УДК 517.968

ОБ ОБРАТИМОСТИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЧАСТИЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

И.В. Барышева

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail:barysheva_iv@mail.ru

Аннотация. Исследуются условия обратимости, нётеровости и фредгольмовости линейных уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций двух переменных. Основные результаты получены с применением аппроксимаций операторов с частными интегралами посредством операторов такого типа, но с вырожденными ядрами.

Ключевые слова: операторы и уравнения с частными интегралами, нётеровость, фредгольмовость, обратимость, аппроксимации операторов.

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$(I-K)x=f, \tag{1}$$

где I — единичный оператор, $K = L + M + N$, операторы L, M, N определяются равенствами

$$\begin{gathered}(Lx)(t,s)=\int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, \quad (Mx)(t,s)=\int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,\\ (Nx)(t,s)=\int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,\end{gathered} \tag{2}$$

$t,\tau\in[a,b]$; $s,\sigma\in[c,d]$, $l(t,s,\tau)$; $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ и $f(t,s)$ – заданные измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Уравнение (1) (оператор K) обычно называют уравнением (оператором) с частными интегралами, так как в нём содержатся интегралы, в которых неизвестная функция x интегрируется по части переменных. Разрешимость, свойства решений уравнения (1) и свойства оператора K зависят от пространств, в которых они рассматриваются, и отличаются от свойств обычных интегральных уравнений и операторов. В частности, оператор K не является компактным даже в общем случае непрерывных ядер l, m, n. Более того, при $[a,b]=[c,d]=[0,1]$, единичном ядре l и нулевых функциях m и n K – не интегральный, а $I-K$ – не нётеров операторы, тогда как $(Bx)(t)=\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau$ – компактный интегральный оператор с ядром l.

Частные случаи уравнения (1) появляются при решении различных задач механики сплошных сред, теории упругости, дифференциальных уравнений с частными производными и других задач [1-6].

Линейным операторам и уравнениям с частными интегралами и их приложениям посвящены монографии [4-9]; в этих же книгах приведена и библиография работ по данному направлению.

Решение уравнения (1) может обладать различными свойствами по каждой из своих переменных. Некоторые линейные задачи теории нестационарных внутренних волн приводятся к интегральным уравнениям с частными интегралами с дважды дифференцируемыми по одной из переменных решениями [10], а задача Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений Барбашина, моделирующих различные прикладные задачи, связана с нахождением решений частных случаев уравнения (1).

В настоящей работе исследуются условия нётеровости, фредгольмовости и обратимости операторов и уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций двух переменных.

Пусть $C(D)$ – пространство непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций. Через $U = C\big(C^{(p)}(t)\big)$ обозначим пространство функций $x(t,s)$, непрерывных на D вместе с частными производными по переменной t от первого до p-го порядка включительно. U – банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_U = \sup_{s,t} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k x(t,s)}{\partial t^k} \right| = \sup_{s} \sup_{t} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k x(t,s)}{\partial t^k} \right| .$$

Очевидно неравенство $\|x\|_{C(D)} \leq \|x\|_U \quad (x \in U)$, которое показывает, что пространство U непрерывно вложено в $C(D)$.

В силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса [11, с. 20] множество многочленов $P(t,s)$ всюду плотно в U. В работе [12] показано, что в пространстве U действуют и непрерывны операторы (2) и K, если ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными по переменной t от первого до p-го порядка.

Через C_1, C_2, C_3 обозначим множества непрерывных вместе с частными производными по переменной t до p-го порядка включительно функций $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ соответственно. Эти пространства могут рассматриваться как пространства вектор-функций $C_{[a,b]}(U)$, $C_{[c,d]}(U)$, $C_D(U)$ с нормами $\|l\|_{C_1} = \sup_\tau \|l(\cdot,\cdot,\tau)\|_U$, $\|m\|_{C_2} = \sup_\sigma \|m(\cdot,\cdot,\sigma)\|_U$, $\|n\|_{C_3} = \sup_{\tau,\sigma} \|n(\cdot,\cdot,\tau,\sigma)\|_U$, относительно которых они являются банаховыми пространствами. В множествах C_1, C_2, C_3 всюду плотны множества многочленов, заданных на $D \times [a,b]$, $D \times [c,d]$, $D \times D$ соответственно.

2. Аппроксимации операторов с частными интегралами. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}(U)$ ограниченных на U линейных операторов аппроксимацию оператора K

оператором $\widetilde{K}$ вида

$$\int_a^b \tilde{l}(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau +$$
$$+\int_c^d \tilde{m}(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^b\int_c^d \tilde{n}(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau.$$

Теорема 1. *Если заданные функции $l, m, n, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными по переменной t от первого до p-го порядка, причём*

$$\sum_{k=0}^{p}\int_a^b\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(l-\tilde{l})(t,s,\tau)\right|d\tau < \varepsilon_1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{k}\int_c^d C_k^i\left|\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}(m-\tilde{m})(t,s,\sigma)\right|d\sigma < \varepsilon_2\,,$$

$$\sum_{k=0}^{p}\int_a^b\int_c^d\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(n-\tilde{n})(t,s,\tau,\sigma)\right|d\sigma d\tau < \varepsilon_0\,,$$

где C_k^i – число сочетаний из k элементов по i, то $\|K-\widetilde{K}\| < \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

□ Операторы K и $\widetilde{K}$ действуют в пространстве U [12]. Непрерывность заданных функций и их производных по t до порядка p включительно обеспечивает возможность дифференцирования под знаком интеграла. Тогда

$$\|Kx-\widetilde{K}x\|_U = \sup_{t,s}\sum_{k=0}^{p}\left[\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_a^b(l-\tilde{l})(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau +\right.\right.$$
$$+\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_c^d(m-\tilde{m})(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_a^b\int_c^d(n-\tilde{n})(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\right|\right] \le$$
$$\le \sup_{t,s}\sum_{i=0}^{p}\left[\int_a^b\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(l-\tilde{l})(t,s,\tau)\right||x(\tau,s)|d\tau +\right.$$
$$+\int_c^d\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left|\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}(m-\tilde{m})(t,s,\sigma)\right|\left|\frac{\partial^i x(t,\sigma)}{\partial t^i}\right|d\sigma +$$
$$\left.+\int_a^b\int_c^d\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(n-\tilde{n})(t,s,\tau,\sigma)\right||x(\tau,\sigma)|d\sigma d\tau\right] \le$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left[\int_a^b \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k}(l-\tilde{l})(t,s,\tau) \right| d\tau + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} C_k^i \int_c^d \left| \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}(m-\tilde{m})(t,s,\sigma) \right| d\sigma +$$

$$\left. + \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k}(n-\tilde{n})(t,s,\tau.\sigma) \right| d\sigma d\tau \right] \leq \|x\| \cdot \varepsilon .$$

Отсюда следует, что $\|K - \widetilde{K}\| < \varepsilon$. ■

В качестве $\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$ можно рассматривать вырожденные ядра

$$\begin{gathered} \tilde{l}(t,s,\tau) = \sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau), \quad \tilde{m}(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma), \\ \tilde{n}(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma) , \end{gathered} \tag{3}$$

где $l_n, m_j, n_u \in U$; a_n, b_j, c_u $(n = 1,\ldots,w;\ j = 1,\ldots,v;\ u = 1,\ldots,r)$ – непрерывные функции.

Теорема 2. *Пусть ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными по переменной t от первого до p-го порядка. Тогда найдутся последовательности операторов L_i, M_i, N_i, K_i с вырожденными ядрами* (3), *которые сходятся к операторам L, M, N, K соответственно в пространстве $\mathfrak{L}(U)$ ограниченных на U линейных операторов.*

□ Оценим нормы разностей операторов L, M, N и L_i, M_i, N_i соответственно. В силу непрерывности заданных функций l, m и n и функций (3) вместе с частными производными по переменной t до порядка p включительно имеют место оценки:

$$\|L_i x - Lx\|_U = \left\| \int_a^b \sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) x(\tau,s) d\tau - \int_a^b l(t,s,\tau) x(\tau,s) d\tau \right\|_U =$$

$$= \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) - l(t,s,\tau) \right] x(\tau,s) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_a^b \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) - l(t,s,\tau) \right] \right| d\tau ,$$

$$\|M_i x - Mx\|_U = \left\| \int_c^d \sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) x(t,\sigma) d\sigma - \int_c^d m(t,s,\sigma) x(t,\sigma) d\sigma \right\|_U =$$

$$= \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_c^d \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] x(t,\sigma) d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_c^d \sum_{\beta=0}^{k} C_k^\beta \left| \frac{\partial^{k-\beta}}{\partial t^{k-\beta}} \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] \right| \cdot \left| \frac{\partial^\beta x(t,\sigma)}{\partial t^\beta} \right| d\sigma \leq$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_c^d \sum_{\beta=0}^{k} C_k^\beta \left| \frac{\partial^{k-\beta}}{\partial t^{k-\beta}} \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] \right| d\sigma ,$$

$$\|N_i x - Nx\|_U \leq$$

$$\leq \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_a^b \int_c^d \left[\sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma) - n(t,s,\tau,\sigma) \right] x(\tau,\sigma) d\sigma d\tau \right| \leq$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma) - n(t,s,\tau,\sigma) \right] \right| d\sigma d\tau .$$

Вырожденными ядрами (3) могут быть многочлены, множества которых всюду плотны в C_1, C_2, C_3 соответственно. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $i_0(\varepsilon)$ такой, что неравенства

$$\sum_{k=0}^{p} \int_a^b \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) - l(t,s,\tau) \right] \right| d\tau < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

$$\sum_{k=0}^{p} \int_c^d \sum_{\beta=0}^{k} C_k^\beta \left| \frac{\partial^{k-\beta}}{\partial t^{k-\beta}} \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] \right| d\sigma < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

$$\sum_{k=0}^{p} \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma) - n(t,s,\tau,\sigma) \right] \right| d\sigma d\tau < \frac{\varepsilon}{3}$$

выполняются сразу для всех $(t,s) \in D$ и для всех номеров $i \geq i_0$. В этом случае

$$\|L_i x - Lx\|_U \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\| , \quad \|M_i x - Mx\|_U \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\| , \quad \|N_i x - Nx\|_U \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\| ,$$

$$\|K_i x - Kx\|_U = \|L_i x + M_i x + N_i x - Lx - Mx - Nx\|_U \leq$$

$$\leq \|L_i x - Lx\| + \|M_i x - Mx\| + \|N_i x - Nx\| \leq \varepsilon \|x\| .$$

Следовательно, $\|L_i - L\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|M_i - M\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|N_i - N\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|K_i - K\| < \varepsilon$.

Таким образом, последовательности операторов L_i, M_i, N_i, K_i с вырожденными ядрами (3) сходятся в $\mathcal{L}(U)$ к операторам L, M, N, K соответственно. ■

3. Нётеровость, фредгольмовость и обратимость. Здесь и далее под нётеровым (фредгольмовым) оператором понимается линейный непрерывный оператор с замкнутой областью значений, у которого размерности ядра и коядра конечны (размерности ядра и коядра конечны и совпадают).

Так как $I - K = (I - L)(I - M) - (LM + N) = (I - M)(I - L) - (ML + N)$, то уравнение (1) эквивалентно уравнениям

$$(I - L)(I - M)x = f + (LM + N)x, \quad (I - M)(I - L)x = f + (ML + N)x . \qquad (4)$$

Следующее утверждение содержится в [5, с. 73].

Теорема 3. *Если операторы L, M и N непрерывны в банаховом пространстве $X = X(D)$, а операторы $N + LM$ и $N + ML$ компактны в X, то нётеровость оператора $I - K$ равносильна нётеровости операторов $I - L$ и $I - M$. Если дополнительно оператор $I - L$ $(I - M)$ фредгольмов, то фредгольмовость оператора $I - K$ равносильна фредгольмовости оператора $I - M$ ($I - L$ соответственно).*

Следовательно, нётеровость (фредгольмовость) оператора $I - K$ равносильна нётеровости (фредгольмовости) двух операторов $(I - L)(I - M)$ и $(I - M)(I - L)$ и соответственно уравнений $(I - L)(I - M)x = f$ и $(I - M)(I - L)x = f$, которая в свою очередь равносильна нётеровости операторов $I - L$ и $I - M$ и соответственно уравнений

$$(I - L)x = f, \quad (I - M)x = f. \tag{5}$$

Условия обратимости (фредгольмовости, нётеровости) уравнений (5) в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций рассматривались в работе [13]. Аналогичные утверждения для пространства U доказаны в [14].

Теорема 4. *Если $l \in C_1$ и $m \in C_2$, то в пространстве U обратимость, фредгольмовость и нётеровость уравнений (5) совпадают с обратимостью в $C^{(p)}_{[a,b]}$ и $C_{[c,d]}$ соответственно интегральных уравнений Фредгольма второго рода*

$$x(t) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau)d\tau + f(t) \qquad (s \in [c,d]\,,\ f \in C^{(p)}_{[a,b]}),$$

$$x(s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(\sigma)d\sigma + g(s) \qquad (t \in [a,b]\,,\ g \in C_{[c,d]})\,.$$

Пусть операторы $(I - L)^{-1}$ и $(I - M)^{-1}$ существуют и представимы в виде

$$(I - L)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_a^b r_1(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau\,, \tag{6}$$

$$(I - M)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_c^d r_2(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma\,, \tag{7}$$

где r_1 и r_2 – резольвентные ядра операторов L и M соответственно. Тогда уравнение (1) равносильно уравнениям

$$(I - H)x = u\,, \tag{8}$$

$$(I - P)x = v\,, \tag{9}$$

где $H = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}(LM + N)$, $P = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1}(ML + N)$, $u = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}f$, $v = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1}f$. Если теперь обратимы операторы $I - H$ и $I - P$, то обратим и оператор $I - K$.

Условия обратимости оператора $I - K$ с p раз непрерывно дифференцируемыми по переменной t ядрами $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ в пространстве U содержит установленная в [15]

Теорема 5. *Фредгольмов оператор $I - K$ (уравнение (1)) с непрерывными по совокупности переменных вместе с частными производными по переменной t до p-го порядка включительно ядрами l, m, n обратим (обратимо) тогда и только тогда, когда обратимы операторы $I - H$ и $I - P$ (уравнения (8)и (9)).*

Пусть операторы $(I-L)^{-1}$ и $(I-M)^{-1}$ существуют и представимы в виде (6) и (7) соответственно. Тогда уравнение (1) равносильно уравнению (8).

Рассмотрим подробнее уравнение (8). Пусть ядра l, m, n непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по переменной t до p-го порядка включительно. Тогда таким же свойством обладают и резольвентные ядра r_1 и r_2. С применением теоремы Фубини в [7, с. 96] для оператора H и функции u получены следующие выражения:

$$(Hx)(t,s) = \int_a^b \int_c^d h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

где

$$\begin{gathered}
h(t,s,\tau,\sigma) = l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma) + n(t,s,\tau,\sigma) + \\
+\int_a^b r_1(t,s,\tau_1)l(\tau_1,s,\tau)m(\tau,s,\sigma)d\tau_1 + \int_a^b r_1(t,s,\tau_1)n(\tau_1,s,\tau,\sigma)d\tau_1 + \\
+\int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)l(t,\sigma_1,\tau)m(\tau,\sigma_1,\sigma)d\sigma_1 + \int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)n(t,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 + \\
+\int_a^b \int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)r_1(t,\sigma_1,\tau_1)l(\tau_1,\sigma_1,\tau)m(\tau,\sigma_1,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1 + \\
+\int_a^b \int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)r_1(t,\sigma_1,\tau_1)n(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1\,,
\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}
u(t,s) = f(t,s) + \int_a^b r_1(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int_c^d r_2(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \\
+\int_a^b \int_c^d r_2(t,s,\sigma)r_1(t,\sigma,\tau)f(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,.
\end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, в уравнении (8) H – интегральный оператор.

Пусть существует оператор $(I-H)^{-1}$ и

$$(I-H)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,. \tag{12}$$

Тогда решение уравнения (8) запишется в виде

$$x(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\,. \tag{13}$$

Подставляя (11) в (13), получим

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_a^b r_1(t,s,\tau)f(\tau,s)\,d\tau + \int_c^d r_2(t,s,\sigma)f(t,\sigma)\,d\sigma + \\ + \int_a^b \int_c^d r(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau\,, \tag{14}$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma) = r_2(t,s,\sigma)r_1(t,\sigma,\tau) + r_3(t,s,\tau,\sigma) + \\ + \int_a^b r_3(t,s,\tau_1,\sigma)r_1(\tau_1,\sigma,\tau)d\tau_1 + \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma_1)r_2(\tau,\sigma_1,\sigma)d\sigma_1 + \\ + \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau_1,\sigma_1)r_2(\tau_1,\sigma_1,\sigma)r_1(\tau_1,\sigma,\tau)d\sigma_1 d\tau_1\,.$$

Функции r_1, r_2 и r (r_1, r_2 и r_3) называют *резольвентными ядрами* оператора K с частными интегралами (операторов L, M и H соответственно). При этом оператор $(I-K)^{-1}$ определяется правой частью равенства (14), т.е. является оператором такого же типа, что и оператор $I-K$.

Определим вид и условия существования оператора, обратного к оператору $I-H$ в пространстве U. Так как функции l, m, n, r_1, r_2 и f непрерывны вместе со своими частными производными по t до p-го порядка, то полученные по формулам (10) и (11) функции $h(t,s,\tau,\sigma)$ и $u(t,s)$ также p раз непрерывно дифференцируемы по t.

Рассмотрим аппроксимацию оператора H оператором $\widetilde{H}$ с вырожденным ядром $\widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma) = \sum\limits_{i=1}^{q} h_i(t,s)d_i(\tau,\sigma)$, где $h_i \in U$, а функции d_i $(i=1,\ldots,q)$ образуют ортонормированную систему в $C(D)$, при которой

$$\sup_{t,s,\tau,\sigma} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k}\Big[h(t,s,\tau,\sigma) - \widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma)\Big] \right| < \varepsilon < \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,.$$

Тогда для оператора $(\mathcal{H}x)(t,s) = \int_a^b \int_c^d \xi(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$ с ядром $\xi(t,s,\tau,\sigma) = h(t,s,\tau,\sigma) - \widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma)$ выполняется условие $\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{L}(U)} < 1$ и уравнение $(I-\mathcal{H})x = u$ имеет для любой функции $u \in U$ единственное решение из U

$$x(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

где

$$\zeta(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi^{(j)}(t,s,\tau,\sigma) \tag{15}$$

– резольвентное ядро оператора $\mathcal{H}$, а $\xi^{(j)}$ – итерированные ядра, причем $\xi^{(1)}(t,s,\tau,\sigma) = \xi(t,s,\tau,\sigma)$,

$$\xi^{(j)}(t,s,\tau,\sigma) =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \xi(t,s,\tau_{j-1},\sigma_{j-1})\xi^{(j-1)}(\tau_{j-1},\sigma_{j-1},\tau,\sigma)d\tau_{j-1}d\sigma_{j-1} \qquad (j=2,3,\ldots)\,.$$

Так как $I - H = I - \mathcal{H} - \widetilde{H} = (I-\mathcal{H})(I-(I-\mathcal{H})^{-1}\widetilde{H})$, то уравнение (8) можно записать в виде

$$(I-(I-\mathcal{H})^{-1}\widetilde{H})x = w\,,$$

где

$$w(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

$$((I-\mathcal{H})^{-1}x)(t,s) = x(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

$$((I-\mathcal{H})^{-1}\widetilde{H}x)(t,s) = \int_a^b \int_c^d [\widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma) \; +$$

$$+ \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau_1,\sigma_1)\widetilde{h}(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1]x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \sum_{i=1}^q d_i(\tau,\sigma)[h_i(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau_1,\sigma_1)h_i(\tau_1,\sigma_1)d\sigma_1 d\tau_1]x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s)d_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau = (\overline{H}x)(t,s)\,,$$

$$\overline{h}_i(t,s) = h_i(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau_1,\sigma_1)h_i(\tau_1,\sigma_1)d\sigma_1 d\tau_1\,,$$

очевидно, – p раз непрерывно дифференцируемая по t функция и

$$\overline{h}(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s)d_i(\tau,\sigma)$$

– ядро интегрального оператора $\overline{H}$. Таким образом, уравнение (8) сводится к уравнению

$$x(t,s) - \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s) \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau = w(t,s)\,.$$

Тогда

$$x(t,s) - \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s)y_i = w(t,s)\,, \tag{16}$$

где

$$y_i = \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,. \tag{17}$$

Подставляя (16) в (17), получим систему

$$y_i - \sum_{j=1}^{q} y_j\eta_{ij} = w_i \qquad (i=1,\dots,q)\,; \tag{18}$$

здесь

$$w_i = \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)w(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,, \qquad \eta_{ij} = \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)\overline{h}_j(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,.$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\eta_{11} & \dots & -\eta_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\eta_{q1} & \dots & 1-\eta_{qq} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Если $\Delta \neq 0$, то оператор $I - \overline{H}$ обратим, а система (18) имеет единственное решение

$$y_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} \Delta_{ji}w_j \qquad (i=1,\dots,q)\,,$$

где Δ_{ji} – алгебраическое дополнение элемента c_{ij} $(i,j=1,\dots,q)$ в (19). Подставляя это решение в (16) и учитывая определение w_j, получим

$$x(t,s) = w(t,s) + \int_a^b \int_c^d \overline{r}_3(t,s,\tau,\sigma)w(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,. \tag{20}$$

где резольвентное ядро оператора $\overline{H}$ определяется по формуле

$$\overline{r}_3(t,s,\tau,\sigma) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \Delta_{ji}\overline{h}_i(t,s)d_j(\tau,\sigma)\,. \tag{21}$$

Подставляя теперь в (20) выражение для $w(t,s)$, получим

$$x(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

где

$$r_3(t,s,\tau,\sigma) = \zeta(t,s,\tau,\sigma) + \overline{r}_3(t,s,\tau,\sigma) + \\ + \int_a^b \int_c^d \overline{r}_3(t,s,\tau_1,\sigma_1)\zeta(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1\,, \tag{22}$$

а ζ, $\overline{r}_3$ определяются по формулам (15) и (21). Следовательно, при $\Delta \neq 0$ оператор $(I-H)^{-1}$ имеет вид (12) и p раз непрерывно дифференцируемое по t резольвентное ядро r_3 определяется по формуле (22).

Операторы и уравнения с частными интегралами в пространстве $C(D)$ изучались в работе [16], где в явном виде построено решение уравнения (1) в случае вырожденных ядер. В пространстве U для уравнений с вырожденными ядрами (3) резольвентные ядра r_1, r_2 операторов L, M соответственно можно найти, пользуясь формулами [15]:

$$r_1(t,s,\tau) = \frac{1}{\Delta_1(s)} \sum_{i=1}^{w} \sum_{j=1}^{w} \Delta_{1ji}(s) l_i(t,s) a_j(\tau)\,,$$

$$r_2(t,s,\sigma) = \frac{1}{\Delta_2(t)} \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} \Delta_{2ji}(t) m_i(t,s) b_j(\sigma)\,,$$

где $\Delta_{1ji}(s)$ и $\Delta_{2ji}(t)$ – алгебраические дополнения элементов a_{ij} $(i,j=1,\ldots,w)$ и b_{ij} $(i,j=1,\ldots,v)$ соответственно в определителях:

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} 1-\chi_{11}(s)\ldots-\chi_{1w}(s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\chi_{w1}(s)\ldots 1-\chi_{ww}(s) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} 1-\vartheta_{11}(t)\ldots-\vartheta_{1v}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\vartheta_{v1}(t)\ldots 1-\vartheta_{vv}(t) \end{vmatrix},$$

$\chi_{ij}(s) = \int\limits_a^b a_i(\tau) l_j(\tau,s)d\tau$ $(i,j=1,...,w)$, $\vartheta_{jk}(t) = \int\limits_c^d b_j(\sigma) m_k(t,\sigma)d\sigma$ $(j,k=1,...,v)$. Справедлива

Теорема 6. *Уравнение* (1) *с вырожденными ядрами* l, m, n *вида* (3) *обратимо в* U *тогда и только тогда, когда* $\Delta_1(s) \neq 0$, $\Delta_2(t) \neq 0$ *и* $\Delta \neq 0$.

□ Для ядер вида (3) операторы L, M, N действуют в U, операторы $LM+N$ и $ML+N$ компактны, поэтому условие $\Delta_1(s) \neq 0$ и $\Delta_2(t) \neq 0$ означает фредгольмовость $I-K$ [15], что влечет обратимость $I-L$ и $I-M$. Как было показано выше, операторы $(I-L)^{-1}$ и $(I-M)^{-1}$ существуют и представимы в виде (6) и (7), следовательно, по теореме 5 обратимость $I-K$ равносильна обратимости $I-H$, а условие $\Delta \neq 0$ эквивалентно обратимости $I-H$.

Пусть теперь оператор $I-K$ обратим, тогда он фредгольмов. Следовательно, $\Delta_1(s) \neq 0$ и $\Delta_2(t) \neq 0$ и обратимость $I-K$ равносильна обратимости $I-H$, то есть условию $\Delta \neq 0$. ■

Литература

1. Александров В.М. Коваленко Е.В. Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред // Докл. АН СССР. – 1980. – 252;3. – С.324–328.

2. Александров В.М., Коваленко Е.В. О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа // Докл. АН СССР. – 1984. – 275;4. – С.827–830.

3. Манжиров А.В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // Прикл. математика и механика. – 1985. – 49;6. – С.1019–1025.

4. Appell J., Kalitvin A.S., Nashed M.Z. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids // Zeitschr. Ang. Math. Mech. – 1999. – 79;2. – P.703–713.

5. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

6. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell. – New York-Basel: Marcel Dekker inc., 2000. – 560 p.

7. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами. C-теория / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.

8. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 178 с.

9. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 196 с.

10. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн / С.А. Габов. – М.: Наука, 1990. – 344 с.

11. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

12. Калитвин А.С., Барышева И.В. Об операторах с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций / Операторы с частными интегралами. 2 / А.С. Калитвин. – Липецк, 1997. – С.12-19.

13. Калитвин А.С. Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;9. – С.1194–1200.

14. Барышева И.В. Об одном классе интегральных уравнений в пространстве частично дифференцируемых функций // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия: “Фундаментальная математика”. – Воронеж, 2009. – 1(8). – С. 12-27.

15. Калитвин А.С., Барышева И.В., Фролова Е.В. О фредгольмовости уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций / Операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк, 2003. – 5. – С.34-47.

16. Околелов О.П. Исследование уравнений с частными интегральными операторами / Дисс. к.ф.-м.н. – Иркутск, 1967. – 147 с.

ABOUT IRREVERSIBILITY EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS IN SPACES OF PARTIALLY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

I.V. Barysheva

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina, str. 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail:barysheva_iv@mail.ru

Abstract. Reversibility condition and conditions of realization of Noether's and Fredholm's properties with zero index of linear equations with partial derivatives in the space of partially differentiable functions of two variables are investigated. Main results are obtained due to application of approximations of operators with partial integrals by such type operators having degenerated kernels.

Key words: operators and equations with partial integrals, Noether's property, Fredholm's property with zero index, irreversibility, operator approximations.