MSC 45A05

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ *)

В.А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, РФ, e-mail: kalitvin@gmail.com

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, частные интегралы, компактные операторы.

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций рассматривается уравнение Вольтерра с частными интегралами

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^t \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s),$$

где $(t,s) \in D$, l, m, n, f — заданные непрерывные на $D \times T$, $D \times S$, $D \times T \times [c,d]$, D соответственно функции, $T = \{\tau : a \le \tau \le t \le b\}$, $S = \{\sigma : c \le \sigma \le s \le d\}$.

Отметим, что оператор V, определяемый суммой первых трех слагаемых правой части уравнения, не является компактным в $C(D)$, если хотя бы одно из ядер $l(t,s,\tau)$ или $m(t,s,\sigma)$ принимает ненулевые значения [1].

Найти точное решение данного уравнения удается в редких случаях. Поэтому важное значение имеют численные методы построения его решений. При этом использование хорошо известных численных методов решения линейных интегральных уравнений второго рода (обоснование которых обычно использует компактность интегральных операторов [2,3]) для решения линейных уравнений с частными интегралами требует осторожности и обоснования; в частности, из-за отсутствия компактности у оператора V требуется обоснование применения метода механических квадратур.

Уравнение решается численно с применением квадратурных и кубатурной формул, изучается сходимость вычислительных процессов.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками

$$t_p = a + ph \ (p = 0,1,\ldots,P, \ a + Ph \le b < (P+1)h),$$

$$s_q = c + qg \ (q = 0,1,\ldots,Q, \ c + Qg \le d < (Q+1)g)$$

соответственно. Полагая $t = t_p$, $s = s_q$ и применяя квадратурные формулы

$$\int_a^{t_p} l(t_p,s_q,\tau)x(\tau,s_q)d\tau = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x(t_i,s_q) + r_{pq}^l,$$

*Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

$$\int_c^{s_q} m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + r_{pq}^m$$

и кубатурную формулу

$$\int_a^{t_p}\int_c^{b} n(t_p, s_q, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + r_{pq}^n,$$

где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, $n_{pqij} = n(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n — остатки квадратурных и кубатурной формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках $(t_p, s_0), (t_0, s_q)$, (t_p, s_q) $(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$.

Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда

$$x_{00} = f(a, c),\ x_{p0} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{p0i} x_{i0} + f_{p0} + \delta_{p0},\ x_{0q} = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{0qj} x_{0j} + f_{0q} + \delta_{0q},$$

$$x_{pq} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x_{pj} + hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq}$$

$(p = 1, \ldots, P;\ q = 1, \ldots, Q)$, где $f_{p0} = f(t_p, s_0)$, $f_{0q} = f(t_0, s_q)$, $f_{pq} = f(t_p, s_q)$.

Теорема. *Если r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$; существуют такие числа A, B, C, что $|\alpha_{pi}| \le A < \infty$, $|\beta_{jq}| \le B < \infty$, $|\gamma_{pqij}| \le C < \infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon > 0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ будут выполняться неравенства*

$$|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \epsilon\ (p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q),$$

а последовательность функций

$$x_{pq}(t, s) = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l(t, s, t_i) x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m(t, s, s_j) x_{pj} + hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q} \gamma_{pqij} n(t, s, t_i, s_j) x_{ij} + f(t, s)$$

равномерно сходится на D к решению $x(t, s)$ при $h \to 0$, $g \to 0$.

Литература

1. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений / М.: Наука, 1969. – 456 с.

3. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп / С.-Петербург: БХВ-Петербург, 2006. – 288 с.

ABOUT NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR VOLTERRA EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

W.A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenin St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvin@mail.ru

Key words: integral Volterra equations, partial integrals, compact operators.