MSC 53C07

О КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ РАССЛОЕНИЯХ НАД МНОГООБРАЗИЕМ ХОДЖА

И.П. Борисовский

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Borisovskiy@bsu.edu.ru

Аннотация. Получены условия, при которых на пространстве расслоения Бутби-Вана индуцируется конформно евклидова метрика.

Ключевые слова: многообразие, кривизна, расслоение, присоединённая G-структура.

В римановой геометрии особое место занимают пространства, допускающие конформное отображение на локально евклидово пространство. Такие пространства называют конформно-плоскими. Естественно интересным представляется вопрос о том, когда на пространстве главного T^1-расслоения над почти эрмитовым многообразием индуцируется метрика, конформная евклидовой. Примером такого расслоения может служить тривиальное расслоение над многообразием S^6, снабженным приближенно келеровой структурой. В этом случае на пространстве $S^6 \times S^1$ индуцируется точнейше косимплектическая структура с метрикой,которая будет конформно-плоской [1]. Другим примером является классическое расслоение Хопфа гиперсферы S^{2n+1} единичного радиуса в $\mathbf{C}^{n+1}$ (с метрикой, индуцированной объемлющим пространством) над комплексным проективным пространством $\mathbf{C}P^n$. В нашей работе этот вопрос рассматривается для расслоений Бутби-Вана над многообразием Ходжа M, размерности большей двух.

Пусть M — многообразие Ходжа размерности $2n\,(n \geq 2)$, то есть M — келерово многообразие с целочисленной фундаментальной 2-формой Θ; $\pi : P \longrightarrow M$ — главное T^1 – расслоение, представленное характерестическим классом $[\Theta]$, со связностью η такое, что $\pi^*\Theta = d\eta$, где d-оператор внешнего дифференцирования. Такое расслоение будем называть каноническим расслоением Бутби-Вана. Известно [2], что на пространстве такого расслоения индуцируется сасакиева структура с метрикой $g = \pi^*\tilde{g} + \eta \otimes \eta$ и структурным эндоморфизмом $\Phi = i_H \circ J \circ \pi^*$, здесь $\tilde{g}$ — метрика базы расслоения, J— оператор комплексной структуры, H — горизонтальное распределение связности, i_H — горизонтальный лифт. Как известно [5], необходимым и достаточным условием того, что многообразие P будет конформно-плоским, является тождественное равенство нулю его тензора Вейля

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2n-1}(r_{ik}g_{jl} + r_{jl}g_{ik} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})\,,$$

здесь R_{ijkl} — тензор Римана-Кристоффеля, g_{il} — метрический тензор, r_{ik} — тензор Риччи, κ — скалярная кривизна. Удобно вычислить компоненты тензора Вейля на пространстве присоединенной G — структуры. Дело в том, что структурные уравнения келеровой и сасакиевой структур на пространстве присоединенной G — структуры выглядят достаточно просто. Например, полная группа структурных уравнений келерова многообразия выглядит так:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b\,,$$
$$d\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b\,,$$
$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + A^{ad}_{bc}\omega^c \wedge \omega_d\,,$$

где $\{A^{ad}_{bc}\}$ — система функций, симметричных по верхней и нижней парам индексов [4]. Здесь и далее считаем, что индексы $i, j, k, l, ...$ пробегают значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d, ...$ от 1 до n, кроме того положим $\widehat{a} = a + n$. В результате вычислений получаем полный спектр тензора Вейля пространства расслоения в терминах присоединенной G — структуры:

$$C_{a00\widehat{b}} = \frac{1}{n(2n-1)}(nA^{bc}_{ac} - A^{dc}_{dc}\delta^b_a)\,;$$

$$C_{\widehat{a}bcd} = \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{dh}\delta^b_c + A^{bh}_{ch}\delta^a_d - A^{ah}_{ch}\delta^b_d - A^{bh}_{dh}\delta^a_c - \frac{1}{n}(2n^2 + 2n - A^{hf}_{hf})\delta^{ab}_{cd})\,;$$

$$C_{\widehat{a}b\widehat{c}d} = -A^{ac}_{bd} - \delta^a_d\delta^c_b - 2\delta^a_b\delta^c_d + \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{dh}\delta^c_b + A^{ch}_{bh}\delta^a_d + 4\delta^a_d\delta^c_b) - \frac{1}{n(2n-1)}(A^{hf}_{hf} + n)\delta^c_b\delta^a_d\,,$$

здесь δ^a_b — символ Кронекера, $\delta^{ab}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d - \delta^b_c\delta^a_d$. Остальные компоненты тензора C либо равны нулю, либо получаются из уже имеющихся с учетом свойств симметрии этого тензора и его вещественности.

В дальнейшем нам понадобятся ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. [3] *В терминах присоединенной $G-$структуры келерово многообразие M имеет постоянную голоморфную секционную (короче, $HS-$) кривизну σ тогда и только тогда, когда $A^{ab}_{cd} = -\frac{\sigma}{2}\tilde{\delta}^{ab}_{cd}$, где $\tilde{\delta}^{ab}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d + \delta^b_c\delta^a_d$.*

Лемма 2. [2] *Сасакиево многообразие P имеет постоянную $\Phi-$голоморфную секционную кривизну σ тогда и только тогда, когда $A^{ab}_{cd} = -\frac{\sigma+3}{2}\tilde{\delta}^{ab}_{cd}$.*

Лемма 3. *Пусть $\pi : P \longrightarrow M$ — каноническое расслоение Бутби-Вана над многообразием Ходжа $M(dim M \geq 4)$. Тотальное пространство расслоения P является пространством постоянной кривизны тогда и только тогда, когда многообразие M имеет постоянную HS-кривизну* $\mathbf{c} = 4$. *В этом случае P локально изометрично единичной сфере.*

Теорема. *Тотальное пространство P канонического расслоения Бутби-Вана над многообразием Ходжа $M(dim M \geq 4)$ конформно-плоско тогда и только тогда, когда расслоение локально эквивалентно расслоению Хопфа.*

□ Достаточность утверждения очевидна. Докажем необходимость. Из условия $C_{\widehat{a}b\widehat{c}d} = 0$ следует

$$A^{ac}_{bd} = -\delta^a_d\delta^c_b - 2\delta^a_b\delta^c_d + \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{dh}\delta^c_b + A^{ch}_{bh}\delta^a_d + 4\delta^a_d\delta^c_b) - \frac{1}{n(2n-1)}(A^{hf}_{hf} + n)\delta^c_b\delta^a_d\,. \qquad (1)$$

Свернув (1) по индексам c и b, получим после преобразований

$$A^{ah}_{dh} = -2(n+1)\delta^a_d\,. \tag{2}$$

Свернем последнее соотношение по индексам a и d. Имеем

$$A^{ah}_{ah} = -2(n+1)n\,. \tag{3}$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим, наконец,

$$A^{ac}_{bd} = -2\tilde{\delta}^{ac}_{bd}\,. \tag{4}$$

Заметим, что выполнение условий (4) влечет обращение в нуль и компонент $C_{a00\hat{b}}$, $C_{\hat{a}\hat{b}cd}$ тензора Вейля. Согласно лемме 1 соотношение (4) равносильно тому, что многообразие M является комплексной пространственной формой кривизны $c = 4$. Значит, во-первых, многообразие M локально эквивалентно комплексному проективному пространству $\mathbf{C}P^n$ [3] и , во-вторых, по лемме 3 многообразие P локально изометрично единичной сфере S^{2n+1}. Таким образом, мы имеем расслоение сферы над проективным пространством, причем характеристический класс этого расслоения порожден фундаментальной формой стандартной келеровой структуры на $\mathbf{C}P^n$. С другой стороны, характеристический класс расслоения Хопфа $\pi : S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ порожден фундаментальной формой стандартной келеровой метрики на $\mathbf{C}P^n$ (метрики Фубини-Штуди). Следовательно, расслоение Хопфа над комплексным проективным пространством и построенное нами главное T^1-расслоение над этим пространством имеют один характеристический класс, то есть принадлежат одному классу эквивалентности на множестве всех главных T^1-расслоений над $\mathbf{C}P^n$. ■

Требование для многообразия M постоянства HS-кривизны именно $c = 4$ не существенно. В самом деле, пусть M — комплексная пространственная форма кривизны $c > 0$. Тогда на многообразии P индуцируется сасакиева структура постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны $c - 3$ [2]. И значит, многообразие P с точностью до преобразования D-гомотетии локально эквивалентно сфере S^{2n+1}, снабженной канонической сасакиевой структурой. Таким образом, расслоение Бутби-Вана над произвольным комплексным проективным пространством с точностью до преобразования D-гомотетии метрики на пространстве расслоения локально эквивалентно расслоению Хопфа. В свою очередь D-гомотетия может быть достигнута (с точностью до обычной гомотетии) перенормировкой метрики типового слоя. Действительно, если $g \to g^* = \alpha g + \alpha(\alpha-1)\eta\otimes\eta$ — соответствующее преобразование метрики, где α — подходящее вещественное положительное число, то, очевидно, метрика $\hat{g} = g + (\alpha-1)\eta\otimes\eta$ гомотетична метрике g^* с коэффициентом гомотетии α и получается из исходной метрики g преобразованием гомотетии метрики типового слоя (с коэффициентом α).

Литература

1. Бессе А. Эйнштейновы многообразия. - М.: Мир, 1990.

2. Борисовский И.П. О свойствах кривизны пространства главного T^1 -расслоения над многообразием Ходжа. Математические заметки,т.64, выпуск 6,1998, с. 824-829
3. Кириченко В.Ф. K-пространства постоянной голоморфной секционной кривизны. Математические заметки. т.19, №5, 1976, с. 805-814.
4. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий.Итоги науки и техн. Проблемы геометрии ВИНИТИ АН СССР, т.18, 1986, с. 25-71.
5. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ.- М., 1964.

ON CONFORMALLY FLAT BUNDLES OVER A HODGE MANIFOLD

Borisovskiy I.P.

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Borisovskiy@bsu.edu.ru

Abstract. Conditions under which the conformal Euclidean metric may be induced on the Boothby-Wang bundle space are found.

Key words: manifold, curvature, bundle, adjoint G-structure.