$\lambda_{1,2} = -\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \pm \left[\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} - \frac{(\alpha h_0 k \beta)^2}{2\lambda(\alpha + \beta)}\right]^{1/2}. \quad (2.1.1-10)$$

Из последнего соотношения делаем следующие выводы о характере устойчивости особой точки:

При $\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} \gg \frac{(\alpha h_0 k \beta)^2}{2\lambda(\alpha + \beta)}$ имеем устойчивый узел, что означа-

ет апериодическое затухающее стремление к особой точке.

При $\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} < \frac{(\alpha h_0 k \beta)^2}{2\lambda(\alpha + \beta)}$ имеем устойчивый фокус, что означа-

ет периодическое затухающее стремление к особой точке (на фазовой плоскости изображается закручивающейся спиралью).

Критическое значение параметра λ (скорости удаления материала из области аккумуляции), разделяющего две области устойчивости, будет равно

$$\lambda_{кр.} = 2 \frac{(\alpha h_0 k \beta)^2}{(\alpha + \beta)^3}. \quad (2.1.1-11)$$

При λ бóльшем или равном этому критическому значению будем иметь устойчивый узел. При $\lambda = 0$ (отсутствие подмыва) не удастся построить линеаризованной системы, но характер особой точки $\bar{y}_1 = 0, \bar{y}_2 = y_{2\max}$ ясен из физических соображений, а именно: количество приносимого в область аккумуляции материала замедленно стремится к максимальному значению ($\lim_{t \rightarrow \infty} y_2 = y_{2\max}$), т.е. особая точка - устойчивый узел. Траектории на фазовой плоскости могут быть качественно нарисованы методом изоклин (рис. 15 а). На кривой $y_1 = \frac{\alpha h_0 k}{\alpha + \beta} (y_{2\max} - y_2)^{1/2}$ касательные к траектории имеют вертикальное направление, а на прямой $y_1 = 0$ - горизонтальное. Эти две характерные кривые ($y_1 = \frac{\alpha h_0 k}{\alpha + \beta} (y_{2\max} - y_2)^{1/2}$, $y_1 = 0$) называются изоклинами. Первая разделяет области, в которых производные dy_2/dy_1 имеют разные знаки. При построении модели (2.1.1-5) предполагалось, что при уменьшении области аккумуляции (из-за подмыва) сразу же увеличивается область сноса. При подмыве, например, больших осыпей это условие не соблюдается, а образуется перегиб в первоначальной осыпи (или вторичная осыпь) (Дедков, 1970)..

Перейдем теперь к построению динамических моделей другого вида.

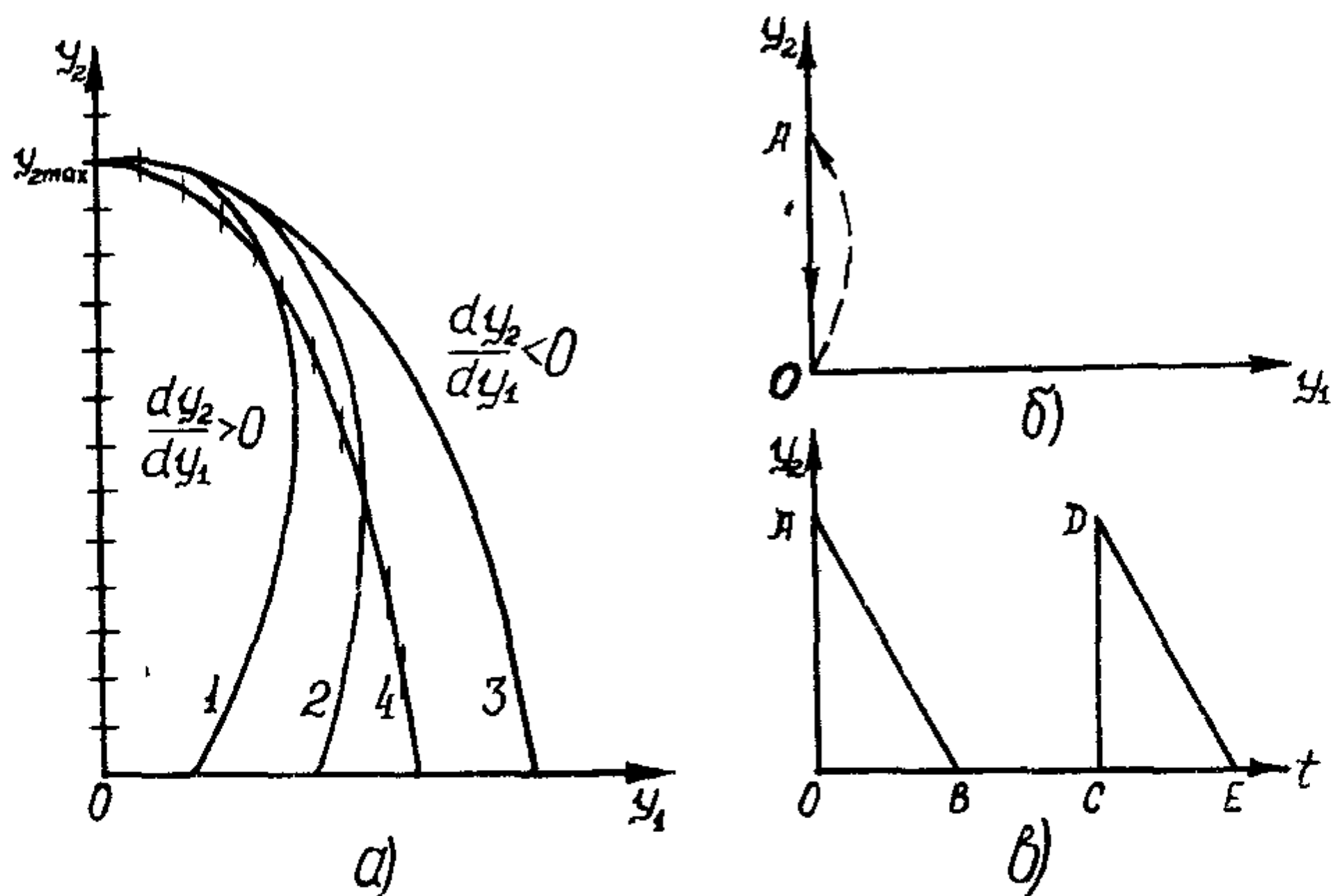


Рис. 15. а - качественный характер поведения фазовых траекторий при отсутствии подмыва ($\lambda = 0$), б - замкнутая разрывная фазовая траектория, характеризующая циклическое развитие абразивно-оползневого или обвальнo-абразивного склона, в - периодический во времени процесс динамики аккумулятивной области абразивно-оползневого или обвальнo-абразивного склона.

§ 2. Динамические модели абразионных склонов

Рассматривая развитие крутого подмываемого склона будем исходить из следующих гипотез: 1. чем сильнее подмыв, тем быстрее идет увеличение крутизны склона; 2. чем больше крутизна, тем больше сносится материала с верхних частей склона и тем меньше подмыв; 3. чем больше крутизна склона, тем быстрее происходит ее уменьшение; 4. энергия водного потока идет на подмыв коренного склона и на переработку скапливающегося в основании склона материала. Полагаем, также, что развитие склона идет непрерывно без обвалов больших масс материала. В результате приходим к следующей динамической системе (Трофимов, Московкин, 1978 б)

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = C_1 V_{\text{подм.}} - C_2 \alpha, \\ \frac{dm}{dt} = V_{\text{подм.}} + V_{\text{сб.}} - V_{\text{пер.}}, \\ V_{\text{подм.}} \cdot \bar{d} = V(1 - [m/m_0]), \quad (\bar{d} > 1), \\ V_{\text{пер.}} + V_{\text{подм.}} \cdot \bar{d} = V = \text{const}, \\ V_{\text{сб.}} = K \alpha, \end{cases} \quad (2.1.2-1)$$

где α - средний угол наклона склона; $V_{\text{подм.}}$ - интенсивность подмыва коренного склона; $V_{\text{пер.}}$ - интенсивность переработки скапливающегося в основании склона материала (m); $V_{\text{сб.}}$ - интенсивность поступления материала с верхних частей склона; C_1 , C_2 , K , \bar{d} - положительные постоянные. Второе уравнение системы есть балансовое соотношение, а третье уравнение системы означает, что при $m = 0$ интенсивность подмыва максимальна и существует некоторое значение $m = m_0$, когда поток уже перестает воздействовать на коренной склон ($V_{\text{подм.}} = 0$). Константа \bar{d} говорит о неравнозначности воздействия волнового потока на коренной склон и скапливающийся обломочный материал. Предпоследнее уравнение системы есть условие постоянной интенсивности воздействия на основания склона волнового потока. Систему уравнений (2.1.2-1) сведем к следующей динамической системе второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = V_{\text{сб.}} + \frac{1+\bar{d}}{\bar{d}} V(1 - \frac{m}{m_0}) - V, \\ \frac{dV_{\text{сб.}}}{dt} = \frac{C_1 K}{\bar{d}} V(1 - \frac{m}{m_0}) - C_2 V_{\text{сб.}}. \end{cases} \quad (2.1.2-2)$$

Особая точка исходной системы уравнений (2.1.2-1) имеет вид

$$\begin{cases} \bar{m} = m_0 \left[\frac{c_1 k + c_2}{c_1 k + c_2 (1+d)} \right], & \bar{v}_{сб.} = V \left[\frac{c_1 k}{c_1 k + c_2 (1+d)} \right], \\ \bar{v}_{погм.} = V \left[\frac{c_2}{c_1 k + c_2 (1+d)} \right], & \bar{v}_{пер.} = \left[\frac{c_1 k + c_2}{c_1 k + c_2 (1+d)} \right], \\ \bar{\alpha} = V \left[\frac{c_1}{c_1 k + c_2 (1+d)} \right]. \end{cases} \quad (2.1.2-3)$$

При исследовании системы уравнений (2.1.2-2) нам понадобятся первые две координаты особой точки. Линеаризованная система (2.1.2-2) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{c_1 k V}{m_0 d} \eta - c_2 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi - \frac{(1+d)V}{m_0 d} \eta, \quad (2.1.2-4)$$

где $m = \bar{m} + \xi$; $v_{сб.} = \bar{v}_{сб.} + \eta$.

Корни характеристического уравнения этой системы имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{dc_2 m_0 + (1+d)V}{2m_0 d} \pm \frac{([c_2 m_0 d - V(1+d)]^2 - 4c_1 k m_0 V d)^{1/2}}{2m_0 d}. \quad (2.1.2-5)$$

При $\Delta = [c_2 m_0 d - V(1+d)]^2 - 4c_1 k m_0 V d \geq 0$ имеем устойчивый узел,

а при $\Delta < 0$ - устойчивый фокус. Таким образом, со временем устанавливаются определенные соотношения между $v_{погм.}$, $v_{сб.}$, $v_{пер.}$, α , m .

Видим, что при постоянном воздействующем факторе V не возникает неустойчивых решений ни при каких значениях параметров системы. Введем в систему (2.1.2-1) эффект запаздывания. Это связано с тем, что подмыв склона не сразу ведет к увеличению крутизны склона, а через некоторое время T , а увеличение крутизны склона не сразу приводит к увеличению сноса материала с верхних частей склона, а через время τ . В этом случае от системы (2.1.2-1) приходим к системе уравнений с запаздывающими аргументами (Московкин, Трофимов, 1981 б)

$$\begin{cases} \frac{d\alpha(t)}{dt} = c_1 v_{погм}(t-T) - c_2 \alpha(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} = v_{погм}(t) + v_{сб.}(t+\tau+T) - v_{пер.}(t), \\ v_{пер.}(t) + v_{погм}(t)d = V, \\ v_{сб.}(t+\tau) = \alpha(t)k, \\ v_{погм}(t)d = V(1 - [m(t)/m_0]). \end{cases} \quad (2.1.2-6)$$

Применяя к системе (2.1.2-6) преобразование Лапласа $\alpha \rightarrow A$, $m \rightarrow M$, $U_{\text{погм}} \rightarrow U_{\text{погм}}$, $U_{\text{св}} \rightarrow U_{\text{св}}$, $U_{\text{пер}} \rightarrow U_{\text{пер}}$, где, например, $A = \int_0^{\infty} \alpha(t) \exp(-st) dt$, приходим к следующей алгебраической системе уравнений

$$\begin{cases} -\bar{\alpha}_0 + As = c_1 \exp(-sT) U_{\text{погм}} - c_2 A, \\ -\bar{m}_0 + Ms = U_{\text{погм}} - U_{\text{пер}} + U_{\text{св}} \exp[(\tau+T)s], \\ U_{\text{пер}} + U_{\text{погм}} d = V/s, \\ U_{\text{св}} \exp(s\tau) = \kappa A, \\ U_{\text{погм}} d = (V/s) - (V/m_0)M, \end{cases} \quad (2.1.2-7)$$

где $\bar{\alpha}_0 = \alpha(0)$, $\bar{m}_0 = m(0)$. Решим эту систему только относительно M

$$M = \frac{[(c_2 + s)V + \bar{m}_0 s(c_2 + s)d + \kappa c_1 V + d \kappa \bar{\alpha}_0 s \exp(sT)] m_0}{s [m_0 d s^2 + (m_0 c_2 d + (1+d)V)s + (1+d)Vc_2 + \kappa c_1 V]} \quad (2.1.2-8)$$

Отсюда $m(t)$ выразится обратным преобразованием Лапласа

$$m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{m_0 \exp(st) [(c_2 + s)V + \bar{m}_0 s(c_2 + s)d + \kappa c_1 V + d \kappa \bar{\alpha}_0 s \exp(sT)] ds}{s [m_0 d s^2 + (m_0 c_2 d + (1+d)V)s + (1+d)Vc_2 + \kappa c_1 V]} \quad (2.1.2-9)$$

Знаменатель подынтегрального выражения имеет следующие нули:

$$s_1 = 0; s_{2,3} = -\left(\frac{c_2 + (1+d)V}{2} \pm \left[\left(\frac{c_2 - (1+d)V}{2}\right)^2 - \frac{\kappa c_1 V}{m_0 d}\right]^{1/2}\right) \quad (2.1.2-10)$$

При $\frac{c_2 - (1+d)V}{2} > \left(\frac{\kappa c_1 V}{m_0 d}\right)^{1/2}$ корни $s_{2,3}$ — действительные отрицательные числа. В противном случае имеем комплексные корни с отрицательными действительными частями. Таким образом, не возникает неустойчивых решений. Интеграл (2.1.2-9) определяется через сумму вычетов в точках $s_{1,2,3}$. Здесь подсчитаем только один вычет в точке $s_1 = 0$, который даст устойчивое предельное значение для $m(t)$

$$\text{Выч}_{s_1=0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \frac{m_0 (c_2 + \kappa c_1)}{(1+d)c_2 + \kappa c_1}, \quad (2.1.2-11)$$

где $\varphi(t)$ подынтегральное выражение в формуле (2.1.2-9). Отсюда видим, что выражение (2.1.2-11) совпадает с устойчивым значением для $m(t)$ предыдущей модели, в которой не учитывался фактор запаздывания. Характер устойчивости особых точек также не изменился. Итак, при постоянном воздействующем факторе ($V =$

$= \text{const}$) не возникает неустойчивых решений (неустойчивость могла бы возникнуть при уходе в бесконечность фазовых траекторий). Действительно, в природе неустойчивость подмываемых склонов могла бы возникнуть при резком увеличении интенсивности воздействующего фактора ($\sqrt{\quad}$). Мы предполагали, что развитие склона идет по непрерывной модели, но если значения угла α превзойдет некоторое критическое значение ($\alpha > \alpha_k$), то произойдет обваливание больших масс, и данная модель теряет смысл. Опишем качественно циклический процесс развития абразионно-оползневой (Hutchinson, 1975) или обвально-абразионного склона. Это рассмотрение проведем в рамках модели (2.1.1-1). Отвлечемся от рассмотрения выветрелого материала в области сноса и покажем, как на фазовой плоскости и во времени (рис. 15 б, в) будет выглядеть развитие таких склонов. Пусть в момент времени $t = 0$ происходит обвал или оползень на подмываемом склоне. На фазовой плоскости (рис. 15 б) это соответствует скачку из точки 0 в точку А. Далее идет подмыв аккумулятивного тела до полного его исчезновения (точка на фазовой плоскости движется из А в 0). После удаления аккумулятивного тела идет подмыв коренного склона (точка на фазовой плоскости находится в 0, т.е. все это время $y_2 = 0$). Далее устойчивость склона внезапно нарушается, происходит обвал или оползень, т.е. происходит опять скачок точки из 0 в А (это соответствует схеме Хатчинсона (Hutchinson, 1975), когда оползни одинаковой мощности повторяются периодически). В плоскости (t, y_2) (рис. 15 в) прямая линия АВ соответствует процессу подмыва аккумулятивного тела, прямая ВС - подмыву коренного склона, прямая CD - обвалу или оползню и далее процесс периодичен.

Проанализируем теперь упрощенную систему (2.1.2-1), отвлекаясь от изменения среднего уклона α (Трофимов, Moskovkin, 1980). Считаем склон прямолинейным, интенсивность сноса с которого постоянна и равна $v_{\perp} = v \Delta \rho$, где v - скорость денудации по нормали к склону $\sqrt{\quad}$, Δ - длина склона, ρ - объемный вес пород. Упрощенная система без уравнений, содержащих α , примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = \nu_{\text{подм.}} + \nu_{\text{сб.}} - \nu_{\text{пер.}}, \\ \nu_{\text{подм.}} \cdot d = V(1 - [m/m_0]), \\ \nu_{\text{подм.}} \cdot d + \nu_{\text{пер.}} = V = \text{const.} \end{cases} \quad (2.1.2-12)$$

Система уравнений (2.1.2-12) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dm}{dt} = \nu_{\text{сб.}} + \frac{V}{d} \left(1 - \frac{m}{m_0}\right) - \frac{Vm}{m_0}, \quad (2.1.2-13)$$

решение которого, при начальном условии $m(0) = M$, имеет вид:

$$m(t) = \frac{(\nu_{\text{сб.}} + \frac{V}{d}) \left\{1 - \exp\left[-\frac{V}{m_0} \left(\frac{d+1}{d}\right)t\right] + \frac{V}{m_0} \left(\frac{d+1}{d}\right) M \exp\left[-\frac{V}{m_0} \left(\frac{d+1}{d}\right)t\right]\right\}}{\frac{V}{m_0} \left(\frac{d+1}{d}\right)} \quad (2.1.2-14)$$

Из выражения (2.1.2-14) видим, что со временем устанавливается определенное количество материала у основания склона

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \frac{m_0 (\nu_{\text{сб.}} d + V)}{V(1+d)}. \quad (2.1.2-15)$$

При $\nu_{\text{сб.}} = V$ $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = m_0$, т.е. в этом случае интенсивность подмыва коренного склона равна нулю ($\nu_{\text{подм.}} = 0$), и интенсивность переработки материала равна V ($\nu_{\text{пер.}} = V$). Таким образом, сколько сносится материала со склона, столько же и удаляется его потоком (первый случай по Хатчинсону (Hutchinson, 1975)).

При $\nu_{\text{сб.}} < V$ $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) < m_0$, т.е. происходит подмыв коренного склона (второй случай по Хатчинсону).

При $\nu_{\text{сб.}} > V$ $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) > m_0$, т.е. образуется аккумулятивное тело (третий случай по Хатчинсону).

Развитие и конкретизация рассмотренных моделей, с учетом изменчивости воздействующего фактора V , а также с учетом более точных гипотез, проверенных на практике, позволит рационально планировать противоэрозионные мероприятия. Критическое значение количества материала (m_0) должно определяться из

теоретических, натуральных и экспериментальных исследований. Согласно предельному выражению (2.1.2-15) время релаксации равно бесконечности, что будет иметь место при анализе произвольных динамических систем. Но в действительности, ввиду быстрого экспоненциального стремления к устойчивому режиму, за время релаксации можно взять некоторое конечное время, при котором значение $m(t)$ достаточно близко к m_0 . Его можно определить, решая трансцендентное уравнение (2.1.2-14) относительно времени. Изменяя параметры модели (на практике, воздействуя на реальный объект), мы можем изменять время релаксации, т.е. время перехода системы в устойчивое состояние.

Рассматривая пространственную задачу, следует вместо второго уравнения системы (2.1.2-1) записать более общее уравнение баланса материала

$$\frac{dm}{dt} = V_{\text{в.п.}} + V_{\text{под. в.п.}} + V_{\text{ак. в.п.}} - V_{\text{пер. в.п.}} + V_{\text{под. в. б.п.}} + V_{\text{ак. в. б.п.}} - V_{\text{пер. в. б.п.}}, \quad (2.1.2-16)$$

где $V_{\text{под. в.п.}}$, $V_{\text{под. в. б.п.}}$ – интенсивности поступления материала за счет подмыва коренного склона волновым и вдольбереговым потоками; $V_{\text{ак. в.п.}}$, $V_{\text{ак. в. б.п.}}$ – интенсивности поступления материала за счет аккумуляции волновым и вдольбереговым потоками; $V_{\text{пер. в.п.}}$, $V_{\text{пер. в. б.п.}}$ – интенсивности убыли материала за счет переработки его волновым и вдольбереговым потоками.

Задача состоит в замыкании уравнения (2.1.2-16) соотношениями, аналогичными гипотезам в модели (2.1.2-1). Это теоретический аспект использования уравнения (2.1.2-17). Практический прогнозный аспект его использования может состоять в следующем. Пусть из опыта на данный момент времени ($t = 0$) определены все составляющие уравнения (2.1.2-16) и пусть их алгебраическая сумма равняется V , тогда, при начальном количестве материала $m(0) = m_0$, по уравнению (2.1.2-16) находим количество материала на небольшое время вперед, в течение которого можно считать $V = \text{const}$ (Широков, Московкин, Трофимов, 1979)

$$m(t) = m_0 + Vt. \quad (2.1.2-17)$$

При $V > 0$ происходит нарастание материала (m), а при $V < 0$ происходит его убыль.

Глава 2. Динамические модели небереговых склоновых систем

В первом параграфе приводится принцип построения динамической модели осыпного склона, соответствующей схеме развития склона по Леману. Близкая динамическая модель процесса оврагоформирования строится во втором параграфе (развитие склонов (бортов) оврага происходит по типу осыпного склона). В третьем параграфе показан пример построения обобщенной динамической модели развития рельефа под воздействием денудации и тектоники. В заключение (§ 4) рассматриваются динамические модели склонов, основанные на равновесной концепции Ф.Анерта (Ahner, 1967). В рамках одной из моделей исследуется устойчивость склоновой системы к воздействию малых случайных возмущений.

§ I. Динамическая модель осыпного склона

Ранее (§ I, глава 3, часть I) рассматривалась кинематическая модель развития осыпного склона по Леману. Эта концепция является плодотворной и с точки зрения построения динамической модели накопления осыпного материала в основании уступа. Действительно, в предположениях этой концепции можно записать следующую динамическую систему

$$\begin{cases} \frac{dw(t)}{dt} = k_p v l(t), \\ \frac{dl(t)}{dt} = \alpha (W(t) - W_0), \end{cases} \quad (2.2.I-I)$$

где $l(t)$ — длина сокращающейся части уступа, $W(t)$ — объем осыпного материала в произвольный момент времени t , W_0 — максимальный объем осыпного материала, соответствующий перекрытию уступа осыпью ($l = 0$), v — нормальная скорость отступления (денудации) уступа, k_p — коэффициент разрыхления (§ I, гл. 3, ч. I), $\alpha = \text{const}$.

Первое уравнение системы (2.2.1-1) есть балансовое соотношение, говорящее о равенстве снесенного с уступа и аккумулирующегося в осыпи материала; второе уравнение говорит о том, что скорость сокращения уступа уменьшается с увеличением объема осыпного материала ($W_0 > W$), и оно осуществляет обратную связь в системе уступ \rightleftharpoons осыпь. Разделив одно уравнение на другое и решив полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, будем иметь

$$W = W_0 - \left(\frac{V_{кр}}{\alpha}\right)^{1/2} \ell. \quad (2.2.1-2)$$

При решении предполагалось, что $W = W_0$ при $\ell = 0$. Коэффициент α найдем из условия $W = 0$, при $\ell = \ell_0$ (ℓ_0 - начальная длина уступа): $\alpha = \frac{V_{кр} \ell_0^2}{W_0}$. Подставляя выражение (2.2.1-2) в одно из уравнений системы (2.2.1-1), получим окончательно

$$w(t) = W_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{V_{кр} \ell_0}{W_0} t\right)\right]. \quad (2.2.1-3)$$

Таким образом, накопление осыпного материала идет с затуханием по экспоненциальному закону. Из соотношения (2.2.1-3) можно определить время полного цикла развития осыпного склона и возраст осыпи, определенные ранее более сложным способом (с помощью концепции (модели) Лемана).

В заключение этого параграфа покажем согласованность последнего результата с выводами, полученными из анализа диффузионной модели формирования педимента (§ 7, глава I, часть I).

Действительно, анализ диффузионной модели показал, что сокращение уступа происходит по экспоненциальному закону $\ell(t) = \ell_0 \exp(-\lambda t)$, тогда, подставляя это выражение в первое уравнение системы (2.2.1-1), приходим к выражению (2.2.1-3).

§ 2. Динамическая модель процесса оврагоформирования

Перейдем к рассмотрению второго типа балансовых моделей взаимодействия при оврагоформировании. Первый тип был рассмотрен ранее (§ 8, гл. I, ч. I).

Предполагая, что склоны (борта) оврага развиваются по осыпному типу (южная аридная зона), основное уравнение баланса материала в произвольной точке симметричного оврага получим в виде

$$\frac{dW}{dt} = 2k_p v \ell(t) - \lambda, \quad (2.2.2-1)$$

где W - объем материала в днище оврага на единицу длины русла, m^2 ; k_p - коэффициент разрыхления; v - нормальная скорость отступления бортов оврага, $m/год$; $\ell(t)$ - длина области денудации овражного склона, m ; λ - скорость очистки оврага русловым процессом, $m^2/год$.

Это уравнение близко к первому уравнению системы уравнений (2.2.1-1). Для замыкания уравнения (2.2.2-1) и построения динамической системы второго порядка следует знать характер зависимости $\frac{d\ell(t)}{dt} = f(W)$ при $\lambda = const$. Ниже рассмотрим только геоморфологический аспект уравнения (2.2.2-1).

Следует заметить, что процесс осыпания происходит во времени более равномерно, чем русловый процесс. В начальной стадии роста оврага, когда он имеет треугольную поперечную форму и небольшую длину области денудации $\ell(t)$, русловые процессы успевают очищать овраг от сносимого со склонов материала ($\lambda > 2k_p v \ell(t)$), и существует критический объем материала, который не может быть полностью вынесен одним или несколькими (за определенный промежуток времени) наиболее интенсивными для данных условий паводками $W_{кр.} = 2k_p v \ell_{кр.}$, откуда $\ell_{кр.} = W_{кр.} / 2k_p v$. После этого овраг имеет тенденцию прекращения преимущественного роста в глубину и начинается процесс прогрессирующего накопления материала и расширения днища. Растущие осыпи в бортах оврагов сокращают их области денудации, что уменьшает скорость поступления осыпного материала в овраг, но в конечном итоге осыпи обычно перекрывают крутые борта оврагов. Этому отчасти способствует уменьшение со временем скорости очистки (λ) из-за уменьшения площади привершинного водосбора оврага.

Процессы накопления и выноса материала в оврагах аридной зоны носят циклический характер. Процесс более или менее непре-

рывного осыпания и накопления осыпного материала в русле завершается быстрой его очисткой при прохождении микроселя. В связи с этим две составляющие уравнения баланса (2.2.2-1) имеют разный масштаб времени и взаимно исключают друг друга. Действительно, когда идет непрерывный процесс осыпания и накопления материала в русле, скорость его очистки можно считать нулевой ($\lambda = 0$), а когда происходит интенсивный и кратковременный паводок ($\lambda \neq 0$), то можно пренебречь первым членом уравнения (2.2.2-1).

В уравнении баланса (2.2.2-1) наиболее проста оценка склоновой составляющей. Для этого надо иметь данные по средним скоростям денудации осыпных склонов оврагов. При конкретной оценке склоновой составляющей уравнения (2.2.2-1) приведем ее ко всей длине оврага (L), тогда скорость накопления материала в овраге выразится величиной $2k_p v \ell L$, м³/год. Для молодых оврагов, выработанных в верхнемеловых мергелях правого склона Цыганской балки (вблизи г.Бахчисарая) и способных к очищению, имеем следующие параметры (Клюкин, Московкин, 1979): $k_p = 1,3$, $v = 5,4$ мм/год, $\ell = 1 \div 3$ м, $L = 50 \div 200$ м, откуда получаем скорость накопления материала в интервале $0,7 \div 8,4 \frac{\text{м}^3}{\text{год}}$. При средней частоте прохождения микроселей в этом районе один раз в четыре-пять лет (Клюкин и др., 1979) получим объем накапливаемого материала в пределах $3 \div 40$ м³. Эти величины объема материала в оврагах являются величинами возможного разового выноса материала микроселями для рассматриваемого района. Рассмотренные особенности формирования оврагов под воздействием склоновых и русловых процессов характерны для оврагов, выработанных в прочных породах, что соответствует третьему типу склонового процесса — осыпанию — в оврагах южной аридной зоны по Б.Ф.Косову и Б.П.Любимову (1979).

§ 3. Динамическая модель развития рельефа под воздействием денудации и тектоники

Рассмотрим теперь общую динамическую модель развития рельефа под воздействием факторов денудации и тектоники (Трофимов, Московкин, Хайрутдинов, 1979). Полагаем, что высота рельефа оп-

ределяется некоторым средним или максимальным уровнем H . Введем скорости тектонического поднятия и вертикального опускания рельефа в результате процессов денудации: T , D . Полагаем, что с увеличением H увеличивается изменение по времени скорости роста денудации (соответствует ускорению), а увеличение скорости денудации в свою очередь замедляет ее ускорение (отрицательная обратная связь). Сказанное можно описать следующей динамической системой второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = T - D, \\ \frac{dD}{dt} = k_1 H - k_2 D. \end{cases} \quad (2.2.3-1)$$

Решение системы (2.2.3-1) получим в виде:

$$\begin{cases} H(t) = C_{11} \exp(\lambda_1 t) + C_{12} \exp(\lambda_2 t) + (k_2/k_1)T, \\ D(t) = C_{21} \exp(\lambda_1 t) + C_{22} \exp(\lambda_2 t) + T, \end{cases} \quad (2.2.3-2)$$

где $\lambda_{1,2} = -\frac{k_2}{2} \pm \left(\frac{k_2^2}{4} - k_1\right)^{1/2}$. При $\lambda_{1,2} < 0$, т.е. когда $\frac{k_2^2}{4} \gg k_1$ имеем особую точку $D_0 = T$, $H_0 = (k_2/k_1)T$ типа устойчивого узла. При $\frac{k_2^2}{4} < k_1$, имеем устойчивый фокус (затухающее гармоническое стремление к особой точке).

В решение (2.2.3-2) амплитуды C_{ij} зависят от начальных условий и только две из них независимы. Из решения видим, что при $T \approx 0$ происходит выравнивание рельефа ($H \approx 0$), что согласуется с анализом диффузионной модели $\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa \Delta H + T$ (анализ для плоского случая диффузионной модели проделан А.С.Девдариани (1967)), а также с логическим анализом А.В.Позднякова (1976). В период интенсивного проявления тектонических процессов ($T = \text{const}$) устанавливается постоянный уровень высоты рельефа, определяемый из решения (2.2.3-2) по выражению $H = (k_2/k_1)T$. Таким образом, данная динамическая модель иллюстрирует циклы развития рельефа по Дэвису при циклическом характере проявления тектонических процессов (1. $T \approx 0$; 2. $T > 0$).

Усовершенствование модели (2.2.3-1) может идти по пути ввода третьего уравнения $\frac{dT}{dt} = f(T, D, H)$; однако пока еще не ясен даже наиболее общий его вид. Можно также попытаться рассмотреть взаимодействие только между факторами денудации и тек-

тоники (динамическая модель: денудация \rightleftharpoons тектоника)

$$\begin{cases} \frac{dD}{dt} = \kappa_1 T - \kappa_2 D, \\ \frac{dT}{dt} = f(T, D). \end{cases} \quad (2.2.3-3)$$

В систему (2.2.3-3) можно ввести фактор запаздывания τ , так как увеличение скорости тектонического поднятия не сразу приводит к росту скорости денудации, а через некоторое время τ . Наш опыт анализа таких систем наводит на мысль, что при достаточно разумном виде функции $f(T, D)$, особые точки системы будут устойчивыми узлами или устойчивыми фокусами. Это соответствует действительному характеру развития рельефа.

§ 4. Динамические модели склонов, основанные на равновесной концепции Анерта

Перейдем теперь к построению динамических моделей склонов, положив в основу равновесную концепцию Ф.Анерта (Ahnert, 1967) и его комплексную модель развития склона (Ahnert, 1973). Это приводит нас к динамической модели для баланса выветрелого материала в конкретной точке склона. По равновесной концепции Ф.Анерта рассматривается изменение выветрелого материала в конкретной точке склона за счет приноса материала из вышележащих точек, уноса материала из этой точки и поступления материала в эту точку за счет выветривания. В дальнейшем это положение (уравнения баланса материала в конкретной точке склона) привело к построению комплексной модели развития склона (Ahnert, 1973). Для реализации ее была построена на языке ФОРТРАН У программа COSLOR-2. Она состоит из основной программы, служащей для выбора подпрограмм и обращения к ним, пересчета склоновых параметров, вывода на печать и семнадцати подпрограмм, которые разделяются на следующие: три подпрограммы для задания начального профиля склона, одна — для определения выветривания, с учетом геологической структуры (две подпрограммы), причем расчет выветривания может вестись по квазимеханической, химической и смешанной моделям, шесть подпрограмм — для расчета изменения базиса денудации склона с постоянной, замедленной или возрастающей скоростью, три подпрограммы склоновых процессов — вязко-пластичного течения материала по формуле Р.Суше (Souchez, 1964)

$R = \beta \left(\sin \alpha - \frac{q}{h} \right)$, простого смыва по формуле $R = q \sin \alpha$ и слож-

ного смыва по формуле А.Зинга (Zingg, 1940) $R = k S \sin \alpha (1 + d^m)$, где в отличие от простого смыва учитывается увеличение интенсивности смыва вниз по склону (d), две подпрограммы, моделирующие оползневой механизм, соответственно левой и правой части склона. В предыдущих формулах h — мощность (толщина) слоя материала: $b, a, q, k, m = \text{const}, m < 1$. Моделирование на компьютере Univac — II03 показало, что развитие первоначально прямолинейного склона под действием: 1. вязко-пластичного течения приводит к выпуклому профилю склона; 2. сложного смыва — к вогнутому профилю; 3. сочетание первых двух процессов — к выпукловогнутому профилю; 4. вязко-пластичного течения, с учетом постоянной скорости понижения базиса денудации склона — к выпуклому устойчивому профилю; 5. сложного смыва, с учетом постоянной скорости понижения базиса денудации склона — вогнутому устойчивому профилю. Дальнейшее развитие комплексной модели привело к построению ее пространственного аналога (Анерт, 1976) и анализа чувствительности профиля склона к изменению склоновых параметров (Моон, 1975).

Наша идея заключается в том, чтобы отработать путь построения и решения замкнутых систем уравнений, описывающих баланс материала в конкретной точке склона (Трофимов, Московкин, 1979 в). За основу возьмем уравнение баланса материала в конкретной точке склона

$$y_1 - y_2 + y_3 = h - h_0, \quad (2.2.4-1)$$

где y_1 — количество поступающего материала из вышележащих точек, y_2^* — количество уносимого материала из данной точки, y_3 — количество материала, поступающего за счет выветривания, h — мощность выветрелого материала в данной точке, h_0 — начальная мощность материала, причем $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0, h(0) = h_0$.

Для описания процесса выветривания примем гипотезу Дж.Чанга (Chang, 1958) об экспоненциальном убывании скорости выветривания с глубиной (она используется и в модели Ф.Анерта)

$$\frac{dy_3}{dt} = B \exp(-\beta h); \quad B, \beta = \text{const}. \quad (2.2.4-2)$$

Для скорости суммарного сноса примем соотношение, аналогичное формуле Р.Суше (Souchez, 1964)

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dt} = A \sin \alpha = A i, \quad (2.2.4-3)$$

где $A = \text{const}$, $\sin \alpha = i$ – уклон в рассматриваемой точке склона.

Таким образом приходим к замкнутой системе уравнений (2.2.4-1; 2.2.4-2; 2.2.4-3). Дифференцируя уравнение (2.2.4-1) по времени, с учетом (2.2.4-3) получим

$$-A i + \frac{dy_3}{dt} = \frac{dh}{dt}. \quad (2.2.4-4)$$

Дифференцируя уравнение (2.2.4-2) по времени, выразив из него dh/dt и подставив в уравнение (2.2.4-4), придем к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} + \beta \left(\frac{dy_3}{dt} \right)^2 - A i \beta \frac{dy_3}{dt} = 0. \quad (2.2.4-5)$$

Решив его относительно dy_3/dt , получим

$$\frac{dy_3}{dt} = \frac{A i C \exp(\beta A i t)}{1 + C \exp(\beta A i t)}. \quad (2.2.4-6)$$

Из начального условия $\left. \frac{dy_3}{dt} \right|_{t=0} = B \exp(-\beta h_0)$ найдем константу интегрирования

$$C = \frac{B \exp(-\beta h_0)}{A i - B \exp(-\beta h_0)}. \quad (2.2.4-7)$$

Подставив (2.2.4-6) в (2.2.4-2), получим h

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{A i C \exp(\beta A i t)}{B (1 + C \exp(\beta A i t))} \right]. \quad (2.2.4-8)$$

Предельные значения для dy_3/dt и h равны

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy_3}{dt} = A i, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} h = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{A i}{B} \right) = \bar{h} > 0 \quad (\text{при } A i \leq B). \end{cases} \quad (2.2.4-9)$$

Таким образом, когда суммарный снос ($A i$) меньше или равен максимальной интенсивности выветривания ($B = \max B e^{-\beta h}$), развитие идет в сторону достижения динамического равновесия

$y_1 - y_2 + y_3 = \bar{h} - h_0 = \text{const}$. В противном случае ($A_i > B$) не существует выветрелого слоя ($h < 0$), что соответствует крутому осыпному склону. На установление динамического равновесия между выветриванием и денудацией указывали Ф.Анерт (Ahner 1967) и А.В.Поздняков (1976).

Если вместо гипотезы (2.2.4-2) взять линейную гипотезу убывания скорости выветривания с глубиной

$$\frac{dy_3}{dt} = k(h_{\max} - h), \quad (2.2.4-10)$$

то решая систему уравнений (2.2.4-1; 2.2.4-3; 2.2.4-10) получим

$$\frac{dy_3}{dt} = A_i - [A_i + k(h_0 - h_{\max})] \exp(-kt), \quad (2.2.4-11)$$

откуда $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy_3}{dt} = A_i$, и, имея ввиду (2.2.4-10), получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h = h_{\max} - \frac{A_i}{k} = \bar{h}. \quad (2.2.4-12)$$

Из выражения (2.2.4-12) следует, что чем меньше уклон, тем больше устанавливается мощность слоя материала h (это также справедливо и для предыдущей модели - формула (2.2.4-9)).

При $A_i > h_{\max} k$ не существует выветрелого слоя (крутой склон).

При $A_i < h_{\max} k$, также как и для предыдущей модели, устанавливается динамическое равновесие $y_1 - y_2 + y_3 = h - h_0 = \text{const} > 0$.

Рассматривая предыдущие модели, можно сделать следующий вывод: если суммарный снос не превышает максимальной скорости выветривания (которая достигается при $h = 0$), то развитие склона идет в сторону достижения динамического равновесия в каждой точке области сноса (в области транзита соотношение всегда выполняется). В области аккумуляции идет все время увеличение мощности h и для нее говорить об установлении динамического равновесия не приходится; можно только говорить о достижении предельного равновесия ($\lim_{t \rightarrow \infty} h = \text{const}$), когда уже не будет происходить никакого переноса материала.

Исследуем теперь случай, когда третье уравнение системы (2.2.4-1; 2.2.4-2; 2.2.4-3) записывается для вязкой модели течения грунта (Ahnert, 1977)

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dt} = R = Ah^\Gamma \sin \alpha, \quad (2.2.4-13)$$

где $\Gamma = \text{const}$. В этом случае система уравнений сводится к одному уравнению

$$-Ah^\Gamma \sin \alpha + B \exp(-\beta h) = \frac{dh}{dt}. \quad (2.2.4-14)$$

Стационарное состояние системы найдем из решения трансцендентного уравнения (при $dh/dt = 0$)

$$-Ah^\Gamma \sin \alpha + B \exp(-\beta h) = 0. \quad (2.2.4-15)$$

При $\Gamma > 0$ уравнение (2.2.4-15) имеет единственное решение $h = \bar{h}$.

Покажем, что это решение устойчивое. Пусть $\Gamma = 1$, тогда представляя h в виде $h = \bar{h} + h'$, где h' — малая величина, и, подставляя его в уравнение (2.2.4-14), пренебрегая членами выше второго порядка малости, получим

$$h' = C \exp[-(A \sin \alpha + \beta B \exp(-\beta \bar{h}))t], \quad (2.2.4-16)$$

и так как $A \sin \alpha + \beta B \exp(-\beta \bar{h}) > 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} h' = 0$, что и требовалось показать.

Если начальная величина мощности h_0 близка к \bar{h} , то получим следующее решение для h

$$h = (h_0 - \bar{h}) \exp[-(A \sin \alpha + \beta B \exp(-\beta \bar{h}))t] + \bar{h}. \quad (2.2.4-17)$$

При $\Gamma = 3$ (аналог вязкого течения по формуле Суше) аналогичным способом получим

$$h = (h_0 - \bar{h}) \exp[-(3\bar{h}^2 \sin \alpha A + \beta B \exp(-\beta \bar{h}))t] + \bar{h}. \quad (2.2.4-18)$$

Аналогичный результат (устойчивое решение) получим и при произвольном $\Gamma > 0$. Таким образом, при $\Gamma > 0$ устанавливается баланс материала (динамическое равновесие) в каждой точке склона, т.е. мощность выветрелого материала стремится к постоянной величине \bar{h} .

Аналогичные результаты получим при задании R (скорости сноса) по модели вязко-пластичного грунта (Ahner, 1977):

$R = \kappa(h \sin \alpha - \kappa_1)$, и при задании скорости выветривания по смешанной (комбинированной) схеме (физическое и химическое выветривание), где скорость химического выветривания задается непрерывной кусочно-гладкой функцией (Ahner, 1977)

$$\begin{cases} \frac{dy_s}{dt} = W = W_0 \left(1 + \kappa_0 \frac{h}{h_c} - \frac{h^2}{h_c^2} \right), & h \leq h_c, \\ \frac{dy_s}{dt} = W = W_0 \kappa_0 \exp[-(h-h_c)], & h > h_c. \end{cases} \quad (2.2.4-19)$$

Заметим, что в отличие от Ф.Анерта, мы в формулу для скорости физического выветривания (2.2.4-2) ввели коэффициент ρ , характеризующий быстроту затухания скорости выветривания с глубиной.

В случае, когда скорость выветривания задается по формуле (2.2.4-19) или по комбинированной схеме при существовании максимума функции W отличного от W_0 , $W > W_0$, возможны случаи существования двух устойчивых состояний.

Например, это будет иметь место при $\Gamma = 0$ и $W_0 < A \sin \alpha < W_0 \kappa_0$,

$\kappa_0 > 1$, так как прямая $R = A \sin \alpha$ в этом случае будет пересекать график функции (2.2.4-19) в двух точках \bar{h}_1, \bar{h}_2 , которые и будут стационарными состояниями уравнения $-R + W = \frac{dh}{dt}$. Стремление к тому или другому устойчивому состоянию будет зависеть от начального условия h_0 . Так как $0 < \bar{h}_1 < h_c$ и $\bar{h}_2 > h_c$, то при $0 < h_0 < h_c$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h = \bar{h}_1$, а при $h_0 > h_c$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h = \bar{h}_2$.

В настоящее время разработан математический аппарат для анализа устойчивости динамических систем при малых случайных возмущениях (Вентцель, Фрейдлин, 1970). Здесь оценивается время выхода траекторий из устойчивого состояния на границу области, а также характер этого выхода. Приложение этого аппарата при анализе устойчивости экосистем разрабатывается В.А.Светлосановым (1976). Он применим и при анализе склоновых систем. Так, например, введем в правую часть уравнения (2.2.4-14) малые случайные возмущения εW_t , где ε - малый параметр, W_t - случайный Винеровский процесс. Оценим время выхода системы из устойчивого состояния $h = \bar{h}$ на границу области $h = 0$, что

соответствует времени деградации первоначальной системы и переход ее в другую систему. Например, пологий склон, имеющий слой выветрелого материала ($h \neq 0$), при действии серии возмущений может перейти в другой тип склона — крутой склон ($h=0$), функционирование которого пойдет другим способом.

Это время находится по выражению (Вентцель, Фрейдлин, 1970; Светлосанов, 1976)

$$M_x \tau_1^\varepsilon \sim \exp \left\{ \frac{4U(0)}{2\varepsilon^2} \right\}, \quad (2.2.4-20)$$

где $U(h)$ потенциал правой части уравнения (2.2.4-14), находящийся с помощью интегрирования ее по h . Применительно к нашему случаю получим:

$$M_x \tau_1^\varepsilon \sim \exp \left\{ \left(\frac{A\bar{h}^\Gamma}{B} \sin \alpha - 1 \right) \left[\frac{2B\bar{h}}{\ln(A\bar{h}^\Gamma \sin \alpha / B)} \right] + \frac{2A}{\Gamma+1} \bar{h}^{\Gamma+1} \sin \alpha \right\} / \varepsilon^2. \quad (2.2.4-21)$$

Оценим числитель этого выражения при $\bar{h} \rightarrow 0$. После ряда упрощений, окончательно получим следующий предел $\lim_{\bar{h} \rightarrow \infty} \frac{2B}{\Gamma} \bar{h} = 0$, т.е. когда склоновая система находится в устойчивом состоянии с минимальной глубиной выветрелого слоя, необходимо и очень небольшое время для перевода ее в состояние $h=0$ (состояние деградации системы). При $\bar{h} \rightarrow \infty$ числитель выражения (2.2.4-21) также стремится к бесконечности и система при больших \bar{h} устойчива к малым случайным возмущениям. Действительно, при большой мощности выветрелого слоя материала мало вероятно его быстрое исчезновение (переход в состояние $\bar{h} = 0$).

Другой аспект анализа динамических систем может быть связан с вводом в них факторов управления. В этом случае открываются возможности решения задач оптимального управления склоновыми системами (Трофимов, Московкин, 1978 б). Факторами управления могут служить различные противозерозионные, противоэрозийные и другие мероприятия, т.е. факторы человеческой деятельности.

Делая общие выводы по второй части следует сказать, что динамические модели позволяют исследовать не устойчивость стационарно-динамические режимы склоновых систем, решать задачи на оптимальное управление, учитывать стохастический фактор и фактор запаздывания, а также определять время релаксации в

склоновых системах. Анализ различных конкретных динамических систем показал, что при постоянной интенсивности воздействию — щего фактора, благодаря наличию отрицательных обратных связей, развитие систем идет в сторону достижения динамического равновесия, что согласуется с положением общей теории систем. Концепция динамических моделей, построенная во второй части книги, является наиболее адекватным математическим (теоретическим) аппаратом теории динамического равновесия рельефа.

Часть 3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКЛОНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В этой части книги рассматриваются различные аспекты моделирования водноэрозионных процессов (гл.1), процессов, происходящих в осыпях (гл.2), и методы подобия и размерностей в моделировании склоновых процессов (гл.3).

Как отмечалось во введении, изложение носит, в основном, фрагментарный характер. Тем не менее, эта часть может представлять наибольший интерес для геоморфологов, так как изложение основывается на конкретных материалах. Необходимость подробного анализа конкретных процессов и их параметров очевидна и обусловлена построением, в будущем, детализированных системных моделей развития рельефа (склонов), формирующегося под воздействием комплекса различных факторов.

Глава I. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДНО-ЭРОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрение водно-эрозионных процессов начнем с анализа капельно-дождевой эрозии – начальным агентом смыва и разрушения почвы (§ 1). Следующими звеньями в спектре водно-эрозионных процессов являются плоскостной и мелкоручейковый смыв, но они будут рассмотрены только в аспекте взаимоотношения друг с другом и капельно-дождевому воздействию (§ 2). В заключение рассматриваются вопросы моделирования овражных процессов и систем в аспекте определения возраста оврагов, скорости роста вершины оврага и сравнительного анализа динамики овражных систем.

§ 1. Моделирование процессов капельно-дождевой эрозии

Значительное место при изучении водно-эрозионных процессов отводят капельно-дождевой эрозии, играющей решающую роль в процессе разрушения почвенной структуры. Эта роль обуслов-

денна тем, что энергия и сила падающих капель во много раз превышает соответствующие характеристики склоновых потоков благодаря большой скорости падения капель (изменяющейся от 4 до 9 м/сек при изменении размера капель от 1 до 5 мм) и быстротечности удара, длящегося тысячные и десятитысячные доли секунды. Первые исследования, так или иначе связанные с изучением процесса капельно-дождевой эрозии, были проведены еще в конце прошлого - начале нынешнего века (Bentley, 1904; Lenard, 1904; Wiesner, 1895; Worthington, 1908 и др.). Эти исследования касались изучения размеров капель, их скоростей падения, а также - удара их о поверхность жидкости. Но лишь с сороковых годов началось широкое изучение процесса капельно-дождевой эрозии, как в теоретическом, так и в прикладном плане. Этому в большой мере способствовали работы В.Эллисона (Ellison, 1944, 1946), Дж.Лоза (Lows, 1940, 1941), П.Экерна (Ekern, 1950, 1953) и др. У нас в стране в последние 15 - 20 лет стали также уделять некоторое внимание теории данного вопроса (Гаврилица, 1978, Есин, Дмитриев, 1975; Матвеев, 1963; Мирцхулава, 1970; Московкин, Гахов, 1979 а; Сластихин, 1964, 1971; Сластихин, Богданов, 1968; Сластихин, Гаврилица, 1978; Швобс, 1974 и др.). Хотя интенсивный этап изучения процесса капельно-дождевой эрозии насчитывает около 40 лет, до сих пор не существует четкой физической схемы этого процесса, даже несмотря на то, что имеются некоторые предпосылки для ее построения (для чего достаточно обратиться к работам в смежных областях по ударному воздействию капель о твердые и жидкие поверхности (Гонор, Яковлев, 1977; 1978; 1979; Перельман, Плинер, 1975; Cheng Lung, 1977; Neumann, 1969; Macklin; Mataxas, 1976 и др.)). Однако следует отметить, что моделирование удара капли о почву связано с большими дополнительными трудностями, обусловленными ее рыхлой (пористой) структурой.

В капельно-дождевой эрозии имеются два следующих основных аспекта проблемы (Московкин, Гахов, 1979 а): 1. Процесс разрушения почвенной структуры при ударном воздействии капель; 2. Процесс переноса почвы разбрызгиванием.

Второй аспект проблемы может решаться следующим образом. Нужно научиться определять количество разбрызгиваемой почвы в результате удара одной капли при данных параметрах почвы и кап-

ли, и, определяя количество капель, падающих на ту часть поверхности склона, которая вносит вклад в общий перенос почвы вниз по склону, находить расход почвы в данной точке. Расчет площади указанной поверхности может быть сделан на основе расчета траекторий разбрызгиваемых капель (Есин, Дмитриев, 1975). Определение количества разбрызгиваемой почвы в результате удара одной капли непосредственно связано с первым аспектом проблемы и должно основываться на анализе сил ударного воздействия, поверхностного натяжения и сцепления в почве. У несвязного материала силы сцепления отсутствуют и решение первого аспекта проблем отпадает. Отметим, что захват частичек почвы разбрызгиваемой каплей объясняется силами поверхностного натяжения. Теоретические исследования будут эффективнее при сочетании их с экспериментом и скоростной киносъемкой. Такие исследования можно проводить в рамках энергетического подхода (Московкин, Трофимов, 1981). Уравнение сохранения энергии запишем в виде

$$\pi d_k^2 + \frac{Mv^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + Q, \quad (3.1.1-1)$$

где d_k - диаметр капли; α - коэффициент поверхностного натяжения воды; M, v - масса и скорость падающей капли; m_i, v_i - масса и скорость отдельных частиц почвы с водой при разбрызгивании; Q - все оставшиеся виды энергии, связанные с отрывом почвенных частиц, вязкой диссипацией, поверхностным натяжением при разбрызгивании и др.

При помощи эксперимента и скоростной киносъемки можно определить m_i, v_i и рассчитать неизвестную оставшуюся энергию Q по уравнению (3.1.1-1).

Рассмотрим удар капли о твердую поверхность. При ударе капли массы M о твердую поверхность на ней остается часть воды M_0 , благодаря силам поверхностного натяжения

$$M_0 = sh\rho_k, \quad (3.1.1-2)$$

где s - площадь пятна контакта растекшейся при ударе капли с поверхностью, h - толщина пленки воды, ρ_k - плотность воды.

Энергия сил поверхностного натяжения в этом случае равна $E_n = 2\alpha s$. Считая, что разбрызгиваемые микрокапли (в коли-

честве n) имеют одинаковую скорость разлета ($V_i = u = \text{const}$) и массу ($m_i = m = \text{const}$), уравнение (3.1.1-1) запишется

$$\pi d_k^2 \alpha + \frac{\pi \rho_k}{12} d_k^3 V^2 = \frac{\pi \rho_k}{12} d_{mk}^3 u^2 n + 2\alpha s + \pi d_{mk}^2 \alpha n + Q_1, \quad (3.1.1-3)$$

где d_{mk}, n - диаметр и количество разбрызгиваемых микрокапель. Массу всех микрокапель можно представить, с учетом выражения (3.1.1-2), в виде

$$\frac{\pi}{6} \rho_k d_{mk}^3 n = \frac{\pi}{6} \rho_k d_k^3 - \frac{\pi}{4} \rho_k d_s h, \quad (3.1.1-4)$$

где d_s - диаметр пятна растекшейся на поверхности капли. Соотношения (3.1.1-3; 3.1.1-4) дадут следующее выражение для энергии Q_1

$$Q_1 = \frac{\pi}{12} \rho_k d_k^3 (V^2 - u^2) + \frac{\pi}{8} d_s^2 (\rho_k u^2 h - 4\alpha) + \pi \alpha \left[1 - \frac{d_k}{d_{mk}} - \frac{3}{2} \left(\frac{d_s}{d_k} \right)^2 \frac{h}{d_{mk}} \right]. \quad (3.1.1-5)$$

Это выражение можно записать с учетом параметра растекания $\beta = d_s/d_k$ в виде

$$Q_1 = \frac{\pi}{12} \rho_k d_k^3 (V^2 - u^2) + \frac{\pi}{8} \beta^2 d_k^2 (\rho_k u^2 h - 4\alpha) + \pi \alpha d_k^2 \left[1 - \frac{d_k}{d_{mk}} - \frac{3}{2} \beta^2 \frac{h}{d_{mk}} \right]. \quad (3.1.1-6)$$

Параметр растекания есть функция числа Вебера ($W = \rho_k d_k V^2 / \alpha$) (Cheng Lung, 1977)

$$\beta = 0,816 \left(\frac{\rho_k d_k V^2}{\alpha} \right)^{1/4}. \quad (3.1.1-7)$$

Дадим некоторые сравнительные оценки. Вычислим кинетическую энергию падающей капли:

$$E_k = 0,2617 \cdot 10^{-6} d_k^3 V^2, \quad (3.1.1-8)$$

где V измеряется в м/сек, d_k - в мм, E_k - в джоулях. При $d_{k1} = 1$ мм и $d_{k2} = 5$ мм, по экспериментальным данным для естественного дождя (Gunn, Kinzer, 1949): $V_1 = 4,03$ м/сек и $V_2 = 9,09$ м/сек, получим $E_{k1} = 4,19 \cdot 10^{-6}$ дж и $E_{k2} = 2706,126 \cdot 10^{-6}$ дж. При этих же размерах капель и $\alpha = 70$ дин/см их по-

верхностные энергии соответственно равны $E_{n_1} = 0,88 \cdot 10^{-6}$ дж, $E_{n_2} = 21,98 \cdot 10^{-6}$ дж, что составляет около 20% от кинетической энергии капли в первом случае и менее одного процента от нее во втором случае. Подсчитаем теперь отношения $E_k / 2\alpha s$. Диаметр рассчитываем через параметр растекания по формуле (3.1.1-7), тогда $2\alpha s_1 = \frac{\pi}{2} d_{s_1}^2 \alpha = \frac{\pi}{2} \beta_1^2 d_{k_1}^2 \alpha = 1,59 \cdot 10^{-6}$ гж., ($\beta_1 \approx 3,2$);

$$2\alpha s_2 = \frac{\pi}{2} d_{s_2}^2 \alpha = \frac{\pi}{2} \beta_2^2 d_{k_2}^2 \alpha = 140,5 \cdot 10^{-6} \text{ гж.}, (\beta_2 \approx 7,15).$$

Таким образом, $E_{k_1} / 2\alpha s_1 = 2,64$ и $E_{k_2} / 2\alpha s_2 \approx 19$, что составляет соответственно 38% и 5% от E_{k_1} и E_{k_2} . В общем случае отношения $E_k / 2\alpha s$ можно выразить через число Вебера по формуле

$$\frac{E_k}{2\alpha s} = 0,252 \left(\frac{\rho_k d_k V^2}{\alpha} \right)^{1/2}. \quad (3.1.1-9)$$

С увеличением диаметра капли это отношение растет. В квадратичной области сопротивления, где $V^2 \sim d_k$, получим из (3.1.1-9)

$\frac{E_s}{2\alpha s} \sim d_k$ (\sim - знак пропорциональности). Перейдем теперь к рассмотрению суммарной поверхностной энергии микрокапель. Пусть капля с диаметром $d_k = 5$ мм полностью разбрызгивается на 1000 микрокапель ($n = 1000$), тогда $d_{mk} = 0,5$ мм и $\pi d_{mk}^2 \alpha n = 219,8 \cdot 10^{-6}$ дж, то есть в 10 раз больше поверхностной энергии первоначальной капли. При $n = 125$, получим $d_{mk} = 1$ мм и $\pi d_{mk}^2 \alpha n = 109,9 \cdot 10^{-6}$ дж, то есть в два раза меньше, чем в предыдущем случае. В общем случае с учетом соотношения $d_{mk}^3 n = d_k^3$ получим

$$\pi \alpha d_{mk}^2 n / \pi \alpha d_k^2 = n^{1/3}. \quad (3.1.1-10)$$

Таким образом, с увеличением числа разбрызгиваемых капель при $d_k = \text{const}$ их суммарная поверхностная энергия растет в степени 1/3 от их числа. При ударе капель о почву рассмотренные процессы намного усложняются.

В заключение рассмотрения энергетического аспекта ударного воздействия каплей, укажем на основные пути перехода энергии при ударе капель и разбрызгивании.

I. Момент удара: энергия капли переходит в потенциальную энергию упругой деформации капли (при деформации капли происходит также изменение ее поверхностной энергии), теряется в результате вязкой диссипации и идет на разрыв структурных связей в почве.

II. Момент разбрызгивания: энергия упругой деформации идет на вязкую диссипацию и поверхностную энергию, на отрыв почвенных частиц, на образование брызг и их кинетическую энергию.

Рассмотрим силы и давления, возникающие при ударе капель (Московкин, Гахов, 1979 а). Известно, что при кратковременных ударах возникают большие силы, что следует из II закона Ньютона. На основании последнего выводятся формулы для силы удара каплей об идеально твердые поверхности

$$M \Delta V = F \Delta t. \quad (3.1.1-II)$$

Г.Гаджев (1968), используя некоторые соотношения для $\Delta V = V$ и Δt , приходит к следующей формуле для силы удара капли

$$F = 550 \frac{d_k^3}{1 + d_k^3}, \quad (3.1.1-12)$$

где F измеряется в граммах, d_k - в см. В.В.Сластихин (1971), используя то же соотношение для Δt ($\Delta t = \frac{2d_k}{(1 + d_k^3)V}$) что и Г.Гаджев и формулу для конечной скорости падения капель в виде $V = 1300 (d_k)^{1/2}$ (Сластихин, 1964), упростил формулу (3.1.1-12) и пришел к следующему выражению для силы удара капли

$$F = 550 d_k^3. \quad (3.1.1-13)$$

Формулы (3.1.1-12) и (3.1.1-13) дают близкие между собой результаты. Учитывая, что вес капли равен $G = \frac{\pi}{6} \rho_k g d_k^3$, получим с учетом формулы (3.1.1-13) следующее соотношение между F и G : $F/G = 1000$. Формулы (3.1.1-12) и (3.1.1-13) были получены довольно сложным образом. В связи с этим приведем более простой расчет силы удара, без учета коэффициента формы капли

$\lambda = 1 + d_k^3$ (Московкин, Гахов, 1979 а). Будем определять Δt приближенно по пути, равному радиусу капли и средней скорости (\bar{V}), равной половине начальной. Тогда из формулы (3.1.1-II) получим

$$F = \frac{M \Delta V}{\Delta t} = \frac{(\pi/6) \rho_k d_k^3 V}{d_k N} = \frac{\pi}{6} \rho_k d_k^2 V^2 \quad (3.1.1-14)$$

Эта формула даст немного завышенный результат, так как скорость при ударе затухает не по линейному закону, а быстрее и $\bar{V} < V/2$. Дадим сравнительную оценку результатов, полученных по формулам (3.1.1-13) В.В.Сластихина и (3.1.1-14) с экспериментальными данными И.Е.Листопада и Г.И.Чижаква (1970) (табл. 2). Для сравнения бралась следующая формула В.М.Сластихина (1971)

$$F = 0,385 \sqrt{d_k} \cdot d_k^2 V, \quad (3.1.1-15)$$

где F измеряется в граммах, d_k - в см., V - в см/сек. Как видим из таблицы 2, результаты соизмеримы: однако формула (3.1.1-14) дает более близкие к эксперименту результаты, чем формула (3.1.1-15). Наилучшее совпадение с экспериментальными данными имеет место для конечных скоростей падения капель близких к скоростям капель естественных осадков (последние цифры во втором столбце для скоростей и соответствующие цифры в четвертом столбце для силы удара (табл. 2)). Таким образом, формулу (3.1.1-14) можно рекомендовать для приближенных расчетов силы удара о твердые поверхности.

Чтобы перейти к давлению P , возникающему при ударе капли, необходимо знать площадь (которую довольно трудно определить) контакта (A) капли с поверхностью в момент удара. В гидравлической постановке эта трудность избегается косвенным путем - путем использованием формулы (3.1.1-II) и аналогией с заторможенной струей

$$P = \rho V c, \quad (3.1.1-16)$$

где c - скорость волны торможения, равная скорости звука в воде.

Таким образом, удается избежать рассмотрения площади контакта. Заметим, что из-за очень малой площади контакта при уда-

ре развиваются огромные давления, способные при многократном воздействии на нее дождевых капель, разрушать твердую горную породу.

В одной из работ (Chadigi, Payne, 1977) приведена аналогичная формула для давления, но вместо скорости c рассматривалась скорость v

$$P = \rho v^2. \quad (3.1.1-17)$$

Это давление, по-видимому, соответствует некоторому среднему давлению за весь промежуток удара (давление во время удара очень сильно изменяется). Более строго формула (3.1.1-16) выводится из уравнения состояния (адиабаты) и условий на фронте ударной волны, в случае когда угол α между фронтом ударной волны и плоскостью соударения в точке их пересечения равен нулю ($\alpha = 0$) (Перельман, Плинер, 1975). Однако в этом выводе формулы (3.1.1-16) P есть давление по периметру пятна контакта, ρ и c - плотность и адиабатическая скорость звука в невозмущенной жидкости. Давление по периметру пятна контакта (P') растет с ростом α (т.е. с увеличением пятна контакта) и достигает максимума в момент отрыва волны ($\alpha = \alpha_{кр.}$) (Перельман, Плинер, 1975). В дальнейшем, в гидродинамическом аспекте была решена нестационарная задача о прямом соударении цилиндрической капли с жесткой твердой поверхностью (Гонор, Яковлев, 1977). Результаты счета показали, что процесс удара носит волновой характер со сложным взаимодействием осевых и радиальных волн сжатия и разрежения, что приводит к возникновению обширных зон кавитации, способствующей разлету капли. Все предыдущее рассмотрение справедливо для удара о твердые поверхности; однако следует заметить, что сила и давление при ударе капель существенно зависят от характера поверхности, на которую они падают. Так, при ударе о почву следует учитывать эффекты, обусловленные ее пористой, рыхлой структурой, которые в общем случае ослабляют удар по сравнению с ударом о твердую поверхность, хотя возможны случаи сжатия до больших давлений защемленного в порах воздуха. Нам представляется, что в математической постановке задача гидродинамического удара капли о пористую поверхность должна представлять собою краевую задачу математической физики в мелкозернистой области.

Т а б л и ц а 2

Сравнение результатов расчета силы удара
капель о твердую поверхность с данными эксперимента

Диаметр, капли, мм	Конечная скорость капли, м/сек	Силы удара капли, кгс (формула 3.1.1-15)	Сила удара капли, кгс (формула 3.1.1-14)	Сила удара капли, кгс (экспери- мент)
1,0	2,4	0,00029	0,00031	0,00098
	3,14	0,00038	0,00052	0,00128
	3,7	0,00045	0,00073	0,00147
	4,1	0,0005	0,0009	0,0015
2,0	2,8	0,00193	0,00167	0,0042
	3,8	0,00262	0,00308	0,0053
	5,2	0,00358	0,00577	0,008
	5,9	0,00406	0,00743	0,0086
3,2	3,15	0,00703	0,00543	0,011
	4,4	0,00981	0,01059	0,0167
	5,9	0,01316	0,01904	0,0228
	6,7	0,01494	0,02455	0,025
	6,9	0,01539	0,2603	0,026
4,0	3,3	0,01286	0,0093	0,018
	4,6	0,01794	0,01808	0,0283
	6,1	0,02377	0,03179	0,0365
	6,85	0,02669	0,04009	0,0413
	7,3	0,02844	0,04553	0,044
	7,5	0,02922	0,048059	0,0455

Предыдущее относилось, в основном, к удару отдельных капель. При переходе к реальному дождю исследования усложняются из-за наличия его спектра. Теоретическим и экспериментальным изучением спектров осадков занимаются специалисты по физике облаков и осадков; наиболее крупная работа в этой области опубликована И.В.Литвиновым (1974). Обзор исследований по спектрам осадков, в связи с изучением процессов эрозии, приведен в работах Н.Гудзона (1974) и Г.И.Швебса (1974). Зная спектр и

Интенсивность осадков, а также формулы для кинетической энергии (3.1.1-8), силы (3.1.1-12 + 3.1.1-15) и давления (3.1.1-16; 3.1.1-17) отдельной капли, нетрудно рассчитать соответствующие суммарные характеристики для всего дождя. Полезно строить совмещенные графики спектра и указанных капельно-ударных характеристик осадков. Очень осторожно следует относиться к результатам расчета капельно-ударных характеристик по некоторому среднему диаметру капель. В этой связи следует оценивать расхождения результатов, полученных точно с учетом спектра осадков, с результатами, полученными по некоторому среднему диаметру капель. Здесь целесообразно говорить об эквивалентном по данной капельно-ударной характеристике однородном дожде, т.е. для каждого дождя с определенным спектром теоретически существует однородный дождь (дождь, состоящий из капель одного диаметра), имеющий такую же капельно-ударную характеристику как реальный дождь с определенным спектром (Московкин, Гахов, 1979б).

Важно отметить, что одна и та же суммарная капельно-ударная характеристика может быть получена при различной комбинации капель в дожде, т.е. различном спектре, а значит и различным будет количество разбрызгиваемой почвы (капельно-дождевая эрозия). Поэтому, как отмечалось выше, необходимо определять количество разбрызгиваемой почвы в результате удара отдельной капли и общее количество разбрызгиваемой почвы в результате удара отдельной капли и общее количество разбрызгиваемой почвы определять через суммирование по всем каплям. Решению этого вопроса может помочь, наряду с математическим моделированием, экспериментальное моделирование, основанное на методах подобия и размерностей, что будет рассмотрено в последней главе.

Перейдем теперь к расчету капельно-ударных характеристик дождя, с учетом его спектра, на примере кинетической энергии.

Методика расчета кинетической энергии осадков с учетом их спектра дана в работе Г.И.Швебса (1974). Ее можно упростить и конкретизировать (Московкин, Гахов, 1979 б). Все капли по размерам разбиваем на m интервалов (градаций) одинаковой длины \bar{d} . Для каждого интервала $[(i-1)\bar{d}, i\bar{d}]$ находим средний диаметр $d_i = \left(\frac{2i-1}{2}\right)\bar{d}$ и соответствующую ему конечную скорость падения капель V_i по Ганну и Кинцеру (1949). Далее, оп-

ределяем кинетическую энергию отдельной сферической , капли с параметрами d_i, V_i в джоулях по формуле (3.1.1-8). Процентное количество капель, выпавших на поверхность и заключенных в интервале $[(i-1)\bar{d}, i\bar{d}]$, обозначим через P_i , а общее количество капель, выпавших за одну минуту на площадь один квадратный метр (N), найдем по формуле

$$N = \frac{191,083 \cdot 10^6 J}{\bar{d}^3 \sum_{i=1}^m \left(\frac{2i-1}{2}\right)^3 P_i}, \quad (3.1.1-18)$$

где $191,083 = 600/\pi$, J - интенсивность дождя в мм/мин. Тогда количество капель, заключенных в рассматриваемом интервале, выразится соотношением $\frac{P_i}{100} N$ и кинетическая энергия всех капель (точнее плотность потока кинетической энергии капель) определится по формуле

$$E = 0,5J \frac{\sum_{i=1}^m (2i-1)^3 V_i^2 P_i}{\sum_{i=1}^m (2i-1)^3 P_i}, \quad (3.1.1-19)$$

где E имеет размерность дж/м²мин.

Нами (Московкин, Гахов, 1979 б) был исследован близкий к действительности (рис. 16, кривая 1) спектр осадков (близкий к спектру, приведенному в работе Н.Гудзона (1974) на стр.46, рис. 19, кривая 3 при $40 \text{ мм/час} \leq J \leq 65 \text{ мм/час}$) при $J = 1 \text{ мм/мин}$ и рассчитана таблица в следующем порядке: $0,2i$; P_i ; $(0,2i)^3$; V_i^2 ; $P_i(0,2i)^3$; $\frac{P_i}{100} N$; $E_i = E_{\kappa i} \frac{P_i N}{100}$; E_i - в процентах от $E = \sum_{i=1}^m E_i$. На основании этой таблицы строится совмещенный график кривых спектра и энергии осадков (рис. 16). Анализ кривых показывает, что все капли размером $d \leq 1,2 \text{ мм}$ дают несущественный вклад в общую энергию осадков; капли, заключенные в интервале $2,6 - 4,2 \text{ мм}$, дают около 86%; кривая энергии имеет асимметричный колоколообразный вид с максимумом в точке $d_{\max} = 3,6 \text{ мм}$, равным 11,4% от общей энергии $E = 33,323 \text{ дж}$, в то же время максимальный процент капель (7,5%) приходится на размеры $2,0 - 2,2 \text{ мм}$ ($N = 95937$). Кривые типа кривой 1 (рис. 16) могут аппроксимироваться функцией

$$P(d) = Ad^2 \exp(-\gamma d), \quad (3.1.1-20)$$

тогда кривая 2 (рис. 16) аппроксимируется функцией

$$E(d) = B d^5 \exp(-\gamma d) [1 - \exp(-\alpha d^2)], \quad (3.1.1-21)$$

так как в формуле (3.1.1-8) квадраты скоростей хорошо аппроксимируются функцией $c[1 - \exp(-\alpha d^2)]$. Максимум функции (3.1.1-20) находится в точке $2/\gamma$, а максимум функции (3.1.1-21) определится из решения трансцендентного уравнения

$$\exp(\alpha d^2) - 1 = \frac{2\alpha d^5}{\gamma d - 5}, \quad (3.1.1-22)$$

и лежит в интервале $(5/\gamma, 10/\gamma)$. Тогда близость между максимумами кривых спектра и энергии будет определяться величиной $\frac{\lambda-2}{\gamma}$ ($5 < \lambda < 10$), т.е. с увеличением γ (при стремлении максимума спектра к нулю) максимумы кривых приближаются друг к другу. Следует отметить, что расчет энергии по средневзвешенному диаметру 2,394 мм дает около 25,9 дж, а расчет по диаметру 2,712 мм, который находится из условия $\frac{6 \cdot 10^6 \text{ J}}{\pi N} = d^3$ ($N =$

1 мм/мин), приводит к более близкому к действительности результату 29,6 дж. Истинный диаметр капель эквивалентного по энергии однородного дождя равен около 3,1 мм.

При измерении спектров капель дождя с помощью фильтровальной бумаги или другим способом, определяется функция количества капель определенного размера, выпавших на 1 м^2 за единицу времени, которая и необходима для расчета кинетической энергии осадков (плотности потока энергии). Но в метеорологии всегда переходят от функции $s(d)$ к функции $\rho(d)$:

$$\rho(d) = s(d)v(d), \quad (3.1.1-23)$$

где $\rho(d)$ - количество капель в 1 м^3 воздуха, $v(d)$ - скорость падения капель в м/сек, $s(d)$ - количество капель, выпавших на 1 м^2 за 1 сек. Поэтому в целях расчета плотности потока кинетической энергии при использовании функции $\rho(d)$ следует переходить к функции $s(d)$: $s(d) = \rho(d)v(d)$. В этом случае расчет плотности потока кинетической энергии следует проводить

по формулам

$$E = \frac{0,2617}{8} 10^{-6} \bar{d}^3 \sum_{i=1}^m (2i-1)^3 \rho_i v_i^3, \quad (3.1.1-24)$$

где E - в дж/м² сек,

$$\bar{E} = \frac{60 \cdot 0,2617}{8 J} \bar{d}^3 \sum_{i=1}^m (2i-1)^3 \rho_i v_i^3, \quad (3.1.1-25)$$

где \bar{E} - в дж/м²мм. Последнюю формулу можно привести к виду

$$\bar{E} = 0,5 \left(\sum_{i=1}^m (2i-1)^3 \rho_i v_i^3 \right) / \left(\sum_{i=1}^m (2i-1)^3 \rho_i v_i \right), \quad (3.1.1-26)$$

который согласуется с формулой (3.1.1-19). В формулах (3.1.1-24 + 3.1.1-26) значения ρ_i , v_i соответствуют среднему диаметру капель $\left(\frac{2i-1}{2} \cdot \bar{d} \right)$ рассматриваемого интервала $[(i-1)\bar{d}, i\bar{d}]$. Аналогичные формулы могут быть получены и для остальных капельно-ударных характеристик дождя.

В практических целях (Московкин, Гахов, 1979'б) были построены кривые кинетической энергии однородных естественных и искусственных осадков в зависимости от их диаметра по формуле

$$\bar{E} = 0,5 V_k^2, \quad (3.1.1-27)$$

где V_k и E измеряются в м/сек и дж/м². Для естественных осадков V_k бралась для каждого диаметра капель, который изменялся с шагом 0,1 мм при $0 < d \leq 1$ и 0,2 мм при $d > 1$, по данным Ганна и Кинцера (1949). Для трех по высоте видов дождевальных установок ($h_1 = 2,5$ м; $h_2 = 2,0$ м; $h_3 = 1,5$ м), скорость падения капель находилась по формуле (Швебс, 1974)

$$V_k' = V_k \left[1 - \exp\left(-\frac{2g}{V_k^2} h\right) \right]^{1/2}. \quad (3.1.1-28)$$

Расчет показал на вогнуто-выпуклый характер кривых (рис.17), которые хорошо аппроксимируются функцией

$$\bar{E} = E_\infty [1 - \exp(-\alpha d^2)]. \quad (3.1.1-29)$$

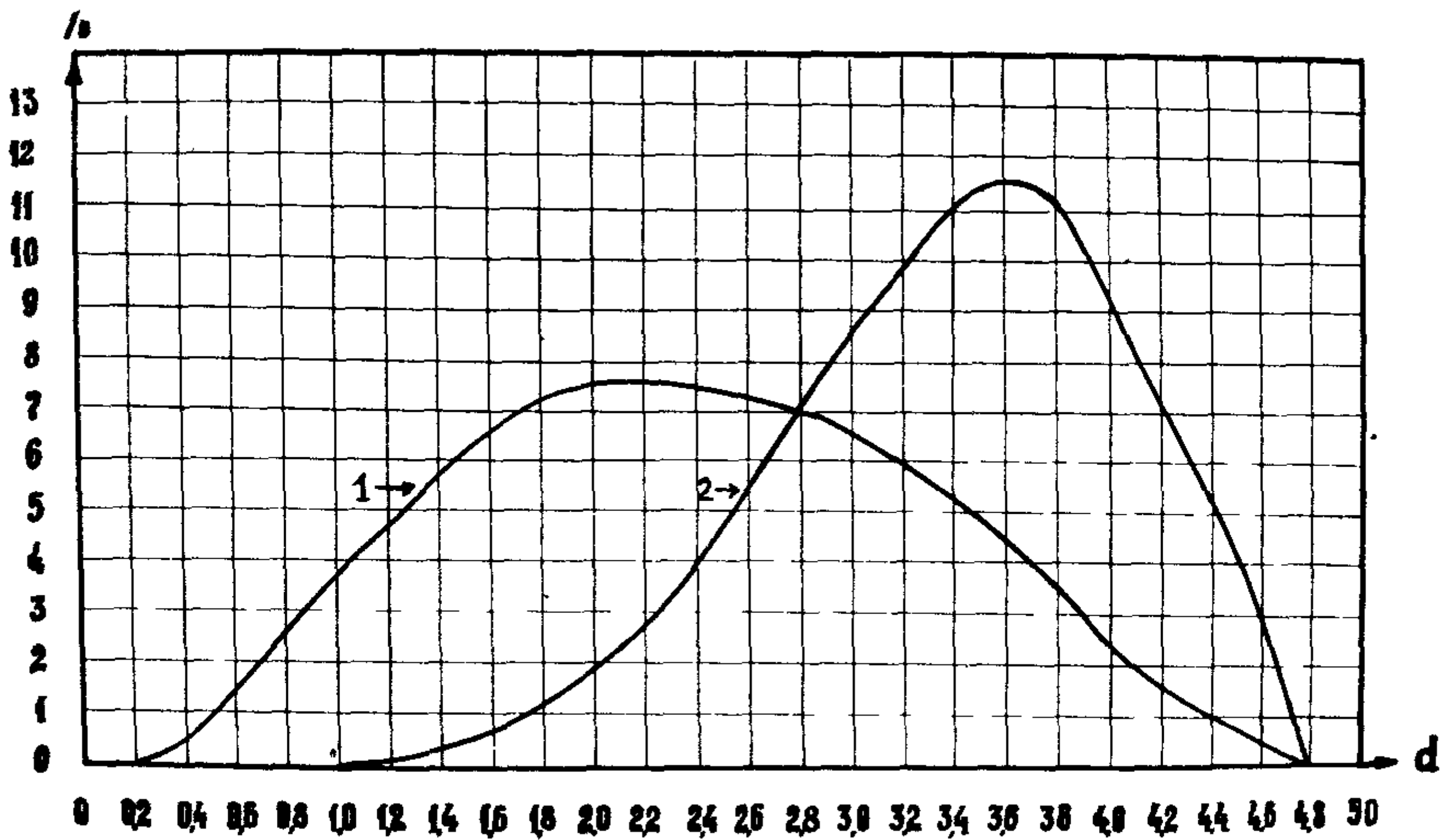


Рис. 16. Совмещенный график спектра и кинетической энергии осадков. Кривая 1 - кривая спектра; кривая 2 - кривая кинетической энергии.

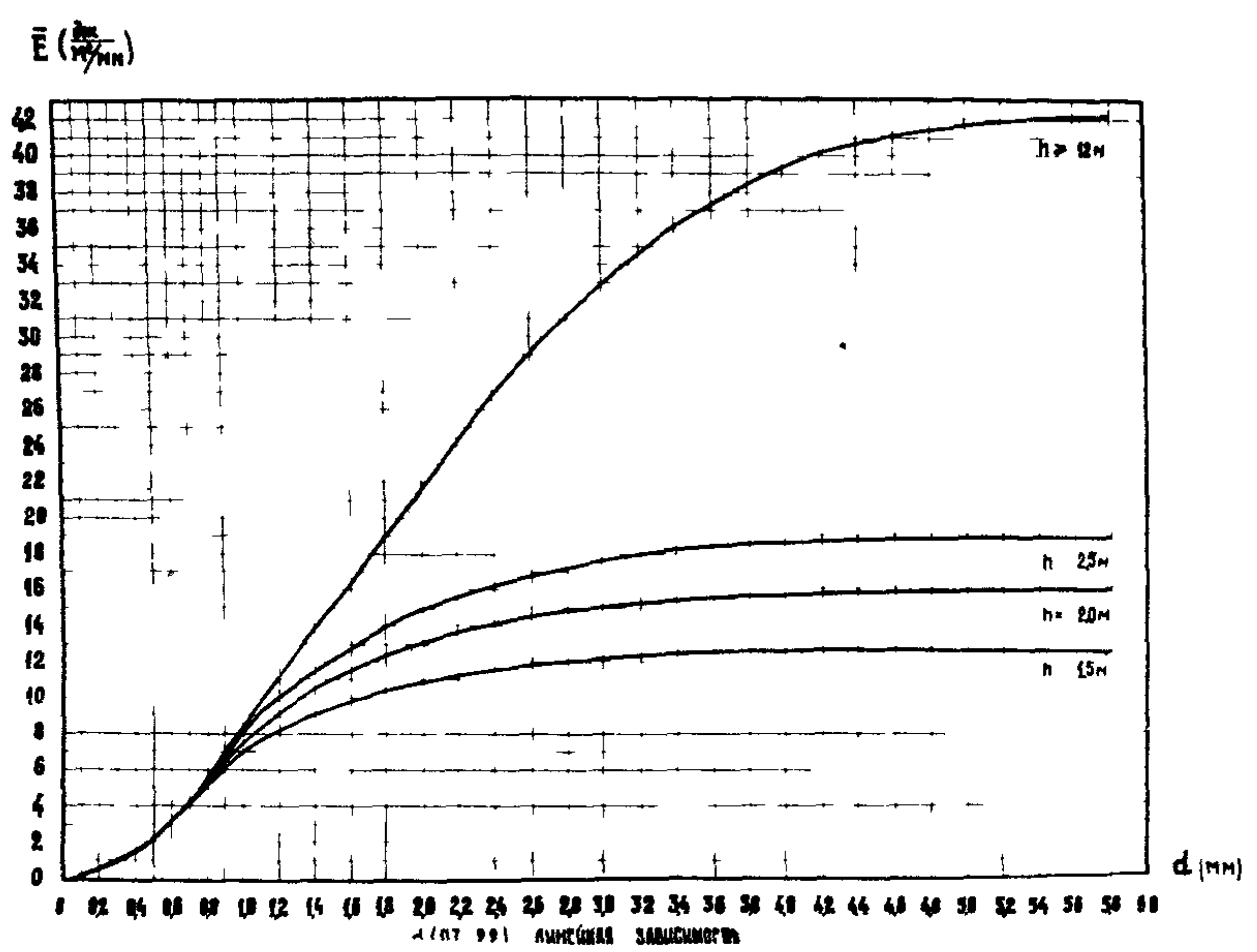


Рис. 17. Зависимость кинетической энергии искусственных осадков при различных высотах безнапорного дождевания.

Для естественных осадков максимальный уровень E_{∞} равен около $42 \text{ дж/м}^2 \text{ мм}$, а для искусственных - эти уровни соответственно равны: $E_{\infty}^1 = 19$, $E_{\infty}^2 = 16$, $E_{\infty}^3 = 13$.

Параметры $E_{\infty, \alpha}$ могут быть найдены достаточно точно методом наименьших квадратов. Приближенная оценка параметра α при $E_{\infty} = 42 \text{ дж/м}^2 \text{ мм}$ равна $\alpha = -0,164$, а при более точном $E_{\infty} = 42,2 \text{ дж/м}^2 \text{ мм}$ - $\alpha = -0,155$.

Для естественных осадков ($h \gg 11 \text{ м}$) хорошо выделяется линейная область роста \bar{E} в зависимости от d (от $0,7$ до $2,2 \text{ мм}$). Это обусловлено тем, что в данной области зависимость скорости от диаметра подчинена теоретической зависимости $V_k = b\sqrt{d}$ (квадратичная область сопротивления). Примерно до капель размером $0,8 \text{ мм}$, кривые энергии для естественных и искусственных осадков ($h \leq 2,5 \text{ м}$) совпадают. По предложенным кривым можно определять соответствие между энергией искусственных и естественных осадков. Например, при $h_1 = 2,5 \text{ м}$ уровень энергии при $d = 2,4 \text{ мм}$ равный $16 \text{ дж/м}^2 \text{ мм}$ соответствует такому же по энергии естественному дождю с диаметром капель в $1,6 \text{ мм}$. Если известны точные значения энергии, рассчитанные с учетом осадков, то по кривым можно определить диаметр капель эквивалентного по энергии однородного дождя. Кроме того при экспериментальном моделировании эрозии необходимо уметь получать такую интенсивность однородного искусственного дождя (J_h), энергия которого соответствовала бы энергии естественного дождя ($E = E J$). Такая задача может решаться с помощью соотношения $J_h = (\bar{E}/\bar{E}_h) J$, где индекс h говорит о дождевании с высоты равной h , и значения \bar{E}, \bar{E}_h определяются по предложенным кривым. Далее, ввиду того, что скорость разрушения почвы R ($\text{кг/м}^2 \text{ мин}$) в результате капельно-дождевого воздействия очень хорошо коррелирует с кинетической энергией E ($\text{дж/м}^2 \text{ мин}$), то по предложенным кривым и с помощью соотношений $R = f(E), E = \bar{E} J$ можно определять оптимальные параметры искусственного дождевания (h, d, J) с целью не допущения чрезмерного разрушения почвы, что имеет большие значение в мелиоративной практике.

§ 2. Энергетический аспект взаимоотношения интенсивностей протекания процессов плоскостного и мелкоручейкового смыва

Рассмотрим некоторые аспекты анализа плоскостного и мелкоручейкового смыва, следующего за процессом капельно-дождевой эрозией. Математическое моделирование рассмотрено в предыдущих частях. Вопросы расчета смыва и сопряженные исследования по детальному изучению механизма этих процессов интенсивно разрабатываются как у нас в стране, так и за рубежом. По расчету смыва отметим схемы Ц.Е. Мирцхулавы (1970); Г.И.Швебса (1970); схемы ГТИ, УУП (универсальное уравнение потерь почвы - США) и их модификации. В своих исследованиях мы остановимся только на энергетическом аспекте взаимоотношения плоскостного и мелкоручейкового смыва и некоторых смежных вопросах.

При оценке интенсивности протекания эрозионных процессов будем основываться на энергетических характеристиках потоков. Вначале получим соотношения, которые покажут, на сколько интенсифицируются процессы эрозии при продольной вспашке. Результаты этого рассмотрения будут в дальнейшем использованы при сравнительной оценке протекания эрозионных процессов в различных зонах делювиального склона.

Пусть имеется выравненный склон, на котором происходит плоскостной смыв. Ширина и уклон склона соответственно равны: $B = 10$ м и $\sin 10^\circ = 0,1736$. Будем рассчитывать кинетическую энергию потока на l м длины склона. Пусть толщина слоя потока в точке расчета его кинетической энергии равна $h = 3$ см, тогда его энергия определится по формуле

$$E = \frac{MV^2}{2} = \frac{\rho h l B}{2} \left(\frac{1}{n} h^{2/3} (\sin \alpha)^{1/2} \right)^2 = \frac{\rho B}{2n^2} h^{7/3} \sin \alpha, \quad (3.1.2-1)$$

где $\rho = 1000$ кг/м³ - плотность воды; M, V - масса и скорость рассматриваемого объема воды; n - параметр шероховатости. Взяв параметр шероховатости равным $n = 0,02$, получим $E = 5,657$ дж. Энергия потока на единицу его ширины будет равна $\bar{E} = E/B = 0,5657$ дж.

Пусть на рассматриваемом склоне проведена продольная вспашка с количеством борозд, равным $m = 10$, треугольного сечения

при угле в основании равнобедренного треугольника (сечения борозды) равным $\beta = 60^\circ$. Считаем, что через рассматриваемый участок склона протекает то же количество воды ($W = 0,3 \text{ м}^3$), что и в предыдущем случае, причем параметры n, α полагаем не изменившимися. Сравним энергии потоков в этих двух случаях, т.е. определим, на сколько увеличится кинетическая энергия потока при продольной вспашке (E') по сравнению с выровненным склоном

$$\gamma = \frac{E'}{E} = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \left(\frac{R}{h}\right)^{4/3}, \quad (3.1.2-2)$$

где R – гидравлический радиус треугольного сечения борозды. Для треугольного сечения

$$R = \frac{b}{4} \sin \beta, \quad (3.1.2-3)$$

где b – ширина потока в борозде.

Объем воды в каждой борозде считаем равным $w_i = \frac{W}{m} = 0,3 \text{ м}^3 / 10 = 0,03 \text{ м}^3$. Величину b найдем из уравнения

$$w_i = \frac{W}{m} = \frac{b^2}{4} \operatorname{tg} \beta, \quad (3.1.2-4)$$

откуда

$$b = \left(\frac{4W}{m \operatorname{tg} \beta}\right)^{1/2}. \quad (3.1.2-5)$$

Подставляя формулу (3.1.2-5) в (3.1.2-3), получим

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{W}{m \operatorname{tg} \beta}\right)^{1/2} \sin \beta. \quad (3.1.2-6)$$

Соотношение (3.1.2-2), с учетом формулы (3.1.2-6) и соотношения $h = W/b$, дает следующее значение для γ :

$$\gamma = \left(\frac{b}{2} \sqrt{\frac{\sin \beta \cos \beta}{mW}}\right)^{4/3}. \quad (3.1.2-7)$$

Из выражения (3.1.2-7) следует, что чем больше количество борозд (m), тем меньше γ . Для нашего случая $\gamma = 2,354$ и $E' = 13,316$ дж.

Энергия потока на единицу длины смоченного периметра (χ) всех борозд равна $\bar{E}' = E'/m\chi = 2,529$ дж; тогда по сравнению с плоскостным стоком энергия на единицу длины смоченного периметра увеличивается в следующее число раз $\lambda = \bar{E}'/\bar{E} = 2,529$ дж/0,5697 дж = 4,472. В общем случае λ будет равно

$$\lambda = \left(\frac{B}{2}\right)^{7/3} \left(\frac{\sin\beta \cos\beta}{mW}\right)^{7/6} \quad (3.1.2-8)$$

Аналогичные расчеты можно вести и через расходы воды Q ($m^3/\text{мин}$), тогда предыдущие выражения для энергии следует рассматривать, как мощности потоков N (дж/мин)

$$N = \frac{\rho}{2} QV = \frac{\rho Q}{2n^2} \left(\frac{Qn}{60B(\sin\alpha)^{1/2}}\right)^{4/5} \sin\alpha, \quad (3.1.2-9)$$

$$N' = \frac{\rho Q}{4n^2} (\sin\beta \cos\beta)^{1/2} \left(\frac{Qn}{60m(\sin\alpha)^{1/2}}\right)^{4/5} \sin\alpha, \quad (3.1.2-10)$$

$$\bar{N} = \frac{N}{B} = \frac{\rho Q}{2n^2 B} \left(\frac{Qn}{60B(\sin\alpha)^{1/2}}\right)^{4/5} \sin\alpha, \quad (3.1.2-11)$$

$$\bar{N}' = \frac{N'}{m\chi} = \frac{60^{-1/8} 2^{-5/4} \rho Q}{n^2 m} (\sin\beta)^{3/4} (\cos\beta)^{3/2} \left(\frac{Qn}{m(\sin\alpha)^{1/2}}\right)^{1/8} \sin\alpha \quad (3.1.2-12)$$

В последней формуле величина χ рассчитывалась по выражению

$$\chi = \frac{b}{\cos\beta} = \left[\frac{4^{5/3} Qn}{60m(\sin\beta)^{2/3} \tan\beta(\sin\alpha)^{1/2}} \right]^{3/8} \frac{1}{\cos\beta} \quad (3.1.2-13)$$

Множитель 60 в приведенных формулах необходим для перехода к секундному расходу воды при вычислении гидравлического радиуса. Не выписывая относительных энергетических характеристик

δ и λ , перейдем к сравнительной оценке интенсивности протекания эрозионных процессов в различных зонах делювиального склона. Исследованные нами делювиальные склоны (Урочище Гарь Кировской области) имели три характерные зоны: зона I – область плоскостного смыва; зона 2 – область мелкоручейкового смыва; зона 3 – область интенсивного линейного смыва (смыв по эрозионным бороздам) (Трофимов, Московкин, 1979 г). Морфомет-

рические и гидравлические характеристики зон и соответствующих им потоков (ширина B у всех зон одинакова) имеют следующие значения:

Зона I: $B, A_1, Q_1, n_1, \alpha_1, b_1$;

Зона 2: $B, A_2, Q_2, n_2, \alpha_2, b_2, \beta_2, m_2$;

Зона 3: $B, A_3, Q_3, n_3, \alpha_3, b_3, \beta_3, m_3$;

где A_i — длина зон; Q_i — расход воды в конечных створах зон; n_i, b_i — параметры шероховатости и коэффициенты стока зон; α_i — углы наклона зон; β_i — углы оснований треугольных сечений водороев и эрозионных борозд; $m_{2,3}$ — количество водороев и эрозионных борозд, соответственно во второй и третьей зонах.

Расходы воды в конечных створах зон в установившейся зоне склонового стока во время выпадения осадков интенсивности (мм/мин) запишем в виде

$$\begin{cases} Q_1 = 10^{-3} J b_1 B A_1 \cos \alpha_1, & (3.1.2-I4) \\ Q_2 = 10^{-3} J B (b_1 A_1 \cos \alpha_1 + b_2 A_2 \cos \alpha_2), & (3.1.2-I5) \\ Q_3 = 10^{-3} J B (b_1 A_1 \cos \alpha_1 + b_2 A_2 \cos \alpha_2 + b_3 A_3 \cos \alpha_3). & (3.1.2-I6) \end{cases}$$

Мощность потока в конечном створе зоны I (N_1) запишется по формуле (3.1.2-9) с соответствующими индексами для Q, n и α . Для второй и третьей зоны справедлива формула (3.1.2-10). Для расчета мощностей потоков на единицу длины смоченного периметра справедливы формулы (3.1.2-11) и (3.1-12). Выпишем соотно-

шения $\frac{N_2}{N_1}$ и $\frac{N_3}{N_2}$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{60^{3/10} Q_2^{3/2} n_1^{6/5} (\sin \alpha_2)^{3/4} B^{4/5} (\sin \beta_2 \cos \beta_2)^{1/2}}{Q_1^{9/5} n_2^{3/2} (\sin \alpha_1)^{3/5} m_2^{1/2}}, \quad (3.1.2-I7)$$

$$\frac{N_3}{N_2} = \left(\frac{Q_3}{Q_2} \right)^{3/2} \left(\frac{\sin \beta_3 \cos \beta_3}{\sin \beta_2 \cos \beta_2} \right)^{1/2} \left(\frac{n_3}{n_2} \right)^{-3/2} \left(\frac{m_3}{m_2} \right)^{-1/2} \left(\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} \right)^{3/4}. \quad (3.1.2-I8)$$

При $b_1 = b_2 = b_3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$; $\beta_2 = \beta_3$ из соотношения (3.1.2-18), получим

$$\frac{N_3}{N_2} = \left(1 + \frac{A_3}{A_1 + A_2} \right)^{3/2} \left(\frac{n_3}{n_2} \right)^{-3/2} \left(\frac{m_3}{m_2} \right)^{-1/2}. \quad (3.1.2-I9)$$

Перейдем к конкретным расчетам. Возьмем следующие средние типичные характеристики зон исследованных нами склонов $B = 10$ м, $A_1 = 6$ м, $\alpha_1 = 6^\circ$, $A_2 = 9$ м, $\alpha_2 = 9^\circ$, $m_2 = 26$, $\beta_2 = 45^\circ$, $A_3 = 12$ м, $\alpha_3 = 27^\circ$, $m_3 = 6$, $\beta_3 = 55^\circ$. За неимением данных берем следующие значения параметров b , n , J , одинаковые для всех зон: $b = 0,5$; $n = 0,02$; $J = 1$ мм/мин. По формулам (3.1.2-17; 3.1.2-18), с учетом формул (3.1.2-14 + 3.1.2-16), по которым $Q_1 = 29,835 \cdot 10^{-3}$ м³/мин, $Q_2 = 74,882 \cdot 10^{-3}$ м³/мин, получим $N_2/N_1 = 124,313$; $N_3/N_2 = 10,098$.

В пересчете на единицу длины смоченного периметра, получим $\bar{N}_2/\bar{N}_1 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{B}{m_2 \cdot \chi_2} = 124,313 \cdot 10/9,946 = 124,934$; $\bar{N}_3/\bar{N}_2 = \frac{N_3}{N_2} \cdot \frac{m_2 \cdot \chi_2}{m_3 \cdot \chi_3} = 10,098 \cdot 9,946 / 4,329 = 23,204$.

Из расчетов видим, как изменяются мощности потоков от зоны к зоне. Таким образом, в установившейся стадии стока, мощности потоков в конечных створах зон 2 и 3 могут в сотни и тысячи раз превышать мощность потоков плоскостного стока в первой зоне делювиального склона. Отметим, что аналогичное относительное возрастание от одной зоны склона к другой будет иметь место и для коэффициента денудации в диффузионной модели развития склона.

Следует заметить, что по результатам Г.Фостера и Л.Майера (Foster, Meyer, 1972) при уклоне склона, равном 8%, смыв по бороздам на порядок интенсивнее плоскостного. Для сравнения с мощностью естественных осадков вычислим мощность плоскостного стока на единицу его ширины по формуле (3.1.2-11)

$$\bar{N}_1 = \frac{1000 \cdot 29,835 \cdot 10^{-3}}{2(0,02)^2 \cdot 10} \left(\frac{29,835 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02}{60 \cdot 10 (\sin 6) ^{1/2}} \right)^{4/5} \sin 6 = 0,01512 \frac{\text{дж}}{\text{м} \cdot \text{мин}}$$

Так как скорость склоновых потоков порядка одного метра в секунду, то полученное значение для \bar{N}_1 приблизительно соответствует и размерности дж/м² мин, в которой измеряется кинетическая энергия осадков (точнее плотность потока кинетической энергии). В связи с тем, что интенсивные осадки имеют энергию в интервале 10 - 20 дж/м² мин, можно сделать вывод, что энергия осадков (а следовательно, и капельно-дождевая эрозия) на три порядка превосходит энергию плоскостного стока (смыва); на порядок - энергию мелкоручейкового стока (смыва); и одного по-

рядка с энергией интенсивного бороздового стока (смыва) (Трофимов, Московкин, 1979 г).

В заключение рассмотрим следующую прикладную задачу. Пусть имеется прямолинейный склон длины ℓ , на котором во время дождя происходит плоскостной смыв. Определим уклон склона, при котором будет происходить максимальный смыв со всего склона. Существование максимального смыва при определенном уклоне следует из тех соображений, что в предельных случаях: $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ смыв со склона равен нулю. Смыв со склона за единицу времени будем определять через твердый расход (q) в конечном отворе склона по формуле

$$q = \rho Q, \quad (3.1.2-20)$$

где ρ — мутность потока, Q — расход воды в конечном створе.

Для оценки мутности возьмем следующие три зависимости, близкие к формулам из гидравлики

$$\rho_1 = \frac{\kappa_1 V}{h}, \quad \rho_2 = \frac{\kappa_2 V^2}{h}, \quad \rho_3 = \frac{\kappa_3 V^3}{h}. \quad (3.1.2-21)$$

Расход воды в конечном створе, в установившейся фазе стока, как и ранее запишем по формуле (см. формулу (3.1.2-14))

$$Q = J \ell b \cos \alpha, \quad (3.1.2-22)$$

где J — интенсивность дождя в м/сек. Скорость потока как и прежде возьмем по формулам Шези и Маннинга

$$V = \frac{1}{n} h^{2/3} (\sin \alpha)^{1/2}. \quad (3.1.2-23)$$

Из соотношения $Q = Vh$ и двух последних формул определим величину h

$$h = \left(\frac{J \ell b n \cos \alpha}{(\sin \alpha)^{1/2}} \right)^{3/5}. \quad (3.1.2-24)$$

Из (3.1.2-20 + 3.1.2-24) получим три вида формул для твердого расхода в конечном створе:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \kappa_1 (J \ell b)^{4/5} n^{-6/5} (\cos \alpha)^{4/5} (\sin \alpha)^{2/5}, \quad (3.1.2-25) \\ q_2 = \kappa_2 (J \ell b)^{6/5} n^{-9/5} (\cos \alpha)^{6/5} (\sin \alpha)^{9/10}, \quad (3.1.2-26) \\ q_3 = \kappa_3 (J \ell b)^{8/5} n^{-12/5} (\cos \alpha)^{8/5} (\sin \alpha)^{6/5}. \quad (3.1.2-27) \end{array} \right.$$

Формулы (3.1.2-25 + 3.1.2-27) являются формулами типа

$$q = k(\cos\alpha)^m(\sin\alpha)^n. \quad (3.1.2-28)$$

Заменяя в формуле (3.1.2-28) косинус на синус и делая замену $\sin^2\alpha = X$, приходим к функции

$$q = k(1-x)^{m/2} x^{n/2}, \quad (3.1.2-29)$$

максимум который находится в точке $x = \frac{n}{n+m}$. Таким образом, уклон склона при котором происходит максимальный смыв определится выражением

$$\sin\alpha = \left(\frac{n}{n+m}\right)^{1/2}. \quad (3.1.2-30)$$

Итак, в первом случае $\sin\alpha_1 = (1/3)^{1/2}$ и $\alpha_1 \approx 35^\circ$, во втором и третьем случаях: $\sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = (3/7)^{1/2}$ и $\alpha_{2,3} \approx 41^\circ$. Последние два случая согласуются и с данными Хортон (Horton, 1948). По его функции этот угол оценивается в 40° .

§ 3. Моделирование овражных процессов и систем

Следующим звеном в спектре водно-эрозионных процессов стоит овражная эрозия. Разберем вначале вопрос определения возраста оврагов, а затем динамику роста вершин оврагов и некоторые аспекты сравнительного изучения оврагов (овражных систем).

В работе А.А.Клюкина и В.М.Московкина (1979) была предпринята попытка определения времени зарождения эрозионных форм по современной скорости отступления склонов. Еще В.Пенк (1961) выявил тенденцию крутых склонов к параллельному отступанию. Действительно, прослеживая различные стадии развития молодых оврагов, находящихся в сходных геолого-геоморфологических условиях, можно констатировать, что в течение какого-то времени поперечные профили форм повторяют друг друга, а их склоны, крутизной больше угла естественного откоса, отступают параллельно. В дальнейшем, по мере выработки продольного профиля и ослабления глубинной эрозии, склоны оврагов могут изменять свою конфигурацию. Начинается их выволакивание в прировочной области или у основания. Если при этом сохранились первичные элементы.

крутых склонов, отступающих параллельно, то такие овраги также могут датироваться по современной скорости денудации уступов.

Определение абсолютного возраста оврагов и балок, склоны которых сильно изменили свою первичную морфологию и не отступают параллельно, довольно затруднительно, поэтому рассматриваются только теоретически.

В основе предлагаемого метода лежит предположение о параллельности отступления крутых склонов оврагов, линейная величина которого известна и принята постоянной в течение всего этапа развития формы. Определения надежной скорости отступления склонов не простая задача. Для ее решения применяется арсенал различных методов, среди которых несомненными преимуществами обладает дендрохронологический метод (Рамзаев, 1956; Клюкин, 1977; *La Marche*, 1968 и др.). Эти преимущества вытекают из того, что исследователь сравнительно просто и быстро может получить в нескольких точках линейную скорость денудации склона за довольно продолжительное время - за несколько десятилетий, столетий и даже тысячелетий, как это, например, удалось Ла Марчу (*La Marche*, 1968). В процессе денудации происходит препарировка корней деревьев и кустарников. Отношение расстояния, измеренного по нормали от поверхности склона до корневой шейки растения с ортотропной формой роста, к возрасту растения, установленному по годичным кольцам, позволяет выявить среднегодовую скорость отступления склона в данной точке. Эта величина является результатом синтетического влияния несколько изменяющихся во времени климатических факторов на разрушение горных пород, склонов и снос продуктов выветривания склоновыми процессами. Она может быть использована для определения абсолютного возраста некоторых форм рельефа, в частности оврагов.

Овраги могут быть выработаны в коренных породах и в четвертичных рыхлых отложениях. Отступление крутых склонов эрозионных форм первой группы контролируется выветриванием, подготавливающим обломочный материал к сносу. Выветривание горных пород является также одним из существенных факторов скорости глубинной эрозии в этих оврагах (Макавеев, 1976; Клюкин, 1976). Поэтому развитие оврагов этой группы и отступление их крутых склонов происходит во времени более или менее равномерно. При надежных значениях средней скорости денудации склонов, можно получить достоверный

возраст эрозионных форм, особенно возникших в современный этап рельефообразования. Несколько в иных условиях развиваются овраги в рыхлых отложениях. Глубинная эрозия и склоновая денудация в оврагах этой группы не лимитируются слоем сильно выветрелых горных пород, а в большей степени зависят от количества жидких атмосферных осадков и величины стока. Один очень интенсивный ливень может привести к образованию в этих отложениях эрозионной формы глубиной в 1 - 2 м. Поэтому при определении возраста оврагов этой группы может иметь место некоторая ошибка. Она вытекает из возможности практически мгновенного заложения формы шириной 1 - 3 м и недоказанности положения о параллельности отступления крутых склонов, сложенных рыхлыми отложениями, за исключением, пожалуй, лессовидных суглинков, которые хорошо держат вертикальные стенки. Точность определения абсолютного возраста оврагов зависит не столько от точности отсчета современной средней скорости денудации склонов, сколько от геологического времени заложения эрозионных форм. Рассматриваемый метод наиболее применим для развивающихся форм, образовавшихся в современных природных условиях, в которых определена скорость денудации, положенная в основу расчета возраста.

Для решения поставленной задачи выбирается самое широкое поперечное сечение оврага, сохранившее первичные крутые склоны или их фрагменты. Оно обычно находится вблизи устья. Через это сечение строится поперечный гипсометрический профиль. На нем продолжают прямолинейные поверхности уступов до пересечения с поверхностью, в которую происходил первоначальный врез (рис. 18, точки А, В). Предполагается, что в общем случае скорости отступления и углы наклона левого и правого склонов оврага равны соответственно V_1, α_1 и V_2, α_2 . Далее находят точку первоначального эрозионного вреза (М). Для этого выражают возраст оврага через скорости отступления уступов:

$$T = \frac{d_1}{V_1} = \frac{d_2}{V_2} \quad \text{или} \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{V_1}{V_2} = k, \quad (3.1.3-1)$$

где d_1 и d_2 - расстояния, на которые отступили уступы оврагов за время T , а $k = \text{const}$.

Так как $d_1 = a_1 \sin \alpha_1$, $d_2 = a_2 \sin \alpha_2$, $a_1 + a_2 = \overline{AB} = b$, то подставляя указанные соотношения в выражение (3.1.3-1), по-

лучим

$$a_1 = \frac{\kappa b \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \kappa \sin \alpha_2}, \quad d_1 = \frac{\kappa b \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \kappa \sin \alpha_2} \sin \alpha_1.$$

Тогда возраст оврага находится по формуле

$$T = \frac{d_1}{V_1} = \frac{b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{V_2 \sin \alpha_1 + V_1 \sin \alpha_2}. \quad (3.1.3-2)$$

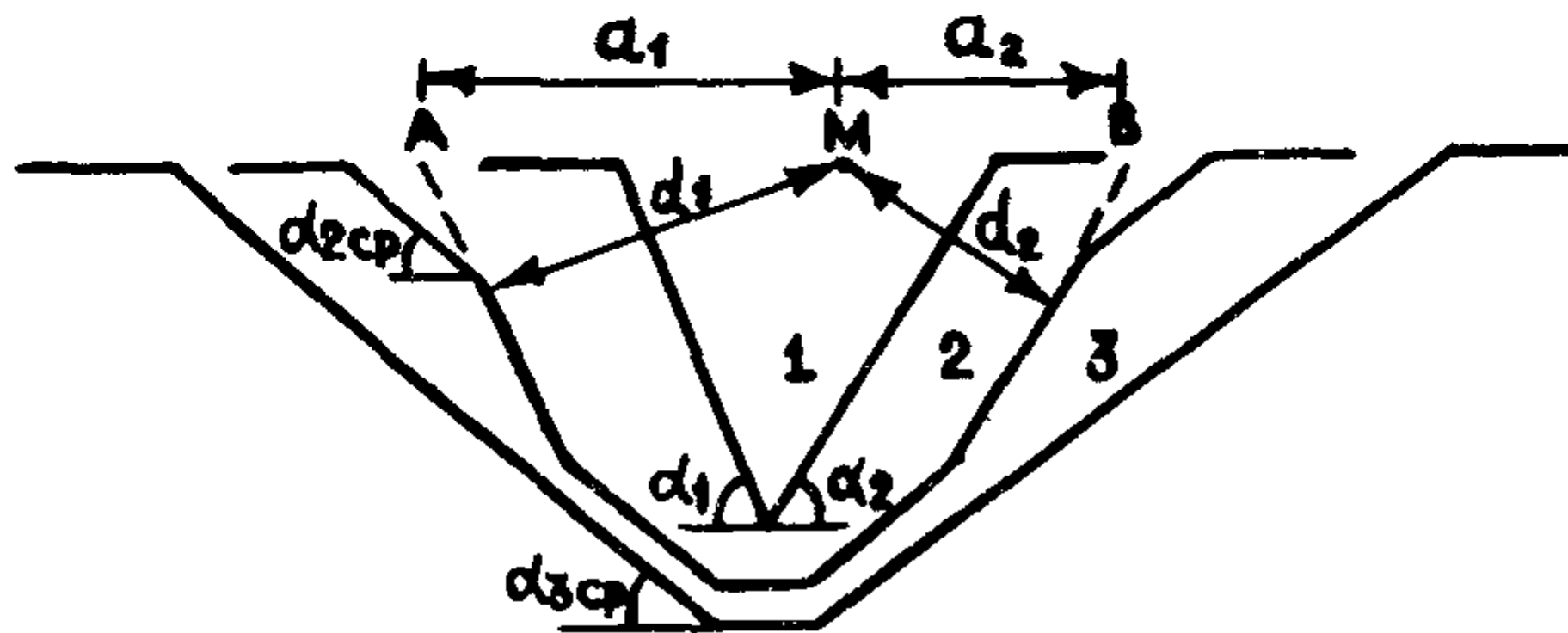


Рис. 18. Морфометрические характеристики, необходимые для определения возраста оврагов. Поперечный профиль оврага: I - первой стадии развития с параллельно отступающими крутыми склонами, 2 - второй стадии развития с частично сохранившимися параллельно отступающими крутыми склонами, 3 - третьей стадии развития с выположенными склонами.

Если склоны эрозионной формы полностью изменили свою первичную морфологию и развиваются по пути выполаживания, то в этом случае для оценки абсолютного возраста необходимо дополнительно установить скорость выполаживания склонов. Зная возраст оврагов в первых двух стадиях (T_1 и T_2) и полагая, что они предшествовали каждой зрелой эрозионной форме, попытаемся найти время заложения оврагов, находящихся в третьей стадии развития (рис. 18). Величина $T_2 - T_1$ дает время выполаживания бровок уступа при переходе от первой стадии ко второй. Обозначая средний угол наклона выположенной части склона во второй стадии развития оврага через α_{2cp} , получим начальную угловую скорость выполаживания (V_0) $V_0 = (\alpha_{2cp} - \alpha_1) / (T_2 - T_1)$. Скорость (угловая) выполаживания в общем случае запишем уравнением

$$V = d\alpha / dt = -c\alpha, \quad (3.1.3-3)$$

где α — средний уклон выполняемой поверхности в момент времени t , $c = \text{const}$.

Из уравнения (3.1.3-3) следует, что выполняемое склона происходит во времени по экспоненте

$$\alpha(t) = \alpha_1 \exp(-ct). \quad (3.1.3-4)$$

Дифференцируя уравнение (3.1.3-4) и учитывая начальное условие для угловой скорости выполнения $V(0) = V_0$, получим значение коэффициента $c = -V_0/\alpha_1$. Таким образом, выражение (3.1.3-4) запишется в виде

$$\alpha(t) = \alpha_1 \exp\left(\frac{V_0}{\alpha_1} t\right). \quad (3.1.3-5)$$

Из формулы (3.1.3-5) определим время t

$$t = \frac{\alpha_1}{V_0} \ln \frac{\alpha}{\alpha_1}. \quad (3.1.3-6)$$

Таким образом, зная средний уклон склона эрозионной формы, находящейся в третьей стадии развития ($\alpha = \alpha_{3\text{ср.}}$), ее возраст можно найти по формуле

$$T_3 = T_1 + \frac{\alpha_1}{V_0} \ln \frac{\alpha_{3\text{ср.}}}{\alpha_1}, \quad (3.1.3-7)$$

где $V_0 = (\alpha_{2\text{ср.}} - \alpha_1)/(T_2 - T_1)$.

Указанные выражения (3.1.3-3, 3.1.3-4) можно получить из следующего анализа: 1. чем больше смыв (f), тем быстрее идет выполняемое склона; 2. чем больше средний уклон (α), тем больше смыв. Математически это можно записать следующей системой уравнений

$$\frac{d\alpha}{dt} = k_1 f, \quad f = k_2 \alpha, \quad (3.1.3-8)$$

из которой и следуют указанные выражения.

Объектами для определения абсолютного возраста служили шесть небольших крутых и простых в плане современных V -образных оврагов на склонах Внутренней куэсты Крыма у г. Бахчисарая (табл. 3). Овраги 1 - 4 выработаны в маастрихтских мергелях и имеют крутизну склонов больше угла естественного откоса. Такие склоны с оголенной поверхностью, представленной глыбовым или крупнощебнистым горизонтами обломочной зоны коры выветри-

вания, отступают в оврагах у Бахчисарая со средней скоростью 5,4 мм/год (Клюкин, 1977). Эта величина установлена в 10 точках с помощью дендрохронологического метода и представительна для последних 70 лет.

Исследованные овраги характеризуются симметричным поперечным сечением и находятся в первой, отчасти во второй, стадиях развития. Углы наклона и скорости отступления их бортов одинаковы: $V_1 = V_2 = V$. В этом случае абсолютный возраст вычисляется по упрощенной формуле (3.1.3-2)

$$T = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{V}. \quad (3.1.3-9)$$

Проверка достоверности предлагаемого метода осуществлялась в нескольких оврагах, нижний возрастной рубеж которых примерно датируется археологическим методом.

Конусы выноса оврагов 1 и 2 (табл. 3) ложатся на плоскую поверхность сухой поймы Цыганской балки. Их объем (соответственно 5500 и 800 м³) в целом соответствует объему оврагов (4500 и 500 м³), что получается при учете различий плотности коренной породы и пролювиальных отложений. Аккумуляция полного объема конусов выноса на поверхности поймы свидетельствует, что коррелятные им овраги образовались в конце голоцена.

В искусственной выемке, пройденной у края меньшего конуса, видно, что под пролювием мощностью 1,0 м погребены развалины каменных построек, датированных поздним средневековьем. Следовательно, этим временем ограничивается нижний возрастной рубеж оврага № 2. Овраг № 1, расположенный по соседству в аналогичных условиях рельефа и ландшафта, но обладающий несколько большими размерами, заложен несомненно раньше оврага № 2.

Датировка оврагов по современной средней скорости отступления крутых склонов, сложенных мергелем, исчисляемой в 5,4 мм/год, указывает на абсолютный возраст около 700 лет (овраг № 1) и 450 лет (овраг № 2). Первый зародился в XIII веке, а второй - в начале XVI века, что близко к датировке археологического объекта. За время формирования оврагов средняя скорость глубинной и регрессивной эрозии составила соответственно 5,7 - 5,6 и 250 - 120 мм/год.

Характеристика оврагов в точках определения возраста

№ оврага	Местоположение	Геологическое строение	Морфометрическая характеристика						Средняя скорость соврем. отступа-ния кру-тых склонов (V), мм/год	Возраст по гео-логич. или ар-хеолог. методу	Возраст по сов-ремен-ной скоро-сти отсту-пания скло-нов
			длина, м	сред-ний уклон таль-вега, град	ширина дна, м	глуби-на, м	крутиз-на скло-нов (α), град	ширина между бров-ками (b), мм/год			
1	Левый склон Цыганской балки	Мергели маастрихта	160	30	1,0	4,0	36	13,0	5,4	совре-менный	700
2	" "	" "	55	33	0,8	2,5	40	7,5	5,4	после XII - XV вв.	450
3	Правый склон Цыганской балки	" "	200	25	0,6	2,5	41	8,2	5,4	совре-менный	510
4	" "	" "	355	16	7,5	14,0	48	43,0	5,4	совре-менный	3000
5	Правый склон балки Осипова	Суглинки щебнистые	70	17	1,0	4,0	53	6,4	20,6	после середины I тыс. до н.э.	170
6	В 1 км западнее г. Быших-Тау	Суглинки дресвяные	170	12	2,0	13,0	60	32,0	22,8	совре-менный	600

Близкими морфологическими особенностями характеризуется овраг № 3, расположенный на противоположном склоне. Ему также коррелятен современный пролювиальный конус, который ложится на плоскую пойму Цыганской балки. Возможность датировать форму с помощью археологического метода здесь отсутствует. По данным скорости современной денудации крутых склонов, сложенных маастрихтскими мергелями, овраг образовался за 500 лет (со второй половины XV века).

Значительно старше овраг № 4, который разрезает пролювиально-делювиальный шлейф мощностью 4,5 м, коррелятивный первой надпойменной террасе, датированной первой половиной голоцена. По сравнению с предыдущими формами овраг имеет более зрелый морфологический облик. Верхние части его склонов сглажены и подвержены активному плоскостному смыву, а средние сохранили крутизну больше угла естественного откоса и тенденцию к параллельному отступанию. У их подножия формируются щебнисто-глыбовые осыпи.

Расчет времени образования оврага по средней современной скорости отступания первоначальных крутых склонов, сохранившихся на его поперечном профиле, подтверждает относительный геологический возраст формы и определяет ее примерный абсолютный возраст в 3 тыс. лет (с X века до н.э.). Примерно этот же возраст должен иметь шлейф, разрезанный оврагом.

По современной скорости отступания крутых склонов удалось произвести датировку наиболее крупных осей в водосборной воронке изучаемого оврага. Они образовались за последние 200 лет, что было определено по формуле (1.3.1-2), с учетом $\delta = V / \sin \beta$, при следующих числовых параметрах этой формулы: $V = 5,4$ мм/год (скорость отступания откоса по нормали к нему), $\alpha = 33^\circ$ (уклон осыпи), $\beta = 50^\circ$ (уклон откоса), $k_p = 1,3$ (коэффициент разрыхления), $H = 6,0$ м (высота всего осыпного склона), $h = 5,5$ м (высота точки пересечения осыпи с откосом).

Возможность датировки эрозионных форм по современной скорости отступания их бортов была проверена также на двух оврагах (№№ 5 и 6), выработанных в четвертичных делювиальных суглинках.

Овраг № 5 разрезает делювиальный шлейф, сложенный верхне-четвертичными желтовато-коричневыми щебнистыми суглинками. У

бровки его правого борта сохранилась часть таврской или кизил-кобинской (вторая половина первого тысячелетия до нашей эры) гончарной печи, обнаруженной В.П.Душевским. Таким образом, овраг возник на поверхности шлейфа позднее археологического объекта и середину первого тысячелетия до нашей эры можно считать нижним возрастным рубежом заложения эрозионной формы.

С помощью дендрохронологического метода была установлена средняя скорость отступления крутых склонов, сложенных указанными выше суглинками (табл. 4). Она составила 20,65 мм/год. Эта цифра получена за интервал времени в 6 - 10 лет по двум точкам наблюдений и не претендует на достаточно точное значение. При такой линейной скорости отступления склонов для образования оврага средней ширины 6,4 м и глубиной 4,0 м достаточно 170 лет.

Овраг № 6 разрезает среднечетвертичный делювиальный шлейф, сложенный мощными (до 10 - 13 м) светло-коричневыми дресвяными суглинками с прослоями погребенных почв. Овраг имеет молодой морфологический облик и оголенные склоны, в верхней части которых над шлейфом рыхлого материала (современного делювия) сохранились уступы (40° - 80°), на которых произрастают единичные молодые кустарники с отпрепарированными корнями. С помощью дендрохронологического метода установлено, что эти уступы отступают с весьма близкой скоростью, которая за последние 10 лет составила 22,8 мм/год (табл. 4). При такой скорости денудации для образования оврага глубиной 13 м, шириной 32 м и длиной 170 м понадобилось около 600 лет.

Исходя из полученных значений возраста и параметров оврагов, выработанных в суглинках, средняя скорость глубинной и регрессивной эрозии соответственно составила 23,6 - 21,7 и 411,7 - 283,3 мм/год. Овраги, рассмотренные в качестве примеров, весьма характерны для склонов куэст Крыма и, особенно, для окрестностей населенных пунктов (Бахчисарай, Белогорск, Скалистое и др.). Выявленный возрастной интервал образования этих эрозионных форм, охватывающий последние тысячелетия, соответствует времени активного хозяйственного освоения человеком территории предгорья, интенсивного выпаса скота и рубки леса на горных склонах, что, несомненно, сказалось на усилении эрозионных процессов. Кроме того, в указанном возрастном интерва-

Современная скорость отступления крутых склонов оврагов,
 сложенных суглинками, полученная с помощью
 дендрохронологического метода

№ оврага	№ точек наблюдения	Геологическое строение	Крутизна склона, град.	Экспозиция	Проективное покрытие растит., %	Время денудации, год	Скорость отступания склона, мм/год	Средняя скорость отступания склонов, мм/год
5	I	Суглинки щебнистые делювиальные, четвертичные	47 - 50	Ю	0	6	18,3	20,65
			40 - 46	Ю	0	10	23,0	
6	3	Суглинки дресвяные делювиальные, четвертичные	67 - 70	ЮЗ	0	10	23,5	22,82
	4		43	ЮЗ	0	6	20,5	
	5		55 - 60	В	0,1	6	23,3	
	6		50	В	0,5	10	24,0	

ле имели место эпохи повышенного увлажнения в середине - конце первого тысячелетия до н.э. и с середины текущего тысячелетия до начала XX века. На Кавказе и в других горных странах Европы они сопровождались ледниковыми трансгрессиями и усилением лавинной деятельности (Тушинский, 1968).

Таким образом, при наличии данных о достоверных скоростях денудации крутых склонов, полученных за сравнительно продолжительный интервал времени, можно рассчитать абсолютный возраст молодых оврагов, крутые склоны которых отступают параллельно. Эта задача более применима для эрозионных форм, выработанных в коренных породах, так как отступление их склонов контролируется выветриванием и происходит сравнительно - равномерно во времени.

В дополнение к изложенной методике (Клюкин, Московкин, 1979) определения абсолютного возраста оврагов, укажем на один случай, который значительно увеличивает область применения метода.

Допустим, что в приустьевой части оврага, которая определяет его возраст, не сохранились фрагменты крутых склонов. Тогда, если в средней части оврага такие фрагменты сохранились, можно определить и весь возраст оврага. Для этого определяем возраст той части оврага, где это возможно (T_i) по изложенной выше методике. Далее рисуем вид оврага в плане и продолжаем линию бровок уступа оврага в приустьевую его часть (так условно бы развивался овраг при отсутствии выполаживания его склонов в приустьевой части).

Тогда возраст оврага определится по соотношению

$$T_{\text{овр.}} = \frac{B_{\text{овр.}}}{B_i} T_i, \quad (3.1.3-10)$$

где $B_{\text{овр.}}$, B_i - ширина оврагов в двух рассматриваемых точках. Этот метод применим в том случае, если развитие оврага в плане идет приблизительно симметричным параллельным образом (развитие оврага в плане представляет собой систему вложенных друг в друга подобных равнобедренных треугольников).

Перейдем теперь к вопросу расчета скорости роста вершины оврага (регрессивная эрозия), что имеет большое значение в практических вопросах использования земель.

Одним из факторов, определяющих скорость роста вершины оврага, является площадь его водосбора. За счет уменьшения этой

площади скорость роста вершины оврага имеет тенденцию к зату- ханию. Построим математическую модель этого процесса. Можно предположить, что скорость регрессивного роста оврага v прямо пропорциональна расходу жидкого стока Q в его вершине (Московкин, 1980)

$$v = \frac{d\ell}{dt} = k(Q - Q_{\min}), \quad (3.1.3-II)$$

где Q_{\min} - минимальный жидкий расход, при котором прекращается рост вершины оврага, ℓ - длина оврага, k - коэффициент, зависящий от уклона водосборной поверхности, литологии, высоты перепада в вершине оврага, поперечного профиля вершины оврага и др.

Жидкий расход выразим известной формулой (Чеботарев, 1962: Гудзон, 1974 и др.):

$$Q = 10^{-3} \zeta I F, \quad (3.1.3-I2)$$

где ζ - коэффициент стока, I - средняя интенсивность осадков для данного местоположения в мм/мин, F - площадь водосбора в m^2 ; тогда Q имеет размерность $m^3/\text{мин}$.

Заметим, что Q_{\min} соответствует минимальной площади водосбора (F_{\min}), при которой прекращается рост вершины оврага.

Без ограничения общности предположим, что водосбор имеет прямоугольную форму; тогда его площадь выразится формулой

$$F = b(L - \ell), \quad (3.1.3-I3)$$

где b - ширина водосбора, L - расстояние от устья оврага до водораздела. Обозначив $k 10^{-3} \zeta I b = A$ и подставив выражения (3.1.3-I2, 3.1.3-I3) в формулу (3.1.3-II), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения ℓ :

$$\frac{d\ell}{dt} = A \left[(L - \ell) - \frac{F_{\min}}{b} \right]. \quad (3.1.3-I4)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ell(t) = \left(L - \frac{F_{\min}}{b} \right) [1 - \exp(-At)]. \quad (3.1.3-I5)$$

Имея в виду, что $L - (F_{\min}/b) = \ell_{\max}$ есть максимальная возможная длина оврага, выражение (3.1.3-I5) перепишем в виде

$$\ell(t) = \ell_{\max} [1 - \exp(-At)]. \quad (3.1.3-I6)$$

Из выражения (3.1.3-15) найдем скорость роста вершины оврага! (Московкин, 1980)

$$v(t) = \frac{d\ell}{dt} = v_0 \exp(-At), \quad (3.1.3-17)$$

где $v_0 = A \ell_{\max}$ - начальная максимальная скорость роста, откуда декремент затухания определится выражением $A = v_0 / \ell_{\max}$.

Такой экспоненциальный характер затухания скорости роста вершины оврага будет иметь место и при произвольной форме водосбора. Аналогичный характер затухания скорости роста вершины оврага был получен с помощью эксперимента в работе Б.Ф.Косова, Е.Ф.Зориной, Н.Н.Никольской (1978).

Начальная максимальная скорость роста (v_0) может быть найдена посредством измерений расстояний от реперов, сравнения повторных топокарт и аэрофотоснимков. Для нахождения A надо знать ℓ_{\max} , которая определяется через F_{\min} . Один из эмпирических методов расчета F_{\min} был приведен в работе Г.И. Швобса (1974).

Если на склоне имеется несколько (система) оврагов, развивающихся аналогично друг другу, то можно предложить методику для нахождения параметров модели (3.1.3-16) без долговременных повторных измерений скоростей их линейного роста (Московкин, 1980). Допустим, что ℓ_{\max} и A одинаковы у всех оврагов и развитие форм взаимно не влияет на их водосборы. Последнее предполагает, что овраги находятся на достаточном расстоянии друг от друга. Постоянность A для всех оврагов предполагает расположение их, в среднем, на одинаковом расстоянии друг от друга. Считаем также, что овраги формируются в коренных породах и их абсолютный возраст может быть найден с помощью изложенного ниже метода.

Итак, если имеется система оврагов с длинами $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ и возрастaми T_1, T_2, \dots, T_n , то логарифмируя выражение (3.1.3-16) при n значениях ℓ, T , получим n выражений для декремента затухания A :

$$A = -\frac{1}{T_i} \ln\left(1 - \frac{\ell_i}{\ell_{\max}}\right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.1.3-18)$$

Эти n выражений для A можно приравнять $n(n-1)/2$ способами друг к другу

$$-\frac{1}{T_i} \ln\left(1 - \frac{\ell_i}{\ell_{\max}}\right) = \frac{1}{T_j} \left(1 - \frac{\ell_j}{\ell_{\max}}\right), \quad (3.1.3-19)$$

где $i \neq j$. Решая приближенно трансцендентные уравнения (3.1.3-19) найдем $n(n-1)/2$ значений для ℓ_{\max} , а следовательно, столько же значений для A по выражению (3.1.3-18). Если в результате этой процедуры получатся близкие значения в рядах ℓ_{\max} и A , то находим средние арифметические по формулам

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} A_i / [n(n-1)/2]; \quad \bar{\ell}_{\max} = \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} \ell_{\max i} / [n(n-1)/2]. \quad (3.1.3-20)$$

В противном случае овраги не развиваются по данной модели или не выдержаны требования (условия) методики. Поэтому, предварительно следует установить адекватность модели (3.1.3-17) действительности. Установив ее, можно определить параметры этой модели при минимальной информации, т.е. рассмотрев только два характерных оврага.

В качестве примера были взяты овраги № 3 и № 4 (табл.3) на правом склоне Цыганской балки у г.Бахчисарая, для которых ранее был определен их возраст. Овраги имели следующие характеристики: $\ell_1 = 200$ м, $T_1 = 510$ лет, $\ell_2 = 355$ м, $T_2 = 3000$ лет. При этих параметрах средние скорости роста их вершин равны $v_{1\text{ср.}} = \frac{\ell_1}{T_1} = 392,17 \frac{\text{мм}}{\text{год}}$ и $v_{2\text{ср.}} = \frac{\ell_2}{T_2} = 118,33 \text{ мм/год}$. Подставляя значения ℓ и T в уравнение (3.1.3-19), при $i = 1$ и $j = 2$, найдем $\ell_{\max} = 357,9$, откуда A по выражению (3.1.3-18) будет равно $A = 0,0016047$. Таким образом, начальная скорость роста вершины оврага равняется $v_0 = A \ell_{\max} = 574,33 \text{ мм/год}$. Ввиду погрешности исходных данных T_1, T_2 , которые являются решением другой (ранее рассмотренной) задачи, и погрешности модели, ограничимся приближенными значениями рассчитанных параметров. Тогда формулы (3.1.3-15, 3.1.3-16) примут вид (Московкин, 1980)

$$\begin{cases} \ell(t) = 358 [1 - \exp(-0,0016 t)], & (3.1.3-21) \\ v(t) = 0,57 \exp(-0,0016 t). & (3.1.3-22) \end{cases}$$

Начальная скорость роста вершин оврагов имеет порядок 0,57 мм/год, и так как длина второго оврага ($\ell_2 = 355$ м) близка к $\ell_{\max} \approx 358$ м, то он в свою очередь близок к стадии завер-

шения своего полного цикла развития в длину. Отсюда следует, что возраст порядка 3 - 3,5 тыс. лет есть время полного цикла развития оврагов правого склона Цыганской балки, цикл регрессионной эрозии которых ограничивается высоким обрывом в крепких известняках.

Заметим, что модель для скорости роста оврага вершиной может строиться и на основе уравнения аналогично уравнению деформации (размыва), рассмотренного в первой части (I.2.2-2). В этом случае вместо уравнения (3.1.3-II) получим

$$\frac{d\ell}{dt} = \varepsilon (v^2 - v_{\text{нер.}}^2). \quad (3.1.3-23)$$

Из гидравлических зависимостей получим $v \sim Q$ (где \sim - знак пропорциональности), тогда уравнение (3.1.3-22) примет вид

$$\frac{d\ell}{dt} = \varepsilon [k(L - \ell)^2 - v_{\text{нер.}}^2], \quad (3.1.3-24)$$

где $k = \text{const}$. Решение уравнения (3.1.3-24) получим в виде (при условиях $\ell(0) = 0, \ell(t = \infty) = \ell_{\text{max}}$)

$$\ell(t) = L - (L - \ell_{\text{max}}) \frac{\left[1 + \left(\frac{2L - \ell_{\text{max}}}{\ell_{\text{max}}}\right) \exp(2v_{\text{нер.}} k^{1/2} \varepsilon t)\right]}{\left[\left(\frac{2L - \ell_{\text{max}}}{\ell_{\text{max}}}\right) \exp(2v_{\text{нер.}} k^{1/2} \varepsilon t) - 1\right]} \quad (3.1.3-25)$$

Таким образом, в этой модели, затухание скорости роста оврага вершиной идет по более сложному экспоненциальному закону, чем дает модель (3.1.3-II).

Рассмотрим теперь методику сравнительного анализа динамики роста оврагов (Трофимов, Московкин, Коротина, 1980). Пусть имеются два оврага, развивающихся в разных климатических и геолого-геоморфологических условиях. Пусть также на какой-то момент времени известны скорости роста их вершин v_1, v_2 ; тогда, считая, что эти скорости в первом приближении пропорциональны объемам стока V_1, V_2 и обратно пропорциональны некоторой прочностной характеристике их пород Γ_1, Γ_2 , характеризующей сопротивляемость пород размыву в их вершинах, имеем $v_1 = \frac{V_1}{\Gamma_1} J_1, v_2 = \frac{V_2}{\Gamma_2} J_2$. Определяя объем стока в вершину оврагов по формуле $V_i = \zeta_i I_i F_i T_i$, где ζ_i - коэффициент стока, на водосборной площади F_i , I_i - средняя интенсивность осадков и снеготаяния за период времени измерения скорости (обычно за год), T_i - время действия водного потока за этот же период времени, получим

$$v_1 = \frac{\zeta_1 I_1 F_1 T_1}{\Gamma_1} J_1, \quad v_2 = \frac{\zeta_2 I_2 F_2 T_2}{\Gamma_2} J_2. \quad (3.1.3-26)$$

Рассматривая овраги, находящиеся в одинаковых климатических условиях (близко расположенные), когда $I_1 = I_2$, $T_1 = T_2$, и сравнивая скорости их роста $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\zeta_1 F_1 \Gamma_2 J_1}{\zeta_2 F_2 \Gamma_1 J_2}$, определим отношение прочностных характеристик оврагов $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{v_1 \zeta_2 F_2 J_2}{v_2 \zeta_1 F_1 J_1}$. Здесь v_i , ζ_i ,

F_i , J_i находятся с помощью натуральных исследований. Вводя относительные безразмерные характеристики $\bar{\Gamma}_{21} = \Gamma_2 / \Gamma_1$, $\bar{v}_{21} = v_2 / v_1$, $\bar{\zeta}_{21} = \zeta_2 / \zeta_1$, $\bar{F}_{21} = F_2 / F_1$, $\bar{J}_{21} = J_2 / J_1$, последнее соотношение перепишем в виде

$$\bar{\Gamma}_{21} = \bar{\zeta}_{21} \bar{F}_{21} \bar{J}_{21} / \bar{v}_{21}. \quad (3.1.3-27)$$

При равенстве площадей водосборов и их уклонов $\bar{F}_{21} = \bar{J}_{21} = 1$, имеем $\bar{v}_{21} = \bar{\zeta}_{21} / \bar{\Gamma}_{21}$ и если $\bar{v}_{21} > 1$, то отсюда следует, что $\bar{\zeta}_{21} > \bar{\Gamma}_{21}$ (отношение коэффициентов стока больше, чем отношение сопротивляемостей пород размыву). При $\bar{v}_{21} > 1$ в большинстве случаев $\bar{\zeta}_{21} < 1$, так как вторые породы более рыхлые и коэффициент стока на них меньше. Таким образом, отсюда следует, что $\bar{\Gamma}_{21} < \bar{\zeta}_{21} < 1$, т.е. если скорость второго оврага больше, чем у первого, то сопротивляемость размыва у него соответственно меньше при $\bar{F}_{21} = \bar{J}_{21} = 1$.

Далее, с помощью соотношения $\bar{v}_{21} = \frac{\bar{\zeta}_{21}}{\bar{\Gamma}_{21}} \bar{F}_{21} \bar{J}_{21}$, которое следует из формулы (3.1.3-27) можно выявлять влияние отдельных факторов на скорость роста оврага. Например, при одинаковых свойствах подстилающей поверхности водосборов и их площадей $\bar{\zeta}_{21} = \bar{\Gamma}_{21} = \bar{F}_{21} = 1$, получим $\bar{v}_{21} = \bar{J}_{21}$, т.е. отношение скоростей роста оврагов равно отношению уклонов их водосборов. На примере овражных систем Ульяновского Поволжья (Трофимов, Московкин, Коротина, 1980), находящихся в разных литологических условиях, определялась относительная сопротивляемость пород размыву по формуле (3.1.3-27) при известных значениях v , F , J без учета коэффициента стока (табл. 5 а, б) Были получены следующие их значения:

Средняя прирост оврагов (м) в различных горных породах Ульяновской области в бассейнах рек Бараша, Свяга и Приволжской полосе (при прочих одинаковых условиях)

Литологические комплексы	Количество наблюдений	Г о д ы													
		1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975		
Грубоблочный делювий верхне-меловых пород	4	3,4	2,3	3,3	3,28	5,3	3,2	5,2	3,3	0,0	3,2	3,2	2,4		
Делювиальные суглинки	5	7,8	2,1	2,3	2,04	3,9	3,2	3,9	2,2	0,0	1,9	1,9	1,6		
Песчаный аллювий	2	3,05	2,7	2,7	2,8	2,8	2,6	3,3	2,3	0,0	2,3	2,3	2,0		
Палеогеновые пески	3	3,0	2,2	3,3	4,1	3,7	1,6	2,5	1,8	0,0	2,1	1,8	1,1		
Палеогеновые песчаники	1	0,3	0,2	0,3	0,5	0,7	0,6	0,9	0,4	0,0	0,5	0,6	0,3		
Нижнемеловые глины	13	2,2	1,2	1,3	1,1	2,6	1,7	2,3	1,1	0,0	0,9	0,8	0,6		
Верхнемеловые мергели и мел	5	0,8	0,5	0,7	0,8	2,0	1,2	1,9	0,7	0,0	0,8	0,7	0,45		

Средний прирост оврагов (м) в различных горных породах Ульяновской области в бассейнах рек Бараша, Свияга и Приволжской полесе (при прочих одинаковых условиях)

Литологические комплексы	Количество наблюдений	Г о д ы													
		1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975		
Грубоблочный делювий верхне-меловых пород	4	3,4	2,3	3,3	3,28	5,3	3,2	5,2	3,3	0,0	3,2	3,2	2,4		
Делювиальные суглинки	5	7,8	2,1	2,3	2,04	3,9	3,2	3,9	2,2	0,0	1,9	1,9	1,6		
Песчаный аллювий	2	3,05	2,7	2,7	2,8	2,8	2,6	3,3	2,3	0,0	2,3	2,3	2,0		
Палеогеновые пески	3	3,0	2,2	3,3	4,1	3,7	1,6	2,5	1,8	0,0	2,1	1,8	1,1		
Палеогеновые песчаники	1	0,3	0,2	0,3	0,5	0,7	0,6	0,9	0,4	0,0	0,5	0,6	0,3		
Нижнемеловые глины	13	2,2	1,2	1,3	1,1	2,6	1,7	2,3	1,1	0,0	0,9	0,8	0,6		
Верхнемеловые мергели и мел	5	0,8	0,5	0,7	0,8	2,0	1,2	1,9	0,7	0,0	0,8	0,7	0,45		

$$\frac{\Gamma_{\text{грубообл. жел.}}}{\Gamma_{\text{жел. сугл.}}} \approx 1,25; \quad \frac{\Gamma_{\text{грубообл. жел.}}}{\Gamma_{\text{песч. алл.}}} \approx 2,1; \quad \frac{\Gamma_{\text{жел. сугл.}}}{\Gamma_{\text{палеог. пески}}} \approx 0,87;$$

$$\frac{\Gamma_{\text{жел. сугл.}}}{\Gamma_{\text{пест. алл.}}} \approx 1,68; \quad \frac{\Gamma_{\text{жел. сугл.}}}{\Gamma_{\text{нижнем. гл.}}} \approx 0,4; \quad \frac{\Gamma_{\text{палеог. пески}}}{\Gamma_{\text{нижнем. гл.}}} \approx 0,5;$$

$$\frac{\Gamma_{\text{нижнем. гл.}}}{\Gamma_{\text{песч. алл.}}} \approx 4,2; \quad \frac{\Gamma_{\text{палеог. песч.}}}{\Gamma_{\text{верхнем. мерг.}}} \approx 1,35; \quad \frac{\Gamma_{\text{верхнем. мерг.}}}{\Gamma_{\text{песч. алл.}}} \approx 16,283.$$

$$\frac{\Gamma_{\text{нижнем. гл.}}}{\Gamma_{\text{верхнем. мерг.}}} \approx 0,258; \quad \frac{\Gamma_{\text{палеог. песч.}}}{\Gamma_{\text{песч. алл.}}} \approx 21,98;$$

Это позволяет расположить рассматриваемые породы в ряд от менее прочных к более прочным: песчанистый аллювий, делювиальный суглинок, грубообломочный делювий верхнемеловых пород, палеогеновые пески, нижнемеловые глины, верхнемеловые мергели и мел, палеогеновый песчаник. Наиболее прочный палеогеновый песчаник приблизительно в 22 раза прочнее наименее прочного песчанистого аллювия.

Г л а в а 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ПРОИСХОДЯЩИХ В ОСЫПЯХ

Проблемы развития осыпных склонов в целом были рассмотрены ранее в связи с кинематическими (гл. 3, ч. I) и динамическими (ч. 2) моделями. Рассмотрим вопросы моделирования движения обломков по поверхности осыпи, их дифференциацию (§ I) и методические вопросы гранулометрического анализа осыпного материала (§ 2).

§ I. Моделирование процессов движения и дифференциации обломков в осыпях

В литературе встречается большое количество работ, отмечающих хорошую дифференциацию обломочного материала в осыпях; имеется также немало работ, в которых делается попытка количественной оценки этой дифференциации и выяснение причин. Обзор таких работ дан А.М.Трофимовым (1974), А.М.Трофимовым и В.М.Московкиным (1977), И.Стазамом (Statham, 1976) и др. Физическая теория процесса дифференциации обломков обсуждалась в ряде работ (Kirkby, Statham, 1975; Statham, 1976; Трофимов, Мос-

ковкин, 1977). В первых двух работах указывалось, что мелкие обломки подвержены бóльшему сопротивлению со стороны шероховатостей осыпи, чем более крупные, а, следовательно, они имеют и меньший путь пробега по осыпи. Стазам (Statham, 1976) изучал дифференциацию обломочного материала на двух осыпях Западной Шотландии и получил линейную связь распределения размера обломков от расстояния вниз по осыпи (коэффициенты корреляции $r_1 = 0,77$ и $r_2 = 0,35$). Лабораторное моделирование аккумуляции осыпного материала привело фактически к более сильным связям (Kirkby, Statham, 1975). Дифференциация обломков ухудшается в случае, когда на процессы осыпания накладываются и другие процессы (оползание и обваливание масс, снежные и грязевые лавины и др.). На отсутствие дифференциации в осыпях склонов Скалистых гор указывалось в работах Лакмана (Luskman, 1971) и Гарднера (Gardner, 1968). То же самое отмечалось на некоторых осыпных склонах Тасмании (Caine, 1967) и Исландии (Thognes, 1971). В работе Бонеса (Bones, 1973) показано, что исчезновение дифференциации обломочного материала на осыпях обусловлено такими процессами, как боковая эрозия, ведущая к оползанию обломочного материала, сток талых вод, грязевые лавины (сели) и т.д.

Для нахождения зависимости длины пробега обломков по осыпи от его диаметра и высоты падения с уступа Киркби и Стазам (Kirkby, Statham, 1975) записывают уравнение движения обломка

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin \beta - \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \Phi_{Md}) \quad (3.2.I-1)$$

и длину пробега находят из условия $v(s) = 0$; при этом начальное условие бралось в виде

$$v(s=0) = (2gh)^{1/2} \sin \beta. \quad (3.2.I-2)$$

Экспериментальные исследования этих авторов показали, что тангенс динамического угла трения, в определенном интервале размеров обломков, зависит от отношения d'/d^*

$$\operatorname{tg} \Phi'_{Md} = \operatorname{tg} \Phi_0 + k \frac{d}{d^*}, \quad (3.2.I-3)$$

где d^* - диаметр движущегося обломка, d - диаметр обломков, слагающих осыпь. В экспериментах $\operatorname{tg} \Phi_0$ зависел от соотношения

малой и большой осей обломков (c/b). Так при $c/b = 0,6 + 0,8, \text{tg } \Phi'_{Md} = 0,2 + 0,85 d/d^*$, а при $c/b = 0,4$ т.е. для обломков, которые хуже катятся по осыпи, $\text{tg } \Phi_0$ соответственно больше $\text{tg } \Phi'_{Md} = 0,8 + 0,85 \frac{d}{d^*}$. Учитывая, что формула для силы трения качения имеет вид $F_{\text{тр. кач.}} = \frac{2mg \cos \beta}{d^*} K_{\text{тр. кач.}}$, где m — масса обломка, $K_{\text{тр. кач.}}$ — коэффициент трения качения (Кошкин, Ширкевич, 1974), то можем предположить, что в формуле (3.2.1-3) $\text{tg } \Phi_0$ обусловлен силой трения скольжения, а член $\kappa \frac{d}{d^*}$ — силой трения качения. Длина пробега определится из выражения (3.2.1-1 + 3.2.1-3) (Kirkby, Statham, 1975)

$$l = h \sin^2 \beta / [\cos \beta (\text{tg } \Phi_0 + \kappa \frac{d}{d^*}) - \sin \beta]. \quad (3.2.1-4)$$

В экспериментах этих авторов κ изменялось в пределах $0,25 + 0,8$, причем малые значения для κ соответствовали худшей дифференциации обломков. Нами, независимо от этих авторов, была получена формула для длины пробега обломка по осыпи, с учетом только силы трения качения, которая совпадала с формулой (3.2.1-4), если в ней положить $\text{tg } \Phi_0 = 0$ (Трофимов, Московкин, 1977).

Теоретически очень хорошая дифференциация возникает в случае, если с высотой по уступу увеличивается диаметр падающих обломков,

$$d^* = f(h), \quad (3.2.1-5)$$

где $f(h)$ — возрастающая функция. Подставляя $h = f^{-1}(d^*)$ в (3.2.1-4) и учитывая, что $d = d^*$, придем к следующей функции распределения обломков по осыпи

$$d(l) = f\left\{[\cos \beta (\text{tg } \Phi_0 + \kappa) - \sin \beta] l / \sin^2 \beta\right\}. \quad (3.2.1-6)$$

Из (3.2.1-6) видим, что при линейной функции (3.2.1-5) имеет место линейная зависимость диаметра обломка от расстояния по осыпи.

Рассматривая движение индивидуального обломка по осыпи с линейной по ней функцией распределения обломков $d(s) = ms + n$, и подставляя это выражение в модель (3.2.1-1 + 3.2.1-3), получим следующее выражение для длины пробега обломка и квадрата его

скорости

$$\ell = \left\{ d^* (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{\kappa \eta}{d^*} \cos \beta) + \left[(d^*)^2 (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{\kappa \eta}{d^*} \cos \beta)^2 + 2h \sin^2 \beta \cos \beta m \kappa \right]^{1/2} \right\} / m \kappa \cos \beta, \quad (3.2.1-7)$$

$$v^2(s) = 2g (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \varphi_0 - \kappa \frac{\eta}{d^*} \cos \beta) s - \frac{g \kappa m \cos \beta}{d^*} s^2 + 2gh \sin^2 \beta. \quad (3.2.1-8)$$

Выражение (3.2.1-8) в зависимости от знака первого члена дает два вида зависимости скорости от расстояния: 1. при $\sin \beta - \cos \beta \times \operatorname{tg} \varphi_0 - \kappa \frac{\eta}{d^*} \cos \beta > 0$ максимум скорости достигается во внутренней точке (\bar{s}) отрезка $[0, \ell]$: $v(\bar{s}) = v_{\max} > v_0 = (2gh)^{1/2} \sin \beta$, где

$$\bar{s} = \left(\left[\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{\kappa \eta}{d^*} \cos \beta \right] d^* \right) / m \kappa \cos \beta; \quad (3.2.1-9)$$

2. при $\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \varphi_0 - (\kappa \eta / d^*) \cos \beta < 0$ функция $v(s)$ монотонно убывает от v_0 до нуля. Таким образом, существует критический диаметр движущегося обломка $d^* = \frac{\kappa \eta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi_0}$, разделяющий два различных типа движения.

Переходя к дифференциации обломков по осыпи, заметим, что в природе обычно не существует четкой зависимости (3.2.1-5). Поэтому рассмотрим случай, когда обломки разных размеров могут падать с любых высот уступа. Для расчетов привлечем модель (3.2.1-1 + 3.2.1-3) с параметрами, близкими к параметрам лабораторных исследований Киркби и Стазама: $\operatorname{tg} \varphi'_m = 0,2 + 0,85 \frac{d}{d^*}$; $\beta = 20^\circ$; $d = 6$ мм (предполагается, что первоначальная осыпь сложена однородным материалом); $H = 100$ см - высота уступа. На уступе возьмем 10 отметок высот (через 10 см), с которых падают обломки диаметров ($d^* = 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$ мм). На рисунке 19 показаны кривые, рассчитанные по формуле (3.2.1-4) и соответствующие различным отметкам высот

$$\ell = 0,117 h d^* / (0,4792 - 0,1541 d^*). \quad (3.2.1-10)$$

Цифровой материал, по которому строились кривые, сведен в табл. 6. Данный модельный склон соответствует реальному склону со следующими характеристиками: $h = 10$ м, $d = 6$ см, $d^* = 6$ см и да -

лее через 3 см до 30 см., шаг отметок высот на уступе равен 1 м.

Критический диаметр, когда $l = \infty$ равен $d_{кр.} = 31$ мм и является асимптотой всех кривых. Все поле точек в плоскости (d^* , l) лежит между осью ординат ($l = 0$) и кривой, соответствующей высоте уступа $h = 100$. Некоторая средняя кривая соответствует средней высоте $\bar{h} = 50$ см и описывается уравнением

$$l = 5,85 d^* / (0,4792 - 0,1541 d^*). \quad (3.2.I-II)$$

Эта функция, в которой теперь следует убрать звездочки над d , и будет функцией распределения обломков по осыпи. Из рисунка 19 видим, что поле точек тем уже, чем меньше по высоте область уступа, с которой падают обломки. Кроме того,

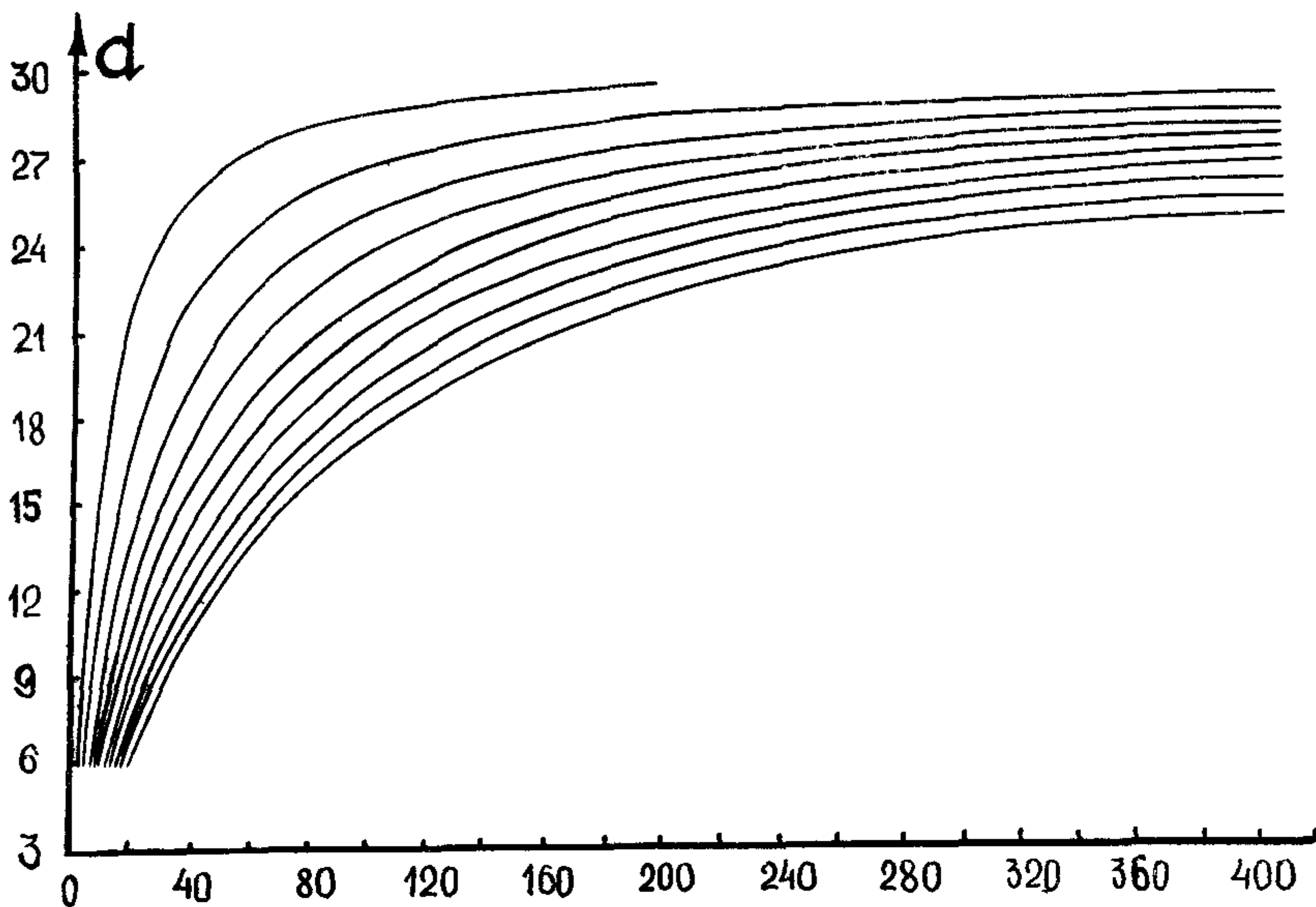


Рис. 19. Кривые, рассчитанные по формуле (3.2.I-4) и соответствующие различным отметкам высот (объяснения даны в тексте).

при больших высотах (h) кривые расположены ближе друг к другу, чем при малых, т.е. преимущественное падение обломков с высоких областей уступа улучшает дифференциацию обломков. При выводе формул (3.2.I-10, 3.2.I-II) предполагалось, что осыпание первоначально происходит на однородную поверхность ($d = 6$ мм).

В дальнейшем, после установления дифференциации обломков (3.2.1-10), уравнение (3.2.1-1) перейдет в уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{ds} = g \left\{ \sin \beta - \cos \beta [\operatorname{tg} \Phi_0 + \kappa cs / (a + bs) d^*] \right\}, \quad (3.2.1-12)$$

где a , b , c - параметры из формулы (3.2.11): $a = 5,85$ см; $b = 0,1541$; $c = 0,4792$ см. Решая уравнение (3.2.1-12), с учетом $v(\ell) = 0$, $v(0) = (2gh)^{1/2} \sin \beta$, найдем зависимость диаметра движущегося обломка (d^*) от длины пробега (ℓ)

$$d^* = \left(\frac{g\kappa c}{b^2} a \cos \beta \ln \left(\frac{a}{a + b\ell} \right) + \frac{g\kappa c}{b} \cos \beta \ell \right) / \left[\ell (g \sin \beta - g \cos \beta \operatorname{tg} \Phi_0) + gh \sin^2 \beta \right]. \quad (3.2.1-13)$$

После подстановки всех значений параметров, получим

$$d^* = \left(92556,6 \ln \left(\frac{5,85}{58,5 + 0,1541\ell} \right) + 2438,24\ell \right) / (151,17\ell + 114,78h). \quad (3.2.1-14)$$

При $h = 50$ см и для длин пробега предыдущего расчета (табл.6) получим следующие значения d^* (табл. 7). Для сравнения в табл.7 даны значения d^* предыдущего расчета (табл. 6, рис. 19). Из таблицы 7 видно, что, например, при $d^* = 2,4$ см длина пробега обломка по осыпи, имеющей дифференциацию обломков (формула (3.2.1-14) уменьшается в 3,6 раза по сравнению с однородной первоначальной осыпью, а при $d^* = 2,7$ см длина пробега уменьшается примерно в 6 раз. Таким образом, область распространения обломков вниз по осыпи намного сокращается. Это, видимо, приводит к ухудшению дифференциации обломков, а также к изменению формы поверхности осыпи. В данном расчете (табл. 7) приблизительно с $\ell = 20$ см начинает сказываться тормозящее действие эффекта дифференциации обломков на движущиеся индивидуальные обломки по сравнению с однородной осыпью, что и приводит к сокращению области их распространения. В заключение отметим, что для прогноза будущей дифференциации обломков по осыпи необходимо знать исходную дифференциацию и закон осыпания обломков с уступа (3.2.1-5).

Т а б л и ц а 6

Длина пробега обломка по осыпи в зависимости от высоты падения и диаметра обломка, рассчитанная по формуле (3.2.1-10)

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,6	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2	18
0,9	3,1	6,2	9,3	12,4	15,5	18,6	21,7	24,8	27,9	31
1,2	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2	48
1,5	7,1	14,2	21,3	28,4	35,5	42,6	49,7	56,8	63,9	71
1,8	10,5	21,0	31,5	42,0	62,5	63,0	73,5	84,0	94,5	105
2,1	15,7	31,4	47,1	62,3	78,5	94,2	109,3	125,6	141,3	157
2,4	25,7	51,4	77,1	102,8	128,5	154,2	179,9	205,6	231,3	257
2,7	50,0	100,0	150,0	200,0	250,0	300,0	350,0	400,0	450,0	500
3,0	205,3	410,6	615,9	821,2						

Т а б л и ц а 7

Диаметр движущегося обломка, рассчитанный по формуле (3.2.1-14) в зависимости от длин пробега, взятых из табл.6 при $h = 50$ см. (в третьем столбце для сравнения приведены данные для диаметра из табл.6)

l	d^*	d^* (табл.4)
9,0	0,314	0,6
15,5	0,610	0,9
24,0	1,400	1,2
35,5	2,300	1,5
52,5	3,500	1,8
78,5	9,700	2,1
128,5	7,000	2,4
250,0	9,700	2,7

§ 2. К методике гранулометрического анализа осыпного материала

Перейдем теперь к вопросам гранулометрического анализа осыпного материала. В дополнение к существующей методике отбора проб на грансостав на каждом метре осыпи (Трофимов, 1974), мы предлагаем отбирать в этих же точках пробы и в глубину, с помощью проделывания шурфов, через каждые 0,5 или 1,0 м. Такой пространственный аспект изучения осыпных отложений позволяет привязаться ко времени, т.е. к динамике накопления отложений, так как в каждом вертикальном разрезе грансостав изменяется с глубиной, что является следствием его разновозрастности в этом направлении (по глубине). Такие эпизодические и не планомерные исследования проводились, например, при изучении русловых отложений (Пашинский, 1968). В этой работе грансостав изучался на поверхности и на глубинах 0,5 и 0,7 м. С глубиной доля мелких фракций возрастала.

В случае, если осыпь не однородна по ширине, то целесообразно изучать грансостав и в этом направлении. Пространственный (трехмерный) гранулометрический анализ осыпного материала наиболее полно будет характеризовать его структуру и позволит построить изоповерхности, которые будут соответствовать обломкам одинакового диаметра (медианного или средневзвешенного).

В вертикальном разрезе осыпного тела эти изоповерхности перейдут в изолинии. Отметим, что изменчивость грансостава селевых и осыпных отложений в плане (построение изогран — изолиний среднего диаметра обломков) рассматривалась в работе П.В. Ковалева и А.П. Ковалева (1978).

С другой стороны, возникают трудности при проведении гранулометрического анализа осыпей горных и аридных областей, имеющих в спектре обломков определенную часть глыбового материала, размером порядка десятка сантиметров (далее под спектром обломочного материала будет понимать функцию распределения обломков по размерам в абсолютных или процентных единицах). Существующие методы гранулометрического анализа в основном направлены на изучение крупнообломочного материала осыпей размером до 10 см. (Бутзков, Дедков, 1971; Трофимов, 1974). Распределение

обломков в таких осыпях (спектр обломочного материала) обычно одномодальное, в отличие от осыпей горных склонов, для которых характерны бимодальные и более сложные распределения с выраженной обогащенностью крупных фракций (вторая и более высокие моды). Вторая мода в глыбовой части спектра менее выражена и связана с другим механизмом образования обломков и их транспортировки. Это может быть обусловлено различными процессами выветривания, приводящими к неравнозначным отдельностям, а также обваливанием, камнепадами и другими процессами массового движения материала. Не исключено, что более сложные распределения являются следствием изучения грансостава на больших областях, а чем больше амплитуда колебаний размеров обломков в осыпи, тем больше должны браться площади для изучения грансостава (что и должно делаться при изучении осыпей горных пород). В связи с этим следует различать гранулометрический анализ в некоторой точке осыпи (обычно проводится на площади 1 м^2 (Трофимов, 1974), а иногда и на меньшей площади) и для всей осыпи в целом.

Полный гранулометрический анализ осыпей горных склонов может состоять в следующем. Так как глыб обычно мало (к ним относим обломки более 10 см в диаметре), то следует подсчитать по возможности все глыбы, измерив их на месте, и сделать отдельно для них гранулометрический анализ (спектр, кумулятивные кривые и др.) на всей осыпи для единичной или характерной ширины ($B = 5; 10 \text{ м}$). Разбиение на градации целесообразно производить через 10 см, в связи с другим характером размера обломков этой части спектра всего осыпного материала. При этом также следует учесть, какое количество и какие обломки (глыбы) лежат на каждом метре осыпи. Далее необходимо сделать гранулометрический анализ для обломочного материала размером до 10 см (Трофимов, 1974) для каждого метра осыпи для 10 градаций и объединить оба анализа в один для всего крупнообломочного материала осыпи. При этом полагаем, что по ширине осыпи грансостав не изменяется. Чтобы получить распределение всего обломочного материала по размерам на площади $L \times B$, где L — длина осыпи, берем за 100% общее количество обломков на этой площади: $100 L B + N$ (на каждом 1 м^2 выбирается 100 обломков (Трофимов, 1974)), N — общее количество глыб размером более 10 см. Количество фракций в каждом интервале градаций равно:

$\psi_{0-1} B, \psi_{1-2} B, \dots, \psi_{9-10} B, n_{10-20}, n_{20-30}, \dots, n_{90-100}; n_{10-20} + \dots + n_{90-100} = N,$

где $n_{10i-10(i+1)}$ - количество фракций в интервале $[10i, 10(i+1)]$,

$i = \overline{1,9}$ на всей изучаемой осыпи размером $\angle B$, $\psi_{i-(i+1)}$ - количество фракций в интервале $[i, i+1]$ на всей осыпи единичной ширины. Теперь спектр (процентное содержание фракций в каждом интервале) задается рядом:

$$\frac{\psi_{0-1} B 100}{100 \angle B + N}, \frac{\psi_{1-2} B 100}{100 \angle B + N}, \dots, \frac{\psi_{9-10} B 100}{100 \angle B + N}, \frac{n_{10-20} 100}{100 \angle B + N}, \dots, \frac{n_{90-100} 100}{100 \angle B + N}.$$

Так как для рассматриваемого варианта $100 \angle B \gg N$, то часть спектра в интервале от 0 до 10 см близка к спектру при отсутствии глыбовых фракций: $\frac{\psi_{0-1}}{\angle}, \frac{\psi_{1-2}}{\angle}, \dots, \frac{\psi_{9-10}}{\angle}$. Заметим, что спектр

для этих фракций может строиться по спектру каждого метра осыпи:

$$\Phi_{0-1}^1, \Phi_{0-1}^2, \dots, \Phi_{0-1}^{\angle}; \Phi_{1-2}^1, \Phi_{1-2}^2, \dots, \Phi_{1-2}^{\angle}; \Phi_{9-10}^1, \Phi_{9-10}^2, \dots, \Phi_{9-10}^{\angle};$$

$$\sum_{i=1}^{\angle} \Phi_{0-1}^i = \psi_{0-1}; \sum_{i=1}^{\angle} \Phi_{1-2}^i = \psi_{1-2}; \dots, \sum_{i=1}^{\angle} \Phi_{9-10}^i = \psi_{9-10}; \psi_{0-1} + \psi_{1-2} + \dots + \psi_{9-10} = 100 \angle.$$

Отсюда искомый спектр получается в указанном выше виде: $\frac{\psi_{0-1}}{\angle}, \dots, \frac{\psi_{9-10}}{\angle}$. Верхний индекс указывает, на каком метре осыпи рассматривается соответствующая фракция.

Глыбовая часть спектра незначительна, но по массе материала она может давать очень большой вклад. В связи с этим целесообразно строить совмещенный график спектра (распределения обломков по размерам) и распределения обломков по массе или объему. Такой график будет наиболее полно характеризовать осыпной материал горных осей. Возможны случаи незначительного количества фракций от 0 до 10 см (или даже их отсутствие) для осей горных склонов, тогда гранулометрический анализ намного упростится.

Обозначив спектральную функцию распределения обломков по размерам через $\Phi(D)$, D - размер обломков, получим интегральную функцию, соответствующую кумулятивной кривой, в виде $\Psi(D) = \int_0^D \Phi(D) dD$, где $\Psi(\infty) = \int_0^{\infty} \Phi(D) dD = 100$. Характерные кумулятивные кривые одномодального распределения для осей Среднего Поволжья, приведенные в работе А.М.Трофимова (1974), можно аппроксимиро-

вать функцией

$$\Psi(D) = 100 [1 - \exp(-\alpha D^2)], \quad (3.2.2-1)$$

отсюда дифференцируя эту функцию, получим спектр обломков в виде

$$\Phi(D) = 200D \exp(-\alpha D^2). \quad (3.2.2-2)$$

Максимум этой функции находится в точке $D_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$. Заметим, что точка максимума кривой спектра является и точкой перегиба кумулятивной кривой, $\frac{d^2\Psi(D_{\max})}{dD^2} = 0$.

Аналитическое выражение характера распределения обломочного материала позволит находить аналоги устойчивых осыпей в земных и даже в неземных условиях. При фотографировании поверхности Венеры во время посадки аппарата "Венера-9" (Флоренский и др., 1979) были получены гранулометрические данные по ее осыпям. Исследованная осыпь, по-видимому, аналогична по грансоставу земным осыпям, находящимся в горных или аридных условиях (авторы отмечают, что ландшафт поверхности Венеры представляет собой ландшафт осыпных склонов гор аридной зоны). В работе приводится кумулятивная зависимость количества камней ($N_{>D}$), размером больше данного, от их размера (связь ее с обычной кумулятивной зависимостью $N_{0<D}$ имеет вид: $N_{0<D} = N - N_{>D}$, где N - общее количество обломков), построенная на площади 10 м^2 :

$$\begin{cases} N_{>D} = 10^{2,63} D^{-0,8} & ; 5 \text{ см} < D < 40 \text{ см}, \\ N_{>D} = 10^{7,75} D^{-4} & ; 40 \text{ см} < D < 70 \text{ см}. \end{cases} \quad (3.2.2-3)$$

Кривые построены по 10 точкам в логарифмическом масштабе и показывают на бимодальный характер спектра обломочного материала. Методика отбора проб была следующей. Обломки размером более 10 см подсчитывались на площади $S = 5 \text{ м}^2$ (всего 32 обломка), обломки размером $5 \text{ см} < D < 10 \text{ см}$ - на $S = 1 \text{ м}^2$ (всего 5 обломков), обломки размером $3 < D < 5$ - на $0,1 \text{ м}^2$ (всего 20 камней и бугорков). Далее эти количества пересчитывались на площадь $= 10 \text{ м}^2$. Следует заметить, что пересчет обломков, лежащих в интервале $3 < D < 5$ на $S = 10 \text{ м}^2$, дает общее их количество $N_{3-5} = 2000$ штук, а по графику, приведенному в цитируемой работе, имеем $N_{3-5} = 1000$ штук. Мы основывались на последней величине, так

Как маленькие обломки были плохо различимы на фотографии, и было подсчитано их количество вместе с бугорками. Используя формулы (3.2.2-3), мы построили спектральную и кумулятивную кривые (табл. 8, рис. 20). Кривые проводились по точкам, которые соответствовали серединам интервалов градаций (градация через 5 см, исключая первый (3 - 5 см)). Как видим, спектральная кривая имеет два максимума: в интервале $3 < D < 5$ - 89,85% и в интервале $40 < D < 45$ - 0,72%; первая и третья квартили попадают в первую градацию (около 90% материала находится в интервале $3 < D < 5$), т.е. коэффициент сортировки близок к единице $S_o = \frac{Q_3}{Q_1} \approx 1$ (впрочем, так как мы не знаем распределения обломков в интервале $3 < D < 5$, то верхняя граница этого коэффициента равна $S_o \leq 5/3 = 1,67$). Таким образом, сортировка материала хорошая и медианный диаметр также находится в интервале $3 < D < 5$.

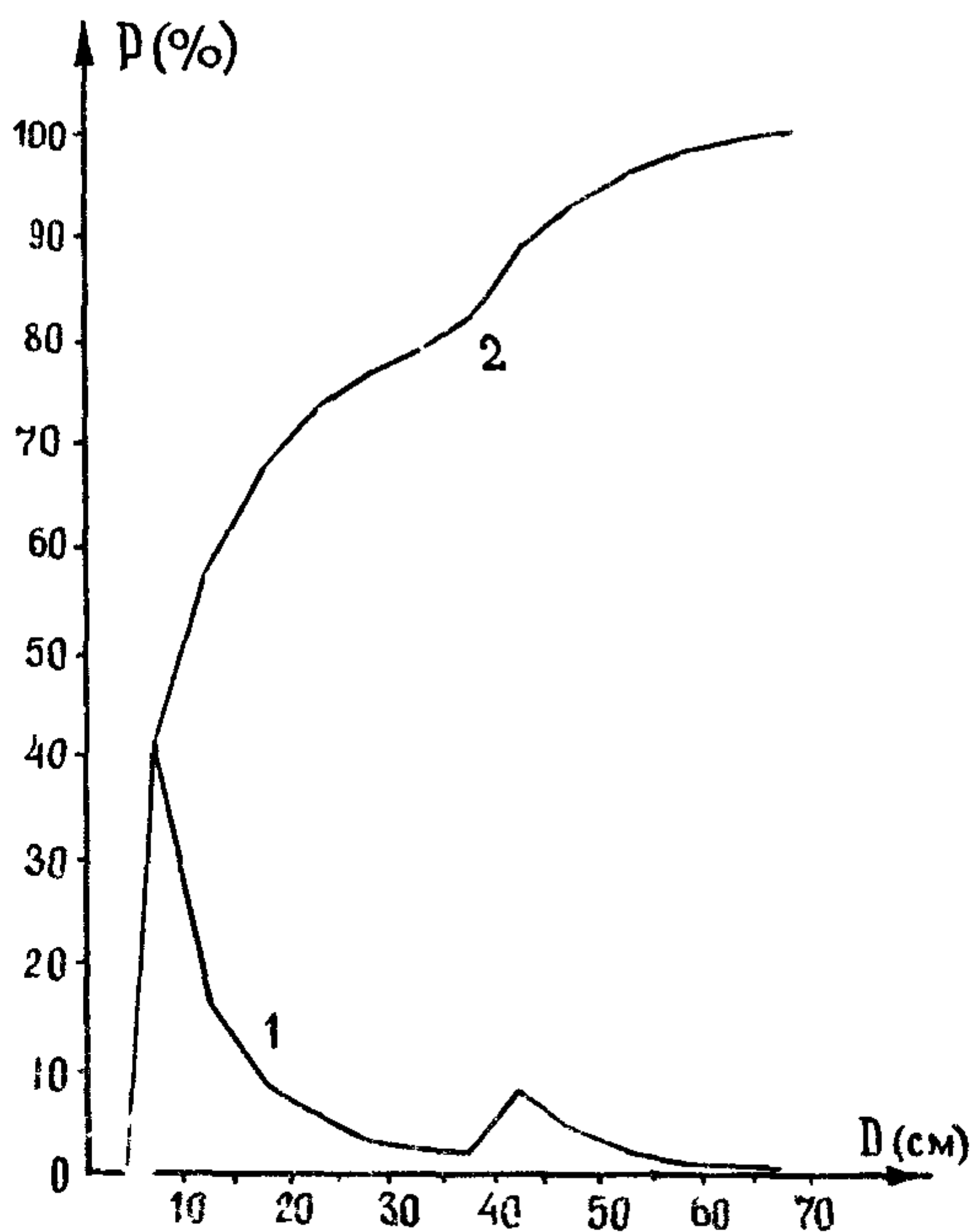


Рис. 20. Спектр обломочного материала и кумулятивная кривая ($3 < D < 70$) Венерианской осепи. Обозначенка: 1 - кривая спектра; 2 - кумулятивная кривая.

Средневзвешенный диаметр определим по формуле $d_{ср\ 6,6.} = \sum P_i D_i / 100 = 5,59$ см. Ввиду разного генезиса мелкой и крупной части спектра обломков сделаем отдельно гранулометрический анализ при $D > 5$ см (табл. 9 рис. 21). Здесь картина совершенно другая: $S_0 = 4,17$ (плохая сортировка); $Md \approx 10,0$; $d_{ср\ 6,6.} = 19,67$ см. Все это говорит в пользу различного генезиса материала крупной и мелкой части спектра. Причина здесь, видимо, в том, что откос (а также обломки) разрушаются в процессе химического и физического выветривания на неравнозначные отдельности. Первый процесс дает мелкие, второй — более крупные отдельности. Кроме того, интенсивное поступление в осыпь глыб (больших камней) может быть связано с сейсмическими толчками. Теперь для всего обломочного материала сделаем распределение обломочного материала по объему. Для этого примем во внимание, что обломки, в основном, имеют уплощенную пластинообразную форму с типичным отношением высот к поперечнику в плане от $1/3$ до $1/6$ (Флоренский и др., 1979), т.е. $K_{упл.ср.} = 1/4$. Считая условно, что ширина обломка равна его длине (поперечнику), будем вычислять объем обломка по формуле $V_{обл.} = \frac{1}{4} D^3$, а распределения обломков по объему будем рассчитывать по выражению $V_i = \frac{1}{4} D_{ср.i}^3 n_i$, где $D_{ср.i}$ — средний диаметр рассматриваемой фракции, n_i — количество обломков в этой фракции (табл. 8, рис. 22). Данные показывают, что распределение, в отличие от распределения обломков по размерам, имеет обратную картину. Максимальная масса обломков соответствует второй очень малой моде спектральной кривой, и основная масса материала лежит правее ее (80; 78,2%).

Рассмотренные выше вопросы гранулометрического анализа и анализа грансостава Венерианской осыпи могут быть полезны при сопоставлении устойчивых аналогов земных и внеземных осыпных образований.

Г л а в а 3. МЕТОДЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ СКЛОНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Во многих областях науки и техники широкое применение нашли методы теории подобия и размерностей, которые предполагают

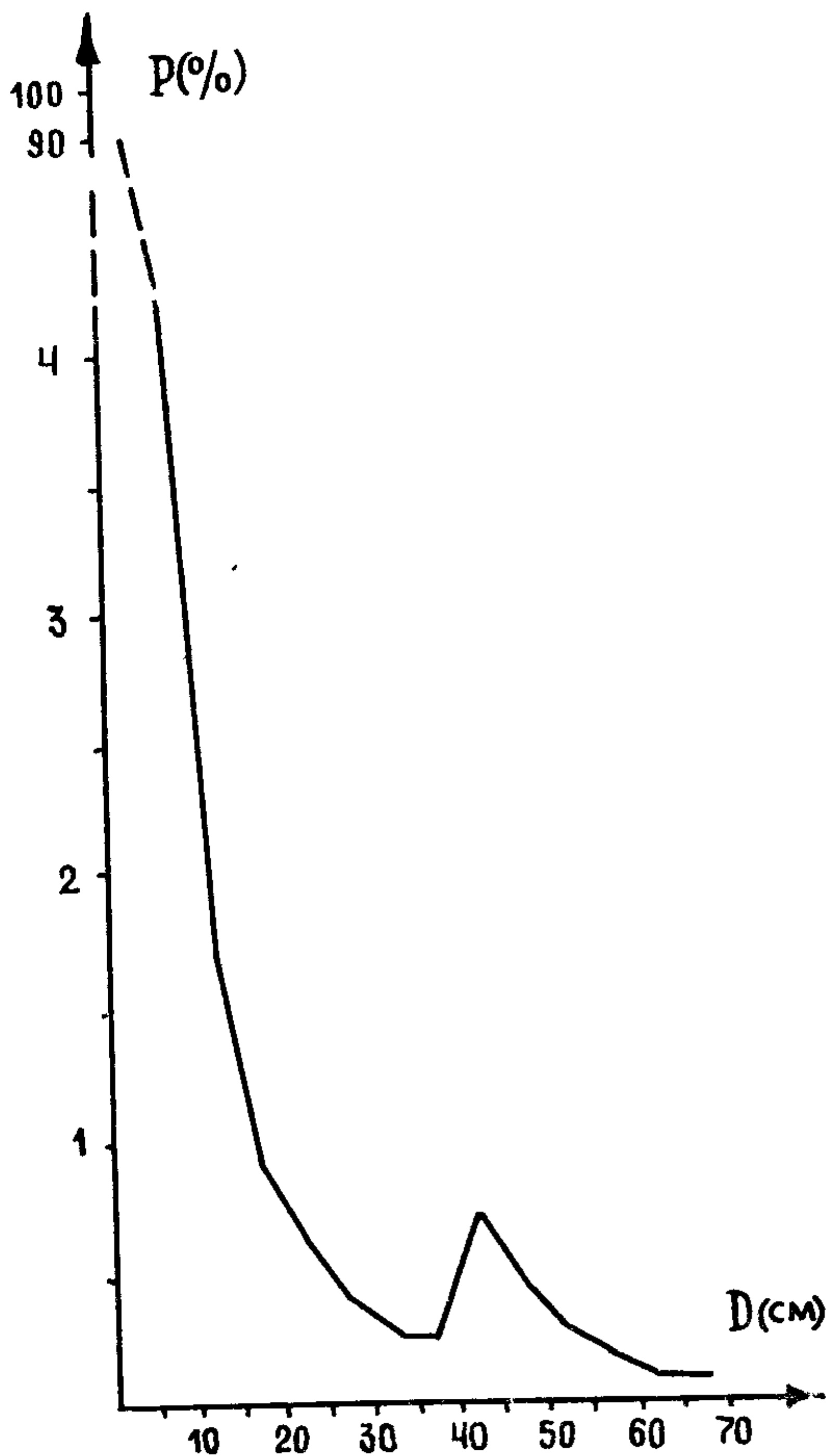


Рис. 21. Спектр обломочного материала ($3 < D < 70$) Венерианской осыпи (ось P с разрывом после $P > 4,22\%$).

экспериментальное моделирование процессов. Они позволяют находить критерии подобия (безразмерные комплексы), необходимые для перехода от модели (аналога) на реальный объект. Кроме получения критериев подобия эти методы позволяют упростить искомые зависимости, то есть позволяют искать их не от всех физических (определяющих) параметров, а от их безразмерных комбинаций (они

также являются критериями подобия), число которых меньше. Такая процедура основана на Л-теореме, которая говорит о том, что число безразмерных комбинаций, определяющих изучаемую величину при n размерных параметрах, равно $n - 3$ в случае, когда за основную систему принимается система трех единиц измерений L (длина, м), M (масса, кг), T (время, сек) (Леви, 1960).

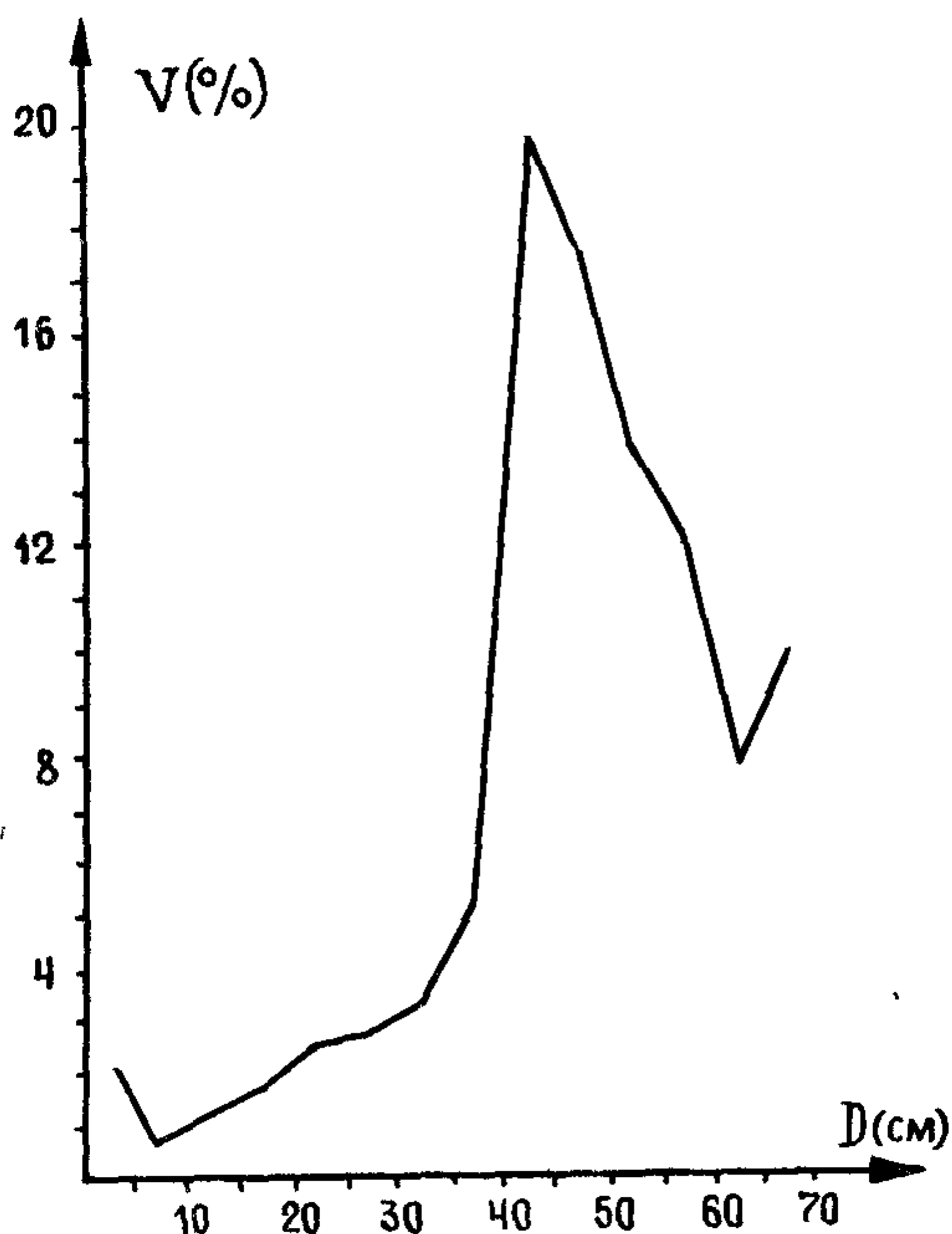


Рис. 22. Распределение обломочного материала Венерианской осыпи ($3 < D < 70$) по объему (в процентах).

Общая теория вопроса освещена в монографии Л.И.Седова (1972). Применительно к геологическим процессам данные методы обоснованы Л.Б.Розовским (1969). Анализ геологических структур этими методами проводился еще в 1937 г. М.К.Губертом (Hubert, 1937). В дальнейшем эти методы нашли широкое применение при изучении аллювиальных и эрозионных процессов (Hertson, 1969; Horton, 1940; Scheidegger, 1963; Strahler, 1958 и др.).

Распределения обломочного материала Венерианской
осыпи по размерам и объему

	P_i (%)	$\sum P_i$	V_i (см ³)	P_i
$n_{3-5} = 1000$	89,95	89,85	$V_{3-5} = 16000,00$	2,055
$n_{5-10} = 47$	4,22	94,07	$V_{5-10} = 4957,03$	0,636
$n_{10-15} = 19$	1,71	95,78	$V_{10-15} = 9277,34$	1,192
$n_{15-20} = 10$	0,90	96,68	$V_{15-20} = 13398,45$	1,720
$n_{20-25} = 7$	0,63	97,31	$V_{20-25} = 19933,59$	2,559
$n_{25-30} = 4$	0,36	97,67	$V_{25-30} = 20796,88$	2,671
$n_{30-35} = 3$	0,27	97,94	$V_{30-35} = 25746,09$	3,306
$n_{35-40} = 3$	0,27	98,21	$V_{35-40} = 39550,78$	5,079
$n_{40-45} = 8$	0,72	98,93	$V_{40-45} = 153531,25$	19,718
$n_{45-50} = 5$	0,44	99,37	$V_{45-50} = 133964,84$	17,205
$n_{50-55} = 3$	0,27	99,64	$V_{50-55} = 108527,34$	13,938
$n_{55-60} = 2$	0,18	99,82	$V_{55-60} = 95054,69$	12,208
$n_{60-65} = 1$	0,09	99,91	$V_{60-65} = 61035,16$	7,839
$n_{65-70} = 1$	0,09	100,00	$V_{65-70} = 76886,72$	9,875
$\sum n_i = 113$			$\sum V_i = 778660,11$	$\sum P_i = 100$

Т а б л и ц а 9

Распределения обломочного материала размером
более 5 см Венерианской осыпи

	P_i (%)	$\sum P_i$
$n_{5-10} = 47$	41,59	41,59
$n_{10-15} = 19$	16,81	58,40
$n_{15-20} = 10$	8,85	67,25
$n_{20-25} = 7$	6,19	73,44
$n_{25-30} = 4$	3,54	76,98
$n_{30-35} = 3$	2,66	79,64
$n_{35-40} = 3$	2,66	82,30
$n_{40-45} = 8$	7,08	89,38
$n_{45-50} = 5$	4,43	93,81
$n_{50-55} = 3$	2,66	96,47
$n_{55-60} = 2$	1,77	98,24
$n_{60-65} = 1$	0,88	99,12
$n_{65-70} = 1$	0,88	100,00
$\sum n_i = 113$		

В последнее время методы теории подобия и размерностей интенсивно применяются и развиваются и в области геоморфологии склонов. Сразу же отметим два аспекта изучения склоновых процессов этими методами. Первый, наиболее простой, предполагает известными уравнения, описывающие конкретный склоновый процесс, и тогда задача состоит в приведении этих уравнений к безразмерному виду. Второй, при отсутствии таких уравнений, состоит в анализе размерностей и использовании π - теоремы. В вопросах моделирования движения воды по склону (склонового стока) данные методы имеют преимущественное применение (Соколов, 1973; Ggase, Eagleson, 1966; Voon, Venzel, 1971), так как здесь существует хорошо развитый аппарат гидравлики и гидромеханики и большой ряд известных критериев подобия (Рейнольдса, Фруда и другие). В вопросах моделирования водной склоновой эрозии эти методы разрабатываются Г.В.Бастраковым (1976, 1979). Моделирование процессов абразии привело Л.Б.Розовского (1969) к универсальному геодинамическому критерию подобия; им также приведены наиболее общие критерии подобия для оползневых обвальных и селевых процессов. Достаточно полный анализ селевого процесса методами подобия и размерностей проделан в работе В.Н.Пушкаренко и В.А.Ни (1976). Эти методы использовались также при моделировании эоловых процессов (Масхели, 1963) и при экспериментальном моделировании эволюции рельефа (Бастраков, 1974). Ряд экзогенных процессов, для которых известны описывающие их уравнения, рассмотрен А.Е.Шайдеггером (Schidegger, 1963). Он отмечает, что уравнения, описывающие экзогенные (эрозионные - по автору) процессы, имеют различный тип, поэтому невозможно дать какое-либо общее правило для нахождения связей, и каждый такой процесс должен изучаться специально. Им приведены к безразмерному виду уравнения, описывающие следующие процессы: 1. капельно-дождевая эрозия; 2. оползни; 3. развитие склона под действием водной эрозии; 4. денудационное развитие крутых склонов (нелинейная модель интенсивности денудации); процесс меандрирования по П.Вернеру (Werner, 1951); развитие горных долин по Л.Герберу (Gerber, 1959) и получены условия динамического подобия этих процессов.

Отметим, что эксперимент в геологии и геоморфологии возник значительно раньше методов теории геологического и геоморф-

фологического подобия. Обзор ранних работ в этой области дан В.Г.Гуссаком (1945), который указывает на один из первых экспериментов, проведенных в 1815 г. Дж.Холлом в геотектонике, и на эрозионный эксперимент, проведенный А.П.Павловым в 1898 с целью показать значения первичных слабых дислокаций и гидро-геологических условий при формировании асимметрии водоразделов.

На основе анализа размерностей, рассмотрим вопросы моделирования процессов капельно-дождевой эрозии (§ 1), абразии, склоновой и боковой эрозии (§ 2) и обвально-осыпных процессов (§ 3). Это изложение будет основано на двух работах (Московкин, 1978; Московкин, Трофимов, 1980 в), на которые в дальнейшем ссылок делать не будем.

§ 1. Моделирование процесса капельно-дождевой эрозии

Попытка анализа процесса капельно-дождевой эрозии методами теории подобия и размерностей в зависимости от кинетической энергии и количества движения осадков, была предложена А. Е. Шайдеггером (Scheidtger, 1963). Он исходил из гипотез пропорциональности интенсивности капельно-дождевой эрозии кинетической энергии и количеству движения осадков (не делая подробный анализ размерностей) с учетом основных физических характеристик почвы и капель дождя.

Для более подробного анализа за определяющие параметры примем следующие: $P [M L^{-1} T^{-3}]$ - сила воздействия капель дождя на единицу площади в единицу времени, $g [L T^{-2}]$ - ускорение силы тяжести, $d_k [L]$ - диаметр капель дождя, $c [M L^{-1} T^{-2}]$ - сила сцепления почвенных частиц, $\gamma [M L^{-2} T^{-2}]$ - удельный вес почвы, $d_p [L]$ - диаметр почвенных частиц, $F [L^2]$ - площадь поверхности, на которую выпадают однородные осадки интенсивности $I [L T^{-1}]$ и продолжительности $t [T]$, $f_0 [L T^{-1}]$ - интенсивность фильтрации, $\Delta [L]$ - размер выступов шероховатости, i - уклон склона (безразмерный параметр).

За прогнозную величину возьмем количество (массу) разрушаемой почвы на единице площади в единицу времени $Q [M L^{-2} T^{-1}]$,

Здесь для примера рассмотрим подробный анализ размерностей, а в остальных случаях этого делать уже не будем.

Степенной полином запишем в стандартной форме

$$Q = P^x g^y d_k^z c^\alpha \gamma^\beta d_r^\varphi F^\delta I^\eta f_0^\varepsilon \Delta^\psi t^\omega i^i. \quad (3.3.I-1)$$

Заменяя в формуле (3.3.I-1) физические параметры их размерностями, запишем ее в виде

$$M L^{-2} T^{-1} = (M L^{-1} T^{-3})^x (L T^{-2})^y L^z (M L^{-1} T^{-2})^\alpha (M L^{-2} T^{-2})^\beta \chi \\ \chi L^\varphi (L^2)^\delta (L T^{-1})^\eta (L T^{-1})^\varepsilon L^\psi T^\omega. \quad (3.3.I-2)$$

Приравнивая показатели степеней в левой и правой частях выражения (3.3.I-2) при одинаковых единицах измерения, придем к системе трех алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 1 = x + \alpha + \beta, \\ -2 = -x + y + z - \alpha - 2\beta + \varphi + 2\delta + \eta + \varepsilon + \psi, \\ -1 = -3x - 2y - 2\alpha - 2\beta - \eta - \varepsilon + \omega. \end{cases} \quad (3.3.I-3)$$

Решая эту систему относительно x , y , z , получим

$$x = 1 - \alpha - \beta; \quad y = -1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\omega}{2}; \quad z = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\omega}{2} - \varphi - 2\delta - \psi. \quad (3.3.I-4)$$

Подставляя это решение в выражение (3.3.I-1), придем к следующей зависимости

$$Q = \frac{P}{g} \left(\frac{I}{\sqrt{d_k g}} \right)^{\eta + \varepsilon} \left(\frac{f_0}{I} \right)^\varepsilon \left(\frac{c}{P \sqrt{d_k}} \right)^\alpha \left(\frac{\sqrt{g d_k} \gamma}{P} \right)^\beta \left(\frac{d_r}{d_k} \right)^\varphi \left(\frac{F}{d_k^2} \right)^\delta \left(\frac{\Delta}{d_k} \right)^\psi \left(t \sqrt{\frac{g}{d_k}} \right)^\omega i^i. \quad (3.3.I-5)$$

Вместо третьего и четвертого безразмерных комплексов сформируем новые и запишем выражение (3.3.I-5) в виде

$$Q = \frac{P}{g} f(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9), \quad (3.3.I-6)$$

где

$$k_1 = I / \sqrt{d_k g}, \quad k_2 = f_0 / I, \quad k_3 = \gamma d_r / c, \quad k_4 = g c \gamma / P^2, \\ k_5 = d_r / d_k, \quad k_6 = F / d_k^2, \quad k_7 = \Delta / d_k, \quad k_8 = t \sqrt{g / d_k}, \quad k_9 = i.$$

При равенстве критериев подобия аналога и объекта из формулы (3.3.I-6) следует соотношение для перехода от аналога на объект (в процессе экспериментального моделирования не всегда удается соблюдение всех критериев подобия)

$$Q_o = Q_a (P_o / P_a). \quad (3.3.I-7)$$

Восьмой критерий подобия обеспечивает подобия временных промежутков

$$t_o = t_a (d_{k_o} / d_{k_a})^{1/2} \quad (3.3.I-8)$$

Индексы "а" и "о" в соотношениях (3.3.I-7, 3.3.I-8) соответствуют аналогу и объекту. Заметим, что последнее соотношение не позволяет моделировать большие промежутки времени.

Из первого, шестого и восьмого критериев был получен критерий $It/F^{1/2}$, обеспечивающий оценку выпадения одинакового количества капель на модель (аналог) и объект. Приведем пример на использование первого, шестого и восьмого критериев подобия. Допустим, мы хотим смоделировать десятиминутный ливень интенсивности $I_o = 3$ мм/мин с диаметром капель $d_{k_o} = 4$ мм на площади $F_o = 10^4$ м² = 1 га, тогда формула (3.3.I-8) даст при $d_{k_a} = 0,04$ мм время искусственного дождевания $t_a = 1$ мин, а первый и шестой критерий подобия дадут соответственно $I_a = 0,3$ мм/мин и $F_a = 1$ м². Таким образом, чтобы смоделировать ливень с данными характеристиками на данной площади надо дождевать одну минутку каплями 0,04 мм в диаметре с интенсивностью 0,3 мм/мин на площади 1 м².

При пользовании формулой (3.3.I-6) определенные трудности возникнут при нахождении параметров Р и С.

Зная спектр и интенсивность осадков, а также формулу для силы удара каждой отдельной капли, можно определить суммарную силу всех капель, выпадающих на определенную площадь в определенное время. Как было отмечено ранее (§ I, гл. I, ч. 3), встает задача определения количества разбрызгиваемой (разрушаемой) почвы в результате удара отдельной капли.

Если за прогнозный параметр взять количество разбрызгиваемой почвы (Q) в результате удара отдельной капли в единицах массы, а за определяющие параметры - $d_k, d_y, c, \gamma, g, \alpha$ - коэффициент поверхностного натяжения воды, η - вязкость воды, V_k - скорость падения капли в момент, предшествующий удару, ρ_k - плотность воды, то с помощью анализа размерностей получим следующую формулу (Московкин, Гахов, 1979 а)

$$Q = \rho_k d_k^3 f(Re, We, Fr, \frac{d_y}{d_k}, \frac{\gamma}{\gamma_k}, \frac{c}{\rho_k V_k^2}) \quad (3.3.I-9)$$

где $\gamma_k = \rho_k g$, $Re = \frac{V_k \rho_k d_k}{\eta}$ - число Рейнольдса, $We = \frac{\rho_k d_k V_k^2}{\alpha}$ - число Вебера, $Fr = V_k^2 / g d_k$ - число Фруда.

Последний критерий подобия в формуле (3.3.I-9) характеризует соотношения сил сцепления и давления при ударе. Взяв $\alpha = 73$ дин/см, $\eta = 10^{-2} \frac{\text{г}}{\text{см.сек}}$ для двадцатиградусной температуры воды и d_k, V_k , изменяющиеся в пределах $d_k = 0,1$ мм, $V_k = 27$ см/сек $\div d_k = 5,8$ мм, $V_k = 917$ см/сек для естественных осадков (Gunn, Kinzer, 1949) (по последним данным максимальные размеры капель в интенсивных ливнях могут достигать 8 мм), получим следующие интервалы значений чисел Рейнольдса, Фруда и Вебера: $Re (27 + 53,6 \cdot 10^2)$, $Fr (74,4 + 14,8 \cdot 10^2)$, $We (0,1 + 6,68 \cdot 10^3)$.

Если вместо скорости V_k рассматривать давление при ударе капли R , то вместо формулы (3.3.I-9) получим

$$Q = \frac{R d_k^2}{g} f \left(\frac{R}{\eta} \sqrt{\frac{d_k}{g}}, \frac{R d_k}{\alpha}, \frac{R}{d_k \gamma_k}, \frac{d_k}{d_k}, \frac{\gamma}{\gamma_k}, \frac{c}{R} \right). \quad (3.3.I-10)$$

Следует отметить, что при анализе размерностей непосредственно получаются критерии, обратные числам Рейнольдса, Вебера и Фруда; то же самое имеет место и для первых трех критериев в формуле (3.3.I-10).

§ 2. Моделирование процессов абразии, склоновой и боковой эрозии

При абразионном разрушении уступов подмываемых берегов, сложенных прочной породой, суммарный эффект их разрушения (образование и рост волноприбойных ниш и следующее за этим обвалование масс) приводит к общему процессу отступления. При моделировании развития таких берегов за определяющие параметры можно принять следующие: $P [M L^{-1} T^{-3}]$ - сила воздействия волнового потока на основание уступа; $g [L T^{-2}]$ - ускорение силы тяжести; $c [M L^{-1} T^{-2}]$ - прочность породы; $\gamma [M L^{-2} T^{-2}]$ - удельный вес породы; $h [L]$ - высота волноприбойной ниши; $H [L]$ - высота уступа. Здесь мы не принимаем во внимание безразмерные параметры, такие как уклон уступа и другие, так как они не усложняют анализ размерностей. За прогнозную величину возьмем количество размываем-

мой породы в единицу времени на единицу площади m [$M L^{-2} T^{-1}$].

Анализ размерностей для степенного полинома

$$m = P^x g^y c^z \gamma^\alpha h^\beta H^\delta, \quad (3.3.2-1)$$

дает

$$m = \frac{P}{g} \left(\frac{P^2 h}{g c^2} \right)^{\beta + \delta} \left(\frac{H}{h} \right)^\delta \left(\frac{g c \gamma}{P^2} \right)^\alpha. \quad (3.3.2-2)$$

Из первого и третьего безразмерного комплекса сформируем критерий подобия $h\gamma/c$ и окончательно получим

$$m = \frac{P}{g} f(k_1, k_2, k_3), \quad (3.3.2-3)$$

где $k_1 = h\gamma/c$, $k_2 = H/h$, $k_3 = g c \gamma / P^2$.

При совпадении критериев подобия аналога и объекта из (3.3.2-3) получим

$$m_o = m_a (P_o / P_a). \quad (3.3.2-4)$$

Учитывая, что $m = \rho V$, где ρ - плотность породы, V ($m^3/m^2 \text{год}$) - линейная скорость отступления, получим вместо (3.3.2-3) следующую зависимость

$$V = \frac{P}{\gamma} f(k_1, k_2, k_3), \quad (3.3.2-5)$$

и выражение (3.3.2-4) примет соответственно вид

$$V_o = V_a (P_o / P_a). \quad (3.3.2-6)$$

Рассмотрим теперь уступы, сложенные непрочными породами. Р.Н.Холматова (1976), рассматривая переработку Южносурханского водохранилища, сложенного лессовыми и глинистыми породами, приводит следующие физико-механические свойства пород: объемный вес (γ), пористость (n), число пластичности (k), тангенс угла внутреннего трения ($t_g \varphi$) при естественной влажности, силу сцепления (c), скорость размокания (t , в секундах), а также силу волнения (P) и высоту уступа (H), влияющие, как и предыдущие факторы, на процесс динамики берегов.

Сила волнения (P) имела размерность [$M T^{-2}$], а γ [$M L^{-2} T^{-2}$]. Анализ размерностей для определения линейной скорости отступления уступа

$$V = P^x c^y t^z \gamma^d H^\beta n^\lambda (t_g \varphi)^\delta k^\eta \quad (3.3.2-7)$$

дает

$$V = \frac{P}{ct_1} f \left(\frac{\gamma H}{c}, \frac{cH}{\rho}, n, \operatorname{tg} \varphi, k \right). \quad (3.3.2-8)$$

Натурные наблюдения Р.Н.Холматовой (1976) согласуются с этой зависимостью. Объем переработки, по ее исследованиям, обратно-пропорционален силе сцепления и скорости размокания.

При комплексном моделировании развития абразионных склонов следует рассматривать критерий подобия

$$K = E_{\text{скл.}} / E_{\text{шт.}}, \quad (3.3.2-9)$$

который характеризует соотношение штормов ($E_{\text{шт.}}$) и энергии склоновых потоков ($E_{\text{скл.}}$).

При изучении взаимодействия склоновых потоков с руслом реки целесообразно рассматривать следующие критерии подобия:

$$K_1 = \frac{Q_{\text{скл.}}}{Q_{\text{р.}}}, K_2 = \frac{q_{\text{скл.}}}{q_{\text{р.}}}, K_3 = \frac{E_{\text{скл.}}}{E_{\text{р.}}}, K_4 = \frac{L}{B}, K_5 = \frac{L}{b}, K_6 = \frac{b}{H}, K_7 = \alpha, K_8 = \beta, \quad (3.3.2-10)$$

где $Q_{\text{скл.}}$, $Q_{\text{р.}}$ и $q_{\text{скл.}}$, $q_{\text{р.}}$ — жидкие и твердые расходы склонового и речного потоков; $E_{\text{скл.}}$, $E_{\text{р.}}$ — кинетические энергии склонового и речного потоков; L , B — длина и ширина склона; b , H — ширина и максимальная глубина реки; α , β — углы склона и отмели.

При рассмотрении водных склоновых потоков, расписывая подробнее значения жидких расходов и энергии для первых трех критериев подобия, получим следующие выражения:

$$K_1 = I b F / V_{\text{р.}} S, K_2 = K_1 \rho_{\text{скл.}} / \rho_{\text{р.}}, K_3 = K_1 V_{\text{скл.}}^2 / V_{\text{р.}}^2, \quad (3.3.2-11)$$

где I — интенсивность дождя или снеготаяния; b — коэффициент стока; $F = LB$ — площадь водосбора, равная площади склона; $V_{\text{скл.}}$, $V_{\text{р.}}$ — скорости склонового и речного потоков; $\rho_{\text{скл.}}$, $\rho_{\text{р.}}$ — мутности этих потоков, S — площадь поперечного сечения речного потока.

Жидкий расход склонового стока брался в конечном створе ($Q_{\text{скл.}} = I b F$), причем имеет место соотношение $Q_{\text{скл.}} = V_{\text{скл.}} B h$,

где h — глубина потока и его скорость ($V_{\text{скл.}}$) соответствуют конечному створу. При получении критерия подобия K_3 энергии потоков брались в виде $E = \frac{\rho}{2} Q V^2$, где ρ — плотность воды, то есть фактически рассматривались мощности потоков (в джоулях/сек). Заметим, что при моделировании, наряду с критериями подобия

(3.3.2-10) необходимы критерии, учитывающие литологические характеристики пород.

Примером экспериментального моделирования взаимодействия склоновых и русловых (овражных) процессов являются работы Проблемной лаборатории эрозии почв и русловых процессов МГУ, проводимые без анализа размерностей и подобия, но тем не менее очень важных с точки зрения познания механизма этого взаимодействия.

Примером экспериментального моделирования развития абразионных уступов может служить работа Сунамура (Sunamura, 1977). В ней было получено экспериментально уравнение для общей эродируемой силы волн $F_{эр.} : F_{эр.} = k \cdot \ln(f_w/f_r)$, где f_w - атакующая сила волн, действующих на клиф (кгс/см^2), f_r - сила сопротивления пород размыву (кгс/см^2). Из этой формулы видно, что выражение f_w/f_r является одним из основных критериев подобия при экспериментальном моделировании процессов абразии. Заметим, что вторым основным критерием подобия должен являться критерий, дающий привязку ко времени. В качестве такого следует взять критерий ωT , где ω - частота удара волн о клиф (или частота волн на глубокой воде), T - рассматриваемый промежуток времени. Этот критерий говорит о том, что количество ударов волн о клиф на модели и объекте должно быть одинаковым. Остальные критерии являются морфометрическими.

§ 3. Моделирование обвально-осыпных процессов

При анализе обвальных процессов, рассмотрим только процесс разгрузки внутренней напряженности массива.

Пусть имеется уступ высотой H , длиной a и шириной b . Определим заложение трещин бортового отпора ℓ [\angle] в зависимости от H [\angle], γ [$\text{М}\angle^{-2}\text{T}^{-2}$], g [$\angle\text{T}^{-2}$], U [$\text{М}\angle^2\text{T}^{-2}$] - потенциальная энергия уступа, c [$\text{М}\angle^{-1}\text{T}^{-2}$], a [\angle], b [\angle].

Анализ размерностей дает следующую зависимость

$$\ell = H f\left(\frac{U}{H^2\gamma}, \frac{c}{H\gamma}, \frac{a}{H}, \frac{b}{a}\right). \quad (3.3.3-1)$$

Так как потенциальная энергия уступа равна $U = \frac{\gamma}{2} ab H^2$, то первый критерий подобия в формуле (3.3.3-1) переходит в морфометрический критерий подобия $k = \frac{ab}{2H^2}$. Далее замечаем, что k есть

комбинация последних двух критериев; таким образом, зависимость (3.3.3-1) можно записать в виде

$$\ell = H f\left(\frac{a\beta}{H^2}, \frac{c}{Hy}\right). \quad (3.3.3-2)$$

При совпадении критериев подобия аналога и объекта из (3.3.3-2) получим

$$\ell_o = \ell_a (H_o/H_a). \quad (3.3.3-3)$$

Перейдем теперь к рассмотрению процесса осыпания.

При моделировании процесса осыпания обломочного материала с уступа следует выделить следующие критерии подобия: α, β - углы наклона осыпи и уступа; d^*/d ; d^*/H ; H/L ; $\text{tg} \varphi_o$; где d^* - размер движущегося обломка, d - размер обломков, составляющих осыпь, H - высота уступа, L - длина осыпи, $\text{tg} \varphi_o$ - тангенс угла трения покоя. При более точном моделировании следует учитывать дифференциацию и сортировку обломков в осыпи, а также морфометрические индексы окатанности, уплощения, диссиметрии и сферичности. Длина пробега (ℓ) обломка по осыпи определяется его массой (M), начальной скоростью (V_o) и суммарной силой (F), определяющей процесс движения. Анализ размерностей приводит к зависимости

$$\ell = \frac{V_o M}{F} f(k), \quad (3.3.3-4)$$

где под k понимаем совокупность всех указанных выше критериев подобия. Теоретический анализ, основанный на уравнении движения, приводит к аналогичному результату

$$\ell = \frac{V_o^2 M}{2F}. \quad (3.3.3-5)$$

Формула (3.3.3-5) также следует непосредственно из формулы для работы обломка на пути его пробега ℓ . Начальная скорость обломка в случае падения с вертикального уступа на наклонную осыпь по закону сохранения энергии выражается через высоту падения по формуле

$$V_o = (2gh)^{1/2} \sin \alpha. \quad (3.3.3-6)$$

При теоретическом и экспериментальном моделировании осыпных процессов Киркби и Стазом (Kirkby, Statham, 1975) получили следующее выражение для силы F : $F = Mg[\sin \alpha - \cos \alpha (\text{tg} \varphi_o + k_o \frac{d}{d^*})]$,

где член $Mg \cos \alpha \operatorname{tg} \Phi_0$ мы интерпретируем силой трения скольжения, а член $Mg \cos \alpha k_0 \frac{d}{d^*}$ - силой трения качения. С учетом этого выражения и формул (3.3.3-5, 3.3.3-6) указанные авторы пришли к формуле для длины пробега обломка по осыпи

$$l = h \sin^2 \alpha / \{ \cos \alpha (\operatorname{tg} \Phi_0 + k_0 [d/d^*]) - \sin \alpha \}. \quad (3.3.3-7)$$

При равенстве критериев подобия $k_1 = d/d^*$ и $k_2 = \operatorname{tg} \Phi_0$ у объекта и аналога, силы трения обломков при их движении будут одинаковыми как у аналога, так и у объекта, и для перехода от аналога на объект из формулы (3.3.3-7) получим следующую зависимость:

$$l_0 = l_a (N_0/N_a).$$

Полученные в этой главе критерии подобия могут быть полезны при экспериментальном моделировании склоновых процессов.

В дальнейшем перспективно заложить основы для экспериментального моделирования процессов выветривания и денудации. В вопросах моделирования процессов физического выветривания следует решить задачу моделирования колебаний метеорологических элементов, циклов увлажнения и усушки и перехода температуры через ноль, а также процесс инсоляции, то есть решить задачу моделирования внешних воздействующих факторов. Наряду с этим следует решить задачу моделирования литологических (физических) свойств пород с учетом их структурных особенностей залегания.

В заключение отметим, что построение обобщающей теории геоморфологического подобия позволит экспериментально моделировать не только земной, но и внеземной рельеф.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведена попытка обобщения математических детерминированных моделей геоморфологии склонов на определенной единой основе в некоторую концепцию моделей. В качестве такой основы были взяты концепции взаимодействия (системный подход) и балансовый подход к составлению моделей. Синтез этих подходов позволил заложить основы концепции (теории) моделей взаимодействия в геоморфологии склонов, построенной на балансовой основе. Как две составные и отчасти автономные разделы этой концепции нами предложены: 1. концепция детерминированных балансовых динамических моделей эволюции склонов (ч.1) и 2. концепция динамических моделей склоновых систем (ч.2). Иерархия балансовых моделей эволюции склонов выглядит следующим образом. Впереди стоит широкий круг балансовых моделей эволюции склонов, который включает в себя три класса балансовых моделей: 1) диффузионные, 2) геомеханические, 3) кинематические. Эти классы моделей могут разделяться и на типы. Концепция динамических моделей склоновых систем здесь только заложена и дать какую-то иерархию моделей пока невозможно. Эта концепция является наиболее адекватным аппаратом теории динамического равновесия рельефа.

Нам представляется возможным построение на основе изложенных выше принципов (подходов), общей теории моделей развития рельефа (общей физико-математической теории динамической геоморфологии). Однако это — задача будущих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

А л е к с е е в В. В. Динамические модели водных биогеоценозов. - В кн.: Человек и биосфера, вып. I. М., Изд-во, 1976.

А н е р т Ф. Трехмерная теоретическая модель развития формы рельефа. - Международная география-76, с. I, География и палеогеография. М., 1976.

А р м а н д Д. Л. Наука о ландшафте. М., "Мысль", 1975.

Б а с т р а к о в Г. В. Экспериментальные исследования формирования разновозрастных поверхностей выравнивания и останцового рельефа. - В сб.: Развитие склонов и выравнивание рельефа. Казань, Изд-во КГУ, 1974.

Б а с т р а к о в Г. В. Теоретические основы моделирования склоновой водной эрозии: - В кн.: Проблемы отраслевой и комплексной географии. Казань, Изд-во КГУ, 1976.

Б а с т р а к о в Г. В. Эрозионная прочность горных пород: - "Геоморфология", 1977, № 2.

Б а с т р а к о в Г. В. Теоретические и методические основы изучения эрозии и противоэрозионных мероприятий методом лабораторного физического моделирования: - В сб.: Теоретические основы противоэрозионных мероприятий. Тез. докл. Всесоюзн. конференции, часть I, Одесса, 1979.

Б и р к г о ф Г. Гидродинамика. М., ИЛ, 1954.

Б у д а к Б. М., С а м а р с к и й А. А., Т и х о н о в А. Н. Сборник задач по математической физике. М., "Наука", 1972.

Б у т а к о в Г. П., Д е д к о в А. П. Аналитическое изучение крупнообломочного материала. Казань, Изд-во, КГУ, 1971.

В е н т ц е л ь А. Д., Ф р е д л и н М. И. О малых случайных возмущениях динамических систем: - УМН, том 25, вып. I, (151), 1970.

Г а в р и л и ц а А. О. Кинетические характеристики осадков на капельно-ударном уровне и их воздействие на поверхностный слой почвы: - В сб.: Гидрология малых водосборов. Кишинев, "Штиинца", 1978.

Г а д ж е в Г. Максимальная едрина и сила удара на водните капли. - Гидротехника и мелиорация, кн.4, 1968.

Г а л к и н Л. М., К у з ь м е н к о С. И., Л у т Б. Ф., С у д а к о в А. Н. Моделирование процессов формирования естественного и искусственного (антропогенного) рельефа. - В сб.: "Круговорот вещества и энергии в водоемах. Математическое моделирование экосистем водоемов. Тез.докл. на 4 Всес.лимнологическом совещании, Листвиничное на Байкале, 1977.

Г о н о р А. Л., Я к о в л е в В. Я. Удар капли по твердой поверхности. - "Изв. АН СССР, МЖГ", 1977, № 5.

Г о н о р А. Л., Я к о в л е в В. Я. Ударное взаимодействие сферической капли жесткой поверхностью. - "Изв.АН СССР, МЖГ": 1978, № 1.

Г о н о р А. Л., Я к о в л е в В. Я. О некоторых результатах в теории удара капли по твердой поверхности. - В сб.: Струйные и отрывные течения. М., Изд-во МГУ, 1979.

Г р и г о р ь е в а О. Г. Сопротивляемость берегов, сложенных связными и полускальными породами волновому воздействию. - Тр. ГГИ, вып. 69, 1959.

Г р и г о р я н С. С. Об устойчивой форме равновесия галечного берега, подверженного действию прибоя. - Прикладная математика и механика, т.29, вып. 2, 1965.

Г у д з о н Н. Охрана почв и борьба с эрозией. М., "Колос", 1974.

Г у с с а к В. Б. Изучение процессов смыва и эрозии в лотке. - "Почвоведение", 1945, № 1.

Д е в д а р и а н и А. С. - Геоморфология. Вып. I. Математические методы. Итоги науки. Изд. ВИНТИ, М., 1966.

Д е в д а р и а н и А. С. Математический анализ в геоморфологии. М., "Недра", 1967 а.

Д е в д а р и а н и А. С. К вопросу о роли компенсации тектонических движений сносом и осадконакоплением в образовании равнин. - В сб.: Рельеф Земли и математика. М., "Мысль", 1967 б.

Д е в д а р и а н и А. С. Моделирование развития рельефа методами теории конечных автоматов и математической физики. - Записки Забайкал.фил.ГО СССР, вып.30, 1969.

Д е д к о в А. П. Экзогенное рельефообразование в Казанско-Ульяновском Приволжье. Казань, Изд-во КГУ, 1970.

Д е д к о в А. П., Д у г л а в В. А. Медленные движения почвенно-грунтовых масс на задернованных склонах. - "Изв. АН СССР, сер.географ.", 1967, № 4.

Д е м и д о в В. Н., К у ч м е н т Л. С. Двумерная гидродинамическая модель стекания воды по водосбору и ее численная реализация. - "Водные ресурсы", 1975, № 1.

Д и з е н г о ф Г. И., С у д о б и ч е р В. Г. Численный метод решения задачи о величине смыва почвы со склона. - В сб.: "Теоретические основы противоэрозионных мероприятий, ч. I, Тез.докл. Всес. конференц. Одесса, 1979.

Е с и н Н. В. Прогнозирование кратковременных размывов подпочвенного склона. - В сб.: Экспериментальные и теоретические исследования процессов береговой зоны. М., "Наука", 1967.

Е с и н Н. В. Общие принципы составления динамических уравнений развития рельефа. - "Изв. АН СССР, сер. географ.", 1968, № 3.

Е с и н Н. В., Д м и т р и е в В. Д. Эрозионное воздействие капель дождя и некоторые закономерности эволюции склонов. - "Геоморфология", 1975, № 4.

Е с и н Н. В., С а в и н М. Т. О динамике приурезовой зоны моря. - "Вестник МГУ", сер. географ.", 1971, № 3.

Е с и н Н. В., С к о р к и н Н. А. Применение уравнений гидродинамики к некоторым задачам о развитии рельефа. - "Вестник МГУ, сер. географ.", 1970, № 3.

З е л ь д о в и ч Я. Б., М ы ш к и с А. Д. Элементы математической физики. М., "Наука", 1973.

З у б к о в а К. М. Исследование гидравлических и морфометрических характеристик склоновых потоков. - Сборник работ по гидрологии, № 12. Л., Гидрометеиздат, 1977.

К а м к е Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., "Наука", 1966.

К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. М., "Наука", 1964.

К л ю к в и н А. А. Методика и результаты дендрохронологического изучения скорости эрозионно-денудационных процессов в оврагах Горного Крыма. - В сб.: Закономерности проявления эрозионных процессов и русловых процессов в различных природных условиях. М., Изд-во МГУ, 1976.

К л ю к и н А. А. Применение фитоиндикационного метода для определения скорости современной денудации склонов куэст Крыма. - В сб.: Физическая география и геоморфология, вып. 17, Киев, "Вища школа", 1977.

К л ю к и н А. А., М о с к о в к и н В. М. Определение абсолютного возраста оврагов Предгорного Крыма по средней скорости отступления крутых склонов. - "Геоморфология", 1979, № 3.

К л ю к и н А. А., Р у д н и ц к и й Г. В., Т о л с т ы х Е. А., Х а р л а н о в а И. В. Выветривание мергелей в селевых бассейнах Крыма. - В сб.: Вопросы инженерной геодинамики, вып. 5, Ташкент, 1979.

К о в а л е в П. В., К о в а л е в А. П. Некоторые особенности селевых отложений в сравнении с другими генетическими типами отложений. - "Вестник Харьковского университета", № 173, вып. 9, Геология и география левобережной Украины, 1978.

К о с о в Б. Ф., З о р и н а Е. Ф., Н и к о л ь с к а я И. И. Экспериментальные исследования процесса оврагообразования. - В сб.: Экспериментальная геоморфология, № 3, М., Изд-во МГУ, 1978.

К о с о в Б. Ф., Л ю б и м о в Б. П. Оценка деформаций овражных склонов гравитационными процессами для прогнозирования роста оврагов. - В сб.: Эрозия почв и русловые процессы. Вып. 7, М., Изд-во МГУ, 1979.

К о ш к и н М. И., Ш и р к е в и ч М. Т. Справочник по элементарной физике. М., "Наука", 1974.

К у л и к В. Я. Исследование уравнений почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований. - В сб.: Исследование процессов обмена энергии веществом в системе почва - растение - воздух. Л., "Наука", 1972.

К у ц е н к о Н. В. Некоторые возможности применения аналогового моделирования в деле рекультивации и борьбы с эрозией. - В сб.: Проблемы охраны природы и рекреационной географии СССР, вып. 3. Моделирование и системный анализ. Тез. докл. Республ. научн. конферен., Харьков, 1979.

К у ц е н к о Н. В., М о с к о в к и н В. М. Некоторые аспекты приложения теории поля в географии. - Вестник Харьковского университета, "Геология и география левобережной Украины". Вып. II, 1960.

К у ч м е н т Л. С., Т р у б и х и н И. А. Двумерная модель формирования стока на водосборе, основанная на уравнениях кинетической волны. - Гр. ГМЦ СССР, № 183, 1977.

Л е в и И. И. Моделирование гидравлических явлений. Л., Госэнергоиздат, 1960.

Л и с т о п а д И. Е., Ч и ж и к о в Г. И. К вопросу скорости капель искусственного дождя и сила их удара. - "Тракторы и с/х машины", 1970, № 10.

Л и т в и н о в И. В. Структура атмосферных осадков. Л., Гидрометеиздат. 1960.

Л у т Б. Ф. Геоморфология Прибайкалья и впадины озера Байкал. Новосибирск, "Наука", 1978.

М а к к а в е е в Н. И. Взаимоотношение выветривания и эрозии. - В сб.: Закономерности проявления эрозионных и русловых процессов в различных природных условиях. М., Изд-во МГУ, 1976.

М а к с и м ч у к В. Л. Деформация морского берега в поли хвиль та прибрежных течий. - В сб.: Физична география та геоморфология, № 6, Киев, 1971.

М а т в е е в Н. П. Методика составления карт энергии дождевых осадков и использование их в геоморфологическом анализе. - Уч. зап. МОПИ, том. 124, вып. 10, 1963.

М е с х е л и К. П. Гидравлическое моделирование эолового рельефа. - В сб.: Вопросы географии, вып. 63, М., 1963.

М и р ц х у л а в а Ц. Е. Инженерные методы расчета и прогноза водной эрозии. М., "Колос", 1970.

М и т и н А. В., Т р о ф и м о в А. М. Об одном обобщении теории Баккера и Шайдеггера. - Ученые записки Казан. ун-та, т. 124, кн. 4, 1964.

М о с к о в к и н В. М. Методы теории подобия и размерностей в моделировании склоновых процессов. - Редкол. журн. "Изв. Вузов "Геология и разведка", № 6, 1978, ДЕТ ВИНТИ № 1488-78, 1978.

М о с к о в к и н В. М. К вопросу развития подрезаемых склонов и их устойчивости. - В сб.: Проблемы охраны природы и рекреационной географии УССР, вып. 3. Моделирование и системный анализ. Тез. докл. Республ. научн. конферен., Харьков, 1979.

Московкин В. М. Математическая модель скорости роста вершины оврага. - В сб.: Метеорология, климатология и гидрология. Вып. 16. Киев - Одесса, "Вища школа", 1980.

Московкин В. М., Гахов В. Ф. Физические аспекты капельно-дождевой эрозии. - "Почвоведение", 1979а, № 12.

Московкин В. М., Гахов В. Ф. Теоретические вопросы водной эрозии и защиты почв от нее. - В сб.: Теоретические вопросы противоэрозионных мероприятий, ч. I, Тез. докл. Всес. конферен., Одесса, 1979 б.

Московкин В. М., Трофимов А. М., Бабанов Ю. В. К методике решения уравнения баланса для склона. - В сб.: Вопросы географии и геологии, № 8, КГПИ. Казань, 1975.

Московкин В. М., Трофимов А. М. Некоторые вопросы теории развития осыпных склонов. - В сб.: Физическая география и геоморфология, вып. 20, Киев, "Вища школа", 1978.

Московкин В. М., Трофимов А. М. Математическая модель развития подрезаемого склона и ее приложение к вопросу его устойчивости. - "Геоморфология", 1980 б, № 2.

Московкин В. М., Трофимов А. М. К теории геоморфологического подобия. - "Вестник МГУ, сер. географ.", 1980, № 4.

Москивкин В. М. К вопросу оценки капельно-ударного воздействия при решении эрозионных задач. - В сб.: Моделирование природных и социально-экономических территориальных систем. Казань, Изд-во КГУ, 1981.

Мушкетов И. В. - Физическая геология. Т. 2, Денудационные процессы, М. - Л., 1926.

Ногуманов Н. Г., Московкин В. М., Трофимов А. М. Аналитические подходы в вопросах склоновой эрозии. - Тез. докл. У съезда ВОП, вып. 5. Минск, 1977.

Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Механика физических процессов. М., Изд-во МГУ, 1976.

Пашинский А. Ф. Гранулометрический состав русловых отложений горных рек флишевой зоны Крыма и Карпат. - В сб.: Селевые потоки и горные русловые процессы. Ереван, 1968.

- П е н к В. Морфологический анализ. М., Географгиз, 1961.
- П е р е л ь м а н Р. Г., П л и н е р Л. А. Определе-
ние давления на пятне контакта и его диаметра при капле-удар -
ном воздействии. - "Изв.вузов, Энергетика", 1975, № 5.
- П о з д н я к о в А. В. Развитие склонов и некоторые
закономерности формирования рельефа. М., "Наука", 1976.
- П у ш к а р е н к о В. Н., Н и В. А. К вопросу оценки
эрозионного потенциала селевых очагов методом геологических
аналогов. - В сб.: Вопросы инженерной геологии, вып. 2, Ташкент,
1976.
- Р а м з а е в Ф. С. Растения как показатель интенсивно-
сти эрозии. - "Ботанический журнал", 1956, № 3.
- Р о з о в с к и й Л. Б. Введение в теорию геологическо-
го подобия и моделирования. М., "Недра", 1968.
- Р у м я н ц е в В. А., К о н д р а т ь е в С. А. -
Гидрометеорология. Серия Гидрология суши. Обзорная информация,
вып. I, Математическое моделирование в гидрологии. Кинематико-
волновая модель склонового стока, ВНИГМИ МЦД, Обнинск, 1979.
- С в е т л о с а н о в В. А. О стабильности экосистем. -
"Вестник МГУ, сер. географ.", 1976, № 4.
- С е д о в Л. И. - Механика сплошной среды. Том I, М.,
"Наука", 1970.
- С е д о в Л. И. Методика подобия и размерностей в меха-
нике. М., "Наука", 1972.
- С е р г е е в а Л. Л., Д е в д а р и а н и А. С.
Рельеф Земли как потенциальное поле, описываемое уравнением
Лапласа. - В сб.: Количественные методы в географии. М., Изд-во
МГУ, 1976.
- С л а с т и х и н В. В. Вопросы мелиорации склонов Мол-
давии. Кишинев, 1964.
- С л а с т и х и н В. В. К расчету силы удара капли дож-
дя. - В сб.: Проблемы географии Молдавии, вып. 6, 1971.
- С л а с т и х и н В. В., Б о г д а н о в Х. П. Эрози-
онная работа дождя и энергетическая характеристика естественных
осадков. - Труды III делегатского съезда почвоведов. М., "Наука",
1968.
- С л а с т и х и н В. В., Г а в р и л и ц а А. О. Воз-
действие искусственного дождя и атмосферных осадков на поверх, -

ность водосбора. - В сб.: Гидрология малых водосборов. Кишинев, "Штиинца", 1978.

С и м о н о в Ю. Г. Распределение солнечной энергии по склонам различной крутизны в равнинных условиях на 50 градусе с.ш. - Уч. зап. Московск. ун-та, вып. 182, 1956.

С и м о н о в Ю. Г. Модели географического взаимодействия для прогнозирования эволюции окружающей среды. - "Вестник МГУ, сер. географ.", 1976, № 4.

С м и т Дж. Модели в экологии. М., "Мир", 1976.

С о б о л е в с к и й П. К. Современная горная геология. - В сб.: Социалистическая реконструкция и наука. Вып. 7, 1932.

С о к о л о в В. Г. Гидродинамические и гидравлические уравнения, описывающие склоновый дождевой поток с учетом инфильтрации. - "Водные ресурсы", 1973, № 2.

Т е в з а д з е В. И. К вопросу установления поля касательных напряжений и скоростей при установившемся неравномерном плоском движении селевого (грязекаменного) потока. - В сб.: Эрозионные и селевые процессы и борьба с ними. Вып. 5, Тбилиси, 1976.

Т р о ф и м о в А. М. Основы аналитической теории развития склонов. Казань, Изд-во КГУ, 1974.

Т р о ф и м о в А. М., Б а б а н о в Ю. В. Профиль склона при подмыве его основания. - Уч. зап. Казанск. ун-та, Т. 137, кн. 6, 1968.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. Аналитические аспекты развития выпукло-вогнутых склонов. Казанск. ун-т Казань, ДЕП ВИНТИ, № 3940-76, 1976 а.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. Одна аналитическая модель развития делювиального склона. Казан. ун-т, Казань, ДЕП ВИНТИ, № 1798-76, 1976 б.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. О движении обломков по поверхности осыпи. - В сб.: Природно-территориальные и производные комплексы Приуралья. Ижевск, 1977.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. К теории интенсивности денудации Шайдеггера. - В сб.: Вопросы геоморфологии Поволжья, вып. 215. Саратов, 1978 а.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. Климатологическая и общегеографическая обусловленность динамических моделей развития склонов. - В сб. Климат, рельеф и деятельность

человека. Ч. I. Тез. докл. Всес. совещ. Казань, Изд-во КГУ, 1978 б.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. К механизму развития склонов под действием медленного смещения материала. - "Изв. вузов. Геология и разведка", № I, 1979 а.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. Математические модели развития береговых склонов. - В сб.: Математико-географическое моделирование. Казань, Изд-во КГУ, 1979 б.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. К вопросу исследования математической модели баланса выветрелого материала на склоне. - В сб.: Математико-географическое моделирование. Казань, Изд-во КГУ, 1979 в.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. Энергетический подход к сравнительной оценке интенсивности протекания водноэрозионных процессов. - В сб.: Теоретические основы противоэрозионных мероприятий, ч. I, Тез. докл. Всес. конференц. Одесса, 1979.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М., Х а й-ру т д и н о в А. Г. Динамические модели в геоморфологии. - В сб.: Математическое моделирование. Казань, Изд-во КГУ, 1979.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. Теория поля в географии. - В сб.: Моделирование географических систем. Казань, Изд-во КГУ, 1980.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М., К о-рот и н а Н. М. Методика сравнительного анализа динамики овражных систем. - В сб.: Моделирование географических систем. Казань, Изд-во КГУ, 1980.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М., Х а й-ру т д и н о в А. Г. Математическое моделирование рельефа в свете изучения природных географических систем (общий подход). - В сб.: Моделирование географических систем. Казань, Изд-во КГУ, 1980.

Т р о ф и м о в А. М., М о с к о в к и н В. М. Моделирование процесса формирования абразионного подводного склона при периодических колебаниях уреза водораздела. - В сб.: Моделирование природных и социально-экономических территориальных систем. Изд-во КГУ, 1981 а.

Трофимов А. М., Московкин В. М. Аналитический учет асимметрии склонов речных долин при оценке хозяйственного использования территории. - В сб. : Моделирование природных и социально-экономических территориальных систем. Казань, Изд-во КГУ, 1981 б.

Трофимов А. М., Переведенцев Ю. П., Московкин В. М. Проблема механизма развития склонов под воздействием чехла рыхлого материала. - В сб.: Проблемы отраслевой и комплексной географии. Казань, Изд-во КГУ, 1976.

Тушинский Г. К. Ритмы в оледенении и снежности Кавказа в историческое время. - В кн.: Оледенение Эльбруса. М., Изд-во МГУ, 1968.

Фисенко Г. Л., Кагермазова С. В. Закономерности выветривания и осыпания в откосах горных выработок. - В сб.: Вопросы инженерно-геологического изучения процессов и кор выветривания. М., Изд-во МГУ, 1971.

Флоренский К. П., Базилевский А. Т., Пронин А. А., Бурба Г. А. Результаты геолого-морфологического анализа панорам Венеры. - В кн.: Первые панорамы поверхности Венеры. М., "Наука", 1979.

Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. М., "Мир", 1968.

Холматова Р. Н. Динамика берегов южносуранского водохранилища. - В сб.: Вопросы инженерной геодинамики. Вып. 2, Ташкент, 1976.

Хортон Р. Е. Эрозионное развитие рек и речных бассейнов. М., ИЛ, 1948.

Хьюит К. Вероятностный подход к дискретным событиям в природе: обзор и теоретическое обозрение. - В сб.: Новые идеи в географии, вып. I. Проблемы моделирования и информации. М., "Прогресс", 1976.

Чеботарев Н. П. Учение о стоке. М., Изд-во МГУ, 1962.

Черванев И. Г. О саморазвитии рельефа. - "Вестник Харьковского ун-та. Геология и география", № 173, вып. 9, 1978.

Читишвили Г. Ш. Расчет интенсивности плоскостной эрозии с учетом влияния кривизны склона. - В сб.: Эрозионные и селевые процессы и борьба с ними. Вып. 3, Сб. науч. трудов ВНИИГМ, 1974.

- Ч у г а е в Р. Р. Гидравлика. Л., "Энергия", 1975.
- Ш а й д е г г е р А. Е. Теоретическая геоморфология. М., "Прогресс", 1964.
- Ш в е б с Г. И. Формирование водной эрозии, стока наносов и их оценка. Л., Гидрометеоиздат, 1974.
- Ш в е б с Г. И., С в е т л и ч н ы й А. А. Проблема оценки эффективности противоэрозионных мероприятий. - В сб.: Теоретические основы противоэрозионных мероприятий, Ч. I. Тез. докл. Всесоюзн. конферен. Одесса, 1979.
- Ш и р о к о в В. М., М о с к о в к и н В. М., Т р о ф и м о в А. М. Теоретические аспекты формирования берегов водохранилищ. - Тез. докл. Всесоюзн. научн.-тех. совещания по динамике берегов водохранилищ, их охране и рациональному использованию, кн. 4, Прогнозы переработки берегов водохранилищ. Черкассы, 1979.
- Я г о д и н а Л. Л. Математические модели рельефа. Автореферат кандидатской диссертации. Л., 1973.
- A h n e r t F. The role of the equilibrium concept in the interpretation of landform of fluvial erosion and deposition. - In.: "L'Evolution des Versants", Macar (Editor), Liege, 1967.
- A h n e r t F. COSLOP-2. A comprehensive model program for simulating slope profile development. Geocom Programs, 8, 1973.
- A h n e r t F. Some comment on the quantitative formulation of geomorphological processes in a theoretical model. "Earth Surf. Processes", vol. 2. N 2-3, 1977.
- B e n t l e y W. A. Studies in raindrops and raindrop phenomena. Monthly Weather Review, October, 1904.
- B o n e s J. G. Process and sediment size development on high arctic talus slopes, South West Devon Island, North West Territories, Canada, Arctic and Alpine Research, vol. 5, N1, 1973.
- C a i n e T. N. The texture of talus in Tasmania. Journal of Sedimentary Petrology, vol. 37, N3, 1967.
- C a r s o n M. A., K i r k b y M. J. Hillslope form and process. Cambridge University Press, 1972.

C h a d i r i H., P a y n e O. Raindrop impact stress and the break-down of soil crumbs. J. Soil. Sci., vol. 28, N2, 1977.

C h a n g J e n - H u. Ground temperature. Blue Hills Meteorological Laboratory (Harvard University), Milton, Massachusetts, 1958.

C h e n C., C h o w V. T. Formulation of mathematical watershed-flow model. J. Eng. Mech. Div. Proc., vol. 97, NEM 3, 1971.

C h e n g L u n g. Dynamic spreading of drops impacting into a solid surface. Ind. and Engng. Chem. Proc. Des. and Develop., vol. 16, N2, 1977.

C h o w V. T., B e n - Z v i A. Hydrodynamic modelling of two-dimensional watershed flow. J. Hydr. Div. Proc. ASCE, vol. N HY II, 1973.

C r i c k m a y C. H. A preliminary inquiry into formulation of the geological principle of uniformity, Calgary, 1959.

C u l l i n g W. E. H. Analytical theory of erosion. J. Geol. vol. 68, N3, 1960.

C u l l i n g W. E. H. Soil creep and the development of hillside slopes. J. Geol. vol. 71, N2, 1963.

C u l l i n g W. E. H. Theory of erosion on soil-covered slopes. J. Geol. vol. 73, N2, 1965.

E k e r n P. C. Raindrop impact as the force initiating soil erosion. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., vol. 15, 1950.

E k e r n P. C. Problem of raindrop impact erosion. Agr. Engng., January, 1953.

E l l i s o n W. D. Studies of raindrop erosion. Agr. Engng., vol. 25, N4, 1944.

E l l i s o n W. D. Soil detachment and transportation. Soil Conserv. Mag. Feb., vol. 23, NI, 1946.

E m m e t t W. W. The hydraulics of overland flow on hillslopes. Geol. Survey Pocof. Paper 662-A, Washington, 1970.

F o s t e r G. R., M e y e r L. D. Transport of soil particles by shallow flow. Trans ASAE vol. 15, NI, 1972.

G a r d n e r J. Debris form and process in the Lake Louise District; a high mountain area. Unpublished. Ph.D thesis, Mc Gill University, 1968.

G e r b e r E. Form und Bildung alpiner Talböden. Geographica Helvetica, vol.14, N3, 1959.

G r a c e R. A., E a g l e s o n P. S. The modelling of overland flow. Water Resources Research, vol.2, N3, 1966.

G r e n a n d e r U l f. Dynamic models of geomorphological patterns. J.Int. Assoc. Math.Geol., vol.7, N3, 1975.

G u n n R., K i n z e r G. D. Terminal velocity of water droplets in stagnant air. Journal of Meteorology, 6, 243, 1949.

H e r b e t s o n J. G. A critical review of conventional bed load formulae, J. Hydrology, vol.8, N1, 1969.

H e y m a n n F. J. On the high-speed impact between a liquid drop and a solid surface. Journal of Applied Physics, vol.40, N13, 1969.

H i r a n o M. Geogr. Rev. Jap., vol.45, N10, 1971.

H i r a n o M. Quantitative morphometry of fault with reference to the Hira Mountains, Central Japan. "Jap. Geol. and Geogr.", vol.42, N1-4, 1972.

H o r t o n R. E. Erosional development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantitative morphology. Geol. Soc. Amer. Bull., vol.56, N3, 1945.

H u b b e r t M. K. Theory of scale models as applied to the study of geologic structures. Geol. Soc. Amer. Bull., vol.48, N10, 1937.

H u t c h i n s o n J. N. The response of London Clay Cliffs to differing rates of toe erosion. Build. Res. Establ. Cur. Pap., N27, 1975.

K i r k b y M. J., S t a t h a m I. Surface stone movement and scree formulation. J. Geol. vol.83, N3, 1975.

K o j a n E. Mechanics and rates of natural soil creep. In Proceedings fifth Annual Engineering geology and soils engineering symposium. Pocatello, Idaho, 1967.

L a M a r c h e V. C. Rates of slope degradation as determined from botanical evidence White Mountains California. "Geol. Surv. Profess. Paper", N352-1, 1968.

L e h m a n n O. Morphologische Theorie der Verwitterung von Steinschlagwänden. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 78, H.3-4, 1933.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
В В Е Д Е Н И Е	3
Ч а с т ь I. Введение в теорию детерминированных балансовых моделей развития склонов	6
Г л а в а I. Диффузионные модели развития склонов ..	8
§ 1. Концепция теории поля в геоморфологии склонов	9
§ 2. Краевые двумерные задачи I и II рода в неподвижных областях	13
§ 3. Краевые одномерные задачи I и II рода в неподвижных областях	16
§ 4. Краевые одномерные задачи I рода в подвижных областях (концепция подрезаемых с постоянной скоростью склонов)	24
§ 5. Приложение концепции подрезаемых склонов	34
§ 6. Отрицательная обратная связь в диффузионной модели подрезаемого склона	42
§ 7. Краевые одномерные задачи III рода в подвижных областях	53
§ 8. Системная диффузионная модель оврагоформирования	64
§ 9. Ретроспективный анализ диффузионных моделей..	66
§ 10. Подходы к определению коэффициента денудации диффузионных моделей	68
Г л а в а 2. Геомеханические модели развития склонов	70
§ 1. Геомеханические модели развития склонов, основанные на уравнениях баланса материала, деформации и расхода материала	71
§ 2. Геомеханические модели развития склонов, основанные на уравнениях баланса материала, деформации и гидродинамики потока	79

	Стр.
Г л а в а 3. Кинематические модели развития склонов	88
§ 1. Кинематические модели Лемана и их приложения	89
§ 2. Кинематические модели Шайдеггера и их даль- нейшее развитие	94
§ 3. Учет быстрых периодических колебаний уровня водоема (моря) в модели подводного абразионного склона, Шайдеггера	99
§ 4. Комплексные диффузионно-кинематические моде- ли развития склонов	103
§ 5. Кинематические модели Шайдеггера как частный случай балансовых моделей	108
Ч а с т ь 2. Динамические модели склоновых систем (приложение качественной теории динами- ческих систем)	110
Г л а в а I. Динамические модели береговых склоно- вых систем	111
§ 1. Модель взаимодействия областей сноса и акку- муляции через область транзита склона, с учетом подмыва области аккумуляции	112
§ 2. Динамические модели абразионных склонов	116
Г л а в а 2. Динамические модели небереговых скло- новых систем	122
§ 1. Динамическая модель осыпного склона	122
§ 2. Динамическая модель процесса оврагообразо- вания	123
§ 3. Динамическая модель развития рельефа под воз- действием денудации и тектоники	125
§ 4. Динамические модели склонов, основанные на равновесной концепции Анерта	127
Ч а с т ь 3. Математическое моделирование склоновых процессов	135
Г л а в а I. Моделирование водно-эрозионных процес- сов	135
§ 1. Моделирование процессов капельно-дождевой эро- зии	135

	Стр.
§ 2. Энергетический аспект взаимоотношения интенсивностей протекания процессов плоскостного и мелкочейкового смыва	150
§ 3. Моделирование овражных процессов и систем ..	156
Г л а в а 2. Моделирование процессов, происходящих в осыпях	174
§ 1. Моделирование процессов движения и дифференциации обломков в осыпях	174
§ 2. К методике гранулометрического анализа осыпного материала	181
Г л а в а 3. Методы подобия и размерностей в моделировании склоновых процессов	186
§ 1. Моделирование процесса капельно-дождевой эрозии	191
§ 2. Моделирование процессов абразии, склоновой и боковой эрозии	194
§ 3. Моделирование обвально-осыпных процессов ...	197
З А К Л Ю Ч Е Н И Е	200
Л И Т Е Р А Т У Р А	201

Анатолий Михайлович Трофимов

Владимир Михайлович Московкин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ГЕОМОРФОЛОГИИ СКЛОНОВ

Редактор Р.С.Александрова

Техн.редактор Г.М.Семенова

Корректор Э.А.Кузнецова

Обложка художника Э.Я.Зарипова

ИБ № 590