

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МГНОВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ, СИНТЕЗИРОВАННЫХ В БАЗИСЕ ФУРЬЕ

И.А. СИДОРЕНКО
С.Л. КУРКИН

*Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет*

e-mail:
Sidorenkor@bsu.edu.ru

При исследовании и изучении возможностей использования дискретного преобразования Фурье для синтеза и анализа полигармонических сигналов необходимо иметь правильное представление о характере изменения их мгновенных параметров. Этого можно достичь посредством компьютерного моделирования процесса синтеза полигармонических сигналов на основе метода графической интерпретации.

Ключевые слова: фазор, полигармонический сигнал, спектр, дискретное преобразование Фурье, мгновенная частота сигнала, мгновенная мощность сигнала, мгновенный спектр мощности сигнала.

Постановка проблемы

Взросшие требования к скорости передачи больших объемов информации по каналам связи в настоящее время могут быть удовлетворены только на основе построения систем связи использующих ортогональные гармонические сигналы (ОГС). Для формирования и обработки ОГС широко применяются методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [1, 2]. При этом сам процесс синтеза ОГС осуществляется в спектральной области с последующим цифроаналоговым преобразованием группового сигнала. Эффективность систем передачи с ОГС во многом зависит от их энергетических и спектральных параметров, таких как мгновенная мощность, пик-фактор сигнала, ширина спектра. Однако самая совершенная техника не может быть создана и эффективно эксплуатироваться без подготовки квалифицированных специалистов для её обслуживания. Система подготовки профессиональных кадров для современной отрасли связи предъявляет повышенные требования и к организации образовательного процесса, его фундаментальности, доступности и наглядности.

Современная научная и техническая литература в данной области подробно рассматривает процессы АЦП и ЦАП сигналов, методы и алгоритмы реализации ДПФ, виды и способы осуществления модуляции радиосигналов, согласование параметров синтезированных сигналов с характеристиками каналов связи. Однако природу самих ОГС трудно увидеть за математическими формулами, особенно начинающим исследователям и обучающимся в вузах. А правильное представление об изменении мгновенных параметров ОГС и подобных им сигналов необходимо для корректной интерпретации результатов, получаемых в ходе научных исследований. Вместе с тем, этого можно достичь, если правильно применить метод графической интерпретации процесса синтеза таких сигналов в базисе Фурье с использованием вычислительных и изобразительных возможностей предоставляемых современными компьютерными технологиями.

Анализ литературы

Теория и практика построения систем передачи с ОГС достаточно подробно освещена в научно-технической литературе. Тем не менее, из всего многообразия книг следует выделить две монографии [3] и [4].

Монография [3] содержит исчерпывающие теоретические сведения по принципам построения цифровых систем передачи информации. При этом она нацелена в первую очередь на специалистов, занимающихся разработкой и проектированием систем передачи с ОГС, поэтому, являясь, по сути, хорошим справочным пособием, недостаточно адаптирована для студентов вузов. Предполагается, что многие теоретические и практические аспекты теории построения систем с ОГС уже изучены и освоены заранее.

В монографии [4] наиболее доступно и вместе с тем строго с научной точки зрения излагаются методы цифровой обработки сигналов с использованием методов и алгоритмов ДПФ. Особого внимания заслуживают главы, посвященные способам описания и представления сигналов в комплексной форме, объяснению сущности понятий действительного и мнимого спектра. Доступность для понимания сложных теоретических сведений достигается не только ясным языком их изложения, удачными примерами, но и широким применением хорошо продуманных иллюстраций. Именно графическая интерпретация рассматриваемых положений теории делает возможным формирование правильного понимания сущности изучаемых процессов формирования и обработки цифровых сигналов. Однако рисунки всегда статичны и не позволяют рассмотреть многие процессы в их динамике. Программная же реализация такого подхода к рассмотрению сложных процессов обладает существенно более широкими возможностями. Таким образом, существует потребность в создании дополнительного инструментария для повышения наглядности образовательного процесса и формирования углубленного понимания сущности современных методов формирования и обработки ОГС.

Цель статьи

Разработка технологии моделирования процесса синтеза полигармонических сигналов в базе Фурье и отображение его результатов в учебно-научных целях.

Графическая интерпретация процесса формирования полигармонического колебания

При разработке программного обеспечения для моделирования процесса формирования полигармонического колебания в базе Фурье были приняты за основу известные способы математического описания и графического представления гармонических колебаний. В соответствии с [4], гармоническое колебание удобно представлять в комплексном виде, причем форма записи может быть как декартовой, так и тригонометрической или экспоненциальной. Для этого используются соответствующие формы записи комплексного числа c в виде суммы его действительной a и мнимой b частей, т.е.

$$c = a + jb \quad (1)$$

При этом полагают число c точкой на комплексной плоскости (рис.1), образованной декартовой системой координат с действительной осью абсцисс и мнимой осью ординат.

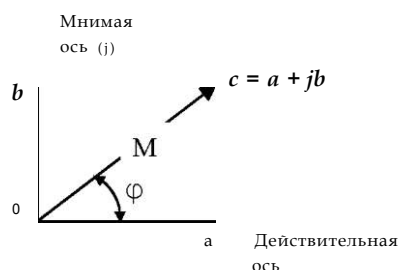


Рис. 1. Представление комплексного числа $c = a + jb$ в виде фазора на комплексной плоскости

С декартовой формой записи комплексного числа тесно связана тригонометрическая форма записи комплексного числа в виде:

$$c = M[\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] \quad (2)$$

или её аналог - экспоненциальная форма записи:

$$c = M \exp(j\varphi) \quad (3)$$

где: $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа, а $\varphi = \arctg(b/a)$ его аргумент.

Очевидно, что связь между этими формами записи вытекает из возможности задания положения точки c на плоскости вектором OC , представляющим собой гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами a и b и углом ϕ между вектором OC и действительной осью. Вектор OC может вращаться относительно точки O начала системы координат против часовой стрелки с круговой частотой ω и периодом T . Такой вектор в [4] предложено именовать фазор, при этом его положение на комплексной плоскости можно описывать через два параметра: модуль M и аргумент ϕ . Фактически это есть замена декартовой системы координат на полярную систему.

Придерживаясь такого подхода легко перейти к пониманию процесса формирования синусоидального колебания (см. рис. 2), текущее значение амплитуды которого определяется проекцией вращающегося фазора на мнимую ось. Очевидно, что проекция фазора на действительную ось даст косинусоидальное колебание с тем же периодом $T = 1/\omega$.

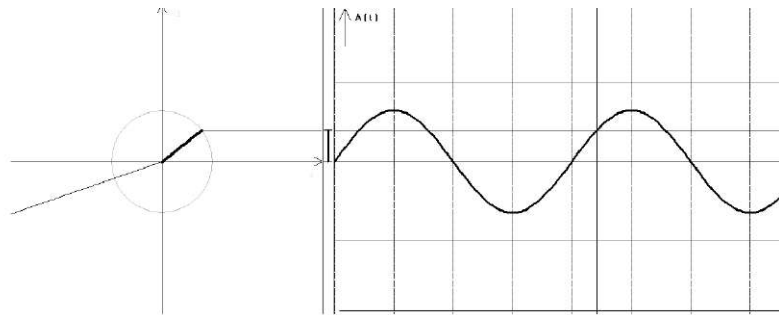


Рис. 2. Графическое представление процесса формирования синусоидального колебания с помощью вращающегося фазора

Фазор на рисунке 2 может быть записан в аналитической форме в виде [2]:

$$OC = M \exp(j\omega t) = M[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]. \tag{4}$$

При этом действительную компоненту фазора $M \cos(\omega t)$ принято называть синфазным сигналом, а мнимую $M \sin(\omega t)$ - квадратурным.

Таким же образом можно перейти и к рассмотрению случая формирования более сложного колебания, состоящего из двух гармонических колебаний с разными частотами, амплитудами и начальными фазами ϕ_0 , показанному на рис. 3. В этом случае потребуется задать на комплексной плоскости два вращающихся фазора, а затем найти их сумму - суммарный фазор. Проекция суммарного фазора на оси системы координат определяет закон изменения амплитуды синтезируемого колебания. На рисунках 3,а и 3,б показаны два возможных варианта графической интерпретации этого процесса. В первом варианте (рис. 3,а) оба фазора вращаются относительно общей точки начала системы координат, но каждый со своей частотой. Суммарный фазор в этом случае определяется по правилу параллелограмма. Во втором варианте (рис. 3,б) картина иная: первый фазор вращается по-прежнему относительно центра системы координат, а вот второй фазор вращается на конце первого фазора. Суммарный фазор находится по правилу треугольника. Как видно из рисунка, форма синтезированных колебаний одинакова и не зависит от варианта нахождения суммарного фазора.

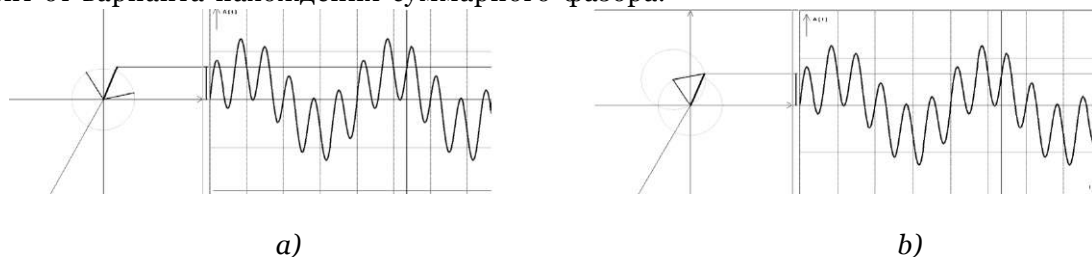


Рис. 3. Графическое представление процессов формирования сложного периодического колебания с помощью двух вращающихся фазоров

Уже на этом примере, рассматривая процесс синтеза сложного колебания в динамическом режиме, можно увидеть, что суммарный фазор в отличие от исходных имеет переменные во времени параметры - модуль и аргумент, которые характеризуются текущими и мгновенными значениями.

Для формирования полигармонического колебания, образуемого сложением нескольких гармонических колебаний с произвольными параметрами, в разработанной программе создано специальное окно (рис. 4), позволяющее независимо задавать амплитуды и начальные фазы 64 гармоник.

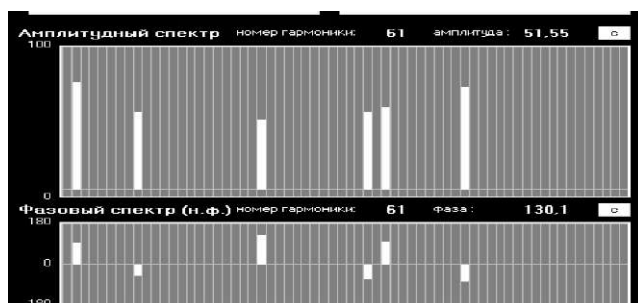


Рис. 4. Окно программы для задания амплитудного и фазового спектров синтезируемого сигнала

Фактически исследователь задаёт амплитудный и фазовый (значения начальных фаз гармоник) спектры синтезируемого сигнала с помощью усеченного ряда Фурье из 64 гармоник, а потом имеет возможность наблюдать процессы формирования суммарного фазора и форму синтезируемого полигармонического колебания. Наличие кроме автоматического и ручного режима работы, а также кнопки «Пауза» позволяет провести детальный анализ исследуемых процессов, отследить изменение текущих параметров и оценить их мгновенные значения. На рис. 5 приведено изображение синтезированного колебания для спектров, приведенных на рис. 4.

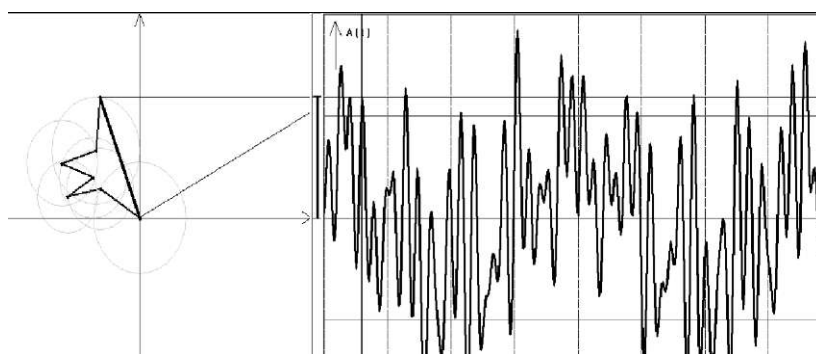


Рис. 5. Вид синтезированного полигармонического колебания

На данном этапе возможно также исследование влияния неравномерности фазовой передаточной характеристики какого-либо устройства на форму проходящего через него полигармонического колебания. Для этого достаточно изменить вид фазового спектра и сравнить вид синтезированных колебаний до и после внесенных изменений.

Исследование спектральных параметров полигармонического колебания

Для формирования объективных представлений о характере процессов происходящих при формировании полигармонического колебания, в программе были разработаны средства для графической визуализации амплитудного спектра и спектра мощности синтезированного колебания. Изучение спектра мощности имеет важное значение, поскольку любой сигнал обладает конечной энергией и мощностью.

Дискретное преобразование Фурье представляет собой разложение выборки дискретизированного по времени сигнала $x(kT) = x(k)$, ($k = 0, 1, \dots, N-1$, а $T = 1/F \Delta$ интервал дискретизации) по системе комплексных векторов, образующих ортогональный базис N_2 -мерного (комплексного) евклидова пространства [3]. Следовательно, спектр сигнала обладает той же самой энергией, что и преобразуемый сигнал, которая распределяется по гармоникам ряда Фурье. Связь амплитудного спектра (т.е. спектральной плотности сигнала) и спектра мощности определяется квадратичной зависимостью, поскольку мощность пропорциональна квадрату амплитуды сигнала. Большинство анализаторов спектра отображают именно спектр мощности, но построение амплитудного спектра в графической интерпретации более наглядно и, поэтому, реализовано в данной программе.

Кроме этого, практический интерес представляет и исследование суммарного фазора, который фактически определяет текущие и мгновенные значения амплитуды и частоты синтезируемого колебания. Рассмотрим далее примеры таких исследований.

На рис. 6 изображено окно, в котором исследователь может наблюдать мнимую или действительную части амплитудного спектра синтезированного полигармонического колебания.

Рис. 6. Вид мгновенного амплитудного спектра синтезированного полигармонического колебания

На переднем плане рисунка расположена ось частот, на которой вращаются фазоры, с заданными пользователем параметрами, определяющие исходный вид спектра синтезируемого колебания. На заднем плане показана плоскость, на которой отображаются проекции фазоров. Проекции фазоров фактически показывают, как изменяются амплитуды и фазы гармоник, определяющих спектральный состав во времени. Вид спектра - действительный или мнимый задается переключателем, а в окне проявляется поворотом на 90° начальных фаз всех фазоров. Отображение одновременно двух спектров в принципе возможно, но делает изображение громоздким и трудно воспринимаемым.

Наблюдая процесс вращения фазоров в динамическом режиме можно видеть, каким образом изменяется текущий спектр синтезированного колебания. Учитывая, что мощность пропорциональна квадрату амплитуды (модуля фазора), то можно сделать качественный вывод о том, как происходит перераспределение энергии колебания между его гармониками. Для сравнения вида амплитудного спектра и спектра мощности в программе предусмотрено включение двух дополнительных окон, отображающих синхронно текущие или, при включении паузы, мгновенные спектры. Изучение характера изменения спектров во времени позволяет убедиться в том, что спектры реальных сигналов не являются стационарными, а подвержены постоянным изменениям, заключающимся в перераспределении энергии между гармониками сигнала.

Для исследования сущности суммарного фазора была разработана графическая интерпретация процесса его образования условно названная сферической моделью. Внешний вид её представлен на рис. 7.

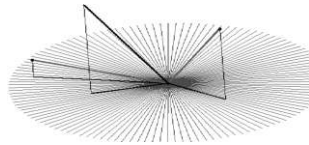


Рис. 7. Сферическая модель процесса построения суммарного фазора

Модель содержит веерную шкалу частот, полученную путем деления круга на $2N$ секторов, где $N=64$ - число комплексных векторов, образующих N -мерный ортогональный базис ДПФ. Линии, проходящие через центр круга соответствуют частотам с номерами гармоник от 1 до 64. Круг расположен в условной экваториальной плоскости, ориентация которой математически соответствует действительной (косинусоидальной) проекционной плоскости, аналогичной той, что имеется на рис. 6. Поскольку на круг нанесена шкала частот, будем далее называть это круг частотным кругом. В модели можно также построить проекционную плоскость (частотный круг) и для мнимой (синусоидальной) компоненты спектра, которая должна быть расположена перпендикулярно плоскости экватора и проходить через центр круга. Отражение обеих плоскостей одновременно нецелесообразно, так как делает модель трудной для восприятия и не несет дополнительной информации.

Каждый из исходных фазоров, задающих спектр синтезируемого колебания (показанных, например, на рис. 4), в этой модели вращается относительно центра круга в меридиональной плоскости, проходящей через линию соответствующей номеру его гармоники. Проекция фазоров перемещаются относительно центра круга по линиям пересечения соответствующих меридиональных и экваториальной плоскостей. В зависимости от положения фазора (величины полной фазы), его проекция может располагаться в переднем или в заднем полукруге.

Суммарный фазор строится как результат суммирования всех вращающихся исходных фазоров и совершает вращательные движения внутри сферы относительно её центра по сложной траектории. Проекция суммарного фазора лежит в экваториальной плоскости и может оказаться в любом секторе.

Утверждение 1. Азимут проекции суммарного фазора на экваториальную плоскость в пределах частотного круга есть геометрическая интерпретация мгновенной частоты полигармонического колебания.

Утверждение 2. Модуль проекции суммарного фазора на экваториальную плоскость в пределах частотного круга есть мгновенная амплитуда полигармонического колебания.

Истинность сделанных утверждений обусловлена корректностью применяемого математического аппарата и ясной физической интерпретируемостью полученных при моделировании результатов.

Очевидно, что другого способа исследовать поведение суммарного фазора, а, следовательно, и процесс изменения мгновенной частоты и мгновенной амплитуды полигармонического сигнала, не существует.

Результаты исследований и выводы, получаемые на этой модели, весьма интересны и требуют осмысления и анализа. Так, например, при задании двух исходных фазоров (см. рис. 3), в частотном круге образуются 4 сектора, ограниченные двумя линиями с номерами гармоник, соответствующих частотам фазоров. Очевидно, что все четыре сектора вместе покрывают всю площадь частотного круга. Проекция исходных фазоров могут соответствовать положительным или отрицательным значениям на осях комплексной плоскости на рис. 1.

Условно сектора можно обозначить «++», «-+», «+-», «--». Сектор «++» отражает ситуацию, при которой оба фазора имеют проекции на положительную часть действительной оси комплексной плоскости. Сектор «-+» соответствует ситуации, при которой проекция первого фазора расположена на отрицательной действительной

полуоси, а проекция второго фазора - на положительной. Сектор «--» соответствует случаю расположения обеих проекций на отрицательной действительной полуоси. А сектор «+-» отражает ситуацию противоположную сектору «-+».

Запуск модели в ручном режиме управления позволил получить следующие результаты моделирования.

1. Проекция суммарного фазора на экваториальную плоскость всегда находится внутри того сектора частотного круга, который соответствует положению исходных фазоров в данный момент времени.

2. Проекция суммарного вектора может располагаться как на линиях, соответствующих номерам гармоник внутри сектора, так и между ними. Следовательно, мгновенная частота может принимать любые значения, а не только значения гармоник ряда Фурье.

3. За полный период полигармонического колебания проекция суммарного вектора перемещается по всей плоскости частотного круга в независимости от значений частот и количества исходных фазоров. Это означает, что мгновенная частота принимает все возможные значения в диапазоне от нуля до 64-й гармоники. Следовательно, максимальное значение мгновенной частоты полигармонического колебания определяется числом гармоник N ряда Фурье и частотой дискретизации F_d , а не задается наибольшей частотой у исходных фазоров (за исключением граничного случая, когда задан фазор с частотой наивысшей гармоники).

4. Модуль проекции суммарного фазора на частотный круг определяет мгновенные значения амплитуды полигармонического колебания.

Кроме указанных выводов обращает на себя внимание и траектория движения конца суммарного фазора внутри сферы, которая формирует поверхность с правильными геометрическими формами, вид которой непредсказуем и определяется количеством и параметрами исходных фазоров.

Выводы

Разработанное программное обеспечение для моделирования процесса синтеза полигармонических сигналов на основе дискретного преобразования Фурье, позволяет повысить эффективность обучения за счет существенного повышения наглядности процесса формирования сложного полигармонического колебания. Графическая интерпретация известных положений теории делает возможным формирование правильного понимания сущности изучаемых процессов формирования и обработки цифровых сигналов.

Возможности разработанной модели процесса синтеза полигармонических сигналов на основе дискретного преобразования Фурье существенно превышают описанные в данной статье результаты проведенных экспериментов и позволяют не только сделать наглядными уже известные теоретические положения в области применения ДПФ, но и найти направления для дальнейших научных исследований.

Список литературы

1. Жилияков Е.Г., Белов С.П., Ушаков Д.И. Сравнение алгоритмов формирования канальных сигналов в системах с OFDM [Текст] / Е.Г. Жилияков, С.П. Белов, Д.И. Ушаков // Вопросы радиоэлектроники. Сер. «Электронная вычислительная техника (ЭВТ)». - М., 2012. - Вып. 1. - С. 131-141.

2. Белов С.П., Ушаков Д.И., Старовойт И.А. Исследование особенностей комбинированной обработки сложных сигналов с линейной частотной модуляцией [Текст] / С.П. Белов, Д.И. Ушаков, И.А. Старовойт // Научные ведомости БелГУ Сер.: Информатика. - Белгород: Изд-во БелГУ, 2009. - № 7(62), Вып. 10/1. - с 194-201.

3. Балашов В.А., Воробийенко П.П., Ляховецкий Л.М. Системы передачи ортогональными гармоническими сигналами [Текст]. - М.: Эко-трендз, 2012.- 228 с.: ил.

4. Ричард Лайонс Цифровая обработка сигналов [Текст]. 2-е изд., Пер с англ. - М.: ООО «Бином-Пресс», 2009. - 656 с.: ил.

computer simulation of instant change settings multifrequency signals synthesized in fourier basese

IA SIDORENKO
S.I. KURKIN

*Belgorod National
Research University*

e-mail:
Sidorenkor@bsu.edu.ru

In the study, and explore the use of the discrete Fourier transform for the synthesis and analysis of multifrequency signals must have a correct understanding of the nature change the instantaneous. This can be achieved by means of computer simulation synthesis multifrequency signals on the basis graphical interpretation metod.

Keywords: phasor, multifrequency signal spectrum, discrete Fourier transform, the instantaneous frequency of the signal, the instantaneous signal power instant power spectrum signal.