



РАЗРАБОТКА МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕЙ

О.А. АВЕРКОВА
И.Н. ЛОГАЧЕВ
К.И. ЛОГАЧЕВ

*Белгородский государственный
технологический университет
им. В.Г. Шухова*

*e-mail:
kilogachev@mail.ru*

С использованием метода дискретных вихрей в стационарной постановке строится и обсуждается метод математического моделирования отрывного течения на входе в плоские каналы. Решена задача об отрывном течении на входе в плоский канал с козырьком. Достоверность и адекватность полученных результатов демонстрируется сравнением с расчетами по методу Н.Е. Жуковского и экспериментальными данными. Разработанный метод математического моделирования и вычислительный алгоритм его реализации могут использоваться для определения свободной линии тока, поля скоростей и коэффициента местного сопротивления входа во всасывающие каналы, оборудованных произвольной системой тонких козырьков.

Ключевые слова: отрывные течения, метод дискретных вихрей, коэффициент местного сопротивления.

Введение

Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость. С острой кромки границы происходит срыв потока и образуется, начиная с этой кромки, так называемая свободная линия тока, положение которой заранее неизвестно. Классически эта задача решается с использованием методов теории функции комплексного переменного и теории струй идеальной жидкости [1-2]. Полагается, что на свободной линии тока величина скорости является постоянной. При использовании таких методов получают наиболее точные результаты. В некоторых наиболее простых случаях получают аналитическое решение. Чаще задача сводится к достаточно громоздким нелинейным уравнениям с коэффициентами при неизвестных в виде интегралов типа Коши. В общем случае, когда рассматривается многосвязная область течения, а тем более трехмерное пространство, решение задач указанными методами не представляется возможным.

Использование метода дискретных вихрей в нестационарной постановке (НМДВ) позволяет строить свободные линии и поверхности тока [3-5]. Однако, как показали численные эксперименты для задач о спектрах всасывания щелевидных вытяжных отверстий, величина сжатия струи δ_∞ на значительном удалении от всасывающего проема практически остается постоянной при изменении некоторых геометрических размеров [6]. Кроме того, эта величина пульсирует во времени, что требует ее усреднения по времени. Поэтому применение НМДВ для исследования величины δ_∞ , определения очертаний отрывных течений и связи этих величин с аэродинамическим сопротивлением всасывающих отверстий вызывает определенные трудности.

Известно применение метода дискретных вихрей в стационарной постановке (СМДВ) для решения задачи об отрывном течении идеальной несжимаемой жидкости на входе в круглую полубесконечную трубу [4]. Задача решалась в осесимметричной постановке и в качестве дискретных вихрей использовались дискретные вихревые кольца. При размещении на острой кромке свободного вихревого кольца можно было бы получить и более точную границу свободной поверхности тока.

Целью настоящей работы является разработка метода математического моделирования отрывных течений на входе во всасывающие проемы щелевидных всасывающих отверстий в рамках идеологии СМДВ.

1. Основные расчетные соотношения и алгоритм расчета

В качестве примера, рассматривалась задача об отрывном течении идеальной несжимаемой жидкости на входе во всасывающее отверстие в плоской стенке с козырьком (рис.1), решенная ранее различными методами [7].

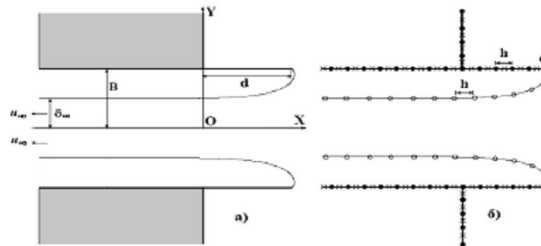


Рис.1 К постановке задачи: а) физическая область течения; б) дискретизация границы области (● – присоединенные вихри, ○ – свободные вихри, × – контрольные точки)

Вводились следующие обозначения: N – количество присоединенных вихрей верхней части границы (лежащей выше оси OX); N_s – количество свободных вихрей верхней части границы. Вихрь лежащий на острой кромке C козырька считается свободным, что следует из теоремы, изложенной в работе [8]: интенсивность (циркуляция) присоединенного вихря в точке срыва потока равна нулю. Присоединенные вихри располагались также в точках изломах границы. Между присоединенными вихрями располагались контрольные точки. Точка $\zeta^k(\zeta_1, \zeta_2)$ – точка расположения присоединенного вихря; $x^p(x_1, x_2)$ – контрольная точка. Влияние на точку x^p (скорость в этой точке) вихря единичной циркуляции, расположенной в точке ζ^k , вдоль направления единичного вектора $\vec{n} = \{n_1, n_2\}$ определяется по формуле:

$$G(x^p, \zeta^k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(x_1 - \zeta_1)n_2 - (x_2 - \zeta_2)n_1}{(x_1 - \zeta_1)^2 + (x_2 - \zeta_2)^2}. \tag{1}$$

Влияние этого вихря на точку x^p выражается формулой:

$$v_n(x^p) = G(x^p, \zeta^k) \Gamma(\zeta^k), \tag{2}$$

где $\Gamma(\zeta^k)$ – циркуляция вихря, расположенного в точке ζ^k ; $v_n(x^p)$ – скорость в точке x^p вдоль единичного направления \vec{n} .

При изложенном способе дискретизации границы количество присоединенных вихрей равно количеству контрольных точек. Поскольку граница области симметрична относительно оси OX и эта ось непроницаема, то циркуляция симметричных вихрей противоположна:

$$\Gamma(\zeta^k) = -\Gamma(\zeta^{k+N}), \text{ где } k = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Выполнение этого условия автоматически приводит к условию безциркуляционного течения (сумма циркуляций всех вихрей равна нулю).

Полагалось, что на искомой свободной линии тока циркуляция вихрей постоянна и равна γ . Расстояние между свободными вихрями есть величина постоянная и равная h . Первое приближение для свободной линии тока выбиралось следующим образом. Первые 3 вихря располагались параллельно OY , начиная с острой кромки, остальные параллельно OX .



Суммарное воздействие всех вихрей на контрольную точку x^p вдоль направления внешней нормали выражается равенством:

$$\begin{aligned} v_n(x^p) &= \sum_{q=1}^N G(x^p, \zeta^q) \Gamma(\zeta^q) - \sum_{q=N+1}^{2N} G(x^p, \zeta^q) \Gamma(\zeta^{q-N}) + \\ &+ \gamma \sum_{k=1}^{N_S} G(x^p, \zeta^k) - \gamma \sum_{k=N_S+1}^{2N_S} G(x^p, \zeta^k) = \\ &= \sum_{q=1}^N (G(x^p, \zeta^q) - G(x^p, \zeta^{q+N})) \Gamma(\zeta^q) + \gamma \sum_{k=1}^{N_S} (G(x^p, \zeta^k) - G(x^p, \zeta^{k+N_S})), \end{aligned} \quad (4)$$

где ζ^k – точка расположения свободного вихря.

Поскольку $v_n(x^p) = 0$ во всех контрольных точках, т.е. выполняется условие непроницаемости, то выражение (4) преобразуется к виду:

$$\sum_{q=1}^N (G(x^p, \zeta^q) - G(x^p, \zeta^{q+N})) \Gamma(\zeta^q) = -\gamma \sum_{k=1}^{N_S} (G(x^p, \zeta^k) - G(x^p, \zeta^{k+N_S})). \quad (5)$$

Выражение (5), при изменении p от 1 до N , представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с N неизвестными $\Gamma(\zeta^1), \Gamma(\zeta^2), \dots, \Gamma(\zeta^N)$. Решая эту систему методом Гаусса с выбором главного элемента, и определяя неизвестные циркуляции присоединенных вихрей, скорость в любой точке $x(x_1, x_2)$ области вдоль любого заданного направления вычисляется по формуле:

$$v_n(x) = \sum_{q=1}^N (G(x, \zeta^q) - G(x, \zeta^{q+N})) \Gamma(\zeta^q) + \gamma \sum_{k=1}^{N_S} (G(x, \zeta^k) - G(x, \zeta^{k+N_S})). \quad (6)$$

Если расстояние от точки x до вихря, расположенного в точке ζ меньше $h/2$, то величина $G(x, \zeta)$ вычисляется следующим образом:

$$G(x, \zeta) = \frac{r}{\pi h} \cdot \frac{(S_1 - \zeta_1)n_2 - (S_2 - \zeta_2)n_1}{(S_1 - \zeta_1)^2 + (S_2 - \zeta_2)^2}, \quad (7)$$

где $S_1 = \frac{h}{2r}(x_1 - \zeta_1) + \zeta_1$; $S_2 = \frac{h}{2r}(x_2 - \zeta_2) + \zeta_2$; $r = \sqrt{(x_1 - \zeta_1)^2 + (x_2 - \zeta_2)^2}$.

Второе приближение для свободной линии тока строится следующим образом. С острой кромки C в найденном поле скорости строится линия тока с использованием формул:

$$x = x' + v_x \Delta t, \quad y = y' + v_y \Delta t, \quad (8)$$

где Δt – шаг во времени выбирается достаточно малым (например $\Delta t = 0,0001$); (x', y') – предыдущее положение точки на линии тока; (x, y) – последующая точка; v_x, v_y находятся из выражения (6) при $\vec{n} = \{1; 0\}$ для v_x и $\vec{n} = \{0; 1\}$ для v_y . Как только расстояние между точкой (x, y) и острой кромкой становится h (например, с точностью до $0,000001$), то в эту точку помещается свободный вихрь, т.е. это будет второе приближение для этой точки свободной линии тока. Далее опять с использованием (8) строится линия тока, пока снова расстояние между (x, y) и предыдущим положением свободного вихря станет h . В эту точку помещается свободный вихрь и т.д.

После определения второго приближения для свободной линии тока необходимо снова решить систему уравнений (5) и определить циркуляции присоединенных вихрей. Затем строится третье приближение свободной линии тока с использованием формул (6) – (8) и т.д. Данный итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разница между последующим положением и предыдущим будет не больше заданной точности.



Поскольку границы области «обрываются» на некотором удалении от всасывающего проема, то возникает ситуация когда свободная линия тока начинает подниматься вверх (для верхней части рис.1), т.е. ее ордината начинает увеличиваться. Поэтому в этом случае для всех оставшихся точек ордината фиксируется и является равной ординате точки наибольшего снижения.

Словесное описание вычислительного алгоритма, построенного с использованием расчетных соотношений (1)-(8), следующее.

1. Формируются массивы: координат контрольных точек $kt[1..N,1..2]$; координат присоединенных вихрей $pv[1..N,1..2]$; координат свободных вихрей $sv[1..N,1..2]$.

а) Для верхнего козырька:

$$kt[i,1] = d - h \left(i - \frac{1}{2} \right); \quad kt[i,2] = B;$$

$$pv[i,1] = kt[i,1] - \frac{h}{2}; \quad pv[i,2] = B,$$

$$i = \overline{1, N_1}, \quad \text{где } kt[N_1,1] = \frac{h}{2}; \quad pv[N_1,1] = 0.$$

б) Для верхней вертикальной стенки:

$$kt[i,1] = 0; \quad kt[i,2] = B + h \left(k - \frac{1}{2} \right);$$

$$pv[i,1] = 0; \quad pv[i,2] = kt[i,2] + \frac{h}{2};$$

$$i = \overline{N_1, N}; \quad \text{где } kt[N,2] = kalibr - \frac{h}{2};$$

kalibr – длина вертикальной стенки (кратна ширине всасывающего отверстия *B*);

$k = 1, 2, \dots$ пока не выполнится условие $\left(kt[N,2] - kalibr + \frac{h}{2} \right) < 0,000001$.

в) Для симметричной относительно *OX* границы области:

$$kt[i,1] = kt[i-n,1]; \quad kt[i,2] = -kt[i-n,2]; \quad pv[i,1] = pv[i-n,1]; \quad pv[i,2] = -pv[i-n,2],$$

где $i = \overline{N+1, 2N}$.

г) Для верхней свободной линии тока:

$$sv[i,1] = d; \quad sv[i,2] = b - h(i-1); \quad i = \overline{1, 3}; \quad sv[i,1] = d - h(i-3); \quad sv[i,2] = b - 2h; \quad i = \overline{4, k_2};$$

где k_2 – целая часть величины $kalibr/h$; $N_s = i - 1$.

д) Для нижней свободной линии тока:

$$sv[i,1] = sv[i - N_s, 1]; \quad sv[i,2] = -sv[i - N_s, 2]; \quad i = \overline{N_s + 1, 2N_s}.$$

2. Формирование матрицы коэффициентов при неизвестных системы линейных алгебраических уравнений (5):

$$kof[p,q] = Skor(kt[p], pv[q], evn) - Skor(kt[p], pv[q+n], evn),$$

где $p = \overline{1, N}$; $q = \overline{1, N}$; $env[1..2]$ – координаты единичного вектора внешней нормали:

$$env[1] = 0; \quad env[2] = -1 \quad \text{при } kt[p,2] = B; \quad env[1] = 0; \quad env[2] = 1 \quad \text{при } kt[p,2] = -B;$$

$$env[1] = -1; \quad env[2] = 0 \quad \text{при } kt[p,1] = 0;$$

$Skor(kt[p], pv[q], evn)$ – скорость вдоль направления вектора env в точке $kt[p]$, вызываемая вихрем единичной циркуляции, расположенным в точке $pv[q]$ вычисляется с использованием формул (1), (7).

3. Формирование столбца свободных членов для СЛАУ (5):



$$pr[p] = -SvG \sum_{k=1}^{N_s} (Skor(kt[p], sv[k], evn) - Skor(kt[p], sv[k + N_s], evn)),$$

где $p = \overline{1, N}$; SvG – циркуляция вихрей на свободной линии тока.

4. Решение СЛАУ $\sum_{q=1}^N kof[p, q] circ[q] = pr[p]$; $p = \overline{1, N}$ методом Гаусса с выбором

главного элемента и определения массива циркуляций присоединенных вихрей $circ[1..N]$ в верхней части границы. Соответственно в нижней:

$$circ[i] = -circ[i - N], \quad i = \overline{N + 1, 2N}.$$

5. Формирование координат следующего приближения для свободной линии тока:

а) Задается первая точка линии тока $x[1] = sv[1, 1]$; $x[2] = sv[1, 2]$;

б) Производится шаг по направлению скорости потока, т.е. вычисляются координаты:

$$x[i] = x[i] + chag \left(\sum_{q=1}^{2N} circ[q] Skor(x, pv[q], evn) + SvG \sum_{q=1}^{N_s} (Skor(x, sv[q], evn) - Skor(x, sv[q + N_s], evn)) \right),$$

где $i = \overline{1, 2}$; $evn[1] = 1$; $evn[2] = 0$ при $i = 1$ и $evn[1] = 0$; $evn[2] = 1$ при $i = 2$;

$chag = 0,0001$ -шаг по времени;

в) как только расстояние от точки x до предыдущей точки свободной линии тока $\sqrt{(x[1] - sv[i - 1, 1])^2 + (x[2] - sv[i - 1, 2])^2} \geq h$, определяются координаты следующего приближения для координат свободной линии тока $psv[i] = x$;

г) если ордината точки линии тока больше, чем ордината предыдущей точки, то переход к пункту д), в противном случае к пункту б). Условие прекращения счета $x[1] < sv[N_s, 1]$;

д) определяются точки свободной линии тока:

$$psv[i, 1] = psv[i - 1, 1] - h; psv[i, 2] = x[2].$$

Условие для прекращения счета: $psv[i, 1] < sv[N_s, 1]$.

е) Старые координаты свободной линии тока меняются на новые $sv[i] = psv[i]$; $sv[i + N_s, 1] = psv[i, 1]$; $sv[i + N_s, 2] = -psv[i, 2]$, где $i = \overline{1, N_s}$.

6. Осуществляется переход к пункту 3, т.е. осуществляется определение нового приближения для свободной линии тока. Этот цикл выполняется до тех пор, пока выполняется условие $|db - pv[N_s, 2]| > 0,0001$, где $db = sv[N_s, 2]$ – ордината предыдущего положения N_s -й точки свободной линии тока.

После того как определена граница свободной линии тока ее координаты и циркуляции присоединенных вихрей записываются в файл. После чего эти данные могут быть использованы для определения поля скоростей. Скорость в заданной точке $x(x[1], x[2])$ вдоль данного направления $evn(evn[1]; evn[2])$ вычисляется по формуле:

$$v = \sum_{q=1}^{2N} circ[q] Skor(x, pv[q], evn) + SvG \sum_{q=1}^{N_s} (Skor(x, sv[q], evn) - Skor(x, sv[q + N_s], evn)).$$

2. Результаты расчета и их обсуждение

По разработанной компьютерной программе были произведены расчеты безразмерных профилей скоростей (u_x/u_∞ ; u_y/u_∞) и координат свободной линии тока. Для удобства сравнения расчетов разными методами их представление дано в другой системе координат (рис. 2-3).



На всех рисунках сплошными линиями изображены расчеты по методу Н.Е. Жуковского, пунктирными и штрихпунктирными линиями – расчеты по СМДВ. Как видно, величина скорости и координаты свободной линии тока практически совпадают. Наибольшее различие для горизонтальной составляющей скорости наблюдается в сечении $x=0.8$, но оно не превосходит 2% относительно расчетов по методу Н.Е.Жуковского. Шаг дискретности в расчетах по МДВ $h=0.0125$, в качестве u_∞ бралась величина скорости на оси отсоса, удаленная на 2 калибра от всасывающего проема.

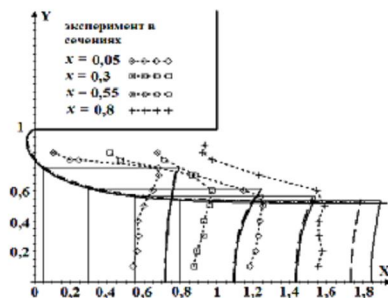


Рис. 2. Свободная линия тока и профили горизонтальной составляющей скорости

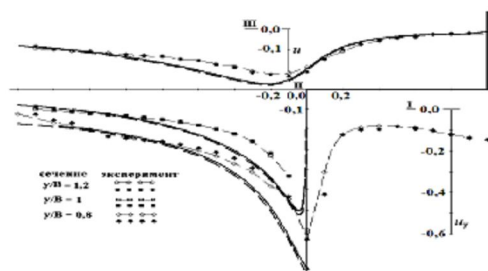


Рис. 3. Профили вертикальной составляющей скорости

Длина вертикальной стенки и удаление последней точки свободной линии тока от всасывающего отверстия равна 8 калибров ($8B$).

Отношение разности скорости u_∞ и средней скорости в щели $u_\infty \delta_\infty / B$ к этой средней является величина $\Delta u = B/\delta_\infty - 1$, которая в работе [7] предложена в качестве критерия для определения коэффициента местного сопротивления. Расчет величины Δu методом дискретных вихрей демонстрирует лучшее совпадение с экспериментальными данными для коэффициента местного сопротивления ζ , чем метод Н.Е.Жуковского (рис. 4).

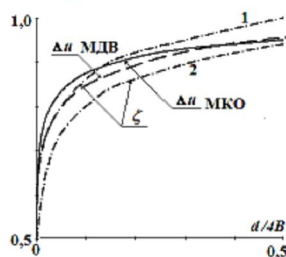


Рис. 4. Изменение коэффициента местного сопротивления при входе в плоскую трубу (ζ) и скорости срыва струи (Δu) с увеличением длины выступа ($d/4B$): штрихпунктирные – экспериментальные данные И.Е. Идельчика [9] (кривая 1 – при относительной толщине стенки трубы $\delta/D_T = 0$; кривая 2 – при $\delta/D_T = 0,004$)



При значительном увеличении картины отрыва заметно отличие координат свободных линий тока, полученными разными методами (рис.5), на начальном участке отрыва.

Таким образом, разработанная на основе СМДВ математическая модель отрывных течений позволяет получить адекватную картину течения, и ее использование даст возможность решить ряд новых задач аэродинамики отрывных течений.

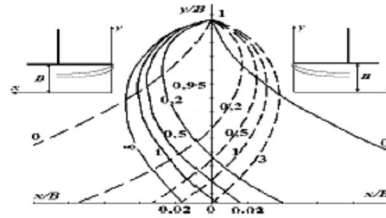


Рис.5. Кривые отрыва струйного течения вблизи вытяжного отверстия при изменении длины выступа d/B

Литература

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости [Текст] / М.И. Гуревич. – М.: Физматлит, 1961. – 496 с.
2. Маклаков Д.В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами [Текст] / Д.В. Маклаков. – М.: Янус, 1997. – 280 с.
3. Логачев И.Н. Аэродинамические основы аспирации [Текст] / И.Н. Логачев, К.И. Логачев. – Санкт-Петербург: Химиздат, 2005. – 659 с.
4. Логачев К.И., Посохин В.Н. Расчет течения вблизи круглого всасывающего патрубка [Текст] / К.И. Логачев, В.Н. Посохин // Изв. вузов. Авиационная техника. 2004. – № 1. – С. 29-32.
5. Логачев К.И. Расчет течений на входе в отсосы-раструбы методом дискретных вихрей [Текст] / К.И. Логачев, А.И. Пузанок, В.Н. Посохин // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2004. – № 7-8. – С. 61-69.
6. Аверкова О.А. Численное моделирование воздушных течений на входе в щелевые неплотности аспирационных укрытий [Текст] / О.А. Аверкова, В.Ю. Зоря, И.Н. Логачев, К.И. Логачев // Новые огнеупоры. 2010. – №5. – С. 31-36.
7. Логачев И.Н. Моделирование отрывных течений вблизи всасывающей щели [Текст] / И.Н. Логачев, К.И. Логачев, В.Ю. Зоря, О.А. Аверкова // Вычислительные методы и программирование. 2010. – Т. 11 – № 1 – С. 43-52.
8. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент [Текст] / И.К. Лифанов. – М.: Янус, 1995. – 520 с.
9. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям [Текст] / И.Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1975. – 559 с.

THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELING METHOD OF DETACHED FLOWS ON THE BASIS OF DISCRETE STATIONARY VORTEXES

O.A. Averkova
I.N. Logachov
K.I. Logachov

*Belgorod State Technological
University named after
V.G. Shukhov*

*e-mail:
kilogachev@mail.ru*

With use of discrete vortexes method in stationary statement, mathematical modeling method of detached flow on the input to the flat canals is constructed and discussed. The problem about detached flow on the input to the flat canal with screen is solved. Validity and adequacy of received results are demonstrated by the comparison with calculations, according to the method of N.E. Zukovsky and by experimental data. The developed method of mathematical modeling and computing algorithm of its realization may be used for detection of current available line, velocity field and form loss coefficient of input to the suction ducts, equipped by arbitrary system of thin screens.

Key words: detached flows, discrete vortexes method, form loss coefficient.