



УДК 511.3

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Е. Коротков, О.А. Матвеева

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, 410012, Россия, e-mail: korotkovae@info.sgu.ru

Аннотация: В работе предлагается численный алгоритм, который позволяет быстро вычислять расположение в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: ряд Дирихле, L -функции Дирихле, функциональное уравнение.

В работе [1] показано, что важную роль при решении проблемы о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана играет ответ на следующий вопрос: существуют ли в комплексной полуплоскости $\text{Re } s = \sigma > 1/2$ нули целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, которые являются общими для этого класса. Особый интерес, в связи с этой задачей, представляют ряды Дирихле, являющиеся линейной комбинацией L -функций Дирихле с первообразными характерами одного и того же модуля. Как показано в [2], такие ряды Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана и, как будет видно ниже, имеют бесконечное число нулей в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Поэтому положительный ответ на поставленный выше вопрос позволяет сделать важные выводы о зависимости расширенной гипотезы Римана от основной гипотезы, и о том, что условие удовлетворять функциональному уравнению типа Римана не накладывает существенных ограничений на нули таких функций.

В настоящей работе предлагается достаточно простой алгоритм вычислительной схемы, позволяющий определять в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

1. Нули целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Приведем известные факты, связанные с аналитическими свойствами целых функций, заданных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами, которые влияют на расположение нулей таких функций.

В работе [3] показано, что ряды Дирихле с конечнозначными, мультипликативными коэффициентами, которые определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана, являются L -функциями Дирихле. В случае немultiпликативных коэффициентов условие подчинения функциональному уравнению типа Римана не накладывает сильных ограничений на расположение нулей даже в случае периодических коэффициентов. Как уже отмечалось во введении, ряды Дирихле, которые являются линейной комбинацией L -функций Дирихле с различными первообразными характерами данного модуля удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана. В [4, гл. IV, § 5] доказано следующее утверждение.



Теорема 1. Пусть χ_1 и χ_2 неэквивалентные характеры Дирихле. Тогда функция

$$f(s) = c_1 L(s, \chi_1) + c_2 L(s, \chi_2), \quad s = \sigma + it,$$

где $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, L(s, \chi_1), L(s, \chi_2)$ – L -функции Дирихле, имеет в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, где $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, бесконечно много нулей.

К сожалению, авторы не смогли, исходя из приведенных выше фактов, ответить на следующий вопрос: для любого ли нуля $z_0, \operatorname{Re} z_0 > 1/2$, целой функции, заданной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, существует целая функция, заданная рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, не равная нулю в точке z_0 . Как уже отмечалось выше ответ на этот вопрос связан с проблемой о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана.

Мы приведем схему численного определения нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, применение которой позволяет сделать предположение относительно ответа на поставленный вопрос.

2. Приближение полиномами Дирихле целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0, |t| < T$.

Как показано в работе [5], целая функция $f(s)$, определяемая рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

с периодическими коэффициентами, допускает в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0, |t| < T$ приближение полиномами Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k^{(n)}}{k^s} \tag{2}$$

с той же скоростью, с какой функция $g(x)$, заданная степенным рядом

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \tag{3}$$

с теми же коэффициентами a_k , что и ряд Дирихле (1), допускает на отрезке $[0; 1]$ приближение алгебраическими полиномами

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k^{(n)} x^k. \tag{4}$$

При этом полиномы Дирихле вида (2) имеют те же коэффициенты, что и алгебраические полиномы вида (4).

Легко видно, что для целых функций вида (1) в случае периодических коэффициентов a_n степенной ряд (3) определяет рациональную функцию

$$g(x) = \frac{\tilde{P}_{d-1}(x)}{1 + x + \dots + x^{d-1}}, \tag{5}$$

где d – период для a_k . Полюсы функции $g(z)$, как функции комплексного переменного, лежат на единичной окружности, и эта функция регулярна в точке $z = 1$. В нашем случае, функцию $g(z)$ будем считать регулярной и в точке $z = -1$.



Пусть D_{ρ_0} обозначает область, ограниченную эллипсом, фокусы которого находятся в точках ± 1 и сумма полуосей которого равна ρ_0 . Кроме того, функция $g(z)$ регулярна внутри области D_{ρ_0} и имеет хотя бы один полюс на границе этой области. Пусть в этом случае $E_n(g)$ обозначает величину наилучшего приближения функции (5) на отрезке $[-1; 1]$ алгебраическими полиномами, степени которых не превосходят n . Тогда теорема Бернштейна [6] утверждает что величина $E_n(g)$ ведет себя следующим образом

$$E_n(g) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \quad (6)$$

для любого $\rho : 1 < \rho < \rho_0$.

Как показано в [6], оценка (6) имеет место и в случае приближения функции $g(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ алгебраическими полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} x^k, \quad (7)$$

где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \quad x \in [-1; 1]$$

– разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева. При $k \geq 1$

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) dt. \quad (8)$$

В силу сказанного выше имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть ряд Дирихле (1) с периодическими коэффициентами определяет целую функцию. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ вида (2), такая, что в любой полосе: $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ имеют место следующие оценки

$$\|f(s) - Q_n(s)\| \leq C/\rho^n,$$

где ρ – некоторая константа, большая единицы.

Заметим, что в качестве коэффициентов полиномов Дирихле $Q_n(s)$ можно взять коэффициенты алгебраических полиномов $P_n(x)$ вида (7).

3. Алгоритм и вычислительная схема определения нулей. Пусть $f(z)$ – целая функция, определенная рядом Дирихле (1) с периодическими коэффициентами, и пусть $g(x)$ соответствующий степенной ряд (3).

Во-первых, определим вид рациональной функции $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} a_{(md+k)} x^{md+k} = \sum_{k=1}^d a_k x^k \sum_{m=0}^{\infty} x^{md} = (1-x^d)^{-1} \sum_{k=1}^d a_k x^k = \\ &= \frac{\tilde{P}_{d-1}(x)}{1+x+\dots+x^{d-1}}. \end{aligned} \quad (9)$$



Во-вторых, определим коэффициенты c_k разложения (7) по формулам (8). При этом имеет смысл предварительно разложить рациональную дробь (9) в сумму простейших.

Далее, находим коэффициенты $b_k^{(n)}$ полинома $P_n(x)$ (7). При этом полиномы Чебышева $T_k(x)$ определяем исходя из рекуррентного соотношения:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad T_0 = 1, \quad T_1 = x.$$

После этого выпишем полиномы Дирихле $Q_n(s)$ (2) и найдем комплексные нули таких полиномов. Известно [7], что в любой полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0, |t| < T$ нули полиномов $Q_n(s)$ с ростом n стремятся к нулям функции $f(s)$, и, так как полиномы $Q_n(s)$ сходятся к $f(s)$ с показательной скоростью, то будет наблюдаться достаточно быстрая сходимость нулей полиномов $Q_n(s)$.

Проиллюстрируем описанный выше алгоритм на отдельных примерах. Рассмотрим ряд со следующими коэффициентами:

$$a_n = \langle 0, n \equiv 0(3); 1, n \equiv 1(3); -1, n \equiv 2(3) \rangle$$

Нули полинома Дирихле, построенные для указанного ряда, располагаются на прямой $\sigma = 1/2$ тем больше, чем выше степень полинома. В силу симметричности нулей, мы не изображаем нижнюю полуплоскость:

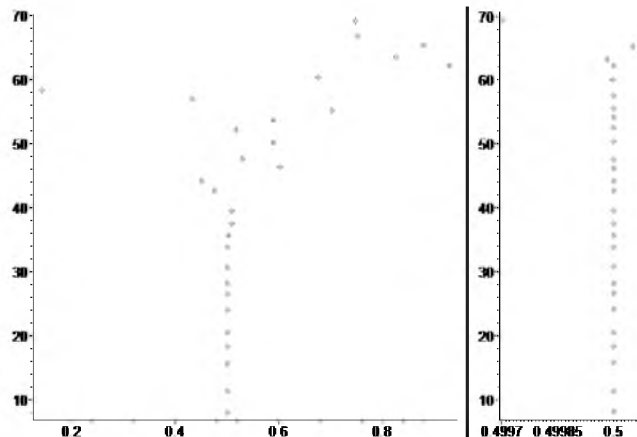


Рис. 1. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 57 и 112 степеней.

Аналогичная картина наблюдается для ряда с коэффициентами:

$$a_n = \langle 0, n \equiv 0(5); 1, n \equiv 1(5); 1, n \equiv 2(5); 1, n \equiv 3(5); -1, n \equiv 4(5) \rangle$$

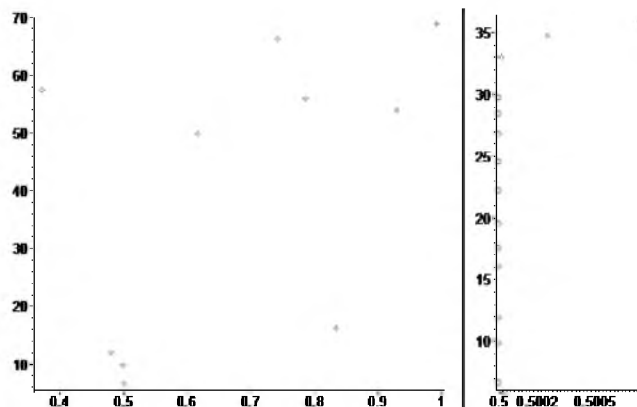


Рис. 2. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 28 и 83 степеней.

Но для ряда с периодическими, немультимпликативными коэффициентами:

$$a_n = \left\langle 0, n \equiv 0(5); 1, n \equiv 1(5); -1, n \equiv 2(5); 1/2, n \equiv 3(5); -1/2, n \equiv 4(5) \right\rangle$$

нули к прямой $\sigma = 1/2$ не сходятся и их большое число содержится в полосе $1/2 < \sigma < 1$.

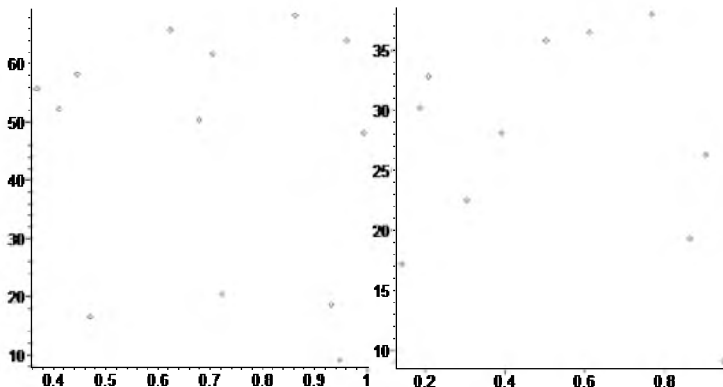


Рис. 3. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 27 и 67 степеней.

В результате численного эксперимента, основанного на приведенной здесь схеме, авторы показали, что в области $0 < \sigma < 1$, $|t| < 10^5$ нет общих нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, что позволяет предположить, что расширенная гипотеза Римана является следствием основной гипотезы.

Нужно отметить, что в численном эксперименте при $|t| < 10^5$ были использованы только ряды Дирихле с периодами коэффициентов $d = 3$ и $d = 5$. Возможно, что таких рядов Дирихле будет достаточно, чтобы получить ответ на вопрос, поставленный нами в начале настоящей работы.

Представляет интерес и другой вопрос, возникший в процессе численного эксперимента, выяснить почему нули аппроксимационных полиномов с мультипликативными коэффициентами, с ростом степени этих полиномов до определенной величины модуля t , располагаются на критической прямой и как это положение реализуется в зависимости от степени полиномов?

Литература

1. Кузнецов В.Н. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник. – Тула, 2010. – 11;1. – С.188-199.
2. Кузнецов В.Н. К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. – Саратов, 2011. – 11;3 (часть 1). – С.21-25.
3. Кривобок В.В. О рядах Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющими функциональному уравнению римановского типа // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – Саратов, 2007. – 7;1. – С.13-15.
4. Воронин С.М. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.



5. Кузнецов В.Н. Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам / Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов, 2003. – Вып. 2. – С.27-32.
6. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций / Л.: ЛГУ, 1977.
7. Титчмарш Е. Теория функций /- М.: Наука, 1980.

**NUMERICAL ALGORITHM OF ZEROS CALCULATION
OF ENTIRE FUNCTIONS DEFINED BY DIRICHLET'S SERIES
WITH PERIODIC COEFFICIENTS**

A.E. Koroktov, O.A. Matveeva

Saratov State University,
Astrakhanskaya St., 83, Saratov, 410012, Russia, e-mail: korotkovae@info.sgu.ru

Abstract. It is proposed the numerical algorithm that permits to calculate quite fast zeros of entire functions defined by Dirichlet's series with periodic coefficients distributed in the semiplane $\sigma > 1/2$.

Key words: Dirichlet's series, Dirichlet's L -function, functional equation.