УДК 511.35

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ С РАЗНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.А. Гриценко, М.В. Шевцова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия,
e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача получения асимптотической формулы для числа простых чисел, не превосходящих X и лежащих в арифметической прогрессии с разностью $D = p_0^n$, где $p_0 \geq 3$ – фиксированное простое число и $D \leq X^{3/8}e^{-(\ln\ln X)^2}$.

Ключевые слова: распределение простых чисел, арифметическая прогрессия, схема решения тернарной задачи, оценка сумм характеров по простым числам.

Введение

В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть $\pi(x, D, l)$ означает число простых чисел, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю D. При $D \leq (\ln x)^A$, где $A > 0$ – сколь угодно большое число, справедлива формула:

$$\pi(x, D, l) = \frac{Li(x)}{\varphi(D)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

которая известна в литературе как формула Зигеля-Вальфлиша [1].

Но для разности $D = p_0^n$ с фиксированным $p_0 \geq 3$ простым числом можно улучшить этот результат. В 1955 году А.Г. Постникову [2] удалось свести оценки сумм характеров по модулю, равному степени нечетного простого числа, к оценкам сумм Вейля специального вида, которые допускают нетривиальные оценки даже в тех случаях, когда их длины очень малы.

Эти соображения использовали ряд авторов для решения некоторых проблем теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

Ю.В. Линник, М.Б. Барбан и Н.Г. Чудаков в работе [3] на основе плотностной техники получили следующий результат:

$$\pi(x, D, l) = \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(D)}\left(1 + O\left(\ln x\right)^{-M}\right), \tag{1}$$

где $D \leq x^{3/8-\varepsilon}$ (ε произвольно мало) и M произвольно большое число.

М.М. Петечук [4] применил идею А.Г. Постникова к проблеме делителей Дирихле в коротких арифметических прогрессиях и получил асимптотическую формулу:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{xQ_{k-1}(\ln x)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{x^{1-\varkappa}}{\varphi(D)}\right),$$

где $D \le x^{3/8-\varepsilon}$ (ε – произвольно мало), $(l,D)=1$, $Q_{k-1}(z)$ – многочлен степени $(k-1)$ от переменной z с коэффициентами, зависящими от k и p_0, $\varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{16}, \frac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta > 0$ – константа, зависящая от p_0.

Для доказательства этой формулы применена идея работы А.А. Карацубы [5], позволяющая решать эту задачу по схеме аддитивной тернарной задачи. При этом автор не прибегает к аналитическим методам, а лишь использует оценки сумм характеров по специальному модулю, основанные на идее А.Г. Постникова.

В настоящей статье дается новое доказательство формулы (1). Мы стремились сделать его по возможности «элементарным» и использовать минимально необходимый объем средств комплексного анализа и теории арифметических рядов Дирихле. Получить вполне элементарное доказательство нам не удалось, поскольку пришлось оценивать суммы значений характеров по простым числам. Для оценок таких сумм использована формула Перрона [6] и стандартная техника контурного интегрирования. Отметим, что теорема о границе нулей $L(s,\chi)$ В.Н. Чубарикова [7], которой мы пользуемся, доказана вполне элементарно. Плотностная техника, на которой основана работа [3], в нашей статье не применяется. Основным результатом статьи является следующая

Теорема. *При* $(l,D)=1$, $\quad D \le X^{3/8}e^{-(\ln\ln X)^2}$ *справедлива формула*

$$\pi(x,D,l) = \frac{\mathrm{Li}(X)}{\varphi(D)} + R, \tag{2}$$

где $R = (X/\varphi(D))\ e^{-(\ln\ln X)^2/7}$, $\varphi(D)$ *– функция Эйлера, а* $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u}$.

§1. Вспомогательные леммы

Лемма 1 (тождество Хис-Брауна). *Пусть* $K \geqslant 1$, $z \geqslant 1$. *Тогда для любого* $n < 2z^K$ *имеем*

$$\Lambda(n) = -\sum_{1\leqslant k\leqslant K} (-1)^k \binom{K}{k} \sum_{\substack{m_1\ldots m_k n_1\ldots n_k = n,\\ m_1,\ldots,m_k\leqslant z}} \cdots \sum \mu(m_1)\ldots\mu(m_k)\ln n_k\,.$$

□ Доказательство см.[8], Propozition 13.3. ■

Лемма 2. *Для любого неглавного характера χ по модулю $D = p_0^n$ справедлива оценка:*

$$\sum_{1\le u\le a} \chi(u) \ll a^{1/2} D^{1/6} \ln D \,.$$

☐ Доказательство см. в [9]. ■

Лемма 3. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$, $S_a = \sum\limits_{m\le a} \chi(m)$, $\rho = \ln D / \ln a$. Тогда существуют константы $c > 0, \gamma > 0$, зависящие от p_0, такие, что при $1 \le \rho \le 0,5n$ выполняется оценка*

$$|S_a| < c a^{1-\gamma/\rho^2} \,.$$

☐ Доказательство см. в [10]. ■

Лемма 4. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$. Тогда $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3} (\ln\ln D)^2} \,, \quad |t| < e^{b_2 (\ln\ln D)^2} \,,$$

b_1, b_2 – константы.

☐ Сначала покажем, что в области $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$, $\gamma_1 = \gamma/2$, где γ – константа из леммы 3, имеет место оценка

$$L(s,\chi) = O((|t| + 1)(\ln D)^{2/3}) \,.$$

Справедливо тождество

$$L(s,\chi) = s \int_1^\infty S(x) x^{-s-1} dx \,, \quad S(x) = \sum_{\nu \leqslant x} \chi(\nu) \,.$$

Разобьем интеграл на части:

$$L(s,\chi) = s \int_1^D S(x) x^{-s-1} dx + s \int_D^\infty S(x) x^{-s-1} dx \,. \tag{3}$$

Во втором интеграле для оценки суммы $S(x)$ будем пользоваться оценкой Виноградова-Пойа: $S(x) = O(\sqrt{D} \ln D)$. Имеем:

$$\left| s \int_D^\infty S(x) x^{-s-1} dx \right| \leqslant (|t| + 1) \int_D^\infty |S(x)| x^{-\sigma-1} dx \ll (|t| + 1) \sqrt{D} \ln D D^{-\sigma} \,.$$

Поскольку $\sigma > \frac{1}{2}$, то $L(s,\chi) = s\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx + O\left((|t|+1)\dfrac{\ln D}{D^{\varepsilon}}\right)$, где ε произвольно мало.

Рассмотрим первый интеграл в (3). Разобьем его на части, полагая $N = \exp{(\ln D)^{2/3}}$:

$$\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx = \int_1^N S(x)x^{-s-1}dx + \int_N^D S(x)x^{-s-1}dx\,.$$

В первом интеграле справа сумму $S(x)$ оценим тривиально, а во втором – согласно лемме 3. В результате, получим

$$\left|\int_1^N x^{-s}dx\right| \leqslant \left.\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right|_1^N = O((\ln D)^{2/3}),$$

$$\left|\int_N^D S(x)x^{-s-1}dx\right| \leqslant \int_N^D |S(x)|x^{-1-\sigma}dx = O\left(\int_N^D x^{\sigma}\exp\left\{-\frac{\gamma\ln^3 x}{\ln^2 D}\right\}dx\right) = [v=\ln x] =$$

$$= O\left(\int_{\ln N}^{\ln D}\exp\left\{v(1-\sigma)-\frac{\gamma v^3}{\ln^2 D}\right\}dv\right) = O\left(\int_{\ln N}^{\ln D}\exp\left\{-\frac{\gamma v^3}{2\ln^2 D}\right\}dv\right) = O((\ln D)^{2/3})\,.$$

Таким образом, мы доказали, что в области $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$

$$L(s,\chi) = O((|t|+1)(\ln D)^{2/3})\,.$$

Теперь пусть $\rho = \sigma + it$ – нуль функции $L(s,\chi)$, положим

$$\sigma = 1 - \frac{d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \qquad d \leqslant 1\,.$$

Надо показать, что $d \geqslant c > 0$. Рассмотрим точку

$$s_0 = 1 + \frac{4d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2} = \sigma_0 + it\,.$$

Из точки s_0 опишем круг радиуса $r = \dfrac{c_1}{(\ln D)^{2/3}}$. Точка ρ будет лежать внутри круга радиуса $r/2$, так как

$$\frac{c_1}{2(\ln D)^{2/3}} > \frac{5d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}\,.$$

В круге $|s - s_0| < r$

$$L(s,\chi) = O((|t|+1)(\ln D)^{2/3})\,.$$

Кроме того,

$$\left|\frac{1}{L(s_0,\chi)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}} \leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma_0}} = 1+\frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{4d}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}\right| \leqslant M = (|\,t| + 1)\frac{\ln^2 D}{d}.$$

Точно такая же оценка имеет место в круге $|s-s_1|\leqslant r$, $s_1=\sigma_0+2it$. Применим лемму 6 на с. 99 [10]:

$$\mathrm{Re}\frac{L'(s_0)}{L(s_0)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M + \mathrm{Re}\frac{1}{s_0-\rho} = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M + \frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{5d},$$

$$\mathrm{Re}\frac{L'(s_1)}{L(s_1)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M,$$

$$\frac{L'(\sigma_0)}{L(\sigma_0)} < \frac{1}{\sigma_0-1}+c_2\,.$$

Справедливо неравенство:

$$3\left\{-\frac{L'(\sigma_0,\chi)}{L(\sigma_0,\chi)}\right\} + 4\left\{-\mathrm{Re}\frac{L'(\sigma_0+it)}{L(\sigma_0+it)}\right\} + \left\{-\mathrm{Re}\frac{L'(\sigma_0+2it)}{L(\sigma_0+2it)}\right\} \geqslant 0\,.$$

Подставляя полученные оценки в это неравенство, получим:

$$3\left\{\frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{4d}+c_2\right\} + 4\left\{-\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M + \frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{5d}\right\} + \\ + \frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M \geqslant 0\,,$$

$$-\frac{(\ln\ln D)^2}{20d} + \frac{3c_2}{(\ln D)^{2/3}} + \frac{20}{c_1}(\ln\ln D)^2 + \frac{40}{c_1}\ln\ln D - \frac{20}{c_1}\ln d \geqslant 0\,,$$

$$-\frac{1}{d}\left(\frac{(\ln\ln D)^2}{20} - \frac{20d\ln d}{c_1}\right) + \frac{20}{c_1}\left(\frac{3c_2c_1}{20(\ln D)^{2/3}} + (\ln\ln D)^2 + 2\ln\ln D\right) \geqslant 0\,.$$

При $d\to 0$, $d\ln d\to 0$, а $\dfrac{1}{d}\to\infty$, поэтому

$$-\frac{1}{d}\cdot\frac{(\ln\ln D)^2}{20} + \frac{20}{c_1}(\ln\ln D)^2 \geqslant 0, \qquad d \geqslant \frac{c_1}{40}. \qquad \blacksquare$$

Лемма 5. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$, $S_a = \sum_{a<p\le 2a} \chi(p)$, где p – простое число. Тогда справедлива оценка:*

$$S_a \ll \frac{a(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2}\ln a}\,.$$

□ Введем в рассмотрение функцию

$$\Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \begin{cases} \dfrac{1}{k} \quad , & \text{если} \quad n = p^k\,; \\ 0 \quad , & \text{в противном случае}\,. \end{cases}$$

Из определения функции $\Lambda_1(n)$ следует, что

$$\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda_1(n) = \sum_{a<p\le 2a} \chi(p) + O(\sqrt{a})\,.$$

С другой стороны,

$$\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda_1(n) = \sum_{n\le a} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\ln n}\,.$$

Применим преобразование Абеля, полагая $c_n = \chi(n)\Lambda(n)$, $f(n) = \dfrac{1}{\ln n}$. В результате, получим

$$\int_a^{2a} \left(\sum_{n\le u} \chi(n)\Lambda(n)\right) \frac{du}{u\ln^2 u} + \left(\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda(n)\right) \frac{1}{\ln 2a}\,.$$

Интеграл можно оценить величиной $\dfrac{a}{e^{c'\sqrt{\ln a}}\ln^2 a}$, где c' – константа. Поэтому

$$\sum_{a<p\le 2a} \chi(p) = \frac{1}{\ln a} \sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda(n) + O\left(\frac{a}{e^{c'\sqrt{\ln a}}\ln^2 a}\right)\,.$$

Для суммы справа применим формулу Перрона:

$$\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{(2a)^s - a^s}{s}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{(2^s - 1)a^s}{s}ds\,.$$

Применяя формулу разложения логарифмической производной $L(s,\chi)$-функции по её нулям и величину границы этих нулей, имеем:

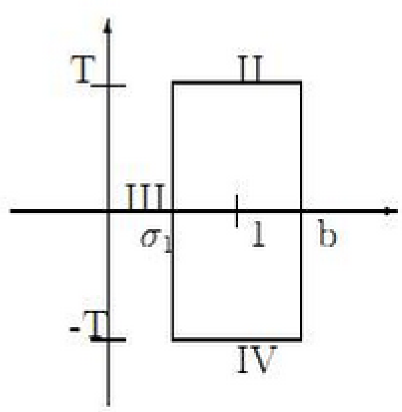
$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|t-\gamma_n|\le 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\ln DT)\,,$$

$$\beta_n \le 1 - \frac{c}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \quad \sigma \ge 1 - \frac{c}{2(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}\,,$$

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) \ll \frac{2}{c}(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2 \sum_{|t-\gamma_n|\le 1} 1 + O(\ln DT) = O((\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2)\,,$$

где χ – характер по модулю $D = p_0^n$ и $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ – нули функции $L(s,\chi)$.

Рассмотрим контур, указанный на рисунке, для которого выберем $b = 1 + \dfrac{1}{\ln a}$, $\sigma_1 = 1 - \dfrac{c_0}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}$, $T = e^{(\ln\ln D)^2}$,



Рассмотрим интегралы по сторонам II и IV соответствующего контура:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{b+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^s}{s}ds\right| \le \int_{\sigma_1}^{b}\left|-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|\frac{a^\sigma}{T}d\sigma = O\left(\frac{a}{e^{(\ln\ln D)^2}\ln a}(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2\right)\,.$$

По стороне III интеграл можно оценить следующим образом:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^s}{s}ds\right| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^{\sigma+it}}{t}dt\right| =$$

$$= O\left(a^{\sigma_1}\ln T\left|-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|\right) = O\left(\frac{a(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2}{a^{c_0/(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}}\right)\,.$$

Следовательно интеграл можно оценить величиной $O\left(\dfrac{a}{e^{(\ln\ln D)^2}\ln a}(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2\right)$, откуда и следует утверждение леммы. ■

Лемма 6 (А. И. Виноградова). *Количество чисел, не превосходящих x, и таких, что все их простые делители не превосходят $z \le \sqrt{x}$, имеет оценку*

$$Bx\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1}{\alpha}+\ln\ln\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}+\frac{\theta}{\alpha\ln 1/\alpha}\right),$$

где $\alpha = \ln z/\ln x$, $|\theta| \le 1$.

□ См. в [11]. ■

Лемма 7. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$. Справедлива оценка:*

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n) \ll \frac{x(\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2/2}}.$$

□ Очевидно, что

$$S = \sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n) = 1+\sum_{r=1}^{R}(-1)^r\sum_{\delta_r\le x}\chi(\delta_r)\,,$$

где δ_r – бесквадратное число, имеющее ровно r простых делителей, $R = [\log_2 x]$.

Пусть $1 \le r \le R$, обозначим $S_r = \sum_{\delta_r\le x}\chi(\delta_r)$. Если $r = 1$, то S_r – сумма по простым числам, её можно оценить согласно лемме **??**.

Пусть $r > 1$. Разобьём числа δ_r на $r+1$ непересекающихся классов $A_0, A_1, \ldots, A_r$ следующим образом. При $0 \le m \le r$ положим $\delta_r \in A_m$, если среди простых делителей δ_r ровно m простых делителей, больших $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, и ровно $r-m$ простых делителей, не превосходящих $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, где $0 < \varepsilon_1 < 0,01$.

Рассмотрим сначала числа δ_r из класса A_0. Все простые делители этих чисел не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Поэтому

$$\Bigg|\sum_{\substack{\delta_r\le x,\\ \delta_r\in A_0}}\chi(\delta_r)\Bigg| \le {\sum_{n\le x}}'1\,,$$

где штрих означает, что все простые делители n не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Оценим эту сумму по лемме А.И. Виноградова (лемма 6). В результате, получим:

$${\sum_{n\le x}}'1 \ll x\exp\left(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right).$$

Следовательно

$$\Bigg|\sum_{\substack{\delta_r\le x,\\ \delta_r\in A_0}}\chi(\delta_r)\Bigg| \ll x\exp\left(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right).$$

Рассмотрим числа δ_r, принадлежащие остальным классам A_m, $1 \le m \le r$. Любое такое число можно однозначно представить в виде

$$\delta_r = \delta'_{r-m}\delta''_m\,,$$

где δ'_{r-m} – бесквадратное число, имеющее $r-m$ простых делителей, каждый из которых не превосходит $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, а δ''_m – бесквадратное число, имеющее m простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Имеем:

$$\sum_{\substack{\delta_r\le x,\\ \delta_r\in A_m}} \chi(\delta_r) = \sum_{\delta'_{r-m}\delta''_m\le x} \chi(\delta'_{r-m}\delta''_m) =$$

$$= \sum_{\substack{\delta'_{r-m}\delta''_m\le x,\\ \delta'_{r-m}\le x^{0,1}}} \chi(\delta'_{r-m}\delta''_m) + \sum_{\substack{\delta'_{r-m}\delta''_m\le x,\\ \delta'_{r-m}> x^{0,1}}} \chi(\delta'_{r-m}\delta''_m) =$$

$$= S_1(m,r) + S_2(m,r)\,.$$

Оценим сумму $S_2(m,r)$. Так как $\delta'_{r-m}\delta''_m \le x$, $\delta'_{r-m} > x^{0,1}$, то число δ''_m удовлетворяет неравенству $\delta''_m \le x^{0,9}$, и поэтому

$$|S_2(m,r)| \le \sum_{\delta''_m\le x^{0,9}} \sum_{\delta'_{r-m}<z} 1\,,$$

где $z = \dfrac{x}{\delta''_m}$, $z > x^{0,1}$.

В силу леммы А. И. Виноградова,

$$\sum_{\delta'_{r-m}<z} 1 \ll \frac{x}{\delta''_m} \exp\left(-0,1(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right)\,,$$

следовательно,

$$|S_2(m,r)| \ll x\exp\left(-0,05(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right)\,.$$

Оценим теперь сумму $S_1(m,r)$. Имеем:

$$|S_1(m,r)| \le \sum_{\delta'_{r-m}\le x^{0,1}} \left| \sum_{\delta''_m\le z_1} \chi(\delta''_m) \right|\,,$$

где $z_1 = \dfrac{x}{\delta'_{r-m}}$, $z_1 \ge x^{0,9}$.

Сравним внутреннюю сумму с суммой

$$\sum_{\substack{\delta''_{m-1}p\le z_1,\\ p> e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}}} \chi(\delta''_{m-1})\chi(p)\,,$$

где δ''_{m-1} пробегает множество бесквадратных чисел, имеющих ровно $(m-1)$ простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$.

Числа $\delta''_{m-1}p$ могут не быть бесквадратными; если число $\delta''_{m-1}p$ не бесквадратное, то оно делится на p^2. Вклад таких чисел в сумму не превосходит

$$\sum_{p>e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \frac{z_1}{p^2} \ll z_1 e^{-(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}.$$

Если же числа $\delta''_{m-1}p$ бесквадратные, то каждое заданное число $\delta''_m \le z_1$ встречается среди чисел $\delta''_{m-1}p$ ровно m раз, поэтому

$$\frac{1}{m}\sum_{\delta''_{m-1}p\le z_1} \chi(\delta''_{m-1}p) = \sum_{\delta''_m \le z_1} \chi(\delta''_m) + O\left(z_1 e^{-(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}\right),$$

где

$$\left|\sum_{\delta''_m\le z_1} \chi(\delta''_m)\right| \le \sum_{\delta''_{m-1}\le z_1 e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \left|\sum_{e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}<p\le \frac{z_1}{\delta''_{m-1}}} \chi(p)\right|.$$

Таким образом, для оценки суммы $\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)$ требуется оценить сумму по простым числам $\sum_{p\le z_2}\chi(p)$, где $z_2 > e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Применим лемму ??, получим:

$$\sum_{p\le z_2}\chi(p) = O\left(z_2 e^{-1/2(\ln\ln D)^2}\right).$$

В итоге, объединяя оценки всех рассмотренных случаев, имеем:

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n) \ll \frac{x(\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2/2}}. \qquad \blacksquare$$

2. Доказательство теоремы

Очевидно,что

$$\sum_{n\le X}\Lambda_1(n) = \sum_{p\le X} 1 + \frac{1}{2}\sum_{p^2\le X} 1 + \frac{1}{3}\sum_{p^3\le X} 1 + \ldots = \sum_{p\le X} 1 + O(\sqrt{X}).$$

Тогда

$$\pi(X,D,l) = \sum_{\substack{n\le X,\\ n\equiv l \pmod D}} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} + O(\sqrt{X}).$$

Применяя преобразование Абеля к первой сумме слева и производя необходимые оценки, мы получим:

$$\pi(X,D,l)=\frac{1}{\ln n}\sum_{\substack{n\leq X,\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n)+O\left(Xe^{-c'\sqrt{\ln X}}\right).$$

Из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n\leq X,\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n)=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\overline{\chi}(l)\sum_{n\leq X}\Lambda(n)\chi(n).$$

Выделим слагаемое с χ_0:

$$\sum_{\substack{n\leq X,\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n)=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\substack{n\leq X,\\ (n,D)=1}}\Lambda(n)+\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{n\leq X}\Lambda(n)\chi(n).$$

Первая сумма справа даст нам главный член формулы (2), а вторая - остаток R. Ко второй сумме применим тождество Хис-Брауна (лемма 1):

$$R=-\sum_{1\leqslant k\leqslant K}(-1)^k\binom{K}{k}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{\substack{n_1\ldots n_k n_{k+1}\ldots n_{2k}=n,\\ n_1,\ldots,n_k\leqslant z}}\cdots\sum\mu(n_1)\ldots\mu(n_k)\ln n_{2k}\times$$

$$\times\,\chi(n_1)\ldots\chi(n_k)\chi(n_{k+1})\ldots\chi(n_{2k})=$$

$$=-\sum_{1\leqslant k\leqslant K}(-1)^k(\ln X)^{2k}\binom{K}{k}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\;\times$$

$$\times\sum_{N_1<n_1\leq 2N_1}\mu(n_1)\chi(n_1)\ldots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k}\mu(n_k)\chi(n_k)\times$$

$$\times\sum_{\substack{N_{k+1}<n_{k+1}\leq 2N_{k+1},\\ n_1\ldots n_k n_{k+1}\ldots n_{2k}\leq X,\, n_1,\ldots,n_k\leq z}}\chi(n_{k+1})\ldots\sum_{N_{2k}<n_{2k}\leq 2N_{2k}}\chi(n_{2k})\ln n_{2k}.$$

Пусть $K=100$. Для оценки остаточного члена R достаточно оценить сумму

$$S=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{N_1<n_1\leq 2N_1}\mu(n_1)\chi(n_1)\ldots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k}\mu(n_k)\chi(n_k)\times$$

$$\times\sum_{\substack{N_{k+1}<n_{k+1}\leq 2N_{k+1},\\ n_1\ldots n_k n_{k+1}\ldots n_{2k}\leq X,\, n_1,\ldots,n_k\leq z}}\chi(n_{k+1})\ldots\sum_{N_{2k}<n_{2k}\leq 2N_{2k}}\chi(n_{2k})\ln n_{2k}.$$

Возможны случаи:

1. $N_{2k} = \max\{N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_{2k}\}$.
2. $N_1 = \max\{N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_{2k}\}$.

В первом случае, применив, преобразование Абеля, можно свести сумму

$$\sum_{N_{2k}<n_{2k}\le 2N_{2k}} \chi(n_{2k}) \ln n_{2k} \quad \text{к сумме} \quad \ln(2N_k) \times \sum_{N_{2k}<n_{2k}\le 2N_{2k}} \chi(n_{2k}),$$

где $\ln(2N_k) \le X^{\delta/10}$.

Будем предполагать, что

$$N_{2k} \ge N_1 \ge N_{k+1} \ge N_2 \ge N_{k+2} \ge \dots \ .$$

Положим $U = N_1 \dots N_k$, $V = N_{k+1} \dots N_{2k-1}$. Тогда $U \ge V$, $NV \ge U \ge V$. Кроме того, $N = N_{2k}$, $N_{2k} \ge X^{1/2k}$. Пусть δ – вещественное число, причем, $0 < \delta \le 1/2k$, и пусть $\tau'_k(u), \tau'_{k-1}(v), \tau'_{2k-1}(y)$ соответственно означают количество решений в натуральных числах уравнений

$$n_1 \dots n_k = u, \qquad n_{k+1} \dots n_{2k-1} = v, \qquad n_1 \dots n_k n_{k+1} \dots n_{2k-1} = y,$$

где

$$N_1 < n_1 \le 2N_1, \quad \dots \quad , N_k < n_k \le 2N_k,$$
$$N_{k+1} < n_{k+1} \le 2N_{k+1}, \quad \dots \quad , N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}.$$

Рассмотрим случай $U \le X^{\delta}$. Имеем:

$$|S| \le \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi\ne\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{N_1<n_1\le 2N_1} \chi(n_1) \dots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} \chi(n_k) \right| \times$$

$$\times \left| \sum_{\substack{N_{k+1}<n_{k+1}\le 2N_{k+1},\\ n_1\dots n_k n_{k+1}\dots n_{2k-1}\le X}} \chi(n_{k+1}) \dots \sum_{N_{2k-1}<n_{2k-1}\le 2N_{2k-1}} \chi(n_{2k-1}) \sum_{N_{2k}<n_{2k}\le 2N_{2k}} \chi(n_{2k}) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \sum_{N_1<n_1<2N_1} \dots \sum_{N_{2k-1}<n_{2k-1}\le 2N_{2k-1}} \max_{\substack{N_{2k}<T'\le T''\le 2N_{2k},\\ \chi\ne\chi_0}} \left\{ \left| \sum_{T'<t\le T''} \chi(t) \right| \right\}.$$

В силу леммы 1 справедлива оценка

$$\sum_{N<t\le 2N} \chi(t) \ll N^{1/2} D^{1/6} \ln D.$$

Следовательно,

$$S \ll N_1 \dots N_{2k-1} \sqrt{N} D^{1/6} \ln D.$$

Так как $N_1 \dots N_{2k-1} N < X$, $V \le U \le X^{\delta}$, $D \le X^{3/8}$, $\ln(2N_k) \le X^{\delta/10}$, то для суммы S получим:

$$S \ll N_1 \dots N_{2k-1} \sqrt{N}\, D^{1/6} \ln X = \sqrt{N_1 \dots N_{2k-1}}\, \sqrt{N_1 \dots N_{2k}} D^{1/6} \ln X <$$

$$< \sqrt{UV}\sqrt{X} D^{1/6} \ln X \le X^{1/2+\delta/5} D^{1/6} \ln X \ll X^{3/4+\delta} D^{-1/3}.$$

Пусть теперь $U > X^{\delta}$. Докажем, что в этом случае:

$$S \ll X^{0,5\delta} \max_{\substack{N \le T' \le T'' \le 2N, \\ UV \le Y' \le Y'' \le 2^{2k-1} UV}} \{ |S'| \} + \frac{X^{1-\frac{2\delta}{5}}}{\varphi(D)}, \tag{4}$$

где

$$S' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T' < t \le T''} \chi(t) \sum_{Y' < y \le Y''} \chi(y) \tau'_{2k-1}(y).$$

Будем использовать метод исчерпывания криволинейной области И.М. Виноградова [12]. Прямоугольной областью на плоскости (t, y) будем называть область, задаваемую неравенствами

$$T' < t \le T'', \qquad Y' < y \le Y'',$$

где $N \le T' < T'' \le 2N$, $UV \le Y' < Y'' \le 2^{2k-1} UV$. Сумму S перепишем в виде

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N < t \le 2N, \\ ty \le X}} \sum_{UV < y \le 2^{2k-1} UV} \chi(t) \chi(y) \tau'_{2k-1}(y).$$

Если $2N \cdot 2^{2k-1} UV \le X$, то (4) тривиально верно в силу того, что тогда область суммирования в S по переменным t и y прямоугольная.

Докажем (4) в случае, когда $NUV < X < 2^{2k-1} UV$. Определим величины T_1, T_2, полагая

$$T_1 = \max\left\{ N, \frac{X}{2^{2k-1} UV} \right\}, \qquad T_2 = \min\left\{ 2N, \frac{X}{UV} \right\}.$$

Обозначим на плоскости (t, y) области, задаваемые неравенствами:

$$\Omega_1 : N_1 < t \le T_2, \quad UV < y \le \frac{X}{T_2};$$

$$\Omega_2 : N_1 < t \le T_1, \quad \frac{X}{T_2} < y \le 2^{2k-1} UV, \quad ty \le x;$$

$$\Omega_3 : T_1 < t \le T_2, \quad \frac{X}{T_2} < y \le \frac{X}{t}.$$

Область суммирования Ω в сумме S есть объединение попарно непересекающихся областей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, причём Ω_1 и Ω_2 либо пустые, либо прямоугольные. Поэтому формулу (4) достаточно доказать для

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1 < t \leq T_2} \quad \sum_{X/T_2 < y \leq X/t} \chi(t)\chi(y)\tau'_{2k-1}(y) .$$

Пусть T_0 и Δ таковы, что $T_1 \leq T_0 < T_0 + \Delta \leq T_2$. Область Ω', ограниченную на плоскости (t, y) неравенствами

$$T_0 < t \leq T_0 + \Delta , \qquad \frac{X}{T_0 + \Delta} < y \leq \frac{X}{t} ,$$

будем называть криволинейным треугольником на плоскости (t, y) с основанием, равным Δ.

Любой криволинейный треугольник с основанием, равным Δ, можно представить как объединение попарно непересекающихся прямоугольной области и двух криволинейных треугольников с основанием, равным $\Delta/2$. Повторяя этот процесс s раз мы получим, что каждый криволинейный треугольник Ω' с основанием, равным Δ, есть объединение попарно непересекающихся областей – 2^s криволинейных треугольников с основанием, равным $\Delta/2^s$ и $1 + 2 + \ldots + 2^{s-1} = 2^s - 1 < 2^s$ прямоугольных областей.

Положим $s_0 = [\delta \log_2 X/2]$. В сумме S_1 область суммирования по t и y является криволинейным треугольником с основанием, равным $T_2 - T_1$. Представим её в виде объединения попарно непересекающихся подобластей – 2^{s_0} криволинейных треугольников с основанием, равным $(T_2 - T_1)/2^{s_0}$ и не более чем 2^{s_0} прямоугольных областей. Оценим сумму S_2 по одному из таких криволинейных треугольников. Пусть

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T'_1 < t \leq T'_2} \quad \sum_{X/T'_2 < y \leq X/t} \chi(t)\chi(y)\tau'_{2k-1}(y) .$$

Если через S_3 обозначим такую же сумму, как и S_2, но суммирование по χ распространено на все характеры по mod D, то

$$|S_2 - S_3| = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T'_1 < t \leq T'_2} \quad \sum_{X/T'_2/ < y \leq X/t} \chi_0(t)\chi_0(y)\tau'_{2k-1}(y) \leq$$

$$\leq \frac{X^{\delta/10}}{\varphi(D)}(T'_2 - T'_1 + 1) \left(\frac{X}{T'_2} - \frac{X}{T'_1} + 1 \right) \leq \tag{5}$$

$$\leq \frac{X^{\delta/10}}{\varphi(D)} \left(\frac{N}{2^{s_0}} + 1 \right) \left(\frac{X}{2^{s_0} N} + 1 \right) .$$

Положим

$$S_4 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T'_1 < t \leq T'_2} \quad \sum_{X/T'_2 < y \leq X/T'_1} \chi(t)\chi(y)\tau'_{2k-1}(y) .$$

S_3 и S_4 равны числу решений, соответственно, сравнений

$$n_1 \dots n_{2k} \equiv l (\mathrm{mod}\ D)\,, \quad T_1' < n_{2k} \le T_2'\,, \quad N_2 < n_2 \le 2N_2\,, \dots, N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}\,,$$

$$\frac{X}{T_2'} < n_1 \dots n_{2k-1} \le \frac{X}{n_{2k}}\,,$$

$$n_1 \dots n_{2k} \equiv l (\mathrm{mod}\ D)\,, \quad T_1' < n_{2k} \le T_2'\,, \quad N_2 < n_2 \le 2N_2\,, \dots, N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}\,,$$

$$\frac{X}{T_2'} < n_2 \dots n_{2k-1} \le \frac{X}{T_1'}\,.$$

Область, задаваемая неравенствами $T_1' < t \le T_2'$, $\dfrac{X}{T_2'} < y \le \dfrac{X}{t}$ содержится в области, задаваемой неравенствами $T_1' < t \le T_2'$, $\dfrac{X}{T_2'} < y \le \dfrac{X}{T_1'}$. Поэтому

$$0 \le S_3 \le S_4\,.$$

Отсюда следует

$$S_4 - \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \le T_2'} \sum_{X/T_2' < y \le X/T_1'} \chi(t)\chi(y)\tau_{2k-1}'(y) \ll$$

Далее

$$\sum_{T' < t \le T''} \chi(t) = \sum_{1 < t \le T''} \chi(t) - \sum_{1 < t \le T'} \chi(t)\,,$$

$$\sum_{Y' < t \le Y''} \chi(y)\tau_{2k-1}'(y) = \sum_{1 < t \le Y''} \chi(y)\tau_{2k-1}'(y) - \sum_{1 < t \le Y'} \chi(y)\tau_{2k-1}'(y)\,.$$

Поэтому из неравенства (4), учитывая $\ln(2N_k) \le X^{\delta/10}$, получаем:

$$S \ll X^{0,6\delta} \max_{\substack{N \le T \le 2N,\\ UV \le Y \le 2^{2k-1}UV}} \{\, |S_1'| \,\} + \frac{X^{1-\delta/3}}{\varphi(D)}\,, \tag{6}$$

где

$$S_1' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{y \le Y} \chi(y)\tau_{2k-1}'(y)\,.$$

Возможны два случая: $V \le X^\delta$ и $V > X^\delta$. Рассмотрим случай $V \le X^\delta$. Оценим сумму S_1' при $N \le T \le 2N$, $\quad UV \le Y \le 2^{2k-1}UV$. Имеем:

$$|S_1'| = \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{V < v \le 2^{k-1}V} \chi(v)\tau_{k-1}'(v) \sum_{U < u \le U_v} \chi(u)\tau_k'(u) \right|\,,$$

Далее

$$\sum_{T'<t\le T''}\chi(t)=\sum_{1<t\le T''}\chi(t)-\sum_{1<t\le T'}\chi(t)\,,$$

$$\sum_{Y'<t\le Y''}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)=\sum_{1<t\le Y''}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)-\sum_{1<t\le Y'}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Поэтому из неравенства (4), учитывая $\ln(2N_k)\le X^{\delta/10}$, получаем:

$$S\ll X^{0,6\delta}\max_{\substack{N\le T\le 2N,\\ UV\le Y\le 2^{2k-1}UV}}\{\,|S'_1|\,\}+\frac{X^{1-\delta/3}}{\varphi(D)}\,, \tag{6}$$

где

$$S'_1=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{t\le T}\chi(t)\sum_{y\le Y}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Возможны два случая: $V\le X^{\delta}$ и $V>X^{\delta}$. Рассмотрим случай $V\le X^{\delta}$. Оценим сумму S'_1 при $N\le T\le 2N,\quad UV\le Y\le 2^{2k-1}UV$. Имеем:

$$|S'_1|=\frac{1}{\varphi(D)}\left|\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{t\le T}\chi(t)\sum_{V<v\le 2^{k-1}V}\chi(v)\tau'_{k-1}(v)\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|\,,$$

где $U_v=\min\left\{2^kU,\ Y/v\right\}$. Отсюда имеем:

$$|S'_1|\le\max_{\chi\ne\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}\times$$

$$\times\sum_{N_{k+1}<n_{k+1}\le 2N_{k+1}}\cdots\sum_{N_{2k-1}<n_k\le 2N_{2k-1}}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\left|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|\,. \tag{7}$$

Применив неравенство Коши, получим:

$$\sigma=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\left|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|\le(\sigma_1)^{\frac12}\,,$$

где

$$\sigma_1=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|^2\,.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сранения

$$n_1\dots n_k\equiv n'_1\dots n'_k\pmod D\,;$$

$$N_1<n_1,\ n'_1\le 2N_1\,,\quad \dots,\quad N_k<n_k,\ n'_k\le 2N_k\,,$$

$$U<n_1\dots n_k,\qquad n'_1\dots n'_k\le U_v\,.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U<u\le U_v}\tau_k(u)\sum_{\frac{U-u}{D}<d\le\frac{U_v-u}{D}}\tau_k(u+dD)\le$$

$$\le\sum_{U<u\le U_v}u^{\delta/10}\sum_{\frac{U-u}{D}<d\le\frac{U_v-u}{D}}(u+dD)^{\delta/10}\ll$$

$$\ll X^{\delta/5}\sum_{U<u\le 2^kU}\left(\frac{U_v-U}{D}+1\right)\ll X^{\delta/5}\left(\frac{U}{D}+U\right).$$

Отсюда

$$\sigma\ll X^{\delta/10}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right). \tag{8}$$

Из (7), (8), а также по лемме **??** получим:

$$S_1'\ll\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}X^{\delta/10}V\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\ll N^{1/2}D^{1/6}\ln DVX^{\delta/10}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right).$$

Так как

$$N^{1/2}U=(NU)^{1/2}(U^2)^{1/4}\ll X^{1/2}(NUV)^{1/4}\le X^{3/4},$$

$$(NU)^{1/2}\ll X^{1/2},\qquad X^{1/2}D^{1/6}\ll X^{3/4}D^{-1/3},$$

то

$$S_1'\ll X^{1{,}2\,\delta}(X^{3/4}D^{-1/3}+X^{1/2}D^{1/6})\ll X^{3/4+1{,}2\,\delta}D^{-1/3}.$$

Таким образом при $V\le X^{\delta}$ получаем:

$$S\ll X^{3/4+2\,\delta}D^{-1/3}+\frac{X^{1-\delta/3}}{\varphi(D)}.$$

Рассмотрим оставшийся случай, когда $V>X^{\delta}$. Можно показать, снова используя метод исчерпывания криволинейной области, что для суммы S_1' при $N<T\le 2N,\quad UV<Y\le 2^{2k-1}UV$ справедлива оценка

$$S_1'\ll X^{\delta}\max_{\substack{U\le U'<U''\le 2^kU,\\ V\le V'<V''\le 2^{k-1}V}}\{\,|S''|\,\}+\frac{X^{1-0{,}9\,\delta}}{\varphi(D)}, \tag{9}$$

где

$$S''=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}\,(l)\sum_{t\le T}\chi(t)\sum_{U'<u\le U''}\ \sum_{V'<v\le V''}\chi(u)\tau_k'(u)\chi(v)\tau_{k-1}'(v).$$

Оценим сумму S''. Имеем:

$$S'' \leq \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \left| \sum_{U' < u \leq U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right| \left| \sum_{V' < v \leq V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right| \leq$$

$$\leq \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod} D)} \left| \sum_{U' < u \leq U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right| \left| \sum_{V' < v \leq V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right| .$$

Применяя неравенство Коши, получаем:

$$S'' \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} \cdot \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{U' < u \leq U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{V' < v \leq V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Заметим,что сумма

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{U' < u \leq U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right|^2$$

равна количеству решений сравнения

$$n_1 \ldots n_k \equiv n'_1 \ldots n'_k \pmod D;$$

$$N_1 < n_1\,, \;\; n'_1 \leq 2N_1\,, \quad \ldots, \quad N_k < n_k\,, \;\; n'_k \leq 2N_k\,,$$

$$U' < n_1 \ldots n_k\,, \qquad n'_1 \ldots n'_k \leq U''\,.$$

Для количества решений этого сравнения имеем оценку:

$$\sum_{U' < u \leq U''} \tau_k(u) \sum_{\frac{U'-u}{D} < d \leq \frac{U''-u}{D}} \tau_k(u + dD) \ll$$

$$\ll X^{\delta/5} \sum_{U < u \leq 2^k U} \left(\frac{U'' - U'}{D} + 1 \right) \ll X^{\delta/5} \left(\frac{U}{D} + U \right) .$$

Аналогично имеем:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{V' < u \leq V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right|^2 \ll X^{\delta/5} \left(\frac{V^2}{D} + V \right) .$$

Следовательно,

$$S'' \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} X^{\delta/5} \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) \left(\frac{V}{\sqrt{D}} + \sqrt{V} \right) .$$

В силу неравенств $T \leq 2N$, $V \leq U \leq NV$, $NUV < X$, $D \leq X^{3/8}$ и леммы ?? получим:

$$X^{\delta/5} \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} \left(\frac{U\sqrt{V} + \sqrt{U}V}{\sqrt{D}} + \sqrt{UV} \right) \ll$$

$$\ll X^{\delta/5} N^{1/2} D^{1/6} \ln X \left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}} + \sqrt{UV} \right) \ll$$

$$\ll X^{0,3\,\delta} \left(\frac{\sqrt{U}\sqrt{NUV}}{D^{1/3}} + \sqrt{NUV} D^{1/6} \right) \ll X^{0,3\,\delta} \left(\frac{X^{1/2}(NUV)^{1/4}}{D^{1/3}} + X^{1/2} D^{1/6} \right) \ll$$

$$\ll X^{3/4+0,3\,\delta} D^{-1/3}$$

Таким образом,

$$S'' \ll \frac{X^{1+0,3\,\delta}}{D} N^{-1} \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} + X^{3/4+0,3\,\delta} D^{-1/3} .$$

Из (9) следует, что

$$S'_1 \ll \frac{X^{1+1,3\,\delta}}{D} N^{-1} \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} + X^{3/4+1,3\,\delta} D^{-1/3} + \frac{X^{1-0,9\,\delta}}{\varphi(D)} .$$

В силу (6) получаем:

$$S \ll \frac{X^{1+2\,\delta}}{D} N^{-1} \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} + X^{3/4+2\,\delta} D^{-1/3} + \frac{X^{1-0,3\,\delta}}{\varphi(D)} .$$

Обозначим $A = N^{-1} \sum\limits_{t \leq T} \chi(t)$, где $N \leq T \leq 2N$, $D_1 = p_0^{m_1}$ – модуль, по которому характер χ примитивный. Оценим величину A. Так как $N \geq X^{1/2k}$ и $D_1 \leq D \leq X^{3/8}$, то $\dfrac{\ln D_1}{\ln T} \leq 2k$. Возможны случаи:

1. $\dfrac{m_1}{20} > k$, $\dfrac{\ln D_1}{\ln T} > 1$, $m_1 > 81$. В этом случае по лемме ?? величина $A \ll N^{-\gamma/4k^2} \ll X^{-\gamma/8k^3}$;

2. $T \geqslant D_1$. Тогда

$$A \ll \frac{\sqrt{D_1}\ln D_1}{N} \leq \frac{\sqrt{T}\ln T}{N} \ll N^{-1/2}\ln X \leq X^{-1/4k}.$$

3. $m_1 \leq \max\{81, 20k\} \leq 41k$. В этом случае сумму характеров оценим модулем D_1. Имеем:

$$A \leq \frac{p_0^{m_1}}{N} \leq \frac{p_0^{41k}}{N}.$$

Так как $\dfrac{1}{8k^3} < \dfrac{1}{4k}$ и в лемме **??** константа $\gamma < 1$, то во всех случаях $A \ll N^{-\gamma/8k^3}$.

Выберем $\delta = \dfrac{(\ln\ln X)^2}{6\ln X}$. Тогда

$$S \ll \frac{X}{De^{(\ln\ln X)^2/3}}.$$

Рассмотрим второй случай, когда $N_1 = \max\{N_1, \ldots, N_k, N_{k+1}, \ldots, N_{2k}\}$. Будем предполагать,что $N_1 \geq N_2 \geq N_{k+2} \geq N_3 \geq \ldots$. Положим

$$U = N_2 \ldots N_{k+1}, \quad V = N_{k+2} \ldots N_{2k}, \quad N = N_1.$$

Тогда $U \geq V$, $NV \geq U \geq V$, причём, $U > X^\delta$, $V > X^\delta$.

Действуя, как в первом случае, для суммы S при $N < T \leq 2N$ можно получить оценку:

$$S \ll \frac{X^{1+2\delta}}{D} N^{-1} \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{t \leq T} \mu(t)\chi(t) \right| + X^{3/4+2\delta} D^{-1/3} + \frac{X^{1-0,3\delta}}{\varphi(D)},$$

Согласно лемме **??**, имеем:

$$S \ll \frac{X^{1+2\delta}}{D} N^{-1} \frac{N(\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2/2}} + X^{3/4+2\delta} D^{-1/3} + \frac{X^{1-0,3\delta}}{\varphi(D)}.$$

Следовательно, как и в первом случае, выбрав $\delta = \dfrac{(\ln\ln X)^2}{6\ln X}$, для остаточного члена формулы (2) имеем оценку:

$$R = \frac{X}{\varphi(D)} e^{-(\ln\ln X)^2/7}. \quad \blacksquare$$

Литература

1. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Ю.В. Линник. – Л.:Издательство ЛГУ, 1961.

2. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1955. – 19. – С.11-16.

3. Линник Ю.В., Барбан М.Б., Чудаков Н.Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа // Acta arithm. – 1964. – 9;4. – С.375-390.

4. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью,равной степени простого нечетного числа // Докл. АН СССР, Серия математическая. – 1979. – 43;4. – С.892-908.

5. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР, Серия математическая. – 1970. – 192;4. – С.724-727.

6. Прахар К. Распределение простых чисел /. К. Пхакар. – М.: Мир, 1967.

7. Чубариков В.Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник Московского университета. – 1973. – 2. – С.46-52.

8. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory / H. Iwaniec, E. Kowalsky. – American Mathematical Society, Colloquium Publications. – 2004. – 53.

9. Линник Ю.В. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод / Ю.В. Линник. – Л.: Наука,1980.

10. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел, 2-е изд. / А.А. Карацуба. – М.: Наука, 1983.

11. Виноградов А.И. О числах с малыми простыми делителями // Докл. АН СССР, Серия математическая. – 1956. – 19;4. – С.683-686.

12. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1976.

ON DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS IN AN ARITHMETIC PROGRESSION WITH PRIME-POWER DIFFERENCE

S.A. Gritsenko, M.V. Shevtsova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia,
e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of the number of primes not exceeding the fixed value X and are contained in arithmetic progression with the difference $D = p_0^n$ where $p_0 \geq 3$ is the fixed prime number and $D \leq X^{3/8}e^{-(\ln\ln X)^2}$ is obtained.

Keywords: distribution of prime numbers, arithmetic progression, plan of the ternary problem solution, estimation of character sums over prime numbers.