



MSC 74F15

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В.В. Сыщенко, Э.А. Ларикова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

Аннотация. В статье развит приближенный метод вычисления характеристик электромагнитного излучения, рассеиваемого на диэлектрической мишени произвольной структуры, аналогичный борновскому приближению в квантовой теории рассеяния. Полученные результаты применены к задаче о рассеянии электромагнитной волны при наклонном падении на однородный круглый цилиндр.

Ключевые слова: рассеяние волн, борновское приближение, диэлектрическая нить.

1. Введение. Исследование рассеяния электромагнитного излучения во всем диапазоне частот на мишенях различной геометрии и в структурированных средах представляет собой важную в прикладном отношении задачу. Достаточно упомянуть, например, использование волоконных структур (световодов) для управления потоком оптического излучения (см., например, недавний обзор [1] и имеющиеся там ссылки).

В настоящей работе развивается приближенный метод описания взаимодействия электромагнитных волн с диэлектрической мишенью произвольной геометрии, аналогичный борновскому приближению в квантовомеханической теории рассеяния (см., например, [2]). В качестве примера рассмотрено рассеяние электромагнитной волны, наклонно падающей на бесконечный круглый цилиндр. Точное решение этой задачи в виде бесконечного ряда для случая однородного цилиндра было получено в [3, 4]. В предельном случае тонкой диэлектрической нити результаты настоящей работы согласуются с результатами [4].

2. Описание рассеянной волны методом функции Грина. Запишем систему уравнений Максвелла в среде [5] (пренебрегая ее магнитными свойствами):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\epsilon} \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \end{cases}$$



Для монохроматической волны вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

действие оператора $\hat{\varepsilon}$ на электрическое поле сводится к умножению на функцию частоты (и, быть может, координат)

$$\hat{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

В этом случае уравнения Максвелла (в отсутствие зарядов и токов) примут вид

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \\ \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0. \end{cases}$$

Применяя операцию rot к первому уравнению и подставляя rot \mathbf{H} из третьего, получим:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} = \nabla(\nabla \mathbf{E}), \quad (1)$$

где $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа.

Имея в виду случай, когда диэлектрическая проницаемость мишени мало отличается от единицы,

$$|1 - \varepsilon| \ll 1,$$

перепишем уравнение (1) в виде

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \varepsilon) \mathbf{E} + \nabla(\nabla \mathbf{E}), \quad (2)$$

а четвертое уравнение Максвелла — в виде

$$\nabla \mathbf{E} = \nabla((1 - \varepsilon) \mathbf{E}). \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает нам

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \varepsilon) \mathbf{E} + \nabla(\nabla((1 - \varepsilon) \mathbf{E})). \quad (4)$$

Будем искать решение в виде суммы

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)}, \quad (5)$$

где величина $\mathbf{E}^{(0)}$ описывает падающую на мишень плоскую волну

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_i A e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{r}}$$



(A — амплитуда волны, \mathbf{e}_i — ее вектор поляризации), удовлетворяющую невозмущенному уравнению

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}^{(0)} = 0,$$

так что $\mathbf{k}_i^2 = \omega^2/c^2$. Тогда слагаемое $\mathbf{E}^{(1)}$ в (5) будет описывать поле рассеянного мишенью излучения; именно решение в виде (5) будет обладать характерной для квантовой теории рассеяния асимптотикой «плоская волна плюс сферическая расходящаяся волна».

После подстановки (5) наше уравнение (4) примет вид

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}^{(1)} = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - \varepsilon)\mathbf{E} + \nabla(\nabla((1 - \varepsilon)\mathbf{E})). \quad (6)$$

Это уравнение может быть переписано в интегральной форме:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ \frac{\omega^2}{c^2}(1 - \varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \nabla(\nabla((1 - \varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}')))\right\} d^3r', \quad (7)$$

где $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения (6),

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{e^{i\kappa(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\omega^2 - \kappa^2 + i0} \cdot \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}. \quad (8)$$

Для нахождения поля рассеянного излучения требуется знать асимптотику функции Грина на больших расстояниях от области, где $\varepsilon(\mathbf{r})$ отлична от единицы. Эта асимптотика, как легко проверить, имеет следующий вид:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_f r}}{r} e^{-i\mathbf{k}_f \mathbf{r}'}, \quad (9)$$

где $\mathbf{k}_f = (\omega/c)\mathbf{r}/r$ — волновой вектор рассеянной волны, $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$. Подставляя это соотношение в (7), приходим к следующему выражению для поля рассеянного излучения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(\text{scat})}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_f r}}{r} \int \left\{ \frac{\omega^2}{c^2}(1 - \varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \nabla(\nabla((1 - \varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}')))\right\} e^{-i\mathbf{k}_f \mathbf{r}'} d^3r'. \end{aligned} \quad (10)$$

Производя во втором слагаемом двукратное интегрирование по частям, получаем

$$\mathbf{E}^{(\text{scat})}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_f r}}{r} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{I} - \mathbf{k}_f(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{I}) \right), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{I} = \int (1 - \varepsilon(\mathbf{r})) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_f \mathbf{r}} d^3r. \quad (12)$$



Мы видим, что подынтегральное выражение в (12) будет отлично от нуля только в той области пространства, где диэлектрическая проницаемость отлична от единицы. Этим иллюстрируется тот факт, что рассеянное излучение порождается движением электронов среды, возбуждаемым электромагнитным полем падающей волны.

Плотность потока энергии в волне (вектор Пойнтинга) описывается формулой [5]

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \operatorname{Re} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)}{2} \times \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t)}{2} = \quad (13) \\ &= \frac{c}{16\pi} (\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}) \times (\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

где знак \times обозначает векторное умножение. При усреднении по периоду волны члены с $e^{\pm i\omega t}$ зауляются, и останется

$$\langle \sigma \rangle = \frac{c}{16\pi} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})). \quad (14)$$

Но в электромагнитной волне $\mathbf{H} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/k$ и, учитывая, что $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$, имеем

$$\langle \sigma \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{\mathbf{k}}{k} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2. \quad (15)$$

Подставляя в (15) в качестве $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ поле рассеянной волны (11), находим для нашего случая

$$\langle \sigma \rangle = \frac{c}{2(4\pi)^3} \cdot \frac{\mathbf{k}_f}{k_f} \cdot \frac{1}{r^2} (\mathbf{k}_f^2 \mathbf{I} - \mathbf{k}_f (\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{I})) \cdot (\mathbf{k}_f^2 \mathbf{I}^* - \mathbf{k}_f (\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{I}^*)) = \frac{\mathbf{k}_f}{r^2} \cdot \frac{\omega}{2(4\pi)^3} |\mathbf{k}_f \times \mathbf{I}|^2. \quad (16)$$

Тогда средний по времени поток энергии в элемент телесного угла $d\Omega$ на большом расстоянии от мишени составит

$$d\mathcal{E} = \langle \sigma \rangle \cdot \frac{\mathbf{k}_f}{k_f} r^2 d\Omega = \frac{\omega^2}{2(4\pi)^3 c} |\mathbf{k}_f \times \mathbf{I}|^2 d\Omega. \quad (17)$$

Разделив на плотность потока энергии в падающей волне,

$$|\langle \sigma^{(0)} \rangle| = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} |\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})|^2 = \frac{c}{8\pi} A^2, \quad (18)$$

получим сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{(4\pi)^2 c^2} \cdot \frac{|\mathbf{k}_f \times \mathbf{I}|^2}{A^2}. \quad (19)$$

2. Борновское приближение и рассеяние на диэлектрическом цилиндре.

В борновском приближении разность $(1 - \varepsilon)$ рассматривается как малое возмущение,



и тогда фигурирующее в (12) полное поле в мишени $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ может быть приближенно заменено полем падающей на мишень волны $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$. В этом случае (12) дает нам

$$\mathbf{I}^{(B)} = A\mathbf{e}_i \int (1 - \varepsilon(\mathbf{r})) e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\mathbf{r}} d^3r = A\mathbf{e}_i \int (1 - \varepsilon(\mathbf{r})) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3r, \quad (20)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ — разность волновых векторов падающей и рассеянной волн.

В качестве примера использования борновского приближения рассмотрим простой случай, когда мишень представляет собой однородный круглый цилиндр радиуса a и длиной $L \rightarrow \infty$, причем ось цилиндра составляет угол ψ с направлением падающей волны (рис. 1). Интегралы в (20) в этом случае легко вычисляются, если повернуть систему координат таким образом, чтобы ось z' новой системы координат была параллельна оси цилиндра. При этом интегрирование по координате z' даст нам дельта-функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iq_{\parallel}z') dz' = 2\pi\delta(q_{\parallel}),$$

а интегрирование в поперечной плоскости даст функцию Бесселя, и тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{cyl}^{(B)} &= (1 - \varepsilon) A\mathbf{e}_i 2\pi\delta(q_{\parallel}) \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{iq_{\perp}\rho \cos\phi} d\phi = (1 - \varepsilon) A\mathbf{e}_i 2\pi\delta(q_{\parallel}) 2\pi \int_0^a J_0(q_{\perp}\rho)\rho d\rho = \\ &= (1 - \varepsilon) A\mathbf{e}_i (2\pi a)^2 \delta(q_{\parallel}) \frac{J_1(q_{\perp}a)}{q_{\perp}a}, \end{aligned} \quad (21)$$

где q_{\parallel} и q_{\perp} — компоненты \mathbf{q} , параллельная и перпендикулярная оси цилиндра. Наличие дельта-функции выражает равенство компонент \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_f , параллельных оси цилиндра, и означает, что рассеяние будет носить чисто азимутальный характер: волновые векторы рассеянного излучения \mathbf{k}_f будут направлены по образующим конуса с осью, совпадающей с осью цилиндра, и углом полураствора ψ .

Подстановка в формулу для сечения (19) даст нам (с учетом того, что $[\delta(q_{\parallel})]^2 = \delta(q_{\parallel}) \cdot L/2\pi$, где L — длина цилиндра)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi \omega^2}{2 c^2} |\mathbf{k}_f \times \mathbf{e}_i|^2 L a^4 (1 - \varepsilon)^2 \delta(q_{\parallel}) \left(\frac{J_1(q_{\perp}a)}{q_{\perp}a} \right)^2. \quad (22)$$

Сечение рассеяния с выделяемой детектором поляризацией \mathbf{e}_f будет описываться формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi \omega^4}{2 c^4} |\mathbf{e}_f \cdot \mathbf{e}_i|^2 L a^4 (1 - \varepsilon)^2 \delta(q_{\parallel}) \left(\frac{J_1(q_{\perp}a)}{q_{\perp}a} \right)^2. \quad (23)$$

В пределе бесконечно тонкой нити, $a \rightarrow 0$, формула (23) согласуется с результатами статьи [4].

Для нахождения сечения рассеяния неполяризованного света усредним формулу (22) по поляризациям падающей волны. С учетом того, что

$$\frac{1}{2} (|\mathbf{k}_f \times \mathbf{e}_x|^2 + |\mathbf{k}_f \times \mathbf{e}_y|^2) = \frac{1}{2} \left((k_f)_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right),$$



получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi \omega^2}{4 c^2} \left((k_f)_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) La^4 (1 - \varepsilon)^2 \delta(q_{\parallel}) \left(\frac{J_1(q_{\perp} a)}{q_{\perp} a} \right)^2. \quad (24)$$

Диаграмма направленности рассеянного излучения представлена на рис. 1. При построении использованы следующие соотношения:

$$q_{\perp} = 2 \frac{\omega}{c} \sin \psi \sin \frac{|\phi|}{2}, \quad (k_f)_z = \frac{\omega}{c} \cos \left[2 \arcsin \left(\sin \psi \sin \frac{|\phi|}{2} \right) \right],$$

где угол ϕ отсчитывается от направления $(\mathbf{k}_i)_{\perp}$.

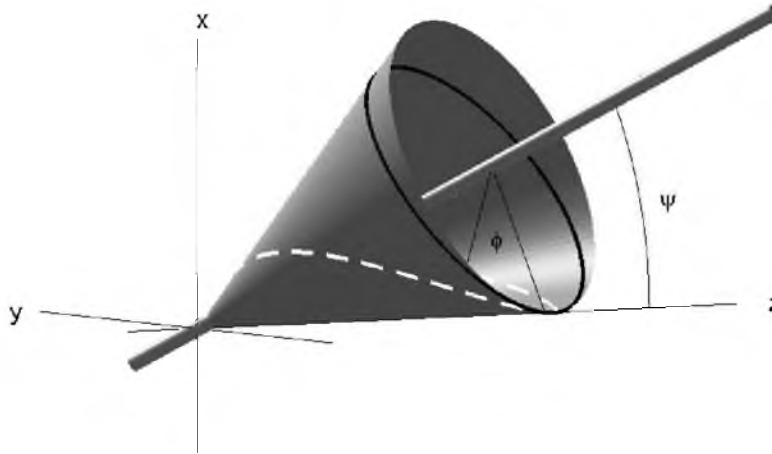


Рис. 1. Диаграмма направленности излучения, рассеиваемого круглым однородным цилиндром; ось z совпадает с направлением падения излучения, угол падения составляет $\psi = 0.4$ радиан. Штриховой кривой показана относительная интенсивность излучения, рассеянного в различных направлениях согласно (24) для случая $a\omega/c = 3$, сплошной кривой — то же в пределе бесконечно тонкой нити, когда $J_1(q_{\perp} a)/q_{\perp} a \rightarrow 1/2$.

Азимутальный характер рассеяния на нитевидной мишени допускает наглядную интерпретацию как проявление черенковского механизма. Действительно, падающая под углом ψ к нити электромагнитная волна создает в ней возмущение, движущееся вдоль нити со сверхсветовой фазовой скоростью

$$v_{\text{pert}} = \frac{\omega}{(k_i)_{\parallel}} = \frac{c}{\cos \psi} > c. \quad (25)$$

Действительно, при смещении фронта падающей волны на величину $c dt$ в направлении оси z (см. рис. 2) точка пересечения фронта волны с нитью сместится на расстояние

$$\frac{z + c dt}{\cos \psi} - \frac{z}{\cos \psi} = \frac{c dt}{\cos \psi}, \quad (26)$$

то есть скорость движения возмущения вдоль нити будет $c/\cos\psi > c$. Такое сверхсветовое движение возмущения приводит к возникновению излучения, аналогичного черенковскому. При этом угол полураствора черенковского конуса, определяемый соотношением $\cos\theta_{Ch} = c/v_{\text{pert}}$, как раз будет равен ψ .

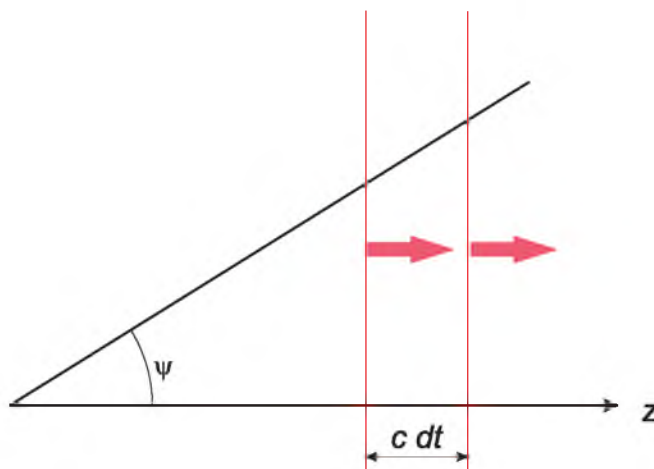


Рис. 2. Точка пересечения фронта волны (вертикальная линия), смещающегося в направлении оси z со скоростью c , с нитевидной мишенью (наклонная линия) будет смещаться со скоростью $c/\cos\psi > c$.

3. Заключение. В статье развито приближенное описание процесса рассеяния электромагнитных волн, аналогичное борновскому приближению в квантовомеханической теории рассеяния частиц. В качестве примера вычислено сечение рассеяния электромагнитной волны, наклонно падающей на бесконечный однородный круглый диэлектрический цилиндр. Дана интерпретация азимутального характера рассеяния как черенковского излучения создаваемых падающей волной возмущений, смещающихся вдоль цилиндра со сверхсветовой скоростью. В предельном случае цилиндра малого радиуса наши результаты согласуются с результатами, полученными ранее в [4].

Литература

1. Пряников А.Д., Бирюков А.С. Возбуждение циклических волн Зоммерфельда и аномалии Вуда при скользящем падении плоской волны на диэлектрический цилиндр // УФН. – 2013. – 138, №8. – С.863-873.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика / М.: Наука, 1988. – 768 с.
3. Kerker M. The scattering of light and other electromagnetic radiation / New York: Academic Press, 1969. – 666 p.
4. Kerker M., Cooke D.D., Carlin J.M. // Journal of the Optical Society of America. – 1970. – 60. – P.1236.
5. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1 / М.: Наука, 1969. – 912 с.



**SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVE ON DIELECTRIC CYLINDER
AT BORN'S APPROXIMATION**

V.V. Syshchenko, E.A. Larikova

Belgorod State University,
Studencheskya St., 14, Belgorod, 308007, Russia

Abstract. The approximating method analogous to Born approximation in the quantum theory of scattering for computation of the electromagnetic radiation scattering on the dielectric target of arbitrary structure is developed. The results are applied to the problem of the electromagnetic wave scattering under oblique incidence on the uniform cylinder.

Key words: Wave scattering, Born approximation, dielectric fiber.