






## О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле

А. В. Носков<sup>1</sup> , В. А. Бондаренко<sup>2</sup> , С. В. Блажевич<sup>2</sup> , А. А. Юрьева<sup>2</sup> , А. Э. Федосеев<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,  
Белгород, 308015, Россия

<sup>2</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Белгород, 308015, Россия

E-mail: [noskov\\_a@bsu.edu.ru](mailto:noskov_a@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Исследуется переходное излучение пучка релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга. В рамках динамической теории рассеяния рентгеновского излучения в монокристалле получена амплитуда напряженности поля излучения в виде вкладов амплитуд параметрического рентгеновского излучения вперед и переходного излучения. Получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность переходного излучения с учетом и без учета многократного рассеяния электронов в мишени. Исследовано влияние многократного рассеяния на спектрально-угловую плотность переходного излучения.

**Ключевые слова:** переходное излучение, монокристаллическая пластинка, динамическая дифракция, рентгеновские волны

**Для цитирования:** Носков А. В., Бондаренко В. А., Блажевич С. В., Юрьева А. А., Федосеев А. Э. 2023. О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле. Прикладная математика & Физика, 55(2): 183–192. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192

Short Communication

## On the Effect of Multiple Scattering on the Transition Radiation in a Single Crystal

Anton Noskov<sup>1</sup> , Victoria Bondarenko<sup>2</sup> , Sergey Blazhevich<sup>2</sup> , Alina Yurieva<sup>2</sup> , Andrey Fedoseev<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Belgorod State Shukhov's Technological University,  
Belgorod, 308012, Russia

<sup>2</sup>Belgorod National Research University,  
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: [noskov\\_a@bsu.edu.ru](mailto:noskov_a@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The transition radiation of a beam of relativistic electrons crossing a single crystal plate in the Bragg scattering geometry is investigated. Within the framework of the dynamic theory of X-ray scattering in a single crystal, the amplitude of the radiation field intensity is obtained in the form of contributions of the amplitudes of parametric forward X-ray radiation and transient radiation. Expressions describing the spectral-angular density of transient radiation with and without multiple electron scattering in the target are obtained. The effect of multiple scattering on the spectral-angular density of transition radiation is investigated.

**Keywords:** Transition Radiation, Single Crystal Plate, Dynamic Diffraction, X-ray Waves

**For citation:** Noskov Anton, Bondarenko Victoria, Blazhevich Sergey, Yurieva Alina, Fedoseev Andrey. 2023. On the Effect of Multiple Scattering on the Transition Radiation in a Single Crystal. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 183–192. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192

**1. Введение.** При пересечении релятивистским электроном монокристаллической пластинки его кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей, генерируя вблизи направления рассеяния Брэгга параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) [4, 6, 11] и вблизи направления скорости электрона параметрическое рентгеновское излучение вперед (ПРИВ) [7, 14, 17, 18]. В работе [13] в геометрии рассеяния Лауэ было получено выражение для интегральной интенсивности ПРИВ. Детальное теоретическое описание ПРИВ как эффекта динамической дифракции и сопровождающего его фона переходного излучения в случае симметричного отражения в геометрии рассеяния Лауэ представлено в работе [19] и монографии [15]. Теоретическое описание ПРИВ релятивистских электронов в монокристалле в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга представлено в работах [1, 2].

Переходное излучение (ПИ) [8, 9] возникает при прохождении заряженной частицей границы раздела между двумя разными средами. Влияние многократного рассеяния заряженной частицы атомами среды на спектрально-угловую плотность ПИ в аморфной среде рассматривалось на качественном уровне в работах [3, 10]. В работе [5]

влияние многократного рассеяния на ПИ в аморфной среде рассмотрено с использованием строгого кинетического подхода к усреднению спектрально-угловой плотности ПИ по всем возможным траекториям движения электронов в веществе. Влияние многократного рассеяния на спектрально-угловые характеристики дифрагированного переходного излучения пучка релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга, было исследовано недавно в работе [16].

В настоящей работе влияние динамической дифракции рентгеновских волн в монокристаллической пластинке на спектрально-угловые характеристики ПИ рассматривается с учетом многократного рассеяния релятивистских электронов на атомах мишени. Исследовано влияние многократного рассеяния на спектрально-угловые характеристики излучения.

**2. Амплитуда излучения.** Рассмотрим когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии Брэгга (Рис. 1). Будем исследовать случай асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда отражающие атомные плоскости монокристалла расположены под некоторым углом  $\delta$  к поверхности пластины (Рис. 1) ( $\delta = 0$  – частный случай симметричного отражения). Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right)\mathbf{e}_1 + \psi, \quad \mathbf{e}_1\psi = 0, \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\mathbf{e}_1 + \theta, \quad \mathbf{e}_1\theta = 0, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B, \quad \mathbf{n}_g = \left(1 - \frac{1}{2}\theta'^2\right)\mathbf{e}_2 + \theta', \quad \mathbf{e}_2\theta = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении импульса фотона, излученного вблизи направления вектора скорости электрона  $\mathbf{V}$ , и  $\mathbf{n}_g$  – единичный вектор в направлении рассеяния Брэгга.  $\theta'$  – угол излучения когерентного рентгеновского излучения (ПРИ и ДПИ) вблизи направления рассеяния Брэгга, отсчитываемый от оси детектора излучения  $\mathbf{e}_2$ ,  $\psi$  – угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ ,  $\theta$  – угол когерентного рентгеновского излучения (ПРИВ и ПИ) вблизи направления скорости релятивистского электрона,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$  – Лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих, параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка:  $\theta = \theta_{\parallel} + \theta_{\perp}$ ,  $\psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}$ ,  $\theta_B$  – угол между осью пучка электронов и отражающими слоями (угол Брэгга). ПРИВ и ПИ будем рассматривать в направлении вектора  $\mathbf{n}$  (см. рис. 1). Угол  $\psi_0$  – будем называть начальной расходимостью пучка излучающих электронов (см. рис. 1). Угол  $\psi_0$  определяет конус, ограничивающий часть пучка электронов, за пределами которого плотность электронов уменьшается более чем в  $\epsilon$  раз по сравнению с плотностью на оси пучка.

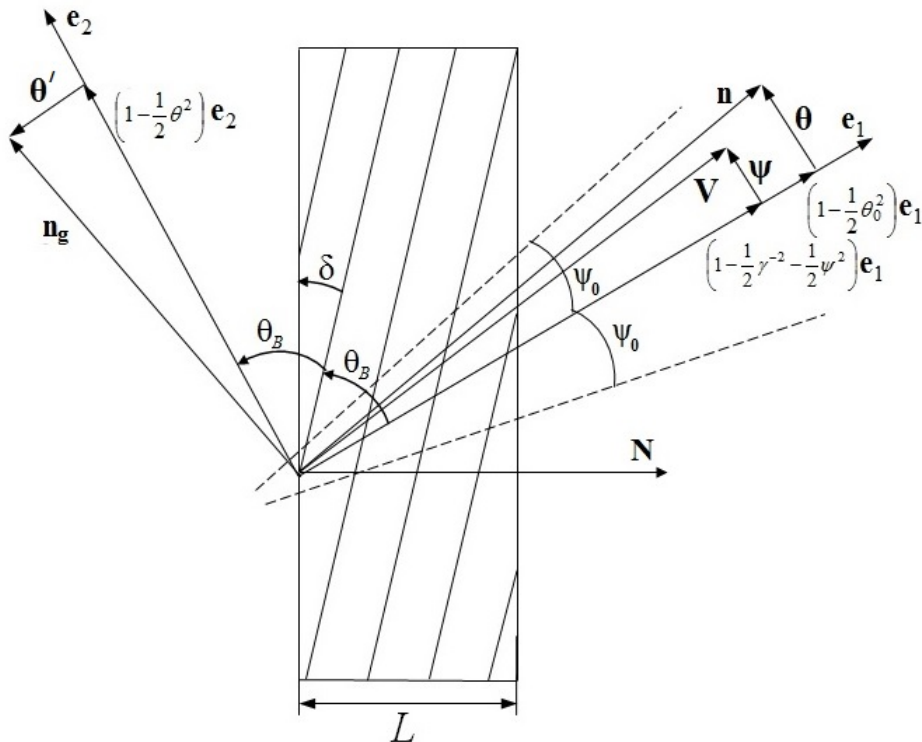


Рис. 1. Геометрия процесса излучения

Fig. 1. Radiation process geometry

Рассматривается уравнение для фурье-образа  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$  электрического поля, возбуждаемого электроном в монокристалле, которое следует из системы уравнений Максвелла:

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0))\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) - \omega^2 \sum_g \chi_{-g} \mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = 4\pi i \omega \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \quad (2)$$

где  $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi eV\delta(\omega - \mathbf{kV})$  – фурье-образ плотности тока излучающего электрона,  $\chi_0(\omega)$  – средняя диэлектрическая восприимчивость в монокристалле,  $\chi_g$  и  $\chi_{-g}$  коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости по векторам обратной решетки  $\mathbf{g}$ :  $\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} (\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r})$ , где  $\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0$ ,  $\chi_g = \chi'_g + i\chi''_g$ . Фурье-образы падающей  $E(\mathbf{k}, \omega)$  и дифрагированной  $E(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega)$  электромагнитной волны в монокристалле представим в виде:  $E(\mathbf{k}, \omega) = E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(2)}$ ,  $E(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = E_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_g^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_g^{(2)}$ , где единичные векторы  $\mathbf{e}_0^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_0^{(2)}$  перпендикулярны  $\mathbf{k}$ , а единичные векторы  $\mathbf{e}_g^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ . При этом  $\mathbf{e}_0^{(2)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(2)}$  лежат в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_g$  ( $\pi$  – поляризация), а  $\mathbf{e}_0^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(1)}$  перпендикулярны ей ( $\sigma$  – поляризация). В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции уравнение (2) сводится к системе уравнений [3]:

$$\begin{cases} (k^2 - \omega^2(1 + \chi_0))E_0^{(s)} - \omega^2\chi_{-g}C^{(s,\tau)}E_g^{(s)} = 8\pi^2ie\omega\mathbf{e}_0^{(s)}\mathbf{V}\delta(\omega - \mathbf{kV}), \\ \omega^2\chi_gC^{(s,\tau)}E_0^{(s)} - (k_g^2 - \omega^2(1 + \chi_0))E_g^{(s)} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

где  $C^{(s,\tau)} = \mathbf{e}_0^{(s)}\mathbf{e}_1^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}$ ,  $C^{(1)} = 1$ ,  $C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|$ ,  $\mathbf{e}_0^{(1)}\mathbf{V} = \theta_\perp - \psi_\perp$ ,  $\mathbf{e}_0^{(2)}\mathbf{V} = \theta_\parallel - \psi_\parallel$ , Система (3) при  $s = 1$  и  $\tau = 2$  описывает поля  $\sigma$  – поляризованные, а при  $s = 2$  поля  $\pi$  – поляризованные, при этом  $\tau = 2$ , если  $2\theta_B < \frac{\pi}{2}$ , а в противном случае  $\tau = 1$ . Решение системы уравнений (3) для поля в вакууме впереди и позади мишени соответственно имеет вид:

$$E_0^{(s)vacI} = \frac{8\pi^2ie\Omega^{(s)}\delta(\lambda_0^* - \lambda_0)}{\omega\chi_0 + \frac{2\lambda_0}{\omega}}, E_0^{(s)vacII} = \frac{8\pi^2ie\Omega^{(s)}\delta(\lambda_0^* - \lambda_0)}{\omega\chi_0 + \frac{2\lambda_0}{\omega}} + E_0^{(s)Rad}\delta\left(\lambda_0 + \frac{\omega\chi_0}{2}\right), \quad (4)$$

где  $\lambda_0^* = \omega\left(\frac{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel - \psi_\parallel)^2 - \chi_0}{2}\right)$ ,  $\lambda_0$  – динамическая добавка длины волнового вектора в монокристалле  $k = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0$ ,  $\Omega^{(1)} = \theta_\perp - \psi_\perp$ ,  $\Omega^{(2)} = \theta_\parallel - \psi_\parallel$ ,  $E_{Rad}^{(s)}$  – амплитуда напряженности поля когерентного рентгеновского излучения.

Решение системы уравнений (3) для дифрагированного поля в монокристалле имеет вид:

$$\begin{aligned} E_0^{(s)} &= \frac{8\pi^2ie\Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2\beta + 2\omega\frac{\gamma}{\gamma_0}\lambda_0}{4\frac{\gamma}{\gamma_0}(\lambda_0 - \lambda_0^{(1)})(\lambda_0 - \lambda_0^{(2)})} \delta(\lambda_0^* - \lambda_0) + E_0^{(s)(1)}\delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(1)}) + E_0^{(s)(2)}\delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(2)}), \\ E_g^{(s)} &= \frac{\omega^2\chi_gC^{(s,\tau)}}{2\omega\lambda_g} E_0^{(s)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_0^{(s)(1)}$  и  $E_0^{(s)(2)}$  – свободные поля. Введены обозначения

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(1,2)} &= \frac{\omega|\chi'_g|C^{(s)}}{2\varepsilon} \left( \xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1 + \varepsilon)}{2} \mp \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2}\left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon\right)} \right), \\ \lambda_g^{(1,2)} &= \frac{\omega|\chi'_g|C^{(s)}}{2} \left( \xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1 + \varepsilon)}{2} \pm \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2}\left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon\right)} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \xi^{(s)}(\omega) &= \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 + \varepsilon}{2V^{(s)}}, \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\sin^2\theta_B}{V^2|\chi'_g|C^{(s)}} \left( 1 - \frac{\omega(1 + \theta_\parallel \cot\theta_B)}{\omega_B} \right), \\ v^{(s)} &= \frac{\chi'_gC^{(s)}}{\chi_0}, \rho^{(s)} = \frac{\chi''_0}{|\chi''_g|C^{(s)}}, \kappa^{(s)} = \frac{\chi'_gC^{(s)}}{\chi_0}, \varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}, \lambda_g = \frac{\omega\beta}{2} + \lambda_0\frac{\gamma}{\gamma_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Параметр  $\eta^{(s)}(\omega)$  – является быстрой функцией от частоты  $\omega$ . Параметр  $\rho^{(s)}$  характеризует степень поглощения рентгеновских волн в кристалле и равен отношению длины экстинкции  $L_{ext}^{(s)} = \frac{1}{\omega|\chi''_g|C^{(s)}}$  к длине поглощения  $L_{abc} = \frac{1}{\omega\chi_0}$  рентгеновских волн  $\rho^{(s)} = \frac{L_{ext}^{(s)}}{L_{abc}}$ . Для фиксированного значения  $\theta_B$  параметр  $\varepsilon$  определяет ориентацию входной поверхности мишени относительно отражающей системы параллельных атомных плоскостей монокристалла.

Воспользовавшись обычными граничными условиями на передней и задней границе монокристалла

$$\int E_0^{(s)vacI} d\lambda_0 = \int E_0^{(s)} d\lambda_0, \int E_0^{(s)} e^{i\frac{\lambda_0}{\gamma_0}L} d\lambda_0 = \int E_0^{(s)vacII} e^{i\frac{\lambda_0}{\gamma_0}L} d\lambda_0, \int E_g^{(s)} e^{i\frac{\lambda_0}{\gamma_0}L} d\lambda_0 = 0, \quad (7)$$

получим выражение для амплитуды напряженности поля излучения

$$E_0^{(s)Rad} = E_{ПРИВ}^{(s)} + E_{ПИ}^{(s)},$$

$$E_{ПРИВ}^{(s)} = \frac{8\pi^2 e \Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\exp\left[\frac{i\omega\Lambda}{2\sin(\delta+\theta_B)}\right]}{\Lambda - \chi_0} \frac{(1 - i\rho^{(s)}\kappa^{(s)})^2}{\Lambda^{(s)}} \left[\Delta_1^{(s)} - \Delta_2^{(s)}\right], \quad (8)$$

$$E_{ПИ}^{(s)} = -\frac{8\pi^2 e \Omega^{(s)}}{\omega} \exp\left[\frac{i\omega\Lambda}{2\sin(\delta+\theta_B)}\right] \left[\left(\frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda - \chi_0}\right) \frac{2K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}} + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda - \chi_0}\right], \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(s)} &= \frac{\left(e^{-ib^{(s)}\Sigma^{(1)(s)}} - 1\right) e^{ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Sigma^{(1)(s)}}, \quad \Delta_2^{(s)} = \frac{\left(e^{-ib^{(s)}\Sigma^{(2)(s)}} - 1\right) e^{ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Sigma^{(2)(s)}}, \\ \Lambda^{(s)} &= \left(\xi^{(s)} - i\rho^{(s)}\frac{(1+\varepsilon)}{2} - K^{(s)}\right) e^{-ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - \left(\xi^{(s)} - i\rho^{(s)}\frac{(1+\varepsilon)}{2} + K^{(s)}\right) e^{ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}, \\ K^{(s)} &= \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2}\left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon\right)}, \\ \Lambda &= \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \psi_{\parallel})^2, \quad \Sigma^{(s)} = \sigma^{(s)} + \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon}, \\ \Sigma^{(1)(s)} &= \sigma^{(s)} + i\rho^{(s)}\frac{(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)} - K^{(s)}}{\varepsilon}, \quad \Sigma^{(2)(s)} = \sigma^{(s)} + i\rho^{(s)}\frac{(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)} + K^{(s)}}{\varepsilon}, \\ b^{(s)} &= \frac{\omega|\chi_g'|C^{(s)}}{2\sin(\delta+\theta_B)}L, \quad \sigma^{(s)} = \frac{1}{|\chi_g'|C^{(s)}}\left(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'\right). \end{aligned}$$

Выражения (8) и (9) представляют собой амплитуды напряженностей полей ПРИВ и ПИ, которые выделены из общей амплитуды когерентного излучения. Слагаемые в квадратных скобках выражения (9), соответствуют переходным излучениям, генерируемым на входной и выходной поверхности монокристаллической мишени соответственно. При этом множитель  $\frac{2K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}}$  описывает влияние динамической дифракции в монокристалле на ПИ, генерируемое на входной поверхности пластины.

**3. Спектрально-угловая плотность ПИ.** Исследуем спектрально-угловую плотность переходного излучения от рассматриваемой монокристаллической мишени. Подставим амплитуду напряженности электрического поля ПИ (9) в хорошо известное выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения [19]:  $\omega \frac{d^3 N^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \omega^2 (2\pi)^{-6} |E_0^{(s)Rad}|^2$ , получим выражение, описывающее спектрально-угловую плотность переходного излучения:

$$\omega \frac{d^3 N_{ПИ}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = F^{(s)} = F_1^{(s)} + F_2^{(s)} + F_{int}^{(s)}, \quad (10)$$

$$F_1^{(s)} = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda} - \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda - \chi_0} \right)^2 \left| \frac{K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}} \right|^2, \quad (11)$$

$$F_2^{(s)} = \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda} - \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda - \chi_0} \right)^2, \quad (12)$$

$$F_{int}^{(s)} = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda} - \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda - \chi_0} \right)^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}} \right]. \quad (13)$$

Выражения  $F_1^{(s)}$ ,  $F_2^{(s)}$ ,  $F_{int}^{(s)}$  описывают соответственно вклад в суммарную спектрально-угловую плотность переходного излучения от передней границы, задней границы и их интерференции.

Для учета многократного рассеяния излучающих электронов в среде проведем усреднение спектрально-угловой плотности ПИ (10) по угловому распределению электронов в пучке, которое представим функцией Гаусса, меняющейся с длиной пути прохождения в мишени  $t$  за счет многократного рассеяния электрона:

$$f(\psi, t) = \frac{1}{\pi(\psi_0^2 + \psi_s^2 t)} e^{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2 + \psi_s^2 t}}. \quad (14)$$

Мы будем усреднять по расширяющемуся пучку прямолинейных траекторий излучающих электронов на длине пути электрона в мишени  $L_e$ . Здесь  $\psi_s^2 = \frac{E_s^2}{m^2 \gamma^2} \frac{1}{L_R} \left(1 + 0.038 L_n \left(\frac{t}{L_R}\right)\right)^2$  – средний квадрат угла многократного рассеяния электрона на единице длины [12], зависящего от длины пройденного пути  $t$  в монокристалле.  $E_s \approx \frac{4\pi m^2}{e^2} \approx 21$  МэВ,  $L_R$  – радиационная длина. Чтобы выделить эффект многократного рассеяния электронов в спектрально-угловой

плотности переходного излучения, не учитывая вклада начальной расходимости электронного пучка, положим в (14)  $\psi_0$  и рассмотрим излучение релятивистского электрона, падающего на монокристаллическую пластину вдоль оси электронного пучка  $e_1$ , при этом в формулах (11, 12, 13) положим  $\psi_{\parallel} = \psi_{\perp} = 0$ . Проведя усреднение выражений (11, 12, 13) по (14), получим выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПИ с учетом многократного рассеяния:

$$\left\langle \omega \frac{d^3 N^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \langle F^{(s)} \rangle = \langle F_1^{(s)} \rangle + \langle F_2^{(s)} \rangle + \langle F_{int}^{(s)} \rangle, \quad (15)$$

$$\langle F_1^{(s)} \rangle = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{L_e} \int_0^{L_e} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Omega^{(s)0}}{\Lambda^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right)^2 \left| \frac{K^{(s)} \exp \left( -ib^{(s)} \sum_{\Delta\psi}^{(s)0} \right)}{\Lambda^{(s)}} \right|^2 \cdot \frac{1}{\pi \psi_s^2 t} e^{-\frac{\Delta\psi_{\perp}^2 + \Delta\psi_{\parallel}^2}{\psi_s^2 t}} d\Delta\psi_{\perp} d\Delta\psi_{\parallel} dt, \quad (16)$$

$$\langle F_2^{(s)} \rangle = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{L_e} \int_0^{L_e} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Omega^{(s)0}}{\Lambda^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right)^2 \frac{1}{\pi \psi_s^2 t} e^{-\frac{\Delta\psi_{\perp}^2 + \Delta\psi_{\parallel}^2}{\psi_s^2 t}} d\Delta\psi_{\perp} d\Delta\psi_{\parallel} dt, \quad (17)$$

$$\langle F_{int}^{(s)} \rangle = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{L_e}$$

$$\int_0^{L_e} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Omega^{(s)0}}{\Lambda^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right) \left( \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right) \operatorname{Re} \left[ \frac{K^{(s)} \exp \left( -ib^{(s)} \sum_{\Delta\psi}^{(s)0} \right)}{\Lambda^{(s)}} \right] \cdot \frac{1}{\pi \psi_s^2 t} e^{-\frac{\Delta\psi_{\perp}^2 + \Delta\psi_{\parallel}^2}{\psi_s^2 t}} d\Delta\psi_{\perp} d\Delta\psi_{\parallel} dt, \quad (18)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{\Delta\psi}^{(1)0} = \theta_{\perp} - \Delta\psi_{\perp}, \Omega_{\Delta\psi}^{(2)0} = \theta_{\parallel} - \Delta\psi_{\parallel}, \Omega^{(1)0} = \theta_{\perp}, \Omega^{(2)0} = \theta_{\parallel}, \Lambda^0 = \gamma^{-2} + \theta_{\perp}^2 + \theta_{\parallel}^2,$$

$$\Lambda_{\Delta\psi}^0 = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Delta\psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \Delta\psi_{\parallel})^2, \sum_{\Delta\psi}^{(s)0} = \sigma_{\Delta\psi}^{(s)0} + \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon},$$

$$\sigma_{\Delta\psi}^{(s)0} = \frac{1}{|\chi'_{\sigma}|C^{(s)}} (\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0).$$

Выражения, (15)-(18) являются главным результатом настоящей работы. Они описывают спектрально-угловую плотность ПИ релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени. Выражения  $\langle F_1^{(s)} \rangle$ ,  $\langle F_2^{(s)} \rangle$ ,  $\langle F_{int}^{(s)} \rangle$  описывают вклады в суммарную спектрально-угловую плотность соответственно переходного излучения от передней границы мишени, задней границы и их интерференции с учетом многократного рассеяния электрона.

**4. Численные расчеты.** Используя полученные выше выражения, мы провели численные расчеты спектрально-угловой плотности ПИ с учетом и без учёта многократного рассеяния излучающих электронов в монокристалле. Для определенности рассмотрено переходное излучение релятивистского электрона, пересекающего монокристаллическую пластину углерода C(111). Значения основных параметров: Лоренц-фактор электрона  $\gamma = 200$ , угол Брэгга  $\theta_B = 16.2^\circ$ , частота Брэгга  $\omega_B = 10.9$  кэВ. Для случая симметричного отражения  $\delta = 0$  ( $\varepsilon = 1$ ) рассмотрены  $\sigma$ -поляризованные ( $s = 1$ ) волны ПИ. На рис. 2 представлены построенные по формулам (10)-(13) кривые, описывающие спектрально-угловую плотность  $F^{(1)}$  переходного излучения прямолинейно пересекающего монокристалл электрона, а также вклады в нее переходных излучений от входной и выходной поверхностей мишени, а также интерференционного слагаемого. Спектрально-угловые плотности построены для фиксированного угла наблюдения  $\theta$ , с координатами  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$ , который соответствует максимуму угловой плотности ПИ ( $\theta = \gamma^{-1}$ ). Из рисунка видно, что при рассматриваемых параметрах интерференция волн ПИ от входной и выходной поверхностей  $F_{int}^{(1)}$  деструктивна во всей частотной области излучения. Спектрально-угловая плотность ПИ от выходной поверхности  $F_2^{(1)}$  имеет постоянное значение. Это связано с тем, что фотоны ПИ, излученные вблизи выходной поверхности мишени, не испытывают динамической дифракции, в то время как ПИ от входной поверхности испытывает динамическую дифракцию в монокристаллической мишени, которая приводит к отражению части фотонов ПИ в направлении рассеяния Брэгга, что соответствует провалу на графике функции  $F_1^{(1)}$  (см. рис. 2).

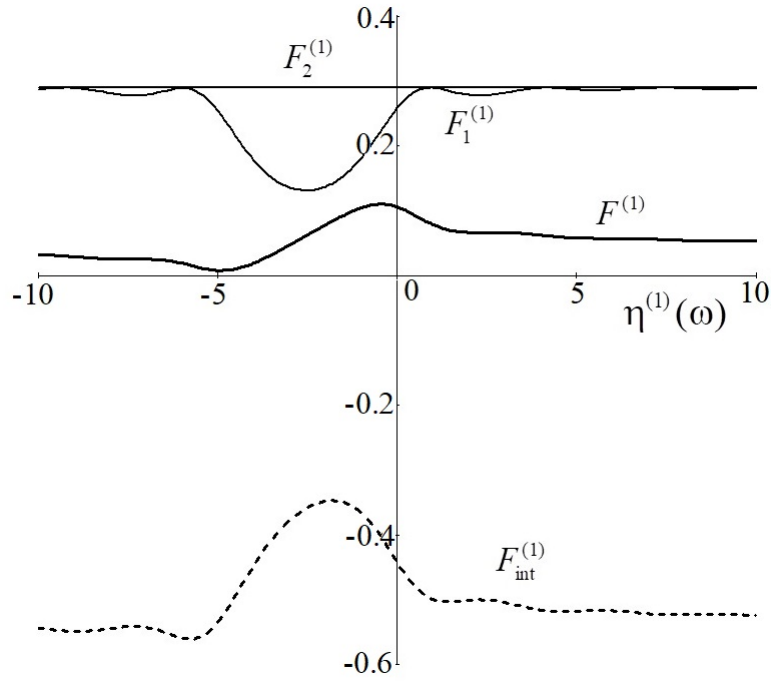


Рис. 2.  $F^{(1)}$ —спектрально-угловая плотность ПИ,  $F_1^{(1)}$ ,  $F_2^{(1)}$  и  $F_{int}^{(1)}$ —спектрально-угловые плотности переходных излучений от входной и выходной поверхности монокристалла и интерференционное слагаемое.  $L = 2$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$

Fig. 2.  $F^{(1)}$ —spectral-angular density of PI,  $F_1^{(1)}$ ,  $F_2^{(1)}$  and  $F_{int}^{(1)}$ —spectral-angular densities of transition radiation from the input and output surfaces of a single crystal and the interference term.  $L = 2$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

При увеличении толщины мишени спектрально угловая плотность ПИ изменяется, что демонстрирует рисунок (рис. 3.), на котором видно увеличение провала в спектре  $F_1^{(1)}$ , что связано с увеличением интенсивности отраженной вблизи частоты Брэгга ( $\eta^{(1)}(\omega) \approx -2.5$ ) волны, и как следствие, уменьшением интенсивности прошедшей волны. Необходимо также отметить, что интерференция  $F_{int}^{(1)}$  вблизи частоты Брэгга конструктивна, что приводит к увеличению пика суммарной спектрально-угловой плотности ПИ  $F^{(1)}$ .

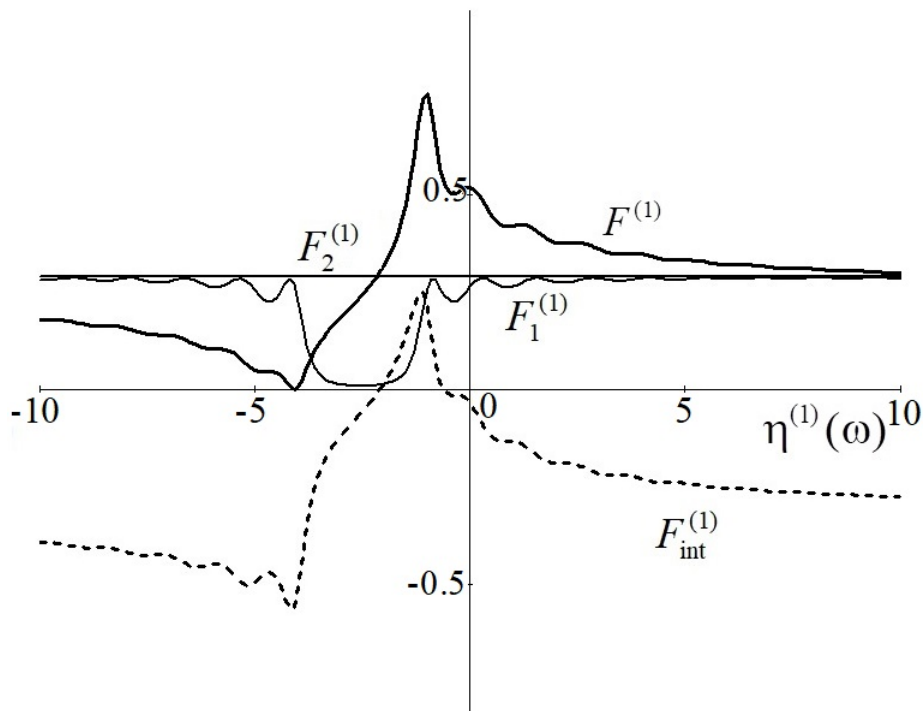


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но при большей толщине мишени.  $L = 5$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$

Fig. 3. The same as in Fig. 2, but with a larger target thickness.  $L = 5$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

Рассмотрим влияние многократного рассеяния на спектрально-угловую плотность излучения. На рис. 4. и рис. 5 представлены кривые, построенные по формулам (15)-(18), описывающие переходное излучение  $\langle F_1^{(s)} \rangle$  и вклады переходных излучений от различных границ  $\langle F_1^{(s)} \rangle$  и  $\langle F_2^{(s)} \rangle$ , и их интерференцию  $\langle F_{int}^{(s)} \rangle$ . Кривые на рис. 4. и рис. 5 построены для тех же условий, что кривые на рис. 2 и рис. 3 соответственно. Из сравнения рис. 2 и рис. 4, а также рис. 3 и рис. 5 видно, что при учете многократного рассеяния излучающих электронов на атомах мишени, спектрально-угловая плотность ПИ существенно возрастает и в основном за счет вклада ПИ от входной границы мишени  $\langle F_1^{(s)} \rangle$ .

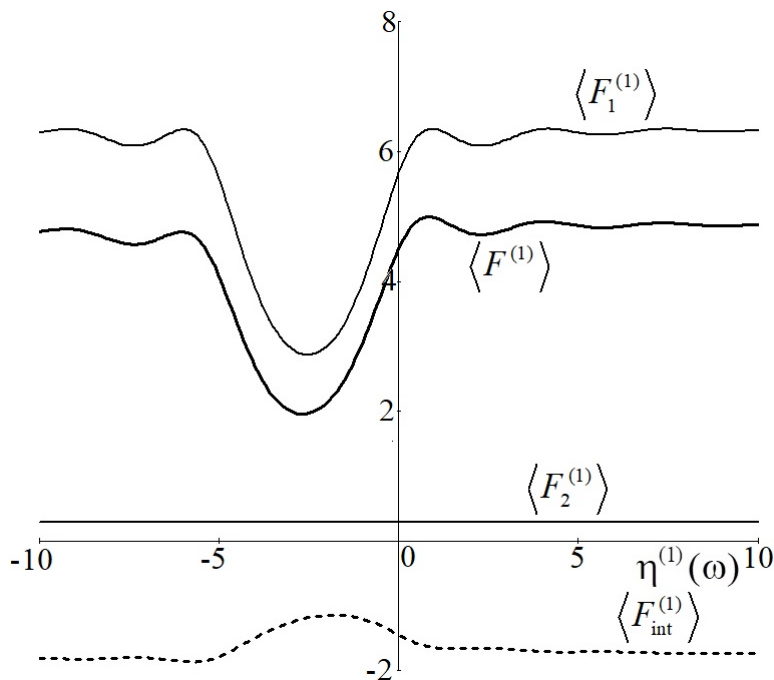


Рис. 4. То же, что на рис. 2, но с учетом многократного рассеяния.  $L = 2$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$   
 Fig. 4. The same as in Fig. 2, but taking into account multiple scattering.  $L = 2$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

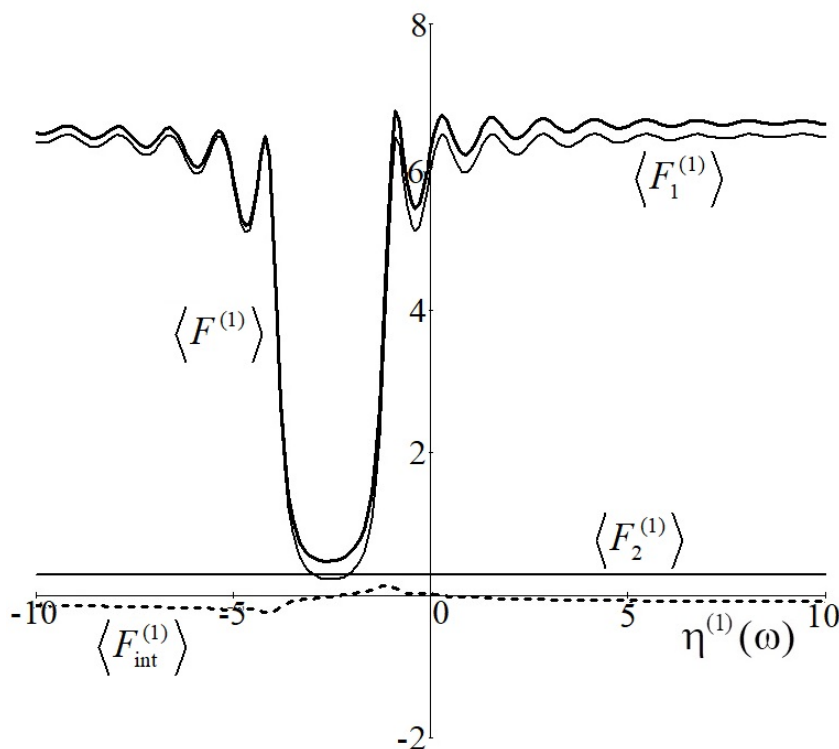


Рис. 5. То же, что на рис. 3, но с учетом многократного рассеяния.  $L = 5$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$   
 Fig. 5. The same as in Fig. 3, but taking into account multiple scattering.  $L = 5$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

**5. Заключение.** В настоящей работе исследовано переходное излучение, генерируемое релятивистским электроном, пересекающим монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность переходного излучения, а также вклад переходных излучений от входной и выходной мишени и их интерференцию. Для учета многократного рассеяния излучающих электронов в среде проведено усреднение каждого слагаемого спектрально-угловой плотности ПИ по угловому распределению электронов в пучке в виде функции Гаусса, меняющейся с длиной пути прохождения в мишени за счет многократного рассеяния. Выявлено, что спектрально-угловая плотность ПИ от выходной поверхности имеет постоянное значение. Показано, что ПИ от входной поверхности монокристаллической пластинки испытывает динамическую дифракцию в монокристаллической мишени. При увеличении толщины мишени спектрально-угловая плотность ПИ изменяется. Спектрально-угловая плотность ПИ при фиксированном угле наблюдения зависит от многократного рассеяния электронов в среде. Выявлено, что при учете многократного рассеяния, при определенных условиях, спектрально-угловая плотность ПИ может существенно возрасти по сравнению со спектрально-угловой плотностью ПИ без учета многократного рассеяния.

#### Список литературы

1. Блажевич С. В., Люшина К. С., Носков А. В. 2019. Когерентное рентгеновское излучение, возбуждаемое пучком релятивистских электронов в монокристалле в направлении оси пучка. ЖЭТФ, 155: 242.
2. Блажевич С. В., Носков А.В. 2009. Параметрическое рентгеновское излучение вдоль скорости релятивистского электрона в условиях асимметричного отражения. ЖЭТФ, 136, 1043.
3. Болотовский Б. М. 1982. Путь формирования и его роль в излучении движущихся зарядов. Труды ФИАН, 140: 95.
4. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. 1971. О переходном излучении - квантов в кристалле. ЖЭТФ, 61: 944–948.
5. Гарибян Г. М. 1960. Излучение частицы при переходе через границу раздела сред с учетом влияния многократного рассеяния. ЖЭТФ, 39(2): 332.
6. Гарибян Г.М., Ян Ши. 1971. Квантовая макроскопическая теория излучения равномерно движущейся заряженной частицы в кристалле. ЖЭТФ, 61: 930–943.
7. Гарибян Г.М., Ян Ши. 1972. Боковые пятна РПИ в кристаллах и их влияние на центральное пятно. ЖЭТФ, 63(4): 1198–1210.
8. Гинзбург В. Л., Цытович В.Н. 1984. Переходное излучение и переходное рассеяние. М., Наука.
9. Гинзбург В. Л., Франк И. М. 1946. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ, 16: 15.
10. Пафомов В. Е. 1960. Влияние многократного рассеяния на переходное излучение. Докл. АН СССР, 133(6): 1315.
11. Тер-Микаэлян М.Л. 1969. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. АН АрмССР, Ереван, 459.
12. Barnett R. M. et al. 1996. Partic1e Data Group. Phys. Rev., 54: 1.
13. Baryshevsky V.G. 1997. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. Nucl. Instr. and Meth. A., 122: 13.
14. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. 1976. The X-ray radiation of ultrarelativistic electrons in a crystal. Phys. Lett. A., 57: 183.
15. Baryshevsky V.G, Feranchuk I.D., Ulyanekov A.P. 2005. Parametric X-Ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications, Springer, 171.
16. Blazhevich S. V., Noskov A.V., Fedoseev A.E. 2022. Effect of multiple scattering on diffracted transition radiation of a relativistic electron crossing a single crystal target. Journal of Instrumentation, 17.
17. Caticha A. 1992. Phys. Rev. Quantum theory of the dynamical Cherenkov emission of x-ray. 45: 9541.
18. Feranchuk I.D. 1979. Kristallografia, 24: 289.
19. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.E. 2003. An investigation of the parametric X-rays along the velocity of emitting particle, Nucl. Instr. and Meth. In Phys. Res. 201: 97.

#### References

1. Blazhevich S. V., Lyushina K. S., Noskov A. V. 2019. Coherent X-ray radiation excited by a beam of relativistic electrons in a single crystal in the direction of the beam axis. ZHETF, 155: 242. (in Russian)
2. Blazhevich S. V., Noskov A. V. 2009. Parametric X-ray emission along the velocity of a relativistic electron under conditions of asymmetric reflection. ZHETF: 136: 1043. (in Russian)
3. Bolotovskiy B. M. 1982. Formation path and its role in the radiation of moving charges. Proceedings of FIAN, 140: 95. (in Russian)
4. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. 1971. On the transition radiation - quanta in a crystal. ZHETF, 61: 944–948. (in Russian)



5. Garibyan G. M. 1960. Radiation of a particle when passing through the interface between media, taking into account the influence of multiple scattering. ZHETF, 39(2): 332. (in Russian)
6. Garibyan G. M., Yang Shi. 1971. Quantum macroscopic theory of radiation of a uniformly moving charged particle in a crystal. ZHETF, 61: 930–943. (in Russian)
7. Garibyan G. M., Yang Shi. 1972. Lateral RPI spots in crystals and their influence on the central spot. ZHETF, 63(4): 1198–1210. (in Russian)
8. Ginzburg V. L., Tsytoovich V. N. 1984. Transition Radiation and Transition Scattering. М., Nauka. (in Russian)
9. Ginzburg V. L., Frank I. M. 1946. Radiation of a uniformly moving electron arising during its transition from one medium to another. ZHETF, 16: 15. (in Russian)
10. Pafomov V. E. 1960. Influence of Multiple Scattering on Transition Radiation, Dokl. Academy of Sciences of the USSR, 133(6): 1315. (in Russian)
11. Ter-Mikaelyan M. L. 1969. Influence of the medium on electromagnetic processes at high energies. Academy of Sciences of the ArmSSR, Yerevan, 459. (in Russian)
12. Barnett R. M. et al. 1996. Particle Data Group. Phys. Rev. 54: 1.
13. Baryshevsky V.G. 1997. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. Nucl. Instr. and Meth. A., 122: 13.
14. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. 1976. The X-ray radiation of ultrarelativistic electrons in a crystal. Phys. Lett. A., 57: 183.
15. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D., Ulyanekov A.P. 2005. Parametric X-Ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications, Springer, 171.
16. Blazhevich S. V., Noskov A. V., Fedoseev A. E. 2022. Effect of multiple scattering on diffracted transition radiation of a relativistic electron crossing a single crystal target. Journal of Instrumentation, 17.
17. Caticha A. 1992. Phys. Rev. Quantum theory of the dynamical Cherenkov emission of x-ray. 45: 9541.
18. Feranchuk I.D. 1979. Kristallografia 24: 289.
19. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.E. 2003. An investigation of the parametric X-rays along the velocity of emitting particle. Nucl. Instr. and Meth. In Phys. Res., 201: 97.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 17.04.2023*

*Поступила после рецензирования 22.05.2023*

*Принята к публикации 25.05.2023*

*Received 17.04.2023*

*Revised 22.05.2023*

*Accepted 25.05.2023*

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Носков Антон Валерьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова  
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

**Бондаренко Виктория Александровна** – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

**Блажевич Сергей Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

**Юрьева Алина Александровна** – студент выпускного курса института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

**Федосеев Андрей Эдуардович** – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Noskov Anton Valerievich** –Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Belgorod State Technological Shukhov's University, Belgorod, Russia

**Bondarenko Victoria Aleksandrovna** –Postgraduate Student, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Blazhevich Sergey Vladimirovich** –Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Yurieva Alina Aleksandrovna** –graduate student at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Fedoseev Andrey Eduardovich** –postgraduate student, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia