



УДК 511

О ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Нгуен Тхи Ча

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: nguyentra.bsu@gmail.com

Аннотация. Доказано, что к заданному числу N можно подойти суммой двух квадратов простых чисел на расстояние, не большее, чем $\sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$.

Ключевые слова: простые числа, диофантовы неравенства, явная формула, плотностная теорема.

1. Введение. Пусть $N(\sigma, T)$ — число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \Re s < 1, 0 < \Im s \leq T$.

Оценки вида

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T, \quad \lambda \geq 1, \quad c \geq 1,$$

где λ и c — константы, называются плотностными теоремами. Наилучшим современным значением λ в таких оценках является $\lambda = \frac{6}{5}$ (см. [1]). Константа c играет меньшую роль; в работе [2] доказано, что $c < 18.2$.

Со времен Римана известны формулы, связывающие суммы по простым числам с суммами по нетривиальным нулям дзета-функции. Такие формулы называются явными. Пусть $\psi(x)$ — функция Чебышева. Одной из самых известных явных формул является следующее равенство:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $2 < T \leq x$, а суммирование ведется по нетривиальным нулям дзета-функции ρ .

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник [3],[4] разработал новую технику решения арифметических задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной. Плотностная техника особенно эффективна для решения задач о попадании простых чисел в короткие промежутки.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [5] содержится следующая теорема, доказанная на основе плотностной техники.

Теорема 1. Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Для любого числа $H > 0$ и числа N , удовлетворяющего условию $H > N^{1-\frac{1}{2\lambda}} \exp(\ln^{0.8} N)$, неравенство

$$|p - N| \leq H \tag{1}$$

разрешимо в простых числах p .



Для числа решений $J(N, H)$ неравенства (1) справедлива оценка $J(N, H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В 2006 году в работе [6] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказана теорема.

Теорема 2. Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Для любого числа $H > 0$ и числа N , удовлетворяющего условию $H > N^{1-\frac{1}{2\lambda}} \exp(\ln^{0.8} N)$, неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 .

В настоящей статье уточняется утверждение Теоремы 2, а также формулируются две новые теоремы о диофантовых неравенствах с простыми числами. Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 3. Если $H > \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 .

Теорема 4. Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Если

$$H > N^{(1-\frac{1}{2\lambda})^2} \exp(\ln^{0.8} N),$$

то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3 .

Теорема 5. Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Если

$$H > N^{(1-\frac{1}{\lambda})(1-\frac{1}{2\lambda})} \exp(\ln^{0.8} N),$$

то неравенство

$$|p_1 + p_2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 .

В настоящей статье представлено доказательство Теоремы 3, а доказательства теорем 4 и 5 автор рассчитывает опубликовать в последующих работах.

Замечание 1. В отличие от утверждений теорем 1 и 2 утверждение теоремы 3 не зависит от константы λ из плотностной теоремы.

В доказательстве теоремы 3 содержится оценка снизу для числа решений диофантова неравенства, однако эта оценка, по-видимому, не является точной.

Замечание 2. Интересно сравнить теоремы 1 и 3. В теореме 3 параметр H можно выбрать меньше, чем \sqrt{N} , а в теореме 1 разрешимость неравенства (1) при $H = \sqrt{N}$ не следует даже из гипотезы Римана.

Для доказательства Теоремы 3 нам потребуется несколько лемм.



2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1.[Явная формула] Пусть $2 \leq T \leq x$. Тогда

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ — нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

Доказательство см. в [7, глава 5].

Лемма 2. Для функции $N(\sigma, T)$ справедлива оценка

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T$$

при $\lambda = \frac{6}{5}$.

Доказательство см. в [1].

Лемма 3. Существует абсолютная постоянная $c_1 > 0$ такая, что $\zeta(s) \neq 0$ в области

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\ln^{2/3} |t| (\ln \ln |t|)^{1/3}}, \text{ где } |t| \geq 10.$$

Доказательство см. в [7, глава 6].

Лемма 4. При $T \geq 2$ справедливы оценки

$$\sum_{|\gamma-T| \leq 1} 1 = O(\ln T), \quad \sum_{|\gamma-T| > 1} 1 = O(\ln^2 T).$$

Доказательство см. в [7, глава 4].

Лемма 5. Справедливо оценка

$$\left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^\rho \right| \ll \max_{1/2 \leq \sigma < 1} x^\rho N(\sigma, T).$$

Доказательство см. в [5, глава 5].

3. Доказательство основной теоремы. Без ограничения общности считаем, что $H \leq \sqrt{N}/2$.

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} \sum_{\sqrt{N-H-p^2} \leq k \leq \sqrt{N+H-p^2}} \Lambda(k),$$

где $N_1 = N^{19/24} \exp(\ln^{0.8} N)$.



Достаточно получить неравенство

$$S \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}}. \quad (2)$$

Действительно, если на промежутках

$$[\sqrt{N - H - p^2}, \sqrt{N + H - p^2}]$$

нет простых чисел, то для S справедлива следующая оценка сверху:

$$S \ll \frac{N_1}{\sqrt{N}} \ln^2 N,$$

которая противоречит (2).

Воспользуемся леммой 1:

$$S = \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} (\sqrt{N + H - p^2} - \sqrt{N - H - p^2} - \sum_{|\gamma| \leq T} \int_{\sqrt{N-H-p^2}}^{\sqrt{N+H-p^2}} x^{\rho-1} dx + O(\frac{\sqrt{N_1} \ln^2 N}{T})),$$

где $T = \frac{N_1 \ln^3 N}{H}$.

Параметр T выбран с таким расчетом, чтобы остаточный член явной формулы был меньше по порядку, чем $\sqrt{N + H - p^2} - \sqrt{N - H - p^2}$.

Оценим сумму

$$W = \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} \int_{\sqrt{N-H-p^2}}^{\sqrt{N+H-p^2}} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Справедливо неравенство

$$W \leq \sum_{N-2N_1 < n^2 \leq N-N_1} \int_{\sqrt{N-H-n^2}}^{\sqrt{N+H-n^2}} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Поскольку из условия теоремы вытекает, что

$$N - (n + 1)^2 + H \leq N - n^2 - H,$$

имеем

$$W \leq \int_{\sqrt{N_1/2}}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx.$$



Применим неравенство Коши:

$$W^2 \ll \sqrt{N_1} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx.$$

Пусть $\delta = \frac{c_1}{\ln^{2/3} N (\ln \ln N)^{1/3}}$, где c_1 — константа из Леммы 3. Разобьем прямоугольник

$$\delta \leq \Re s \leq 1 - \delta, \quad -T \leq \Im s \leq T,$$

по которому суммируются нули дзета-функции, на $O(\ln N)$ ширины $\frac{1}{\ln N}$ и высоты $2T$. Тогда

$$W^2 \ll \sqrt{N_1} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ \sigma \leq \beta \leq \sigma + 1/\ln N}} x^{\rho-1} \right|^2 dx \ln^2 N,$$

где σ — то число между δ и $1 - \delta$, при котором правая часть последнего неравенства максимальна.

Далее, имеем

$$W^2 \leq \sqrt{N_1} \ln^2 N \left(\sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ |\gamma_1| \leq T \\ |\gamma - \gamma_1| \leq 1}} \sum_{|\gamma_1| \leq T} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} x^{2\sigma-2} dx + \right. \\ \left. + \sum_{|\gamma| \leq T} \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq T \\ |\gamma - \gamma_1| > 1}} \frac{1}{|\gamma - \gamma_1|} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} x^{2\sigma-2} dx \right).$$

В силу лемм 4 и 5 имеем:

$$W^2 \ll \ln^4 N \max_{\sigma \in [0.5, 1-\delta]} N_1^\sigma N(\sigma, T).$$

Воспользуемся леммами 2 и 3 и неравенством $T^{12/5} < N_1 \exp(-\ln^{0.8} N)$, следующим из условия теоремы:

$$W \ll \sqrt{N_1} \left(\exp\left(-\frac{1}{4} \ln^{0.8} N\right) + \exp\left(-\frac{\delta}{2} \ln^{0.8} N\right) \right) \ln^{2+c/2} N \ll \\ \ll \sqrt{N_1} \exp(-2 \ln^{0.1} N). \tag{3}$$

Для S справедлива оценка

$$S \gg \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} (\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}) - W.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$\sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} (\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}) \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N} \ln N}.$$



Поскольку по условию $H > \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$, теперь наше утверждение следует из неравенства (3). ■

Литература

1. Huxley M.N. On the difference between consecutive primes // Invent. Math. – 1972. – 15. – P.164-170.
2. Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки. – 1994. – 55;2. – С.59-61.
3. Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах «аддитивной» и «дистрибутивной» теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 49;1. – С.3-7.
4. Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 47;1. – С.7-8.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция/ М.: Физматлит, 1994.
6. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. – 7;4. – С.26-30.
7. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983.

ON DIOFANTINE INEQUALITIES WITH PRIMES

Nguyen Thi Tra

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: nguyentra.bsu@gmail.com

Abstract. It is proved that the inequality $|p_1^2 + p_2^2 - N \leq H|$ is solvable in primes p_1 and p_2 provided $H \geq \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$.

Keywords: primes, diofantine inequalities, explicit formula, density theorem.