



MSC 41A10

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ПРИРОДА КУСОЧНО-ПЛАНАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко

Херсонский национальный технический университет,
Бериславское шоссе, 24, Херсон, 73008, Украина;
Черноморский государственный университет им.Петра Могилы,
68 ул. Десантников, 10, Николаев, 54003, Украина e-mail: mmkntu@gmail.com

Аннотация. В работе показана возможность использования функций-«полукрышек» для конструирования базисных функций высших порядков на треугольных и квадратных конечных элементах.

Ключевые слова: конечный элемент, кусочно-планарная аппроксимация, функции-«полукрышки».

Введение. Статья посвящена кусочно-планарной аппроксимации, предложенной Р. Курант в 1943 г. Это своеобразное посвящение 70-летию юбилею выхода в свет знаменитой статьи Куранта, положившей начало развитию метода конечных элементов (МКЭ). Дальнейшее обобщение основной идеи Куранта о простых базисных функциях стало решающим шагом в технике МКЭ. К сожалению, не все авторы, профессионально пишущие о методе и развивающие его, но достоинству оценивают идею Куранта о кусочно-планарной аппроксимации. Между тем, именно эта идея обеспечила успешное решение задач, лежащих за пределами возможностей господствующего в середине XX века метода конечных разностей (МКР).

Построение простых элементов полезно само по себе, но еще более важно то, что на этих элементах можно убедительно проиллюстрировать существование глубоких связей между полиномиальной интерполяцией на конечном элементе и теорией вероятностей. В МКЭ, как показывает опыт, вероятностные представления позволяют перейти от «жестких» стандартных моделей к «мягким» (по В.И.Арнольду) альтернативным моделям восполнения финитных функций.

Анализ публикаций. Для изучения вероятностной природы кусочно-планарных функций мы используем геометрический подход. Кстати, геометрическая вероятность появилась намного раньше классической (П. Лаплас) и статистической (Р. Мизес). Принято считать, что впервые геометрическая вероятность появилась в 1777 г., когда Ж. Бюффон опубликовал свою «задачу об игле». Недавно стало известно (из публикаций О. Шейнина), что первое упоминание о геометрической вероятности обнаружено в рукописи И. Ньютона 1664-1666 гг., увидевшей свет лишь в 1967 г. Известно, что Ньютон не очень любил публиковать свои работы, поэтому о многих гениальных открытиях Ньютона мир узнавал с большим опозданием. В задаче Ньютона рассматривается круг, разделенный на два неодинаковых сектора с отношением площадей $2 : \sqrt{5}$.



Внутри круга наудачу вбрасывается мяч. Необходимо определить вероятность попадания в каждый сектор круга. Ньютон выразил эти вероятности через относительные площади: $2(2 + \sqrt{5})^{-1}$ и $\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})^{-1}$. Любопытно, что Ньютона мало интересовали вероятностные задачи, хотя в XVII веке такими задачами занимались многие физики и математики. По мнению Ф. Мостеллера [1], Ньютон за всю свою жизнь решил только одну вероятностную задачу (по просьбе С. Пепайса). Теперь, благодаря О. Шейнину, мы знаем, что Ньютон решил две вероятностные задачи.

Кусочно-линейные функции часто называют «крышками» («полукрышками»). Их история уходит корнями в глубокую древность. Например, правило рычага Архимеда имеет прямое отношение к функциям-«полукрышкам». Если говорить конкретно о функции Куранта, следует упомянуть А.Мёбиуса, который в 1827 г. открыл барицентрические координаты симплексов. В функциях Куранта легко узнать барицентрические (треугольные) координаты. Эти координаты описаны практически в каждой книге по МКЭ. Мы ограничимся ссылками на статью Куранта [2] и на книги [3-5]. По традиции треугольные координаты определяют путем составления и решения СЛАУ третьего порядка. На примере функции Куранта мы покажем, что кусочно-планарная модель имеет четко выраженную вероятностную природу. Этот результат положен нами в основу иерархической процедуры генерирования аппроксимаций высших порядков. Стоит отметить, что эта процедура эффективна не только на треугольниках. Накоплен немалый опыт конструирования серендиповых поверхностей с помощью «полукрышек».

Целью настоящей статьи является показать, что функции-«полукрышки» служат «строительным материалом» для конструирования базисных функций высших порядков на треугольных и квадратных конечных элементах.

Основная часть. На рис. 1 изображены сетка Куранта (а) и ячейка Куранта (б).

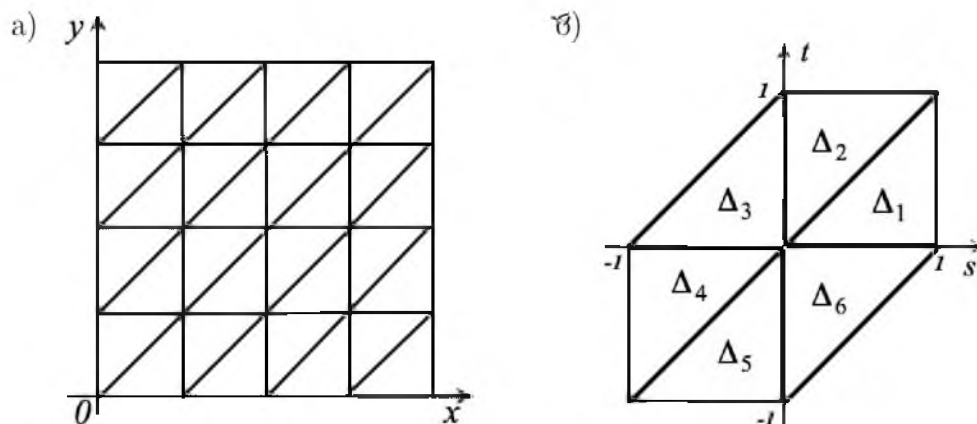


Рис. 1. Сетка Куранта (а) и стандартная ячейка Куранта (б).

Построение базисных (координатных) функций Куранта начинается с построения сетки. Сначала в квадрате Ω построим сетку с квадратными ячейками с помощью прямых $x = x_i = ih$, $y = y_j = jh$, $h = N^{-1}$, $N > 0$ – целое число, $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$.



Точки (x_i, y_i) называют узлами сетки. Каждую квадратную ячейку сетки разделим на два треугольника диагональю, соединяющей юго-западную вершину квадрата с северо-восточной (рис. 1а). Каждому узлу сетки (x_i, y_j) сопоставим координатную функцию $\varphi_{ij}(x, y)$, равную 1 в данном узле и нулю во всех остальных узлах, линейную в каждом треугольнике триангуляции. Чтобы записать функцию в произвольном узле, рассмотрим стандартную функцию, отличную от нуля только в ячейке Куранта (рис. 1б). Функцию Куранта можно получить как геометрическую вероятность в каждом треугольнике Δ_k ($k = \overline{1, 6}$) ячейки Куранта.

Схема, изображенная на рис. 2а, иллюстрирует идею рандомизации функции Куранта. На рис. 2б показана «крышка» Куранта.

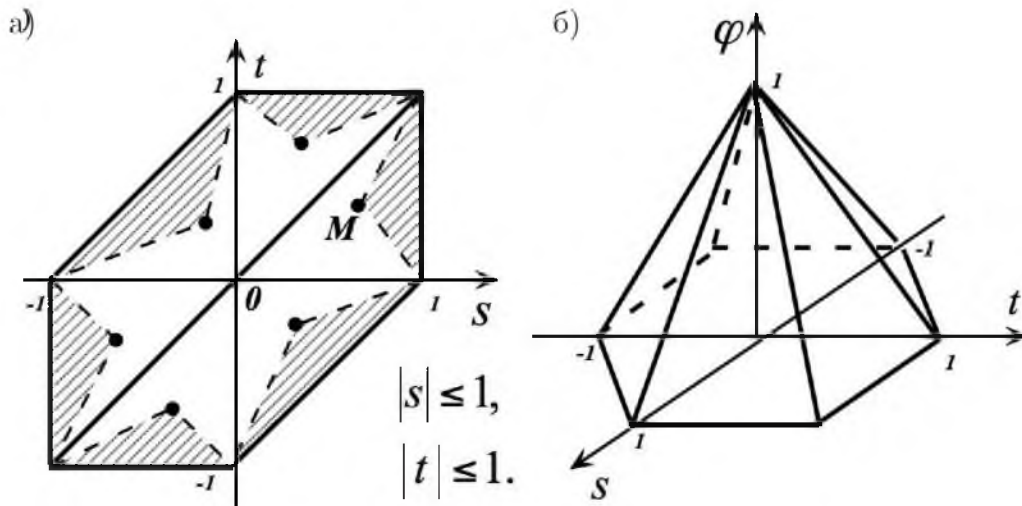


Рис. 2. Вероятностное истолкование «полукрышек» (а), «крышка» Куранта (б).

В каждом треугольнике Δ_k ($k = \overline{1, 6}$) возьмём текущую точку $M(s, t)$ – вершину треугольника, противоположную центру ячейки Куранта (на рис. 2а эти треугольники заштрихованы). Теперь в каждый треугольник Δ_k наугад вбрасываем точку и ставим задачу: найти вероятность попадания случайной точки в заштрихованный треугольник с вершиной $M(s, t)$. Так мы получаем шесть функций-«полукрышек», которые отождествляют с вероятностью. Запишем этот набор:

$$\begin{aligned} \varphi_1(s, t) &= 1 - s, & \varphi_4(s, t) &= 1 + s, \\ \varphi_2(s, t) &= 1 - t, & \varphi_5(s, t) &= 1 + t, \\ \varphi_3(s, t) &= 1 + s - t, & \varphi_6(s, t) &= 1 - s + t. \end{aligned} \quad (1)$$

Легко заметить, что функцию-«крышку» Куранта можно записать компактно:

$$\varphi(s, t) = 1 - \frac{1}{2}(|s| + |t| + |s - t|). \quad (2)$$

Тогда $\varphi_{ij}(x, y) = \varphi(x/h - i, y/h - j)$, $i, j = 0, 1, \dots, N$.



Таким образом, кусочно-планарная аппроксимация функции $u(x, y)$ в квадрате Ω обретает вид:

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{i,j=0}^N u_{ij} \varphi_{ij}(x, y), \tag{3}$$

где $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ – узловые значения $u(x, y)$.

Наиболее содержательным для дальнейшего является рис. 2а. При этом важно обобщить вероятностную процедуру построения «полукрышки» на треугольник, произвольно ориентированный в системе координат Oxy . Такие треугольники называют треугольниками Куранта-Тэрнера. Стоит отметить, что каждая функция (1) в соответствующем треугольнике совпадает с барицентрической координатой треугольника, которая ассоциируется с вершиной $O(0, 0)$.

Заметим, что в любом осевом сечении пирамиды (рис. 2б) мы получаем плоский аналог функции-«крышки». Такие модели используют в задачах кусочно-линейной аппроксимации функций одного аргумента.

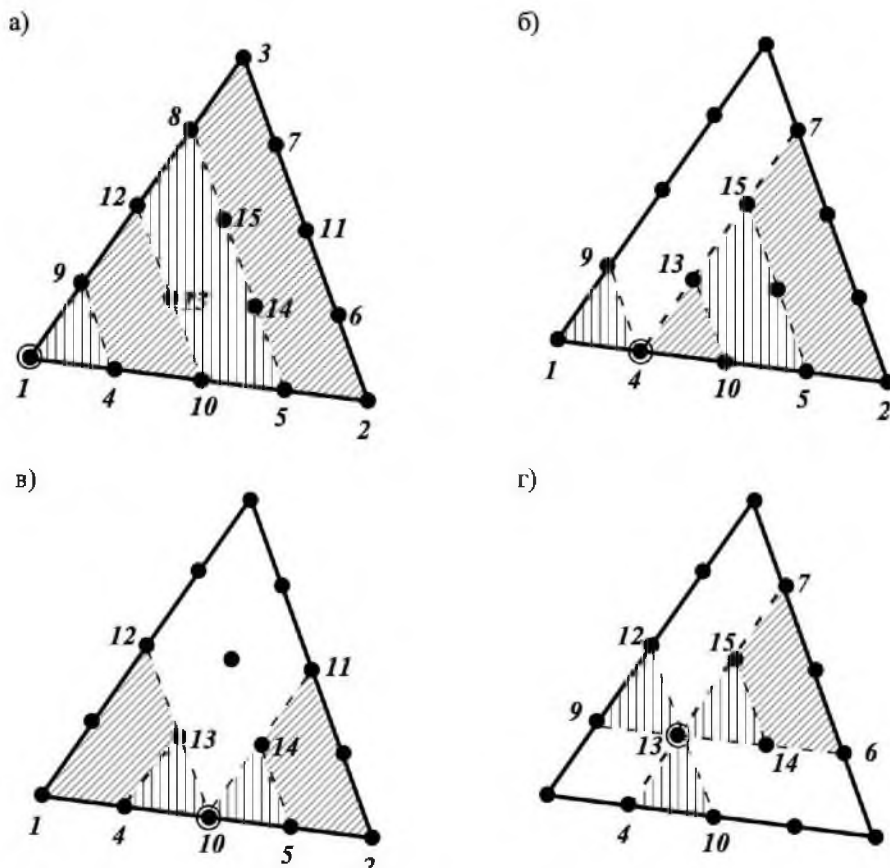


Рис. 3. К построению типичных базисных функций:

- а) для угловых узлов; б) для промежуточных узлов на сторонах;
- в) для средних узлов на сторонах; г) для внутренних узлов.



Треугольные плоские фрагменты – барицентрические координаты произвольного треугольника очень удобны в конструировании треугольников высших порядков. Ниже в качестве примера мы рассматриваем треугольник четвертого порядка. Интересно построить базис такого элемента на основе вероятностных соображений.

На рис. 3 показаны композиции из треугольников Куранта-Тэрнера, на каждом из которых осуществляется кусочно-планарная аппроксимация. Особенность моделей высших порядков в том, что теперь функции-«полукрышки» перемножаются по правилу умножения вероятностей независимых событий.

Чтобы описать ключевые идеи рандомизированного конструирования базисных функций, достаточно подробно рассмотреть процедуру построения какой-либо одной функции, например, N_4 на рис. 3б. Все базисные функции треугольника высшего порядка можно выразить через три барицентрические координаты основного треугольника 1-2-3. Здесь мы имеем дело с треугольником 4-го порядка. Поэтому каждый раз мы используем четыре треугольника с общей вершиной в контрольном узле. Для построения N_4 нам понадобятся треугольники с общей вершиной 4: 4-10-13, 4-5-15, 4-2-7 и 4-9-1 (рис. 3б). Это комплекс из 4-х симплексов. В терминах геометрической вероятности мы рассматриваем четыре независимых события и находим вероятность совместного наступления этих событий. В каждом из четырех треугольников выбирается точка $M(L_1, L_2, L_3)$, где L_i – барицентрические координаты в основном треугольнике 1-2-3. Теперь в каждый из перечисленных треугольников с общей вершиной 4 вбрасываем случайную точку и вычисляем вероятность попадания случайной точки в треугольник с вершиной и основанием, противоположным вершине 4.

Например, вероятность того, что точка, брошенная в Δ_{4-2-7} , попала в Δ_{M-2-7} , равна $p_1 = 4L_1/3$. Вероятность того, что точка, брошенная в Δ_{4-5-15} , попала в Δ_{M-5-15} , равна $p_2 = 2L_1 - 1/2$. Вероятность того, что точка, брошенная в $\Delta_{4-10-13}$, попала в $\Delta_{M-10-13}$, равна $p_3 = 4L_1 - 2$. Вероятность того, что точка, брошенная в Δ_{4-9-1} , попала в Δ_{M-9-1} , равна $p_4 = 4L_2$.

Базисная функция N_4 определяется по правилу перемножения найденных вероятностей:

$$N_4 = \frac{16}{3}L_1L_2(4L_1 - 1)(2L_1 - 1). \quad (4)$$

С помощью рис. 3а и геометрической вероятности находим

$$N_1 = \frac{1}{3}L_1(4L_1 - 1)(2L_1 - 1)(4L_1 - 3). \quad (5)$$

Рис. 3в дает

$$N_{10} = 4L_1L_2(4L_1 - 1)(4L_2 - 1). \quad (6)$$

Рис. 3г приводит к

$$N_{13} = 32L_1L_2L_3(4L_1 - 1). \quad (7)$$

По образцу (4) легко составить остальные функции для промежуточных узлов 5, 6, 7, 8, 9. Функции N_2 и N_3 получаются из N_1 , N_{11} и N_{12} – из N_{10} , N_{14} и N_{15} – из N_{13} . Все



15 функций построенного базиса обладают типичными свойствами интерполяционных коэффициентов Лагранжа:

$$N_i(M_k) = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{15} N_i(M) = 1, \quad (8)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера; i — номер функции; k — номер узла $(i, k) = \overline{1, 5}$; — произвольная точка в Δ_{1-2-3} .

Как видим, модель 4-го порядка — это результат «перемножения» кусочно-планарных моделей.

Интерполяционный полином на треугольнике 4-го порядка (15 узлов) имеет вид:

$$U(M) = \sum_{i=1}^{15} N_i(M)U_i, \quad (9)$$

где U_i — известные узловые значения восполняемой функции $U(M)$. Недостатком этой модели является физическая неадекватность поузлового распределения равномерной массовой силы («негативность» некоторых узловых нагрузок). Принято считать, что этот недостаток устранить невозможно. По нашему мнению, это заблуждение связано с выбором метода определения базисных функций. Заметим, что в методе конечных элементов господствует матричная алгебра, роль которой сильно преувеличена. Наша цель — привлечь внимание разработчиков и пользователей МКЭ к нематричным методам конструирования базисных функций. Кстати, кусочно-планарная аппроксимация — это один из способов (есть и другие) устранения «негативности» в поузловых распределениях нагрузок моделей высших порядков. Ниже мы построим альтернативную модель бикубического конечного элемента серендипова семейства (элемент 3-го порядка).

На рис. 4 изображен бикубический элемент серендипова семейства. В отличие от аналогичного элемента лагранжева семейства здесь отсутствуют внутренние узлы (их четыре).

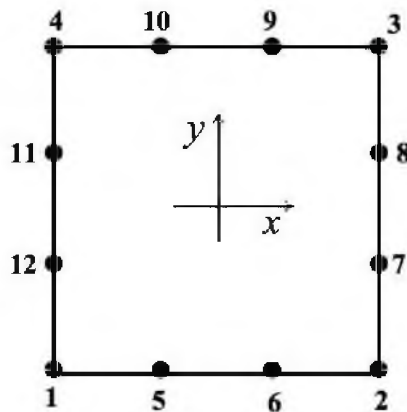


Рис. 4. Рис. 4 Бикубический серендипов КЭ.



Впервые полиномиальный базис этого КЭ был получен подбором в 1968 г. Эргатудис, Айронс, и Зенкевич, которые назвали его стандартным. Приведем две типичные функции (этого достаточно) стандартного базиса:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9(x^2+y^2)-10), \\ N_5(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом того, что узлы на границе расположены равномерно, нетрудно записать остальные функции базиса. Стандартная модель, как известно [6], приводит к физически абсурдному распределению равномерной нагрузки по узлам: в угловых узлах доля нагрузки отрицательна и составляет $-1/8$, в промежуточных узлах она равна $3/16$. Физически неадекватный спектр узловых нагрузок — основной недостаток серепдиповых элементов высших порядков. Интересно, что математически безупречные способы построения базисов всякий раз приводили к стандартной модели. В этой связи можно назвать алгебраический (матричный) метод, конденсацию, нематричный метод Тейлора. В 1982 г. с помощью геометрической вероятности [7] удалось построить первую модель бикубического серепдипова элемента, свободного от негативности в спектре узловых нагрузок.

Покажем, как использовать кусочно-планарную аппроксимацию для построения альтернативного базиса КЭ (рис. 4). Сначала представим квадрат в виде набора 4-х треугольников: Δ_{1-2-3} , Δ_{1-3-4} , Δ_{1-6-11} и Δ_{1-5-12} с общей вершиной 1. Понятно, что эта композиция предназначена для построения $N_1(x, y)$. В каждом треугольнике выбираем текущую точку $M(x, y)$ и рассматриваем «вложенные» треугольники с вершиной и основанием, противоположащим вершине 1. Далее, решаем задачу на геометрическую вероятность. Вероятность того, что случайная точка, брошенная в Δ_{1-2-3} , попала в Δ_{M-2-3} , равна $p_1 = (1-x)/2$. Аналогично, для Δ_{1-3-4} : $p_2 = (1-y)/2$. Для Δ_{1-6-11} : $p_3 = -(2+3x+3y)/4$. Для Δ_{1-5-12} : $p_4 = -(4+3x+3y)/4$. По формуле умножения вероятностей

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(2+3x+3y)(4+3x+3y). \quad (11)$$

При построении $N_5(x, y)$ рассматриваем треугольники: Δ_{5-2-3} , Δ_{5-4-1} , Δ_{5-6-10} и Δ_{5-3-4} . Соответствующие вероятности таковы:

$$p_1 = \frac{3}{4}(1-x), \quad p_2 = \frac{3}{2}(1+x), \quad p_3 = -\frac{1}{2}(3x+y), \quad p_4 = \frac{1}{2}(1-y).$$

По правилу перемножения вероятностей получаем

$$N_5(x, y) = -\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(3x+y). \quad (12)$$

Остальные функции альтернативного базиса бикубической интерполяции легко получаются из (11) и (12) перестановкой координат x и y .



Здесь мы имеем дело с естественным дискретным распределением единичной нагрузки по узлам: в угловых узлах по $1/8$, в промежуточных — по $1/16$. Заметим, что нагрузка распределена поровну между угловыми и промежуточными узлами, и в этом отношении полученный результат вряд ли нуждается в улучшении. Этот результат подтвердил принципиальную возможность получения физически адекватного спектра узловых нагрузок на серендиповом бикубическом элементе. Если потребуется коррекция спектра, можно воспользоваться взвешенным усреднением стандартного (10) и альтернативного (11) и (12) базисов. О других способах генерирования альтернативных моделей серендиповых элементов можно узнать из публикаций [8,9].

Выводы. Глубокая и плодотворная идея Куранта о кусочно-планарной аппроксимации финитных функций получила простое вероятностное истолкование. Это дает наглядный и удобный метод конструирования альтернативных базисов на треугольных и квадратных элементах высших порядков.

Литература

1. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / М.: Наука, 1985. – 88 с.
2. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bull. Amer. Math.Soc. – № 49. – 1943. – P.1-23.
3. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / М.: Мир, 1986. – 228 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / М.: Мир, 1979. – 392 с.
5. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / М.: Наука, 1981. – 416 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / М.: Мир, 1975. – 540 с.
7. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / Ивано-Франковск: Ивано-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. – 9 с. - Деп. в ВИНТИ 18.03.82, № 1213.
8. Астионенко И.А. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок // Геом. та комп'ютерне моделювання / Зб. наук. пр. – Вип. 17. – Харків: ХДУХТ, 2007. – С.97-102.
9. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов // Геом. та коми. моделювання / Зб. наук. праць. – Вип. 23. – Харків: ХДУХТ, 2009. – С.90-95.

PROBABILISTIC NATURE OF PEACE-WISE PLANAR APPROXIMATION

I.A. Astionenko, Ye.I. Litvinenko, A.N. Khomchenko

Kherson National Technical University,
24-Berislavskoe Shosse, Kherson, 73008, Ukraine;
Petro Mohyla Black Sea State University,
68 Desantnikov Str., 10, Nikolayev, 54003, Ukraine, e-mail: mmkntu@gmail.com

Abstract. It is shown the possibility of functions-"halfldis" application for the construction of higher order basis functions on the triangular and square finite elements.

Key words: finite element, peace-wise planar approximation, functions-"halfldis".