



МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В КЛАССЕ ДРОБНО-ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.Б. КАРИКОВ¹
В.В. МИШУНИН²
В.Г. РУБАНОВ¹
Ю.А. ГОЛЬЦОВ¹

¹⁾ *Белгородский государственный
технологический университет
им В.Г. Шухова*

²⁾ *Белгородский государственный
национальный исследовательский
университет*

e-mail: rubanov@intbel.ru

В статье описаны методы идентификации систем с распределенными параметрами, использующие частотные и временные характеристики. Для идентификации по временным характеристикам был модифицирован метод идентификации Симою. Приведены результаты идентификации различными методами на примере решения задачи нагрева полубесконечного тела.

Ключевые слова: идентификация, дробно-иррациональная передаточная функция, метод наименьших квадратов, Симою.

Качество процесса управления напрямую зависит от адекватности математической модели, используемой при синтезе алгоритмов управления. Многие из теплотехнологических объектов управления относятся к классу объектов с распределенными параметрами и описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Для использования классических методов синтеза закона управления приходится прибегать к аппроксимации данной модели стационарными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, что не позволяет учесть всех особенностей динамики процессов, протекающих в системах с распределенными параметрами. Повысить качество конечного продукта и снизить затраты энергии позволяет использование системы управления, построенной на основе математического описания, отражающего физическую сущность тепловых процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Аппроксимация таких уравнений в области комплексного переменного передаточными функциями целого порядка приводит к модели с невысоким уровнем адекватности. В то время как аппроксимация объекта управления дробно-иррациональными передаточными функциями наиболее полно отражает распределенный характер процессов, протекающих в объекте управления, что позволяет достичь более высокой степени адекватности, а, следовательно, и точности управления процессом.

Получение математической модели объекта автоматизации с дробным порядком может осуществляться различными методами идентификации, например, по частотным характеристикам или по кривым разгона, снятым экспериментально, при этом точность описания будет зависеть от выбора метода идентификации.

Для использования метода идентификации по частотным характеристикам [1] передаточную функцию объекта можно записать в виде отношения полиномов от \sqrt{s} порядка m и n :

$$W(s) \approx \frac{B(\sqrt{s})}{A(\sqrt{s})} = \frac{b_0 s^{m/2} + b_1 s^{m-1/2} + \dots + b_{m-1} s^{1/2} + b_m}{a_0 s^{n/2} + a_1 s^{n-1/2} + \dots + a_{n-1} s^{1/2} + a_n}, m \leq n$$

Коэффициенты многочленов $A(\sqrt{s})$ и $B(\sqrt{s})$ можно найти по частотной характеристике $W(j\omega)$ аналитической передаточной функции (которая может быть получена экспериментально или на основе имеющихся временных характеристик). Вводя замену $s \rightarrow j\omega$ и минимизируя функционал $\sum_{\omega} (\text{Re}[B(j\omega) - W(j\omega) \cdot A(j\omega)])^2$, что отвечает методу наименьших квадратов

(МНК), определяем значения коэффициентов a_i и b_j . Хотя частотная характеристика в общем случае — комплексная величина, тем не менее, хорошие результаты, в смысле регулярности оценок параметров, даёт минимизация вещественной части функционала квадрата ошибки.

В соответствии с частотной передаточной функцией, переписанной в виде:



$$-a_0 W(j\omega) \cdot (j\omega)^{n/2} = -a_1 W(j\omega) \cdot (j\omega)^{n-1/2} + -a_2 W(j\omega) \cdot (j\omega)^{n-2/2} + \dots \\ + a_{n-1} W(j\omega) \cdot (j\omega)^{1/2} + a_n W(j\omega) - b_0 (j\omega)^{m-1/2} - \dots - b_{m-1} (j\omega)^{1/2} - b_m,$$

при $a_0 = 1$, составляется матрица регрессоров F размерностью $[N \times (n+m+1)]$, где N – размерность вектора частот ω , n – размерность вектора параметров a знаменателя, $m+1$ – размерность вектора параметров b числителя. Тогда, согласно классическому МНК, параметры передаточной функции вычисляются следующим образом:

$$[a;b] = \left(\text{Re} \left[F^T \cdot F \right] \right)^{-1} \cdot \text{Re} \left[F^T \cdot \left(-W(j\omega) \cdot (j\omega)^{n/2} \right) \right],$$

где $[a;b] = [a_1 \dots a_n \ b_0 \dots b_m]$, $F = [F_a; F_b]$,

$$F_a = \begin{bmatrix} (j\omega_1)^{n-1/2} W(j\omega_1) & (j\omega_1)^{n-2/2} W(j\omega_1) & \dots & (j\omega_1)^{1/2} W(j\omega_1) & W(j\omega_1) \\ (j\omega_2)^{n-1/2} W(j\omega_2) & (j\omega_2)^{n-2/2} W(j\omega_2) & \dots & (j\omega_2)^{1/2} W(j\omega_2) & W(j\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (j\omega_N)^{n-1/2} W(j\omega_N) & (j\omega_N)^{n-2/2} W(j\omega_N) & \dots & (j\omega_N)^{1/2} W(j\omega_N) & W(j\omega_N) \end{bmatrix},$$

$$F_b = \begin{bmatrix} -(j\omega_1)^{m/2} & -(j\omega_1)^{m-1/2} & \dots & -(j\omega_1)^{1/2} & -1 \\ -(j\omega_2)^{m/2} & -(j\omega_2)^{m-1/2} & \dots & -(j\omega_2)^{1/2} & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(j\omega_N)^{m/2} & -(j\omega_N)^{m-1/2} & \dots & -(j\omega_N)^{1/2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Наиболее распространенным методом идентификации для указанного случая является известный метод Симою [2], позволяющий найти передаточную функцию целого порядка по снятой экспериментально кривой разгона. Осуществим модификацию этого метода для получения передаточной функции дробного порядка, что весьма актуально, применительно к теплотехнологическим объектам.

Предположим, что исследуемый объект может быть описан линейным дифференциальным уравнением дробного порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n^* \frac{d^{n/2} x}{dt^{n/2}} + a_{n-1}^* \frac{d^{(n-1)/2} x}{dt^{(n-1)/2}} + \dots + a_1^* \frac{d^{1/2} x}{dt^{1/2}} + a_0^* x = b_m^* \frac{d^{m/2} \lambda}{dt^{m/2}} + b_{m-1}^* \frac{d^{(m-1)/2} \lambda}{dt^{(m-1)/2}} + \dots + b_1^* \frac{d^{1/2} \lambda}{dt^{1/2}} + b_0^* \lambda, \quad (1)$$

где a_1^*, \dots, a_n^* ; b_1^*, \dots, b_m^* – постоянные коэффициенты, x – отклонение регулируемой величины, λ – входное воздействие.

Приведем уравнение (1) к следующему виду:

$$a_n \frac{d^{n/2} x}{dt^{n/2}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)/2} x}{dt^{(n-1)/2}} + \dots + a_1 \frac{d^{1/2} x}{dt^{1/2}} + x = K \left(b_m \frac{d^{m/2} \lambda}{dt^{m/2}} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)/2} \lambda}{dt^{(m-1)/2}} + \dots + b_1 \frac{d^{1/2} \lambda}{dt^{1/2}} + \lambda \right), \quad (2)$$

где a_1, \dots, a_n ; b_1, \dots, b_m – постоянные коэффициенты, K – коэффициент усиления, определяемый по формуле:

$$K = \frac{x_{уст}}{\lambda_{уст}}.$$

Передаточная функция объекта $W(s) = X(s)/\Lambda(s)$, описываемого уравнением (2), может быть представлена в следующем виде:

$$W(s) = K \overline{W}(s) = K \frac{b_m s^{m/2} + b_{m-1} s^{(m-1)/2} + \dots + b_1 s^{1/2} + 1}{a_n s^{n/2} + a_{n-1} s^{(n-1)/2} + \dots + a_1 s^{1/2} + 1}.$$



В дальнейшем будем рассматривать нормированную передаточную функцию $\bar{W}(s)$. Введем переменную $\nu = \sqrt{s}$, тогда передаточная функция объекта будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{W}(\nu) = \frac{b_m \nu^m + b_{m-1} \nu^{m-1} + \dots + b_1 \nu + 1}{a_n \nu^n + a_{n-1} \nu^{n-1} + \dots + a_1 \nu + 1}.$$

Рассмотрим инверсную передаточную функцию объекта:

$$\bar{W}^{-1}(\nu) = \frac{1}{\bar{W}(\nu)} = \frac{a_n \nu^n + a_{n-1} \nu^{n-1} + \dots + a_1 \nu + 1}{b_m \nu^m + b_{m-1} \nu^{m-1} + \dots + b_1 \nu + 1}.$$

Разложение $\bar{W}^{-1}(\nu)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\nu = 0$ имеет вид:

$$\bar{W}^{-1}(\nu) = 1 + C_1 \nu + C_2 \nu^2 + \dots + C_k \nu^k + \dots, \tag{3}$$

где коэффициенты разложения C_k называются согласно методу Симою площадями. Приравняв выражение для передаточной функции $\bar{W}^{-1}(\nu)$ и разложение (3), получим:

$$(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) = (1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) (1 + C_1 s + C_2 s^2 + \dots + C_k s^k + \dots).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных имеем:

$$1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 1 + (b_1 + C_1) s + (b_2 + b_1 C_1 + C_2) s^2 + \dots + (b_k + \sum_{i=1}^{k-1} b_i C_{k-i}) s^k + C_k s^k + \dots$$

С целью определения неизвестных коэффициентов $a_1 \dots a_n; b_1 \dots b_m$ составим линейную систему уравнений, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s в последнем уравнении:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + C_1; \\ a_2 &= b_2 + b_1 C_1 + C_2; \\ a_3 &= b_3 + b_2 C_1 + b_1 C_2 + C_3; \\ &\vdots \\ a_k &= b_k + C_k + \sum_{i=1}^{k-1} b_i C_{k-i}. \end{aligned} \tag{4}$$

Предположим, что идентифицируемый объект описывается передаточной функцией порядка n , а $m = n - 1$, тогда, для получения значений коэффициентов $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m$ необходимо составить систему из $m + n$ уравнений.

Согласно классическому методу Симою идентификация математической модели объекта производится по кривой разгона, снятой экспериментально – $h(t)$. Выбирая за начало отсчета точку $h(0)$ и масштабируя кривую разгона путем деления на K , получим нормированную переходную характеристику $\bar{h}(t)$ такую, что $\bar{h}(\infty) = 1$.

Введем вспомогательную функцию $\varphi(t)$, определяемую формулой:

$$\varphi(t) = \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} (1 - \bar{h}(t)). \tag{5}$$

Найдем изображение $\Phi(s)$ по Лапласу для оригинала $\varphi(t)$:

$$\Phi(s) = L\{\varphi(t)\} = \sqrt{s} \frac{1 - \bar{W}(s)}{s} = \frac{1 - \bar{W}(s)}{\sqrt{s}}.$$

Перейдем к переменной ν :

$$\Phi(\nu) = \frac{1 - \bar{W}(\nu)}{\nu}. \tag{6}$$

Функцию $\Phi(\nu)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням ν в точке $\nu = 0$:



$$\Phi(v) = \mu_0 + \mu_1 v + \mu_2 v^2 + \dots + \mu_k v^k + \dots \quad (7)$$

где коэффициенты разложения, называемые моментами вспомогательной функции, находятся по известной формуле:

$$\mu_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \Phi(v)}{dv^k} \right|_{v=0}. \quad (8)$$

Моменты μ_k могут быть определены непосредственно из функции $\varphi(t)$, вычисленной по экспериментальной переходной характеристике. Вычисление операции полудифференцирования $\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}$ в выражении (5) будет рассмотрено ниже.

Изображение вспомогательной функции $\varphi(t)$ согласно преобразованию Лапласа есть функция:

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt, \quad (9)$$

аргументом которой является комплексная переменная s , поэтому для вычисления моментов (8) производные $\Phi^{(k)}(v) \equiv \frac{d^k \Phi(v)}{dv^k}$ целесообразно определить по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d\Phi(s)}{ds} = \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds}.$$

Тогда рекуррентная формула для нахождения k -й производной будет иметь вид:

$$\Phi^{(k)}(v) = \frac{\partial \Phi^{(k-1)}(v)}{\partial v} = \frac{d\Phi^{(k-1)}(s)}{ds} \Big/ \frac{dv}{ds}.$$

Учитывая, что $v = \sqrt{s}$ и $ds/dv = 2\sqrt{s}$ имеем:

$$\frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} = 2\sqrt{s} \frac{d\Phi(s)}{ds};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(v)}{\partial v^2} = 2 \frac{d\Phi(s)}{ds} + 4s \frac{d^2 \Phi(s)}{ds^2};$$

$$\frac{\partial^3 \Phi(v)}{\partial v^3} = 12\sqrt{s} \frac{d^2 \Phi(s)}{ds^2} + 8s^{\frac{3}{2}} \frac{d^3 \Phi(s)}{ds^3};$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^k \Phi(v)}{\partial v^k} = 2\sqrt{s} \frac{d\Phi^{(k-1)}(s)}{ds},$$

где производные k -го порядка функции (9) имеют вид:

$$\frac{d^k \Phi(s)}{ds^k} = \int_0^{\infty} (-t)^k \varphi(t) e^{-st} dt. \quad (10)$$

Искомые моменты (8) найдем, подставив в (10) $s = 0$, с учетом свойства преобразования Лапласа о дифференцируемости функции-оригинала:



$$\begin{aligned} \mu_0 &= \int_0^\infty \varphi(t) dt; \\ \mu_1 &= 2 \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} \int_0^\infty (-t) \varphi(t) dt; \\ \mu_2 &= \frac{1}{2!} \left(2 \int_0^\infty (-t) \varphi(t) dt + 4 \frac{d}{dt} \int_0^\infty (-t)^2 \varphi(t) dt \right); \\ \mu_3 &= \frac{1}{3!} \left(12 \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} \int_0^\infty (-t)^2 \varphi(t) dt + 8 \frac{d^{3/2}}{dt^{3/2}} \int_0^\infty (-t)^3 \varphi(t) dt \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Установим теперь связь между коэффициентами μ_k и C_k , для чего преобразуем формулу (6):

$$v \cdot \Phi(v) = 1 - \bar{W}(v)$$

или

$$\bar{W}(v) = 1 - v \cdot \Phi(v).$$

Откуда следует,

$$(1 - v \cdot \Phi(v)) \cdot \bar{W}^{-1}(v) = 1.$$

В последнее выражение подставим разложения (3) и (7):

$$\left[1 - \mu_0 v - \mu_1 v^2 - \mu_2 v^3 \dots - \mu_{k-1} v^k - \dots \right] \left(1 + C_1 v + C_2 v^2 + \dots + C_k v^k + \dots \right) = 1.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим:

$$1 + (C_1 - \mu_0)v + (C_2 - \mu_0 C_1 - \mu_1)v^2 + \dots + \left(C_k - \mu_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \mu_i C_{k-1-i} \right) v^k + \dots = 1$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях v , составим линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 - \mu_0 &= 0; \\ C_2 - \mu_0 C_1 - \mu_1 &= 0; \\ &\vdots \\ C_k - \mu_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \mu_i C_{k-1-i} &= 0, \end{aligned}$$

решая которую, найдем рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов C_k :

$$\begin{aligned} C_1 &= \mu_0; \\ C_2 &= \mu_0 C_1 + \mu_1; \\ &\vdots \\ C_k &= \mu_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \mu_i C_{k-1-i}. \end{aligned}$$

Далее, подставляя значения коэффициентов C_k в систему (4), определим искомые параметры передаточной функции $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m$.

Вычисление производных дробного порядка, кратного $1/2$, переменных в выражениях (5), (11) может быть основано на определении дробной производной Летникова [3]. Дробная производная порядка ν от непрерывной функции является также непрерывной функцией следующего вида:



$$\frac{d^{\nu} f(t)}{dt^{\nu}} \equiv D^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\nu} f(\tau) d\tau, \quad -\infty < \nu < +1.$$

Для частного случая $\nu = 1/2$ зависимость примет вид:

$$D^{1/2} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad \text{или} \quad D^{1/2} f(t) = D \left(D^{-1/2} f(t) \right) = D \left(I^{1/2} f(t) \right),$$

где $I^{1/2}$ – операция полуинтегрирования.

Операция дифференцирования D целого порядка выполняется по одному из известных разностных алгоритмов. Операция полуинтегрирования осуществляется на основе численного интегрирования

$$I^{1/2} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

После перехода к решётчатой функции, в результате чего в случае применения метода прямоугольников на k -м шаге, получим

$$I^{1/2} f[kT_0] = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f[iT_0]}{\sqrt{(k-i)T_0}},$$

где T_0 – шаг по времени.

Проиллюстрируем возможности предложенной модификации метода Симою для идентификации объекта передаточной функцией дробного порядка на конкретном примере. Рассмотрим задачу торцевого нагрева полубесконечного тела, описываемого одномерным односвязным уравнением второго порядка параболического типа:

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = 0.05 \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2}.$$

Начальная температура тела $0^{\circ}C$, температура на торце полубесконечного тела – $100^{\circ}C$. С помощью метода сеток построим кривую нагрева тела на глубине $r = 1$ м (рис. 1).

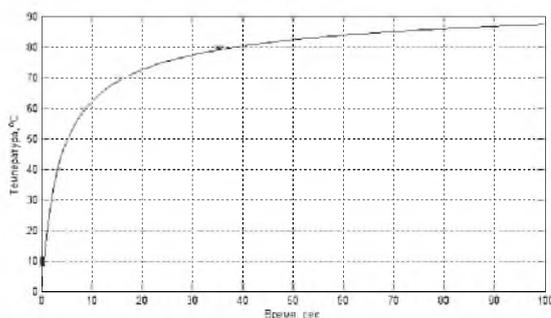


Рис. 1. Кривая нагрева сечения стержня для $r = 1$ м

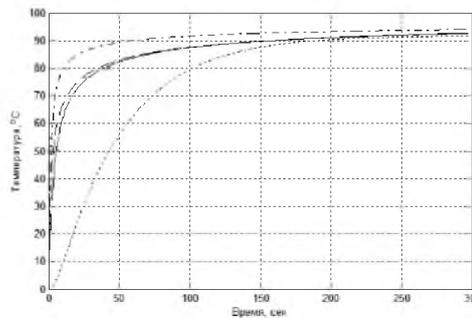


Рис. 2. Результаты аппроксимации

Сравним результаты идентификации объекта, проведенные классическим методом Симою с получением передаточной функции целого порядка и модифицированным методом, дающим описание в форме передаточной функции дробного порядка.

В результате идентификации объекта передаточной функцией дробного порядка модифицированным методом Симою, изложенным выше, имеем:

$$W_1(s) = 100 \frac{902.84s + 7.53s^{0.5} + 1}{1857.74s^{1.5} + 906.94s + 10.06s^{0.5} + 1}.$$

Применяя к этому же примеру метод идентификации передаточной функцией дробного порядка по ВЧХ с помощью МНК, имеем:

$$W_2(s) = 100 \frac{0.45s - 1.09s^{0.5} + 0.97}{3.69 \cdot 10^{-5} s^{1.5} + 8.9 \cdot 10^{-3} s + 0.12s^{0.5} + 1}.$$

При идентификации объекта передаточной функцией целого порядка, используя средства модуля *ident* пакета *Matlab*, получаем:



$$W_3(s) = 100 \frac{0.0002509s^3 + 0.001088s^2 + 0.00244s + 0.002485}{s^3 + 0.8737s^2 + 0.1447s + 0.002706}.$$

На рис. 2. сплошной линией показаны исходные данные, полученные путем решения краевой задачи теплопроводности для рассматриваемого примера методом сеток, штриховой линией показан результат аппроксимации модифицированным методом Симою (СКО составляет 1.99), штрихпунктирной – показан результат аппроксимации по ВЧХ (СКО составляет 6.26), пунктирной – показан результат аппроксимации передаточной функцией целого порядка (СКО составляет 18.37). Как видно на рис. 2., при использовании модели целого порядка наблюдается существенное отклонение ее переходной характеристики от исходной кривой при значениях времени, близких к установившемуся режиму. Обе модели дробного порядка (рис. 2, штриховая и штрихпунктирная линии) довольно точно описывают характер переходного процесса исследуемого объекта на протяжении всей длительности эксперимента.

Необходимо отметить преимущество изложенного выше метода идентификации в условиях реального производства, обусловленное сравнительной простотой построения кривой разгона, в отличие от идентификации по ВЧХ, так как построение частотной характеристики реального объекта сопряжено со значительными временными и энергетическими затратами, в особенности для весьма инерционных теплотехнологических объектов автоматизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы. Госконтракт № 14.740.11.0591 от 05 октября 2010 г.

Список литературы

1. Мишунин, В.В. Идентификация передаточных функций электрических печей цилиндрической формы // Передовые технологии в промышленности и строительстве на пороге XXI века: Сб. трудов. – Белгород, 1998. – Ч. 1. – С. 1025-1031.
2. Симою, М.П. Определение коэффициентов передаточных функций линеаризованных звеньев систем регулирования// Автоматика и телемеханика, 1957. – № 6, – с. 514-527.
3. Бабенко, Ю.И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. – СПб.: НПО «Профессионал», 2009. – 584 с.

MODELING OF TECHNOLOGICAL HEATING OBJECTS IN THE CLASS OF FRACTIONAL IRRATIONAL TRANSFER FUNCTIONS

E.B. KARIKOV¹
V.V. MISHUNIN²
V.G. BUBANOV¹
Y.A. GOLTSOV¹

¹⁾ *Belgorod Shukhov State Technology University*

²⁾ *Belgorod National Research University*

e-mail: rubanov@intbel.ru

This article describes methods for identification of distributed parameter systems using frequency and time characteristics. For identification by the time characteristics was used a modified Simoyu identification method. Shows the results of the identification of different methods on the example of solving the problem of heating a semi-infinite body.

Keywords: identification, fractional irrational transfer function, the method of least squares, Simoyu.