



MSC 35L05

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Е.А. Канунникова

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kanunnikova@bsu.edu.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается аналитико-численный подход к решению внешних краевых задач для уравнения колебаний, который позволяет сводить внешнюю задачу к внутренней.

**Ключевые слова:** краевая задача, уравнение колебаний.

Задача Коши для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой  $\mathbf{R}^1$  ставится следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), (x, t) \in \overline{\Omega}^1 = \mathbf{R}^1 \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in \mathbf{R}^1, \quad (2)$$

где  $a$  – постоянный коэффициент,  $f, \varphi, \psi$  – заданные функции. Следует также задать краевые условия на бесконечности

$$u(x, t) \rightarrow N, x \rightarrow \pm\infty. \quad (3)$$

Преобразовав неограниченное пространство  $\mathbf{R}^1 = D_C \cup C \cup D_\infty$  в ограниченную двусоставную область  $D^1 = D_C \cup C \cup D^*$  согласно аналитико-численному методу инверсии [1], начальная задача (1)-(3) принимает вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), (x, t) \in \overline{Q}^1 = D^1 \times (0, T], \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in D^1, \quad (5)$$

$$u(x, t) = N, x \in D^*, t \in [0, T], \quad (6)$$

где область  $D^*$  представляет собой отображение неограниченной области  $D_\infty$ . Если в задаче (4)-(6) при  $f(x, t) \equiv 0$  начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  нечетны, то  $u(0, t) = 0$ ; если же функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  четны, то  $u_x(0, t) = 0$  но методом отражения [2]. Таким образом, применяя метод инверсии и метод отражения, приходим к решению начально-краевых задач на полуограниченной прямой для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными и однородными граничными условиями первого и второго рода. Заметим, что функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , помимо условий гладкости  $\varphi \in C^{(2)}(\mathbf{R}_+^1)$ ,  $\psi \in C^{(1)}(\mathbf{R}_+^1)$ , должны удовлетворять условию согласования начальных и граничного условий [3].



Итак, начально-краевая задача на полупрямой с граничным условием первого рода принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, (x, t) \in \overline{Q}_+^1 = D_+^1 \times (0, T], \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in D_+^1, \\ u(0, t) &= 0, u(x, t) = N, x \in D_+^*, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

В соответствии с методом инверсии начально-краевая задача с граничным условием второго рода имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, (x, t) \in \overline{Q}_+^1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in D_+^1, \\ u_x(0, t) &= 0, u(x, t) = N, x \in D_+^*, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Таким образом, на основе аналитического преобразования внешняя краевая задача сводится к внутренней, далее строится разностная задача одним из сеточных методов [4] с возможностью использования традиционных приемов и методов численного анализа.

В заключении следует отметить, что использование аналитико-численного метода инверсии позволяет аккуратно учесть граничные условия на бесконечности. Метод применим не только к уравнению колебаний на неограниченной прямой, но и к другим типам уравнений, в том числе и к уравнениям с двумя и тремя пространственными переменными.

### Литература

1. Канунникова Е.А. Аналитико-численный метод решения трехмерных внешних краевых задач для эллиптических уравнений // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (189). – С.35-38.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
3. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике / М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений / М.: Наука, 1978. – 312 с.

### AN APPROACH TO SOLUTION OF THE EXTERNAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF WAVE EQUATION

E.A. Kanunnikova

Belgorod State National Research University,  
Pobeda St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [kanunnikova@bsu.edu.ru](mailto:kanunnikova@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Analytical-numerical approach to solution of the external boundary value problems of wave equation is presented. The approach converts each external boundary value problem to the internal one.

**Key words:** Analytical-numerical approach, boundary value problem, wave equation.